Moderna PLUS

MANOEL PAIVA

MATEMÁTICA
PAIVA

1

Moderna PLUS

MATEMÁTICA 1

PAIVA

Manoel Paiva

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciência e Letras de Santo André. Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professor do ensino fundamental, médio e de cursos pré-vestibular durante 29 anos.

2ª edição
Moderna Plus

Coordenação editorial: Juliane Matsubara Barroso
Edição de texto: Débora Regina Yogui, Fabio Martins de Leonardo, Marilu Maranho Tassetto, Willian Raphael Silva
Assistência editorial: Thais Toldo Antonagi
Preparação de texto: Solange Gonçalves Guerra Martins
Coordenação de *design* e projetos visuais: Sandra Homma
Projeto gráfico: Everson de Paula, Marta Cerqueira Leite
Capa: Everson de Paula
Foto: Gota d'água
© TongRo/Beateworks/Corbis/Latinstock.
Coordenação de produção gráfica: André Monteiro, Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Edição de páginas especiais: William Hiroshi Taciro (coordenação), Ana Cláudia Fernandes, A+ Comunicação, Fernanda Fencz, Fabio Martins de Leonardo
Ilustrações: Alex Argozino, Biry Sarkis, Cecília Iwashita, Éber Evangelista, Eduardo Alejandro, Elisa Nievas Pereira, Fábio Cortez, Faustino, George Tutumi, Hector Gomez, Jo card, Manga, Orlandeli, Paulo Manzi, Serralheiro, Wagner Willian
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Cartografia: Alessandro Passos da Costa, Anderson de Andrade Pimentel, Fernando José Ferreira
Coordenação de revisão: Elaine Cristina del Nero
Revisão: Alexandra Costa, Ana Cortazzo, Fernanda Marcelino, Márcia Leme, Sandra G. Cortes, Viviane T. Mendes
Coordenação de pesquisa iconográfica: Ana Lucia Soares
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Marcia Sato
As imagens identificadas com a sigla CID foram fornecidas pelo Centro de Informação e Documentação da Editora Moderna.
Coordenação de *bureau*: Américo Jesus
Tratamento de imagens: Arleth Rodrigues, Fabio N. Precendo, Rodrigo Fragoso, Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira Silva, Helio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wilson Aparecido Troque

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel Rodrigues
Matemática : Paiva / Manoel Rodrigues Paiva. — 2. ed. — São Paulo : Moderna, 2010 .

Obra em 3v. para alunos do 1º ao 3º ano.
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) I. Título

10-07085 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

ISBN 978-85-16-07407-4

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2011
Impresso na China

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Apresentação

Caro estudante

As transformações do Ensino Médio brasileiro nos últimos anos visam, entre outros objetivos, a um aprendizado voltado para a continuação dos estudos e ao mundo do trabalho. Por isso, uma das orientações do Ministério da Educação para o Ensino Médio é recorrer a situações práticas, que possibilitem o trânsito entre as disciplinas escolares e suas aplicações na indústria, comércio, serviços etc.

Além dessas orientações, comuns a todas as disciplinas, os documentos oficiais enfatizam: “A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo e instrumental, mas deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas”. Essa ênfase tem a finalidade de alertar sobre os exageros da visão pragmática da ciência, que podem pôr em risco a aquisição do pensamento matemático.

Neste livro, seguimos essas orientações, recorrendo frequentemente a aplicações práticas, destacando, porém, a Matemática como conhecimento científico e, como tal, evolutivo e sistêmico. Enfim, buscamos um ponto de equilíbrio entre ciência e prática.

Manoel Paiva

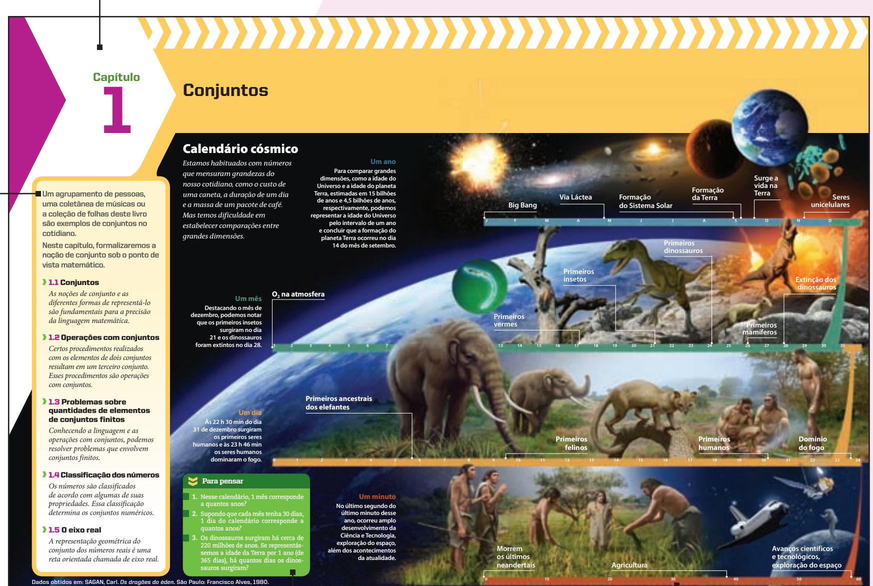
Ao tio Paulo, cujos ensinamentos transpõem gerações.

ORGANIZAÇÃO DESTE LIVRO

A coleção *Moderna Plus Matemática* é composta de três livros. O conteúdo de cada volume é encadernado separadamente em três partes: Parte I, Parte II e Parte III. Assim, você leva para a sala de aula apenas a parte onde está o conteúdo em estudo.

Abertura de Parte
Cada parte está dividida em capítulos.

Abertura de capítulo
Cada abertura de capítulo traz uma imagem retratando situações cotidianas que envolvem a Matemática ou propiciam a aquisição de informações sobre assuntos relacionados ao capítulo.



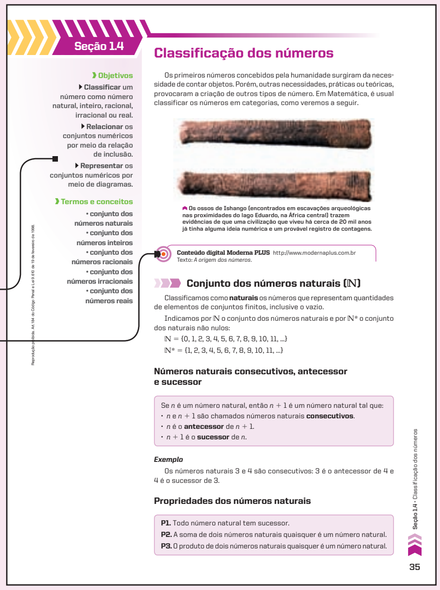
Apresenta uma breve descrição do que será estudado no capítulo e uma síntese de cada seção.

Cada abertura propõe algumas questões que possibilitam o estudo do tema proposto.

Alguns temas foram destacados com infografias, para possibilitar a interpretação da leitura de imagens.

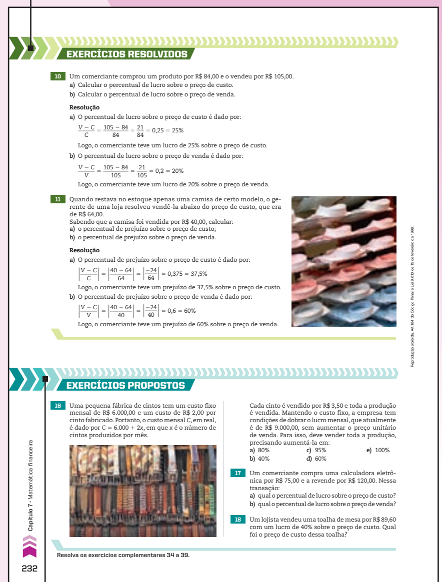
Abertura de Seção

Cada capítulo é organizado em seções. No início de cada seção, há a descrição dos seus objetivos e também dos termos e conceitos envolvidos em seu estudo. Os termos e conceitos são retomados no Caderno do estudante, promovendo a revisitação dos temas do capítulo. Dessa maneira, você tem uma visão geral sobre a seção em estudo.



Exercícios resolvidos

Junto aos exemplos, têm o objetivo de auxiliar na sistematização do aprendizado.



Conteúdo digital *Moderna Plus*

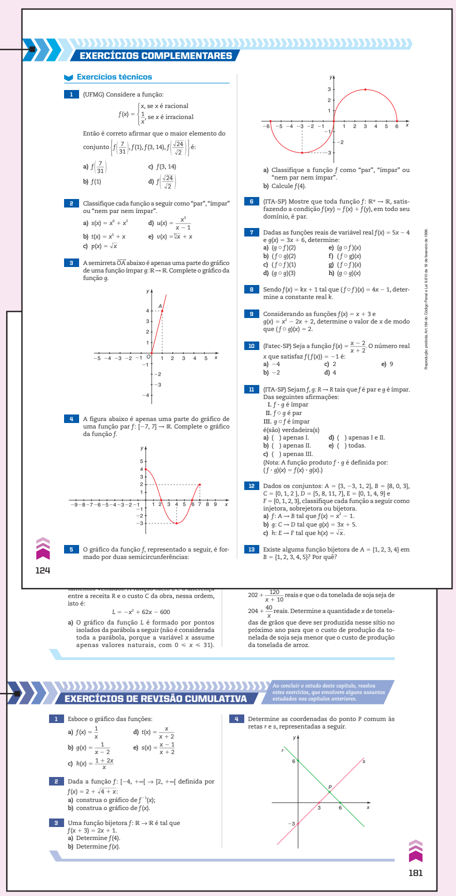
Ícone com indicação de conteúdo digital no portal do *Projeto Moderna Plus*, como leituras complementares, animações e simuladores relativos ao tema estudado.

Exercícios propostos

Acompanham os tópicos do capítulo. São uma aplicação mais imediata dos conteúdos ali trabalhados.

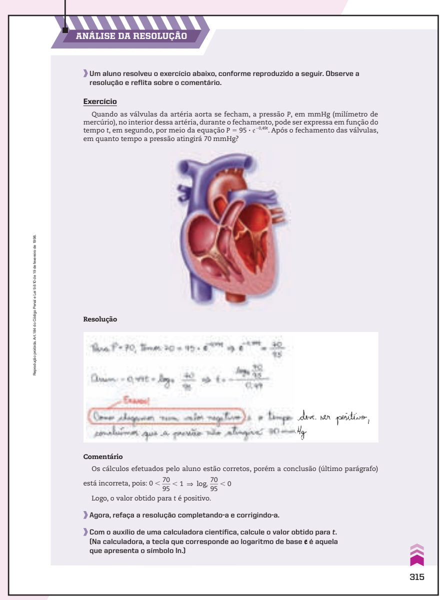
Exercícios complementares

O final de cada capítulo oferece exercícios de aprofundamento, subdivididos nas modalidades: *Exercícios técnicos* e *Exercícios contextualizados*.



Análise da resolução

Possibilita a análise e a reflexão sobre erros comuns na resolução de exercícios, além de sua correção.



Exercícios de revisão cumulativa

Aparecem após os exercícios complementares, englobam conteúdos já vistos nos capítulos anteriores.

SUMÁRIO GERAL

PARTE I

SUMÁRIO GERAL

PARTE II

Capítulo 9 Função logarítmica 280

Seção

Capítulo 10 Geometria plana 316

Seção

PARTE III

PARTE I

PARTE
I

Capítulo

1 Conjuntos

Um agrupamento de pessoas, uma coletânea de músicas ou a coleção de folhas deste livro são exemplos de conjuntos no cotidiano.

Neste capítulo, formalizaremos a noção de conjunto sob o ponto de vista matemático.

Calendário cósmico

Estamos habituados com números que mensuram grandezas do nosso cotidiano, como o custo de uma caneta, a duração de um dia e a massa de um pacote de café. Mas temos dificuldade em estabelecer comparações entre grandes dimensões.

Um ano

Para comparar grandes dimensões, como a idade do Universo e a idade do planeta Terra, estimadas em 15 bilhões de anos e 4,5 bilhões de anos, respectivamente, podemos representar a idade do Universo pelo intervalo de um ano e concluir que a formação do planeta Terra ocorreu no dia 14 do mês de setembro.

Um mês

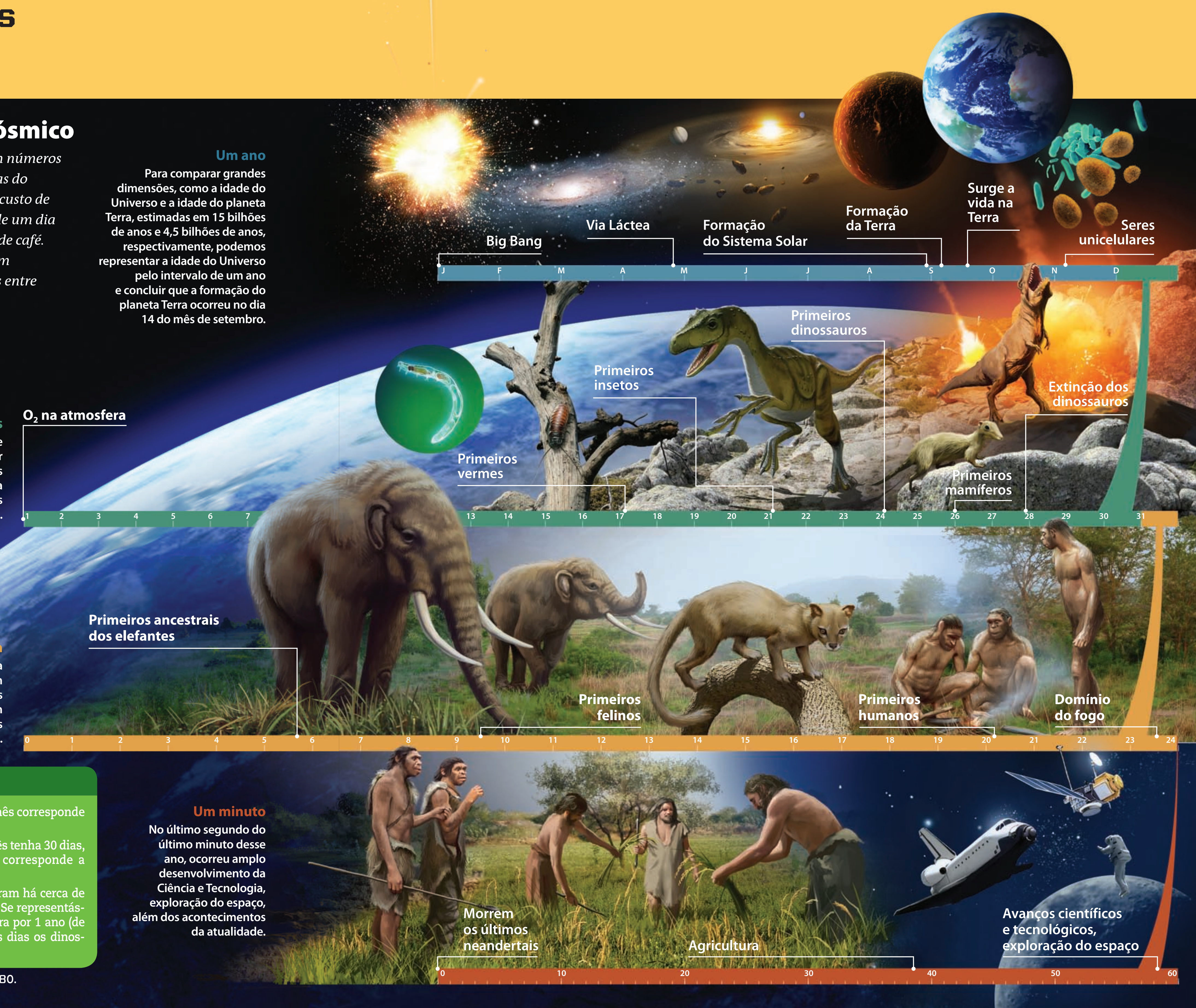
Destacando o mês de dezembro, podemos notar que os primeiros insetos surgiram no dia 21 e os dinossauros foram extintos no dia 28.

Um dia

Às 22 h 30 min do dia 31 de dezembro surgiram os primeiros seres humanos e às 23 h 46 min os seres humanos dominaram o fogo.

Um minuto

No último segundo do último minuto desse ano, ocorreu amplo desenvolvimento da Ciência e Tecnologia, exploração do espaço, além dos acontecimentos da atualidade.



Para pensar

1. Nesse calendário, 1 mês corresponde a quantos anos?
2. Supondo que cada mês tenha 30 dias, 1 dia do calendário corresponde a quantos anos?
3. Os dinossauros surgiram há cerca de 220 milhões de anos. Se representássemos a idade da Terra por 1 ano (de 365 dias), há quantos dias os dinossauros surgiram?

Dados obtidos em: SAGAN, Carl. *Os dragões do éden*. São Paulo: Francisco Alves, 1980.

Conjuntos

Objetivos

- **Aplicar** a noção de conjunto em algumas situações, usando uma de suas notações.
- **Relacionar** elemento e conjunto e também subconjunto e conjunto.

Termos e conceitos

- conjunto universo
- subconjunto
- igualdade de conjuntos

Você deve se lembrar de que já estudou alguns conjuntos nas séries anteriores. Como você explicaria o que é um conjunto?

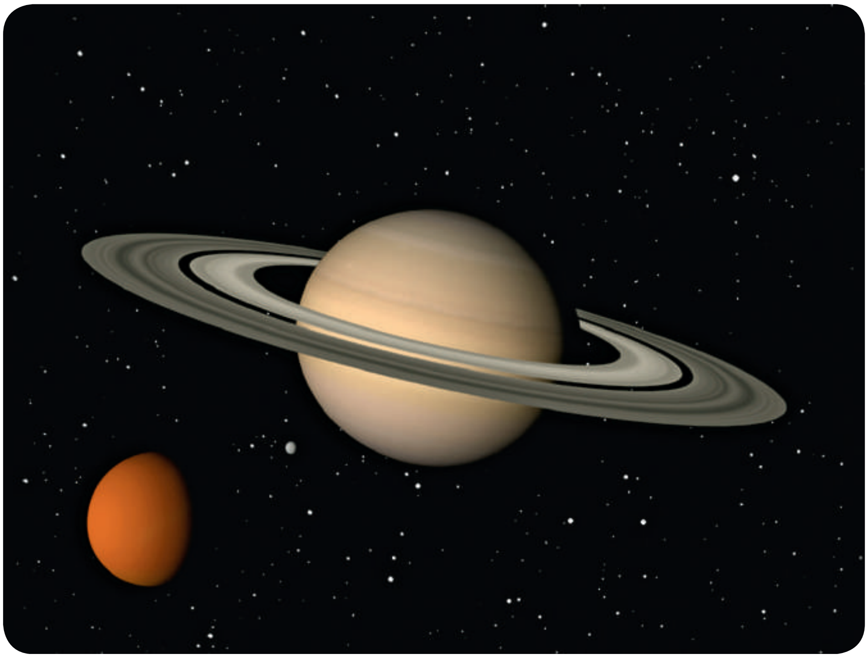
Em Matemática, há conceitos que são admitidos sem definição, são os chamados **conceitos primitivos**; por exemplo, em Geometria, os conceitos de ponto, reta e plano são primitivos. Na teoria dos conjuntos, os conceitos primitivos são: **conjunto, elemento de um conjunto** e **pertinência entre elemento e conjunto**.

A ideia de conjunto é a mesma de coleção, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplos

a) Os alunos de sua sala de aula formam um **conjunto**. Você é um **elemento** que **pertence** a esse conjunto.

b) As luas de Saturno formam um **conjunto**. Titã, a maior delas, é um **elemento** que **pertence** a esse conjunto.



Fotomontagem de Saturno e de Titã, a maior de suas luas, que tem 5.150 km de diâmetro. Além de seu tamanho, os astrônomos têm um interesse especial por Titã, pois sua atmosfera é muito parecida com a atmosfera terrestre, como era há milhões de anos.

c) Na linguagem usada em informática, dizemos que um documento é salvo em uma pasta de arquivos. Assim, uma pasta de arquivos é um **conjunto** e cada documento dessa pasta é um **elemento** que **pertence** a esse conjunto.

Representação de um conjunto

É habitual usar letras maiúsculas para dar nomes aos conjuntos, como A, B, C, D etc. e representar seus elementos por letras minúsculas, como a, b, c, d etc.

A seguir, destacamos as três formas fundamentais de representação de um conjunto.

Representação tabular

Na **representação tabular** de um conjunto, os elementos são apresentados entre chaves e separados por vírgula ou por ponto e vírgula.

Exemplos

a) $A = \{\text{primavera, verão, outono, inverno}\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8\}$

c) $C = \{1{,}75; 1{,}81; 1{,}79; 1{,}82; 1{,}70\}$

Na forma tabular, usa-se ponto e vírgula na separação de números decimais, como no exemplo **c**, pois a vírgula poderia ser confundida com a vírgula que separa as casas decimais de cada número.

Note que, nos exemplos acima, 2 **é** elemento do conjunto B, mas **não é** elemento do conjunto C. Esses fatos são indicados, respectivamente, por:

- $2 \in B$ (lemos: "dois pertence a B")
- $2 \notin C$ (lemos: "dois não pertence a C")

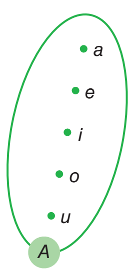
O conjunto *C* é formado pelas alturas dos jogadores de basquete de um dos times de uma escola.

Representação por um diagrama de Venn

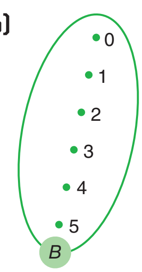
A representação de um conjunto por um **diagrama de Venn** (John Venn, 1834-1923) é aquela em que os elementos são simbolizados por pontos interiores a uma região plana, delimitada por uma linha fechada que não se entrelaça.

Exemplos

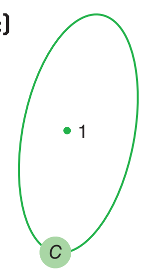
a)



b)



c)



Representação por uma propriedade

Nessa representação, os elementos de um conjunto A são descritos por meio de uma **propriedade** que os determina. Assim, podemos representar um conjunto A por:

$$A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$$

(lemos: "A é o conjunto de **todos** os elementos x, tal que x tem a propriedade p")

Exemplos

a) $A = \{x \mid x \text{ é um país da América do Sul}\}$

Ou seja: O conjunto A é formado por **todos** os países da América do Sul.

b) $B = \{x \mid x \text{ é um planeta do Sistema Solar}\}$

Ou seja: O conjunto B é formado por **todos** os planetas do Sistema Solar.

c) $C = \{x \mid x \text{ é um número primo}\}$

Ou seja: O conjunto C é formado por **todos** os números primos.

Conjunto unitário e conjunto vazio

Nas situações abaixo, cada uma das letras A, B e C representa o conjunto de peças sobre o respectivo tabuleiro. Quantos elementos tem cada um desses conjuntos?

A

B

C

Observando que sobre o primeiro tabuleiro da esquerda há 32 peças, sobre o segundo há apenas uma peça e sobre o terceiro não há peças, concluímos que o conjunto A tem 32 elementos, B tem 1 elemento e C não tem elementos. Dizemos que B é um **conjunto unitário** e C é um **conjunto vazio**.

Conjunto unitário é aquele formado por um único elemento.

Conjunto vazio é aquele que não possui elemento algum. Representa-se o conjunto vazio por $\varnothing$ ou { }.

Exemplos

a) O conjunto $A = \{x \mid x$ é um número e $x \cdot 5 = 15\}$ é unitário, pois A é formado por um único elemento, isto é, $A = \{3\}$.

b) O conjunto $B = \{x \mid x$ é um número e $x \cdot 0 = 15\}$ é vazio, pois, como não existe número que satisfaça essa condição, B não possui elemento algum, isto é, $B = \varnothing$.

Conjunto finito e conjunto infinito

Um conjunto é **finito** se for vazio ou se, ao contar seus elementos um a um, chega-se ao fim da contagem.

Conjunto **infinito** é todo conjunto que não é finito.

Exemplos

a) O conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ é um conjunto finito, pois podemos contar seus elementos e chegar ao fim da contagem.

b) O conjunto $B = \{x \mid x$ é pessoa brasileira$\}$ é um conjunto finito, pois podemos contar seus elementos e chegar ao fim da contagem.

c) O conjunto $C = \varnothing$ é um conjunto finito, pois é vazio.

d) Um importante conjunto infinito que vamos usar como referência neste capítulo é o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

e) Outro importante conjunto infinito que também será usado como referência é o conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Conjunto universo

Na linguagem cotidiana, usamos a palavra “universo” com vários significados. Um deles é o de conjunto de seres ou ideias que, em determinada circunstância, é tomado como referência. Por exemplo, o universo da Biologia é o conjunto dos seres vivos; o universo do Direito é o conjunto de regras e leis que disciplinam as relações em sociedade; o universo da História da humanidade é o conjunto dos fatos passados relacionados ao ser humano. Na Matemática, a palavra “universo” assume significado semelhante:

> **Conjunto universo** de um estudo, representado por ***U***, é aquele ao qual pertencem todos os elementos relacionados a esse estudo.

Exemplos

a) Quando estudamos métodos de contagem, o conjunto universo é $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$

b) No estudo das figuras geométricas planas, como conjuntos de pontos, o conjunto universo é o plano.

c) No estudo das figuras geométricas espaciais, como conjuntos de pontos, o conjunto universo é o espaço tridimensional.

Subconjunto

Considere o conjunto *B* formado pela população brasileira. Com os elementos de *B* podemos formar o conjunto *H*, de todos os homens brasileiros, e o conjunto *M*, de todas as mulheres brasileiras. Os conjuntos formados, *H* e *M*, são **subconjuntos** de *B*. Se um conjunto *T* de pessoas possui como elemento pelo menos uma pessoa que não seja brasileira, dizemos que *T* não é subconjunto de *B*. Indicamos esses fatos por:

$H \subset B$ (lemos: “*H* está contido em *B*”)

$M \subset B$ (lemos: “*M* está contido em *B*”)

$T \not\subset B$ (lemos: “*T* não está contido em *B*”)

> Dizer que um conjunto *B* é **subconjunto** de um conjunto *A* equivale a dizer que, se *x* é elemento de *B*, então *x* é elemento de *A*.

Exemplos

a) $\{2, 5, 3\} \subset \{2, 5, 3, 8, 9\}$

b) $\{2, 5, 3\} \subset \{2, 5, 3\}$

c) $\{2, 5, 3\} \not\subset \{2, 5, 7, 9\}$

d) O conjunto de letras $\{k, w, y\}$ está contido no conjunto das letras do alfabeto da língua portuguesa.

e) {golfinho, baleia} $\subset$ {x | x é animal marinho}

Observe que a definição de subconjunto ($B \subset A$) não estabelece que *B* possui algum elemento, mas que, se possuir, todo elemento de *B* deve pertencer a *A*.

A sentença $B \subset A$ equivale à sentença $A \supset B$ (lemos: “*A* contém *B*”).

Propriedades

P1. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$\varnothing \subset A$ (para qualquer conjunto A)

P2. Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

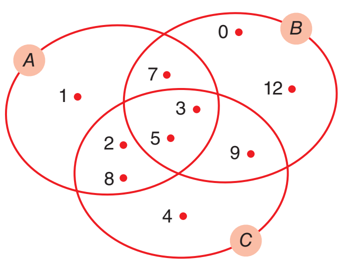
$A \subset A$ (para qualquer conjunto A)

Notas:

1. Outra forma de representar $B \not\subset A$ é $A \not\supset B$ (lemos: "A não contém B").
   Assim, no exemplo **c**, anterior, poderíamos ter escrito $\{2, 5, 7, 9\} \not\supset \{2, 5, 3\}$.
2. A relação de inclusão, $\subset$, é usada **apenas** para relacionar um conjunto B com um conjunto A que contém B: $B \subset A$.
   Por exemplo:
   $\{3\} \subset \{1, 2, 3\}$ e seria incorreto: $\cancel{\{3\} \in \{1, 2, 3\}}$
3. A relação de pertinência, $\in$, é usada **apenas** para relacionar um elemento x com um conjunto A que possui x como elemento: $x \in A$.
   Por exemplo:
   $3 \in \{1, 2, 3\}$ e seria incorreto $\cancel{3 \subset \{1, 2, 3\}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Represente na forma tabular cada um dos conjuntos A, B e C do diagrama abaixo.



2 Represente cada conjunto na forma tabular.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \geqslant 0\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 > 0\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leqslant 0\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 0\}$
f) $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{x} = 0\right\}$
g) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid 56 < x \leqslant 118\}$
h) $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$
i) $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 70\}$

3 Classifique como finito ou infinito cada um dos conjuntos a seguir.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \cdot 0 = 0\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 0 = x\}$

4 Represente por meio de uma propriedade o conjunto $A = \{3, 5, 7, 9, ...\}$.

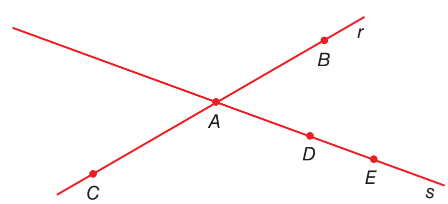
5 Faça uma lista com todos os subconjuntos de $A = \{1, 2, 3\}$.

6 A linguagem dos conjuntos é utilizada em todos os ramos da Matemática. Neste exercício, aplicaremos essa linguagem à Geometria. Para isso, vamos recordar que:

- Pontos são nomeados por letras maiúsculas: A, B, C, D etc.
- Retas são nomeadas por letras minúsculas: a, b, c, r, s, t etc. Uma reta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é elemento da reta.
- Um segmento de reta de extremos A e B é representado por $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$. Um segmento de reta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é elemento do segmento de reta.
- Uma semirreta de origem A que passa por B é representada por $\overrightarrow{AB}$. Uma semirreta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é elemento da semirreta.

De acordo com a figura, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir:

a) $A \in r$
b) $A \subset r$
c) $\{A\} \subset r$
d) $\overrightarrow{AB} \in r$
e) $\overrightarrow{AB} \subset r$
f) $\overrightarrow{DE} \subset \overrightarrow{AE}$
g) $A \in \overline{AC}$
h) $A \subset \overline{AC}$



Resolva os exercícios complementares 1 a 3.

Conjunto cujos elementos também são conjuntos

Na figura 1, abaixo, vemos um cacho de banana, que pode ser considerado um conjunto A de bananas. Na figura 2, vemos um estoque de cachos de banana, que pode ser considerado um conjunto B de cachos.

Figura 1

Figura 2

Assim, cada banana é um elemento do conjunto A, e cada cacho de banana é um elemento do conjunto B.

Esse exemplo mostra a necessidade de considerarmos conjuntos cujos **elementos são conjuntos**, pois os elementos de B são conjuntos de bananas. Em Matemática, também ocorre esse tipo de situação, conforme definimos a seguir.

Conjunto das partes de um conjunto

Chama-se **conjunto das partes de um conjunto *A***, que se indica por $\mathcal{P}(A)$, o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.

Se A é um conjunto finito, podemos calcular o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ em função do número de elementos de A. Para entender esse cálculo, observe, por exemplo, como são obtidos os subconjuntos do conjunto $A = \{x, y, z\}$.

Na formação de um subconjunto de A, para cada um dos elementos de A há duas possibilidades: o elemento pertencerá ao subconjunto a ser formado ou não.

Assim, um subconjunto de A estará determinado quando escolhermos, para cada elemento de A, uma possibilidade: **sim (S), o elemento pertencerá ao subconjunto**, ou **não (N), o elemento não pertencerá ao subconjunto**.

$$x \begin{cases} S \\ N \end{cases} \qquad y \begin{cases} S \\ N \end{cases} \qquad z \begin{cases} S \\ N \end{cases}$$

Para essa situação, temos, então, os seguintes subconjuntos:

x	y	z	Subconjunto	
S	S	S	$\{x, y, z\}$	Subconjunto com 3 elementos.
S	S	N	$\{x, y\}$	
S	N	S	$\{x, z\}$	Subconjuntos com 2 elementos.
N	S	S	$\{y, z\}$	
S	N	N	$\{x\}$	
N	S	N	$\{y\}$	Subconjuntos com 1 elemento.
N	N	S	$\{z\}$	
N	N	N	$\varnothing$	Subconjunto com zero elemento.

Assim, o conjunto das partes de A é: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

Portanto, $\mathcal{P}(A)$ tem 8 elementos, ou seja, 2^3 elementos.

Podemos também calcular o número de subconjuntos de A simplesmente multiplicando o número de possibilidades de escolha sim (S) ou não (N) de seus elementos:

$$x \begin{cases} \text{S} \\ \text{N} \end{cases} \text{2 possibilidades}$$

$$y \begin{cases} \text{S} \\ \text{N} \end{cases} \text{2 possibilidades}$$

$$z \begin{cases} \text{S} \\ \text{N} \end{cases} \text{2 possibilidades}$$

Logo, o número de subconjuntos de A é dado pelo produto:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

Propriedade

Se um conjunto A possui n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos.

Demonstração

Vamos demonstrar essa propriedade em três etapas: para $A = \emptyset$, para A como conjunto unitário e $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$, isto é, um conjunto com n elementos, com $n \geqslant 2$.

- Seja $A = \emptyset$.
  O conjunto A possui zero elemento e um único subconjunto, que é o próprio $\emptyset$.
  Como $2^0 = 1$, a afirmação é verdadeira para $n = 0$.
- Seja A um conjunto unitário.
  O conjunto A possui um único elemento e exatamente dois subconjuntos, que são $\emptyset$ e A.
  Como $2^1 = 2$, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.
- Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$ um conjunto com n elementos, com $n \geqslant 2$.
  Na formação de um subconjunto de A, para cada um dos elementos $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ há duas possibilidades: o elemento pertencerá ao conjunto a ser formado ou não. Assim, um subconjunto de A estará determinado quando escolhermos para cada elemento de A uma das possibilidades: **sim** (**S**) ou **não** (**N**).
  Escolhida a alternativa S para um elemento, ele fará parte do conjunto; escolhida a alternativa N, o elemento não fará parte do conjunto.

$$a_1 \begin{cases} \text{S} \\ \text{N} \end{cases} \text{2 possibilidades}$$

$$a_2 \begin{cases} \text{S} \\ \text{N} \end{cases} \text{2 possibilidades}$$

$$a_3 \begin{cases} \text{S} \\ \text{N} \end{cases} \text{2 possibilidades}$$

$$\vdots$$

$$a_4 \begin{cases} \text{S} \\ \text{N} \end{cases} \text{2 possibilidades}$$

Assim, o número de subconjuntos de A é o produto desses números de possibilidades, ou seja:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n$$

Exemplos

a) O conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ possui 5 elementos; logo, $\mathcal{P}(A)$ possui 32 elementos, pois $2^5 = 32$.

b) O conjunto $B = \{a\}$ possui 1 elemento; logo, $\mathcal{P}(B)$ possui 2 elementos, pois $2^1 = 2$.

c) O conjunto $C = \varnothing$ possui zero elemento; logo, $\mathcal{P}(C)$ possui 1 elemento, pois $2^0 = 1$.

d) Se o conjunto das partes do conjunto D possui 16 elementos, podemos deduzir que o conjunto D possui 4 elementos, pois $2^4 = 16$.

e) Se o conjunto das partes do conjunto E possui 64 elementos, podemos deduzir que o conjunto E possui 6 elementos, pois $2^6 = 64$.

f) Se o conjunto das partes do conjunto F possui 1.024 elementos, podemos deduzir que o conjunto F possui 10 elementos, pois $2^{10} = 1.024$.

Igualdade de conjuntos

Observe que qualquer elemento do conjunto $\{2, 7, 3\}$ também pertence ao conjunto $\{7, 2, 3\}$ e qualquer elemento do conjunto $\{7, 2, 3\}$ também pertence ao conjunto $\{2, 7, 3\}$. Por isso, dizemos que $\{2, 7, 3\} = \{7, 2, 3\}$.

Dois conjuntos, A e B, são **iguais** se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Exemplos

a) $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$

b) $\{c, f, b, a, h\} = \{a, b, c, f, h\}$

c) $\varnothing = \varnothing$

Notas:

1. Indicamos que dois conjuntos, A e B, **não** são iguais por $A \neq B$ (lemos: "A é diferente de B").

2. Observe que $\{4, 5\} = \{4, 4, 5, 5\}$, pois todo elemento do primeiro conjunto pertence ao segundo e todo elemento do segundo pertence ao primeiro. Por isso, convencionamos não repetir elementos em um conjunto.

Assim, ao afirmar que um conjunto possui n elementos, fica subentendido que esses elementos são distintos entre si.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7 Determinar $\mathcal{P}(A)$ em cada um dos itens a seguir.

a) $A = \{5, 8\}$ **b)** $A = \{6\}$ **c)** $A = \varnothing$

8 Quantos subconjuntos possui o conjunto $E = \{a, e, i, o, u\}$?

9 Determine os números x e y, sabendo que $\{1, 2, x\} = \{3, y, 2\}$.

10 Sejam respectivamente $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ os conjuntos das partes de dois conjuntos finitos A e B quaisquer. Sabendo que A possui um elemento a mais que B, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações.

a) $\mathcal{P}(A)$ possui um elemento a mais que $\mathcal{P}(B)$.

b) $\mathcal{P}(A)$ possui dois elementos a mais que $\mathcal{P}(B)$.

c) $\mathcal{P}(A)$ possui o dobro de elementos de $\mathcal{P}(B)$.

d) $\mathcal{P}(A)$ possui o triplo de elementos de $\mathcal{P}(B)$.

e) Algum dos conjuntos, $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$, pode ter um número ímpar de elementos.

11 Três conjuntos D, E e F satisfazem as seguintes condições: $D \subset E$, $E \subset F$ e $F \subset D$. Pode-se afirmar que:

a) os três conjuntos são vazios.

b) os três conjuntos são unitários.

c) os três conjuntos são iguais.

d) apenas dois desses conjuntos são iguais.

e) os três conjuntos são diferentes entre si.

Resolva os exercícios complementares 4 a 6.

Operações com conjuntos

Objetivo

- **Operar** com conjuntos (união, intersecção, diferença e complementar).

Termos e conceitos

- união de conjuntos
- intersecção de conjuntos
- diferença de conjuntos
- complementar de um conjunto

União (ou reunião) de conjuntos

O departamento de Recursos Humanos de um centro de diagnósticos abriu inscrições para um concurso, visando selecionar novos profissionais para a ampliação do quadro de funcionários da empresa. Exige-se do candidato a formação em Medicina ou em Biologia.

Entre os candidatos, Gustavo é formado apenas em Medicina, Rodrigo é formado apenas em Biologia, e Camila é formada em Medicina e Biologia. Qual dos três pode se inscrever para o teste no centro de diagnósticos?

Os três preenchem os requisitos exigidos pela empresa, pois cada um deles é médico **ou** biólogo. Assim, os três podem se inscrever para a seleção.

O conectivo "ou", com sentido inclusivo, é usado na definição de união (ou reunião) de conjuntos, conforme segue:

A **união** de dois conjuntos A e B, que indicaremos por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A **ou** a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

Lemos $A \cup B$ como "A união B".

Exemplos

a) Sendo $A = \{7, 8, 9\}$ e $B = \{10\}$, temos: $A \cup B = \{7, 8, 9, 10\}$

b) Sendo $C = \{7, 8, 9, 10\}$ e $D = \{10, 11\}$, temos: $C \cup D = \{7, 8, 9, 10, 11\}$

c) Sendo $E = \{4, 5, 6\}$ e $F = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, temos: $E \cup F = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

d) A tabela a seguir mostra algumas vitaminas presentes em alguns alimentos:

Vitaminas presentes em alguns alimentos			
	A	**D**	**K**
Fígado	X	X	X
Cenoura	X		
Óleo de peixe		X	
Gema de ovo		X	
Verduras			X

Dados obtidos em: <http://www.todabiologia.com>. Acesso em: 24 ago. 2009.

Em relação ao universo dos alimentos dessa tabela, temos:

- Se S é o conjunto dos alimentos que contêm vitamina A e T é o conjunto dos alimentos que contêm vitamina D, então:

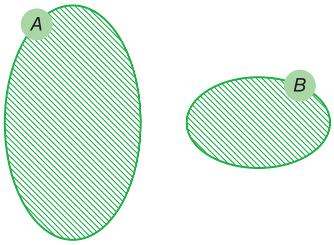
  $S \cup T = \{$fígado, cenoura, óleo de peixe, gema de ovo$\}$

- Se M é o conjunto dos alimentos que contêm vitamina D ou vitamina K, então M é a reunião dos conjuntos que contêm pelo menos uma dessas vitaminas, ou seja:

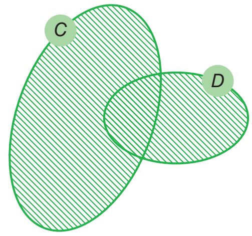
  $M = \{$fígado, óleo de peixe, gema de ovo, verduras$\}$

As frutas, verduras e legumes exercem um importante papel no equilíbrio do organismo, pois são ricas em vitaminas, minerais e fibras.

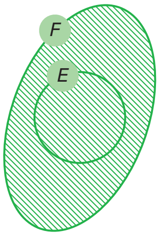
Representação da união de conjuntos por diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $A \cup B$.



Toda a região hachurada representa $C \cup D$.



Toda a região hachurada representa $E \cup F$.

Propriedades da união de conjuntos

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, temos:

P1. Se B é subconjunto de A, então $A \cup B = A$. Se $A \cup B = A$, então B é subconjunto de A. Ou seja: $B \subset A \iff A \cup B = A$

P2. $A \cup B = B \cup A$

P3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Como consequência da propriedade P1, temos:

$$\varnothing \cup A = A \text{ e } A \cup A = A$$

Como consequência da propriedade P3, a união de mais de dois conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ pode ser definida da seguinte maneira:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \textbf{ ou } x \in A_2 \textbf{ ou } x \in A_3 \textbf{ ou } ... \textbf{ ou } x \in A_n\}$$

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração da propriedade P1 da união de conjuntos.*

Intersecção de conjuntos

Cláudio é cliente do Banco Albano **e** do Banco Belgrado. Considerando os conjuntos A, dos clientes do Banco Albano, e B, dos clientes do Banco Belgrado, a qual dos dois conjuntos Cláudio pertence?

Como é possível verificar pelas informações acima, Cláudio pertence aos dois conjuntos, pois o conectivo “e”, nesse caso, indica simultaneidade, isto é, Cláudio é cliente dos dois bancos ao mesmo tempo.

O conectivo “e”, com o sentido de simultaneidade, é usado na definição de intersecção de conjuntos:

A **intersecção** de dois conjuntos, A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A **e** a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \textbf{ e } x \in B\}$$

Lemos $A \cap B$ como “A intersecção B”.

Se a intersecção entre os conjuntos A e B for o conjunto vazio, dizemos que eles são disjuntos.

Exemplos

a) Sendo $A = \{5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{7, 8, 9, 10\}$, temos: $A \cap B = \{7, 8\}$

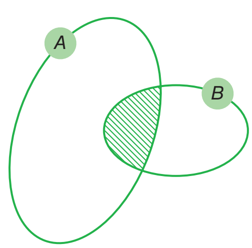
b) Sendo $C = \{3, 4, 5\}$ e $D = \{8, 9\}$, temos: $C \cap D = \varnothing$

Nesse caso, os conjuntos C e D são disjuntos.

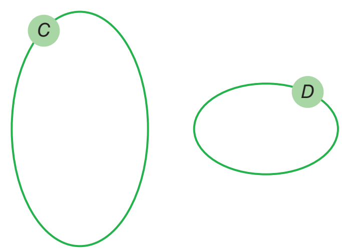
c) Sendo $E = \{b, c, d, e\}$ e $F = \{a, b, c, d, e, f\}$, temos: $E \cap F = \{b, c, d, e\}$

d) Retomando o exemplo da tabela sobre vitaminas presentes em alguns alimentos, na página 24, percebemos que, no universo desses alimentos, o conjunto dos alimentos que contêm as vitaminas A e D é: $S \cap T = \{\text{fígado}\}$

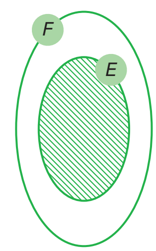
Representação da intersecção de conjuntos por diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $A \cap B$.



Os conjuntos C e D são disjuntos, isto é, $C \cap D = \varnothing$.



Toda a região hachurada representa $E \cap F$.

Propriedades da intersecção de conjuntos

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, temos:

P1. Se B é subconjunto de A, então $A \cap B = B$. Se $A \cap B = B$, então B é subconjunto de A. Ou seja: $B \subset A \iff A \cap B = B$

P2. $A \cap B = B \cap A$

P3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Como consequência da propriedade P1, vem:

$$\varnothing \cap A = \varnothing \text{ e } A \cap A = A$$

Como consequência da propriedade P3, a intersecção de mais de dois conjuntos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ pode ser definida da seguinte maneira:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \textbf{ e } x \in A_2 \textbf{ e } x \in A_3 \textbf{ e } \dots \textbf{ e } x \in A_n\}$$

Além das propriedades da intersecção descritas acima, há duas propriedades que envolvem as operações união e intersecção:

P4. Propriedade distributiva da intersecção em relação à união:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

P5. Propriedade distributiva da união em relação à intersecção:

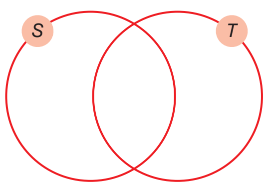
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 São dados os conjuntos:
$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leq x \leq 8\}$
Determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \cup D$
d) $A \cap D$
e) $A \cup B \cup D$
f) $A \cap B \cap C$
g) $A \cap B \cap C \cap D$
h) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$
i) $(A \cap D) \cup (B \cup C)$

13 Sabendo que $S \cap T = \{a, b, d\}$, $S = \{a, b, c, d\}$ e $S \cup T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, represente no diagrama abaixo os conjuntos S e T.



14 Sabendo que $A \cap B = \{2, 5\}$, $B = \{2, 5, 9\}$ e $A \cup B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, represente os conjuntos A e B por meio de um diagrama.

15 Represente os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5, 12\}$, $B = \{1, 2, 7, 8, 11\}$ e $C = \{2, 4, 5, 8, 9\}$ por meio de um diagrama.

16 Cada um dos amigos Ígor, Carla, Tiago, Janice e Leandro toca pelo menos um dos instrumentos: piano ou violão ou saxofone.

- Apenas Ígor e Carla tocam os três instrumentos.
- Tiago toca piano e violão.
- Janice toca violão e saxofone.
- Leandro toca apenas piano.

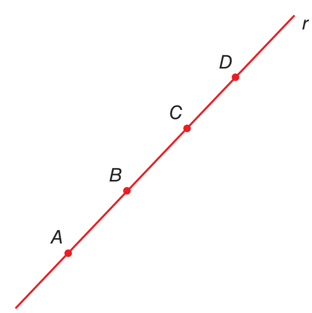
Considere esse grupo de amigos e represente na forma tabular:

a) o conjunto das pessoas que tocam piano ou violão.
b) o conjunto das pessoas que tocam piano e violão.
c) o conjunto das pessoas que tocam apenas saxofone.

17 Se A, B, C, D e F são conjuntos quaisquer tais que $A \cap B = D$ e $A \cap C = F$, então o conjunto $A \cap (B \cup C)$ é igual a:

a) $D \cap F$
b) $D \cup F$
c) D
d) F
e) $\varnothing$

18 A figura a seguir apresenta quatro pontos distintos, A, B, C e D, pertencentes a uma reta r.



Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

a) $\overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}$
b) $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \overline{BC}$
c) $\overrightarrow{BC} \cup \overline{AB} = \overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{CB} = r$
e) $\overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{BA} = r - \overline{BC}$
f) $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \overline{BC}$
g) $\overline{AD} \cup \overline{BC} = \overline{BC}$
h) $\overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{BD} = \overline{BD}$

Resolva os exercícios complementares 7 a 11.

Diferença de conjuntos

Paula e Roberta praticam natação na mesma academia. Nas aulas, são ensinados os quatro estilos: *crawl*, costas, peito e borboleta, que representam todos os estilos de natação. Em uma conversa, Paula perguntou a Roberta:

– Você já pratica todos os estilos?

Roberta respondeu:

– Todos, **menos** o borboleta.

Observe que, nessa resposta, Roberta usou uma espécie de **subtração**.

Ela tirou {**borboleta**} do conjunto {*crawl*, costas, peito, **borboleta**}. Logo, entende-se que Roberta já pratica os estilos do conjunto {*crawl*, costas, peito}.

Essa ideia de subtração, tão utilizada no dia a dia, é aplicada na definição de diferença de conjuntos:

> A **diferença** de dois conjuntos, A e B, nessa ordem, que indicamos por $\boldsymbol{A - B}$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e não pertencem a B.
>
> $$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Lemos $A - B$ como "A menos B".

Exemplos

a) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, temos:

$A - B = \{1, 2, 3\}$ e $B - A = \{6, 7, 8, 9\}$

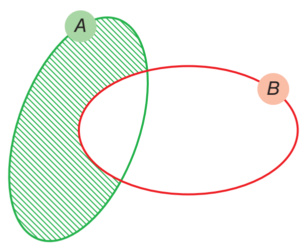
b) Sendo $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $D = \{3, 4, 5\}$, temos:

$C - D = \{1, 2, 6\}$ e $D - C = \varnothing$

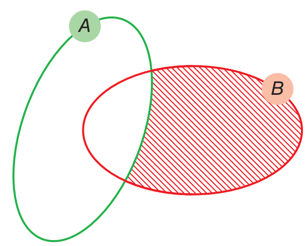
c) Sendo $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{4, 5, 6\}$, temos:

$E - F = E$ e $F - E = F$

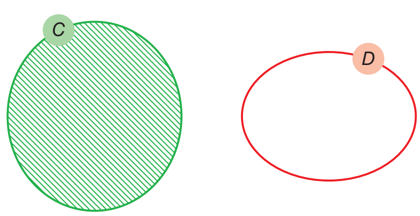
Representação da diferença de conjuntos por diagramas de Venn



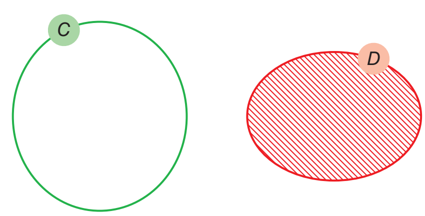
Toda a região hachurada representa $A - B$.



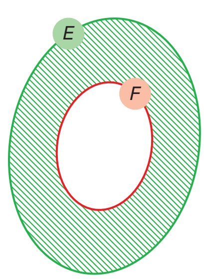
Toda a região hachurada representa $B - A$.



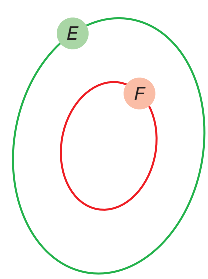
Toda a região hachurada representa $C - D$.



Toda a região hachurada representa $D - C$.



Toda a região hachurada representa $E - F$.

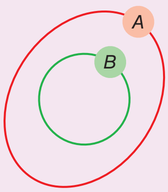


Como $F \subset E$, então $F - E = \varnothing$, pois todo elemento de F pertence a E.

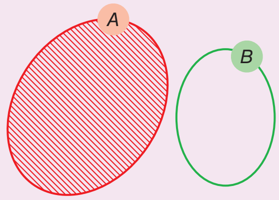
Propriedades da diferença de conjuntos

Sendo A e B conjuntos quaisquer, temos:

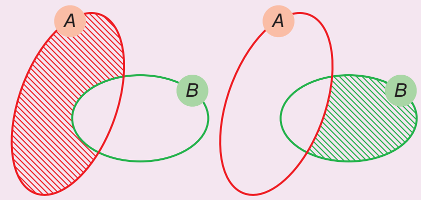
P1. $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing$



P2. $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$



P3. $A \neq B \Leftrightarrow A - B \neq B - A$



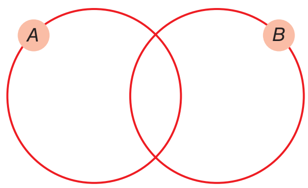
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração da propriedade P1 da diferença de conjuntos.*

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Determinar os conjuntos A e B tais que: $A - B = \{5, 8, 2\}$, $B - A = \{3, 6\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$.

Resolução

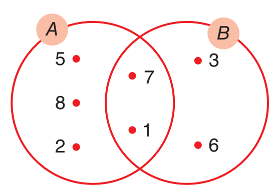
Considerando o diagrama a seguir:



I. Inicialmente, representamos os elementos de $A - B$, que são aqueles que pertencem a A e não pertencem a B.

II. A seguir, representamos os elementos de $B - A$, que são aqueles que pertencem a B e não pertencem a A.

III. Finalmente, representamos os elementos de $A \cap B$, que são aqueles que pertencem a $A \cup B$ e não foram representados em I nem em II.



Portanto: $A = \{1, 7, 2, 8, 5\}$ e $B = \{1, 7, 3, 6\}$

Conjunto complementar

Complemento é aquilo que se integra a um todo para completá-lo, segundo o *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*. Essa é exatamente a ideia de conjunto complementar: aquele que completa. Por exemplo: dizemos que o complementar do conjunto das consoantes em relação ao conjunto das letras do nosso alfabeto é o conjunto das vogais. Essa ideia será formalizada pela definição a seguir.

Sendo A e B dois conjuntos tais que $A \subset B$, o **complementar** de A em relação a B, que indicamos por $\complement_B^A$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a B e não pertencem a A.

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement_B^A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

Lemos $\complement_B^A$ como "complementar de A em relação a B".

Nota:

O conjunto $\{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$ é exatamente a diferença $B - A$. Assim, temos:

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement_B A = B - A$$

A condição necessária e suficiente para que exista $\complement_B A$ é que $A \subset B$. Caso contrário, dizemos que não existe $\complement_B A$.

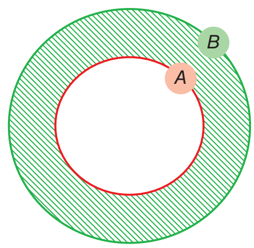
Exemplos

a) Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos $A \subset B$; logo, existe $\complement_B A$, que é igual a $B - A$, isto é:

$$\complement_B A = B - A = \{4, 5\}$$

b) Sendo $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{3, 4, 6, 7\}$, temos $D \not\subset E$; logo, não existe $\complement_E D$.

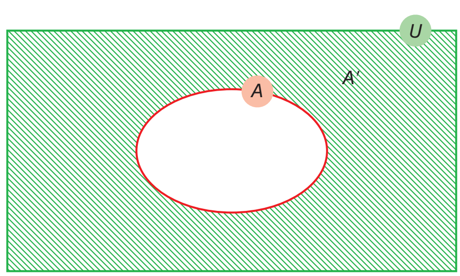
Representação do complementar de um conjunto por diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $\complement_B A$.

Complementar de um conjunto *A* em relação a um universo *U*

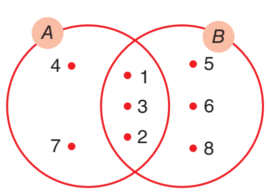
Quando temos um conjunto universo U, previamente fixado, indicamos o complementar de A em relação a U simplesmente por A' ou $\overline{A}$, em vez de $\complement_U A$.



Toda a região hachurada representa $\complement_B A$, que será indicado por A' ou $\overline{A}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2 Considerando os conjuntos A e B, representados no diagrama abaixo, determinar: $\complement_{A \cup B} (A \cap B)$.



Resolução

Como $A \cap B$ é subconjunto de $A \cup B$, então existe o conjunto $\complement_{A \cup B} (A \cap B)$, que é formado pelos elementos que pertencem a $A \cup B$ e não pertencem a $A \cap B$.

Logo:

$\complement_{A \cup B} (A \cap B) = \{4, 7, 5, 6, 8\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19 Dados os conjuntos $E = \{3, 8, 6, 4\}$, $F = \{1, 2, 3, 8, 6, 4, 9\}$ e $G = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, determine:

a) $F - E$

b) $G - E$

c) $(E \cup G) - F$

d) $(F - G) \cup (G - F)$

e) $\complement_F^E$

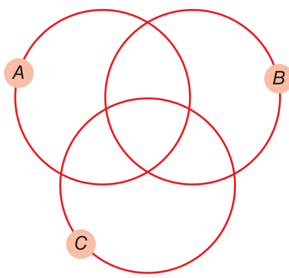
f) $\complement_F^{(E \cap G)}$

g) $\complement_F^G$

h) $\complement_E^E$

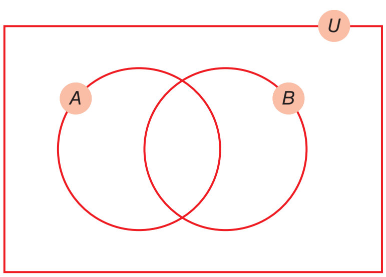
i) $\complement_F^{\varnothing}$

20 Sabendo que $A \cap B \cap C = \{0, 6, 8\}$, $A \cap B = \{0, 6, 8, 1\}$, $A \cap C = \{0, 6, 8, 12\}$, $B \cap C = \{0, 6, 8, 2, 3\}$, $B - A = \{2, 3\}$, $C - B = \{12\}$ e $A - B = \{12, 15\}$, represente os conjuntos A, B e C em um diagrama como este:

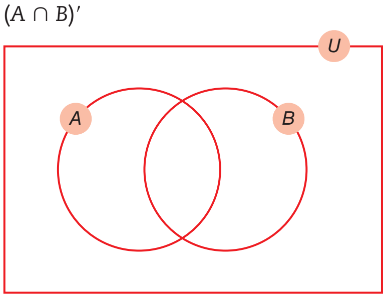


21 Nos diagramas a seguir, hachure a região que corresponde aos conjuntos indicados.

a) $A' \cup B'$



b) $(A \cap B)'$



22 O Brasil é dividido em cinco regiões.
Considerando os conjuntos $A = \{x \mid x$ é estado da região Sul ou da região Nordeste do Brasil$\}$ e $B = \{y \mid y$ é estado da região Nordeste ou da região Sudeste do Brasil$\}$:

a) determine quais estados compõem o conjunto $A - B$.

b) determine quais estados compõem o conjunto $B - A$.

c) determine os conjuntos $\complement_A^B$ e $\complement_A^A$.

Brasil: divisão por regiões

Fonte: FERREIRA, Graça Maria Lemos. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2003.

23 Baseando-se no universo U de todas as pessoas brasileiras, considere os conjuntos:

$A = \{x \in U \mid x$ é homem$\}$

$B = \{y \in U \mid y$ tem pelo menos 16 anos de idade$\}$

$C = \{z \in U \mid z$ tem no máximo 20 anos de idade$\}$

Indicando por $\overline{X}$ o complementar de X em relação a U, represente cada conjunto a seguir por meio de uma propriedade que determine seus elementos.

a) $\overline{A}$

b) $\overline{B}$

c) $\overline{C}$

d) $\overline{B \cap C}$

e) $\overline{B} \cup \overline{C}$

Resolva o exercício complementar 12.

Seção 1.3

Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos

Objetivo

▸ **Resolver** problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos.

A representação de conjuntos finitos por meio de diagramas de Venn organiza e facilita significativamente a resolução de certos problemas de contagem, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Uma pesquisa foi realizada com 350 pessoas para avaliar a eficácia de um anúncio de divulgação de dois novos produtos, A e B. Ao final da pesquisa, constatou-se que, dos entrevistados, precisamente:

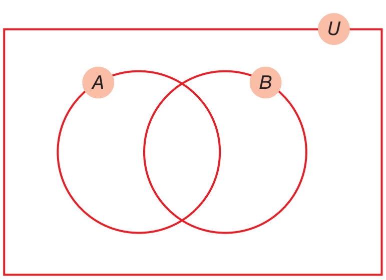
- 280 conheciam o produto A;
- 80 conheciam os dois produtos;
- 20 não conheciam nenhum dos dois produtos.

De acordo com esses dados, quantas pessoas entrevistadas conheciam apenas o produto B?

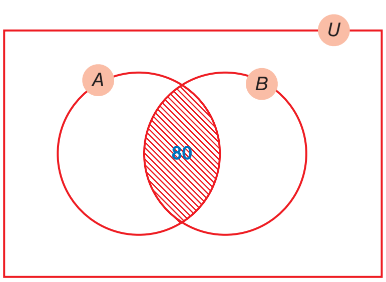
Resolução

Por meio de um diagrama de Venn representamos os conjuntos:

- U, o conjunto universo das pessoas entrevistadas;
- A, o conjunto das pessoas entrevistadas que conhecem o produto A;
- B, o conjunto das pessoas entrevistadas que conhecem o produto B.

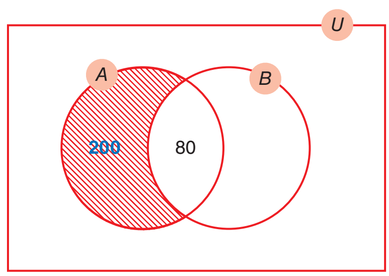


1º) O conjunto $A \cap B$, aquele das pessoas que conhecem os dois produtos, possui 80 elementos. Para nos orientar, escrevemos o número 80 na região correspondente a $A \cap B$:

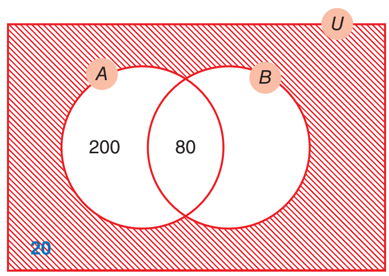


2º) O conjunto A possui 280 elementos, porém, na primeira etapa, já foram consideradas 80 pessoas desse total, faltando, portanto, 200 pessoas para completar o conjunto.

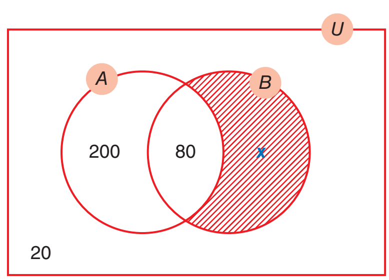
O número 200 deve ser escrito na região que corresponde a $A - B$.



3º) A região que corresponde a $(A \cup B)'$ é a das pessoas que não conhecem nenhum dos dois produtos. Nessa região, escrevemos o número 20:



4º) A região que corresponde ao conjunto $B - A$ é a das pessoas que conhecem apenas o produto B. O número x de elementos desse conjunto é o que procuramos:



Como o conjunto universo U tem 350 elementos, obtemos:

$20 + 200 + 80 + x = 350 \Rightarrow x = 50$

Logo, 50 pessoas conheciam apenas o produto B.

4 Uma indústria de artigos esportivos fez uma pesquisa de mercado com 1.500 pessoas, que deveriam responder “sim” ou “não” a cada uma das seguintes perguntas:

I. Você pratica caminhada?
II. Você pratica corrida?
III. Você pratica musculação?

O resultado da pesquisa foi apresentado na tabela:

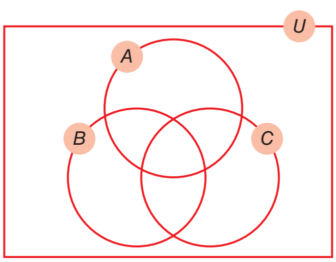
Resposta “sim”	Número de pessoas
à pergunta I	800
à pergunta II	332
à pergunta III	618
às perguntas I e II simultaneamente	118
às perguntas I e III simultaneamente	172
às perguntas II e III simultaneamente	110
às perguntas I, II e III simultaneamente	70

- De acordo com esses dados, quantas pessoas responderam “não” a todas as perguntas?

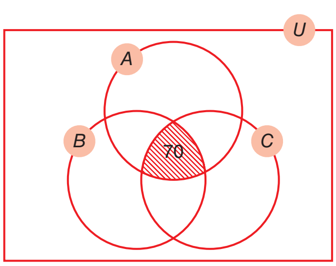
Resolução

Sejam:

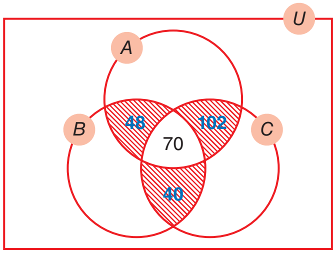
- *U* o conjunto das 1.500 pessoas entrevistadas;
- *A* o conjunto das pessoas que responderam “sim” à pergunta I;
- *B* o conjunto das pessoas que responderam “sim” à pergunta II;
- *C* o conjunto das pessoas que responderam “sim” à pergunta III.



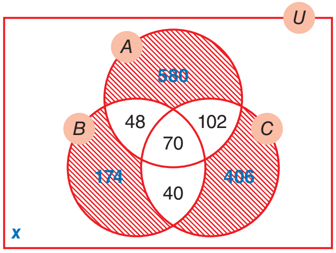
1º) Nesse tipo de problema, convém indicar, inicialmente, o número de elementos da intersecção dos conjuntos. Assim, escrevemos o número 70 na região que corresponde a $A \cap B \cap C$:



2º) A seguir, devemos indicar o número de elementos das intersecções dos conjuntos dois a dois. Como o número de elementos de $A \cap B$ é 118 e já indicamos 70 elementos nessa intersecção, faltam 48 elementos em $A \cap B$. Como o conjunto $A \cap C$ tem 172 elementos e já indicamos 70 elementos nessa intersecção, faltam 102 elementos em $A \cap C$. Como o conjunto $B \cap C$ tem 110 elementos e já indicamos 70 elementos nessa intersecção, faltam 40 elementos em $B \cap C$:



3º) Como o número de elementos do conjunto *A* é 800 e já indicamos 220 elementos em *A*, faltam 580 elementos para completar o conjunto. Como o número de elementos do conjunto *B* é 332 e já indicamos 158 elementos em *B*, faltam 174 elementos. Como o número de elementos de *C* é 618 e já indicamos 212 elementos em *C*, faltam 406 elementos. Finalmente, indicamos por *x* o número de pessoas que responderam “não” às três perguntas:



Como o número de elementos do conjunto universo *U* é 1.500, temos:

$x + 174 + 48 + 70 + 40 + 580 + 102 + 406 = 1.500 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 80$

Concluímos que, das pessoas entrevistadas, 80 responderam “não” às três perguntas.

5 Dos 180 funcionários que trabalham no escritório de uma empresa, precisamente:

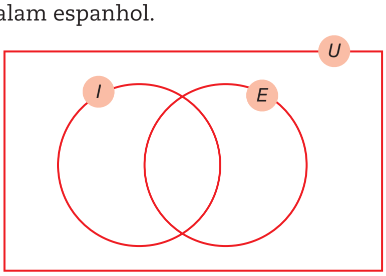
- 108 falam inglês;
- 68 falam espanhol;
- 32 não falam inglês nem espanhol.

Quantos funcionários desse escritório falam as duas línguas, inglês e espanhol?

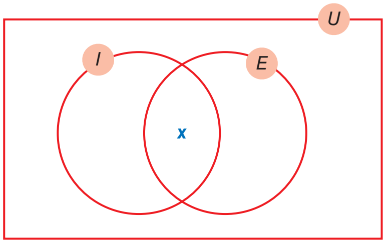
Resolução

Considerar os conjuntos:

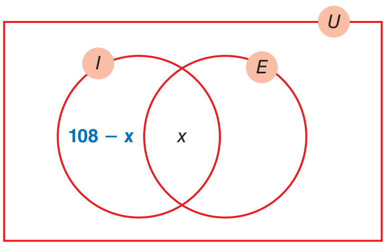
- *U*, que corresponde ao conjunto dos 180 funcionários;
- *I*, que corresponde ao conjunto dos funcionários que falam inglês;
- *E*, que corresponde ao conjunto dos funcionários que falam espanhol.



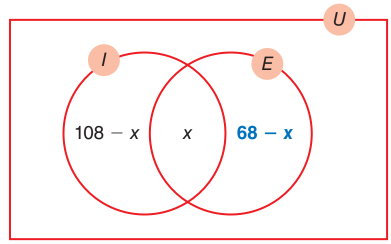
1º) Nesse tipo de problema, convém indicar inicialmente o número de elementos da intersecção $I \cap E$. Como esse número é exatamente o que o problema pede, vamos indicá-lo por x:



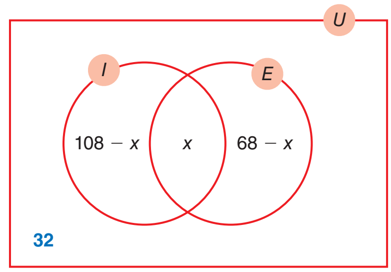
2º) O conjunto I tem 108 elementos. Como já admitimos que x desses elementos estão em I, faltam $108 - x$ elementos em I, que devem ser indicados na região $I - E$.



3º) O conjunto E tem 68 elementos. Como já admitimos que x desses elementos estão em E, faltam $68 - x$ elementos em E, que devem ser indicados na região $E - I$:



4º) Se 32 funcionários não falam inglês nem espanhol, o conjunto $(I \cup E)'$ deve ter 32 elementos:



Como o número de elementos do conjunto universo é 180, temos:

$32 + 108 - x + x + 68 - x = 180$, ou seja, $x = 28$

Concluímos que 28 funcionários do escritório falam as duas línguas, inglês e espanhol.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24 De uma pesquisa realizada pelo Ministério do Turismo com 2.200 gaúchos, pôde-se concluir que, precisamente:
- 816 dos entrevistados já estiveram na região Nordeste do Brasil;
- 602 dos entrevistados já estiveram na região Norte do Brasil;
- 206 dos entrevistados já estiveram nas duas regiões.

Quantas das pessoas entrevistadas nunca estiveram em nenhuma das duas regiões?

25 Um funcionário do departamento de Recursos Humanos de uma indústria automobilística, analisando o currículo de 47 candidatos a postos de trabalho, concluiu que apenas 3 deles nunca haviam trabalhado em montagem ou pintura, 32 já haviam trabalhado em montagem, e 17 já haviam trabalhado nos dois setores. Quantos desses candidatos haviam trabalhado apenas em pintura?

26 Uma fábrica de motocicletas realizou uma pesquisa de mercado com 400 jovens maiores de idade, concluindo que, precisamente:
- 283 dos entrevistados já haviam dirigido automóvel;
- 127 dos entrevistados já haviam dirigido motocicletas;
- 67 dos entrevistados não haviam dirigido nenhum dos dois tipos de veículo.

Quantos dos jovens entrevistados já haviam dirigido os dois tipos de veículo?

27 Em uma empresa, 60% dos funcionários têm mais de 20 anos de idade e 64% têm menos de 40 anos de idade. Qual é a porcentagem de funcionários dessa empresa com mais de 20 e menos de 40 anos de idade?

28 Cada um dos 51 professores de uma escola leciona em, pelo menos, um dos três prédios, A, B e C, que a escola possui. A distribuição de aulas aos professores foi feita de modo que, precisamente:
- 32 professores lecionassem no prédio A;
- 30 professores lecionassem no prédio B;
- 29 professores lecionassem no prédio C;
- 17 professores lecionassem nos prédios A e B;
- 18 professores lecionassem nos prédios A e C;
- 13 professores lecionassem nos prédios B e C.

Quantos professores dão aulas nos três prédios?

Resolva os exercícios complementares 13 e 30 a 37.

Seção 1.4

Classificação dos números

Objetivos

- **Classificar** um número como número natural, inteiro, racional, irracional ou real.
- **Relacionar** os conjuntos numéricos por meio da relação de inclusão.
- **Representar** os conjuntos numéricos por meio de diagramas.

Termos e conceitos

- conjunto dos números naturais
- conjunto dos números inteiros
- conjunto dos números racionais
- conjunto dos números irracionais
- conjunto dos números reais

Os primeiros números concebidos pela humanidade surgiram da necessidade de contar objetos. Porém, outras necessidades, práticas ou teóricas, provocaram a criação de outros tipos de número. Em Matemática, é usual classificar os números em categorias, como veremos a seguir.

Os ossos de Ishango (encontrados em escavações arqueológicas nas proximidades do lago Eduardo, na África central) trazem evidências de que uma civilização que viveu há cerca de 20 mil anos já tinha alguma ideia numérica e um provável registro de contagens.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *A origem dos números*.

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

Classificamos como **naturais** os números que representam quantidades de elementos de conjuntos finitos, inclusive o vazio.

Indicamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos naturais não nulos:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$

Números naturais consecutivos, antecessor e sucessor

Se n é um número natural, então $n + 1$ é um número natural tal que:
- n e $n + 1$ são chamados números naturais **consecutivos**.
- n é o **antecessor** de $n + 1$.
- $n + 1$ é o **sucessor** de n.

Exemplo

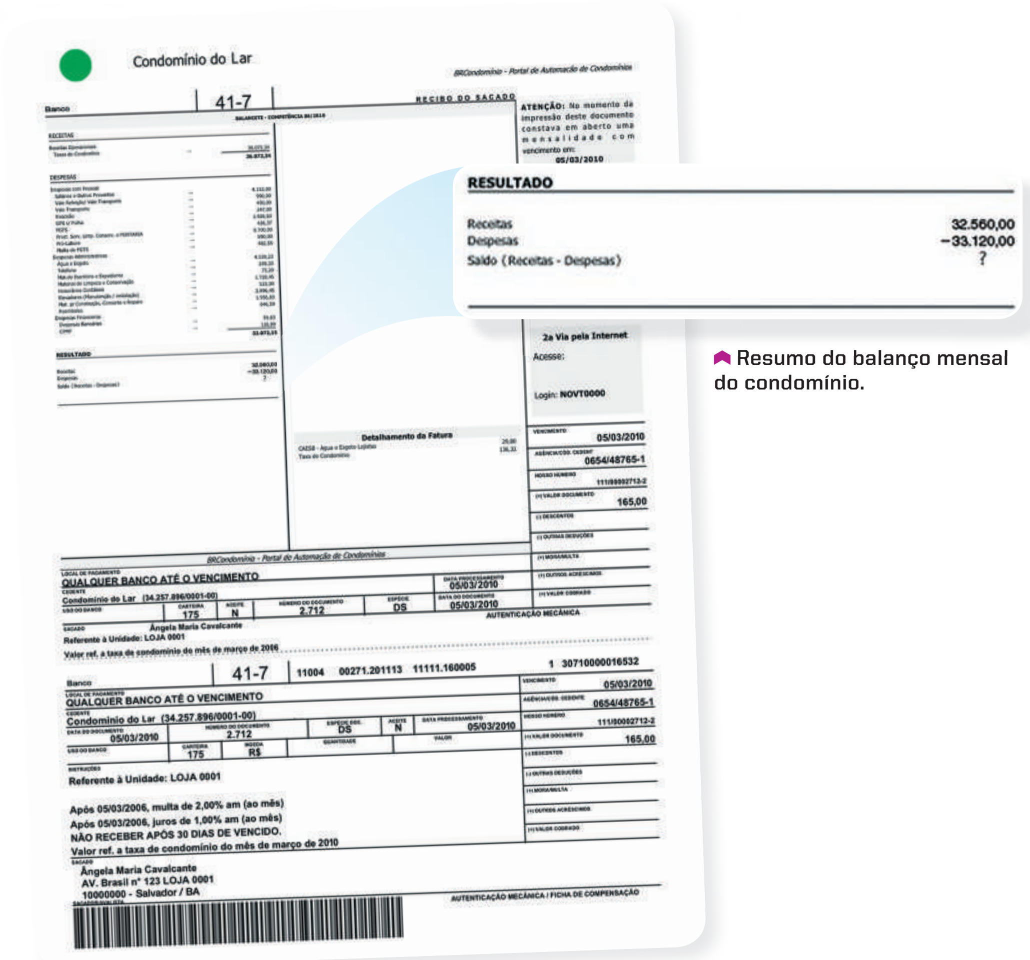
Os números naturais 3 e 4 são consecutivos: 3 é o antecessor de 4 e 4 é o sucessor de 3.

Propriedades dos números naturais

P1. Todo número natural tem sucessor.
P2. A soma de dois números naturais quaisquer é um número natural.
P3. O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

O boleto mensal de pagamento de um condomínio residencial registrava os seguintes valores, em real:


Condomínio do Lar

41-7

RESULTADO

Receitas	32.560,00
Despesas	−33.120,00
Saldo (Receitas - Despesas)	?

QUALQUER BANCO ATÉ O VENCIMENTO

Condomínio do Lar (34.257.896/0001-00)

Referente à Unidade: LOJA 0001

Após 05/03/2006, multa de 2,00% am (ao mês)

Após 05/03/2006, juros de 1,00% am (ao mês)

NÃO RECEBER APÓS 30 DIAS DE VENCIDO.

Valor ref. a taxa de condomínio do mês de março de 2010

Ângela Maria Cavalcante

AV. Brasil nº 123 LOJA 0001

10000000 - Salvador / BA

Vencimento 05/03/2010

0654/48765-1

165,00

Resumo do balanço mensal do condomínio.

Observando que a receita foi menor que a despesa, concluímos que não existe número natural que represente o saldo do condomínio nesse período. Para representar esse saldo, é necessário outro tipo de número, não natural: o número negativo -560, pois $32.560 - 33.120 = -560$. Assim, dizemos que o condomínio arrecadou 560 reais a menos do que gastou. Por isso, o saldo desse mês foi negativo.

Uma parte dos números negativos é formada pelos números $-1, -2, -3, -4, ...$, que são chamados de **números inteiros negativos**.

> Denominamos **conjunto dos números inteiros** (e indicamos por $\mathbb{Z}$) o conjunto:
>
> $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Apresentamos aqui as notações especiais que usaremos para alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros não nulos.

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros não negativos.

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros positivos.

$\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$ é o conjunto dos números inteiros não positivos.

$\mathbb{Z}_-^* = \{..., -4, -3, -2, -1\}$ é o conjunto dos números inteiros negativos.

Observe que classificar um número como **não negativo** significa dizer que esse número ou é nulo ou é positivo.

Propriedades dos números inteiros e algumas demonstrações

Números inteiros consecutivos, antecessor e sucessor

Se n é um número inteiro, então $n + 1$ é um número inteiro tal que:
- n e $n + 1$ são chamados números inteiros consecutivos;
- n é o antecessor de $n + 1$;
- $n + 1$ é o sucessor de n.

Exemplos

a) Os números 19 e 20 são números inteiros consecutivos; 19 é o antecessor de 20 e 20 é o sucessor de 19.

b) Os números -11 e -10 são números inteiros consecutivos; -11 é o antecessor de -10 e -10 é o sucessor de -11.

Números pares e números ímpares

- Um número inteiro é **par** se, e somente se, pode ser representado na forma $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$.
- Um número inteiro é **ímpar** se, e somente se, pode ser representado na forma $2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

a) O número 6 é par, pois pode ser representado por $2 \cdot 3$ e $3 \in \mathbb{Z}$.

b) O número -8 é par, pois pode ser representado por $2 \cdot (-4)$, e $-4 \in \mathbb{Z}$.

c) O número 11 é ímpar, pois pode ser representado por $2 \cdot 5 + 1$, e $5 \in \mathbb{Z}$.

d) O número -15 é ímpar, pois pode ser representado por $2 \cdot (-8) + 1$, e $-8 \in \mathbb{Z}$.

Propriedades dos números inteiros

P1. Sendo P e I os conjuntos dos números inteiros pares e ímpares, respectivamente, temos $P \cup I = \mathbb{Z}$ e $P \cap I = \varnothing$.

P2. Todo número inteiro tem sucessor e antecessor.

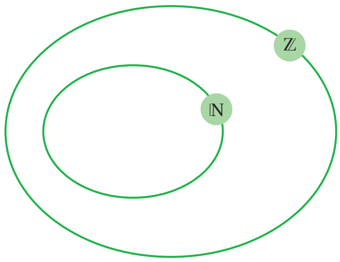
P3. A soma de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

P4. A diferença entre dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

P5. O produto de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

Nota:

Todo número natural é inteiro, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Podemos representar $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ por meio do diagrama:



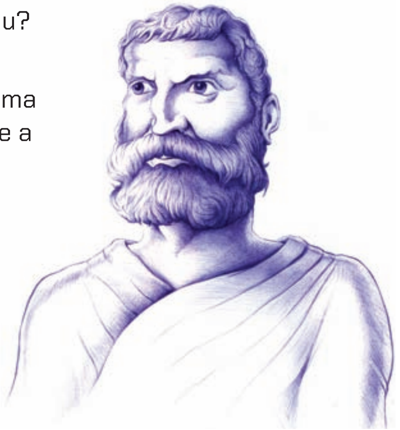
Demonstração matemática

O que é uma demonstração matemática? Como surgiu? Para que serve?

De modo geral, uma **demonstração matemática** é uma argumentação lógica da qual se conclui uma propriedade a partir de outra(s) previamente estabelecida(s).

Não se sabe exatamente quando surgiram as demonstrações. Na Antiguidade, os matemáticos egípcios chegaram a trabalhar a ideia de demonstração sem formalismo, mas foi com os gregos daquela época que se intensificou o desenvolvimento da argumentação lógica, dando-se importância à demonstração de propriedades, o que contribuiu para o desenvolvimento do método axiomático-dedutivo usado em Matemática.

Com as demonstrações podemos verificar se uma proposição é verdadeira ou falsa.



Atribui-se a Tales de Mileto (600 a.C.) a primeira demonstração na história da Matemática. Tales demonstrou que o diâmetro divide o círculo em duas partes iguais.

Exemplos

a) Vamos analisar a proposição: $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

Observando que $5^2 = 25$, podemos ser induzidos a concluir que a proposição acima é verdadeira, mas não podemos esquecer que $(-5)^2 = 25$, ou seja, x pode ser igual a 5 ou a -5.

Portanto, a proposição $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ é falsa, ou seja, $x^2 = 25$ não implica $x = 5$.

b) Admitindo como verdadeira a sentença "k é um número inteiro par", pode-se concluir que "$k + 1$ é um número inteiro ímpar".

Essa afirmação, embora pareça óbvia, necessita de uma argumentação matemática para ser justificada. Para isso, aplicaremos as definições de número par e de número ímpar. Observe:

Admitindo que k é um número inteiro par, temos, por definição de número par, que k pode ser representado por $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$, isto é, $k = 2n$.

Adicionando 1 a ambos os membros da igualdade $k = 2n$, obtemos: $k + 1 = 2n + 1$

Como $2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$, é, por definição, um número ímpar, concluímos que $k + 1$ é um número inteiro ímpar.

Essa argumentação constitui a demonstração matemática da propriedade "Se k é um número inteiro par, então $k + 1$ é um número inteiro ímpar".

A argumentação e o pensamento lógicos usados nas demonstrações foram e são fundamentais para o desenvolvimento e a construção da Matemática.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Teoremas sobre números inteiros.*
Texto: *Demonstrações adotando símbolos matemáticos.*

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

O número fracionário se originou da divisão não exata em $\mathbb{Z}$, por exemplo, $1 : 4$. Não há nenhum número inteiro que represente o resultado dessa divisão, o que motivou a criação de novos números: os **números racionais**. No conjunto desses novos números, o resultado da divisão $1 : 4$ é representado por $\frac{1}{4}$.

Número racional é todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo. Indicando o conjunto de todos os números racionais pela letra $\mathbb{Q}$, temos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Exemplos

a) Os números $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{-3}{5}$ são racionais, pois cada um está representado por uma razão entre números inteiros.

b) O número 0,5 é um número racional, pois pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros:

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$$

c) Os números 3, -5 e 0 (zero) são racionais, pois cada um pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots \qquad -5 = \frac{-5}{1} = \frac{-10}{2} = \frac{-15}{3} = \ldots \qquad 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots$$

Assim como fizemos para o conjunto dos números inteiros, destacamos notações especiais para alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$\mathbb{Q}^*$ é o conjunto dos números racionais não nulos.

$\mathbb{Q}_+$ é o conjunto dos números racionais não negativos.

$\mathbb{Q}^*_+$ é o conjunto dos números racionais positivos.

$\mathbb{Q}_-$ é o conjunto dos números racionais não positivos.

$\mathbb{Q}^*_-$ é o conjunto dos números racionais negativos.

Propriedades dos números racionais

P1. A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.

P2. A diferença de dois números racionais quaisquer é um número racional.

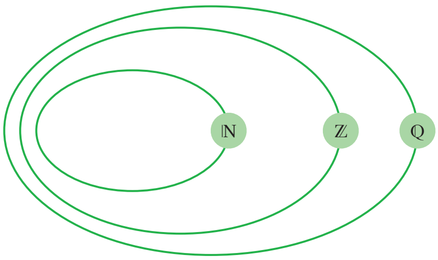
P3. O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

P4. O quociente de dois números racionais quaisquer, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional.

Nota:

Todo número inteiro x é racional, pois pode ser representado na forma de razão entre dois inteiros.

Como todo número natural é inteiro e todo número inteiro é racional, podemos representar os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ por meio do diagrama ao lado.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Representação decimal finita e representação decimal infinita

Ao dividir o numerador pelo denominador da fração $\frac{7}{2}$, obtemos 3,5, que é a representação decimal da fração, isto é, $\frac{7}{2} = 3{,}5$. Observe que, acrescentando zeros à direita da casa decimal de 3,5, o número não se altera, isto é: $3{,}5 = 3{,}50 = 3{,}500 = 3{,}5000 = \ldots$

Podemos até acrescentar infinitos zeros que o número não se altera:

$$3{,}5 = 3{,}50000000000000000000\ldots$$

Desse ponto de vista, todo número decimal pode ser representado com infinitas casas decimais. Porém, precisamos diferenciar dois tipos distintos de número decimal: aqueles que **podem** ser representados com um número **finito** de casas decimais (representação decimal finita) e aqueles que **só podem** ser representados com **infinitas** casas decimais (representação decimal infinita). Por exemplo:

- O número $\frac{7}{2}$ admite representação decimal finita, pois $\frac{7}{2} = 3{,}5$.
- O número $\frac{52}{9}$ não admite representação decimal finita, pois, dividindo o numerador pelo denominador, obtemos $\frac{52}{9} = 5{,}777777777\ldots$ (o algarismo 7 se repete indefinidamente).

Representação decimal finita

Se, em sua forma decimal, um número *x* **pode** ser representado por um número **finito** de casas decimais, dizemos que *x* é um número com representação decimal finita.

A razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é igual a um número decimal com representação finita ou é igual a uma dízima periódica.

Exemplos

a) 3 é um número com representação decimal finita, pois pode ser representado por um número finito de casas decimais: $3 = 3{,}0$

b) 3,4502 é um número com representação decimal finita, pois está representado por um número finito de casas decimais.

c) $\frac{7}{1.000}$ é um número com representação decimal finita, pois pode ser representado por um número finito de casas decimais: $\frac{7}{1.000} = 0{,}007$

Representação decimal infinita

Se, em sua forma decimal, um número *y* **só pode** ser representado por um número **infinito** de casas decimais, dizemos que *y* é um número com representação decimal infinita. Nesse caso, afirmamos que o número *y* é uma **dízima**, assim:

- Se, a partir de determinada casa decimal para a direita, houver apenas a repetição de uma mesma sequência finita de algarismos, *y* é chamado de **dízima periódica**.
- Se, de qualquer casa decimal para a direita, não houver apenas a repetição de uma mesma sequência finita de algarismos, *y* é chamado de **dízima não periódica**.

Exemplos

a) Os números com representação decimal infinita periódica 5,66666...; 3,42222...; 3,2424242424... são dízimas periódicas.

b) O número com representação decimal infinita não periódica 4,012345678910111213... é uma dízima não periódica.

Conhecendo essas representações, podemos afirmar que:

> Os números racionais são todos os números com representação decimal finita (podendo ser inteiros) e todas as dízimas periódicas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6 Em certo período, o fluxo de pessoas em um aeroporto variou de 1.600 a 3.120 pessoas por hora.

Indicando por x o número de pessoas em uma hora qualquer desse período, classificar como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir:

a) x é um número racional.

b) x pode ser qualquer número racional, com $1.600 \leqslant x \leqslant 3.120$.

c) x pode assumir o valor $\frac{18.183}{11}$.

d) x pode assumir o valor $\frac{4.805}{2}$.

Resolução

Um número qualquer de pessoas só pode ser representado por um número natural, o que nos leva a concluir que x é um número natural, com $1.600 \leqslant x \leqslant 3.120$. Assim, temos:

a) V, pois, como $x \in \mathbb{N}$, e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, concluímos que $x \in \mathbb{Q}$.

b) F, pois existem números racionais não naturais que satisfazem a condição $1.600 \leqslant x \leqslant 3.120$.

c) V, pois $\frac{18.183}{11} = 1.653$, que é um número natural sob a condição $1.600 \leqslant x \leqslant 3.120$.

d) F, pois $\frac{4.805}{2} = 2.402{,}5$, que não é um número natural.

7 Se o quociente de um número inteiro p por um número inteiro não nulo q é igual a uma dízima periódica, dizemos que $\frac{p}{q}$ é a fração geratriz dessa dízima periódica. De acordo com essa definição, determinar a fração geratriz da dízima periódica 2,555... .

Resolução

Para encontrar a fração geratriz dessa dízima periódica, podemos aplicar o procedimento a seguir.

- Indicamos por g a dízima periódica, obtendo a igualdade: $g = 2{,}5555...$
- Multiplicamos por 10 ambos os membros dessa igualdade: $10g = 25{,}5555...$
- Subtraímos, membro a membro, as duas igualdades anteriores:

  $10g - g = 25{,}5555... - 2{,}5555... \Rightarrow 9g = 23$

  $\therefore g = \frac{23}{9}$

Assim, $\frac{23}{9}$ é a fração geratriz da dízima periódica 2,5555... .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

29 Classifique cada uma das afirmações como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $-5 \in \mathbb{N}$ **c)** $-3 \in \mathbb{Z}$ **e)** $0 \in \mathbb{Q}$ **g)** $6{,}5 \in \mathbb{Q}$ **i)** $-3 \in \mathbb{Q}$

b) $5 \in \mathbb{N}$ **d)** $3 \in \mathbb{Z}$ **f)** $\frac{4}{5} \in \mathbb{N}$ **h)** $3 \in \mathbb{Q}$ **j)** $5{,}666... \in \mathbb{Q}$

30 Obtenha a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

a) 4,22222... **b)** 5,6464646464...

31 Determine o menor número que pertence a cada um dos conjuntos.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$ **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 3\}$ **c)** $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 3\}$

Resolva os exercícios complementares 14 a 17, 38 e 39.

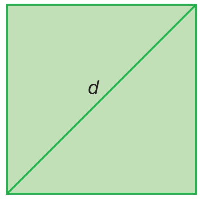
Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{Q}'$)

Durante muitos séculos, acreditou-se que os números conhecidos até então, hoje chamados de racionais, fossem suficientes para resolver qualquer problema que envolvesse medições, tanto na vida prática quanto na Geometria.

No entanto, alguns problemas, provavelmente propostos pelos pitagóricos, questionaram essa ideia, fazendo que fosse abandonada. Um desses problemas é o seguinte:

"Qual é a medida *d* da diagonal de um quadrado de lado unitário?"

Pitágoras de Samos.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$$

Esse problema, que certamente provocou um amplo debate de ideias, alterou modelos considerados intocáveis, pois, até então, conheciam-se apenas os números hoje chamados de inteiros e suas razões.

Voltando ao problema: sabemos que não existe um número inteiro que, elevado ao quadrado, resulte em 2. Para encontrar um número que satisfaça essa condição, provavelmente muitos matemáticos fizeram os cálculos a seguir em busca do número *d*.

Queremos um número d tal que $d^2 = 2$. Observe que $1{,}4 < d < 1{,}5$, pois $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ e $(1{,}5)^2 = 2{,}25$.

Tomando um número qualquer entre 1,4 e 1,5, por exemplo, a média aritmética entre 1,4 e 1,5, que é 1,45, podemos estreitar o intervalo ao qual pertence o número *d*, observando que:

$$\begin{cases} (1{,}45)^2 = 2{,}1025 \\ 1{,}4 < d < 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}45$$

A seguir, tentamos melhorar essa aproximação, restringindo ainda mais o intervalo ao qual pertence o número *d*:

$$\begin{cases} (1{,}425)^2 = 2{,}030625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}45 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}425$$

$$\begin{cases} (1{,}4125)^2 = 1{,}99515625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}425 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4125 < d < 1{,}425$$

Podemos continuar esse processo infinitamente e nunca chegaremos a um número com representação decimal finita ou infinita periódica como valor de *d*, isto é, *d* não é um número racional.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração de que* $\sqrt{2}$ *não é um número racional.*

Assim surgiu a necessidade de considerar a existência de números que não são racionais, ou seja, números que não podem ser representados como a razão entre dois números inteiros. Para nomear esses novos números, em contraposição ao nome "racionais", escolheu-se o nome de **irracionais**.

Número irracional é todo número que, em sua forma decimal, é uma dízima não periódica. Indicamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{Q}'$:

$$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \text{ é dízima não periódica}\}$$

Exemplos

a) Um dos números irracionais mais conhecidos é a razão do perímetro de uma circunferência pela medida do seu diâmetro. Esse número é representado pela letra grega π. Como curiosidade, reproduzimos o π com 70 casas decimais:

$\pi = 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164...$

b) Outro número irracional, como já vimos, é a medida da diagonal de um quadrado de lado 1, indicada por:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

Também podemos afirmar que:

Um número irracional não pode ser representado como uma razão entre dois números inteiros.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Justificativa de que um número irracional não pode ser representado como uma razão entre dois números inteiros.*

Propriedades dos números irracionais

P1. Sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$. Se $\sqrt[n]{a}$ não é inteiro, então $\sqrt[n]{a}$ é irracional.

Exemplos

a) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

b) $\sqrt[6]{5} \in \mathbb{Q}'$

c) $\sqrt[5]{3} \in \mathbb{Q}'$

d) $\sqrt[7]{1} \notin \mathbb{Q}'$, pois $\sqrt[7]{1} = 1$ e 1 é inteiro

e) $\sqrt[3]{8} \notin \mathbb{Q}'$, pois $\sqrt[3]{8} = 2$ e 2 é inteiro

P2. A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$1 + \sqrt{2} = 1 + 1{,}414213562... = 2{,}414213562...$

P3. A diferença entre um número racional e um número irracional, em qualquer ordem, é um número irracional.

Exemplo

$2 - \pi = 2 - 3{,}14159265... = -1{,}14159265...$

P4. O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

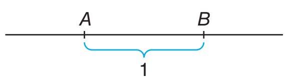
P5. O quociente de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$12 : \sqrt{6} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8 Considerar o segmento $\overline{AB}$ de comprimento 1 em uma unidade u. Descrever um processo para obter o ponto E da semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que o comprimento do segmento $\overline{AE}$ seja $\sqrt{2}$ na unidade u.

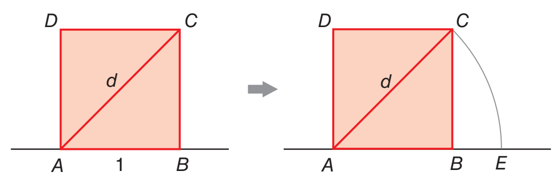


Resolução

Considerar o segmento $\overline{AB}$ como o lado de um quadrado. A medida d da diagonal do quadrado é dada por:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Com a ponta-seca do compasso em A e abertura AC, desenha-se o arco que intercepta a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E, conforme a figura abaixo.
Assim, concluímos que o comprimento de $\overline{AE}$ é $\sqrt{2}$ na unidade u.



Conjunto dos números reais (ℝ)

Qualquer número racional ou irracional é chamado **número real**. Indicamos por ℝ o conjunto dos números reais:

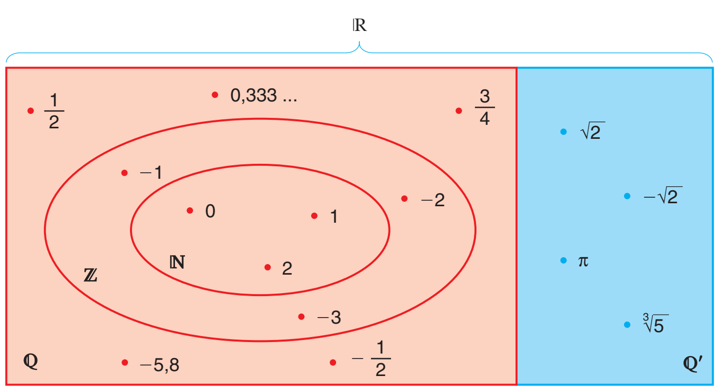
$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é número racional ou irracional}\}$$

ou

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Podemos dizer, portanto, que número real é todo número que pode ser representado na forma decimal, tendo finitas ou infinitas casas decimais.

As relações entre os conjuntos numéricos apresentadas até aqui podem ser resumidas no diagrama abaixo, que apresenta, como exemplos, alguns elementos de cada conjunto.



A seguir, destacamos alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$, para os quais adotamos notações especiais:

$\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos números reais não nulos.

$\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais não negativos.

$\mathbb{R}^*_+$ é o conjunto dos números reais positivos.

$\mathbb{R}_-$ é o conjunto dos números reais não positivos.

$\mathbb{R}^*_-$ é o conjunto dos números reais negativos.

Propriedades dos números reais

P1. A soma de dois números reais quaisquer é um número real.

P2. A diferença entre dois números reais quaisquer é um número real.

P3. O produto de dois números reais quaisquer é um número real.

P4. O quociente de dois números reais quaisquer, sendo o divisor não nulo, é um número real.

P5. Se n é um número natural ímpar e $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$$

P6. Sendo n um número natural par não nulo e a um número real, temos:

$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \geqslant 0$$

Exemplos

Pela propriedade P5, temos:

- $\sqrt[5]{10} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{-8} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[9]{\pi} \in \mathbb{R}$

Pela propriedade P6, temos:

- $\sqrt[4]{5} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[6]{0} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[2]{-1} \notin \mathbb{R}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9 A velocidade de um automóvel variou de 0 a 80 km/h em determinado trecho de um percurso. Indicando por x uma velocidade qualquer do automóvel, em quilômetro por hora, nesse trecho, classificar como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

a) x pode assumir qualquer valor real, com $0 \leqslant x \leqslant 80$.

b) x pode assumir o valor $70\sqrt{2}$.

c) x pode assumir qualquer valor irracional, com $0 \leqslant x \leqslant 80$.

d) Se o automóvel atingiu velocidade $y\sqrt[3]{2}$ km/h nesse trecho, então podemos afirmar que $0 \leqslant y \leqslant 40\sqrt[3]{2}$.

Resolução

a) V, pois a velocidade tem variação "contínua", isto é, para passar de uma velocidade menor que determinado valor v para uma velocidade maior que v, o automóvel tem de passar, obrigatoriamente, pela velocidade v.

Assim, para variar de 0 a 80 km/h, a velocidade deve assumir todos os valores reais x, com $0 \leqslant x \leqslant 80$.

b) F, pois $70\sqrt{2} \approx 99$, e os valores de x devem obedecer à condição $0 \leqslant x \leqslant 80$. ($\approx$ significa "aproximadamente".)

c) V, pois todo número irracional é real, e no item (a) concluímos que x assume qualquer valor real sob a condição $0 \leqslant x \leqslant 80$.

d) F, pois: $0 \leqslant y\sqrt[3]{2} \leqslant 80$

Dividindo os membros dessa desigualdade por $\sqrt[3]{2}$, obtemos: $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{80}{\sqrt[3]{2}}$

Para racionalizar o denominador de $\dfrac{80}{\sqrt[3]{2}}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{2^2}$, obtendo:

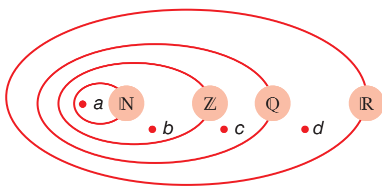
$0 \leqslant y\sqrt[3]{2} \leqslant \dfrac{80 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}}$, ou seja, $0 \leqslant y \leqslant 40\sqrt[3]{4}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

32 Classifique como racional ou irracional o número representado em cada um dos itens abaixo:

a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt[3]{8}$ **d)** $\sqrt[3]{5}$ **e)** $5 + \sqrt{3}$ **f)** $2\sqrt[3]{5}$ **g)** $5\sqrt[3]{8}$ **h)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **i)** $\dfrac{4}{3} - 7\sqrt[3]{5}$ **j)** $\pi + \dfrac{1}{2}$

33 Cada uma das letras a, b, c e d, no diagrama ao lado, representa um único número do conjunto $\left\{\sqrt{7}, -9, 0, \dfrac{5}{6}\right\}$. Determine o valor que cada uma dessas letras representa.



34 Obtenha dois números irracionais na forma $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$, que estejam compreendidos entre 5 e 6.

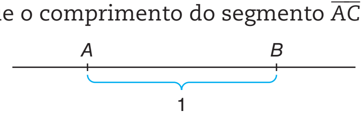
35 Escreva dois números irracionais compreendidos entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

36 Escreva dois números racionais compreendidos entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

37 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações.

a) Todo número inteiro é natural.
b) Toda dízima não periódica é um número irracional.
c) Toda dízima é um número irracional.
d) Toda dízima periódica é um número racional.
e) Todo número que pode ser representado na forma decimal é real.
f) Números reais são somente aqueles que podem ser representados pela razão entre dois números inteiros.
g) O produto de um número racional qualquer por um número irracional é racional.
h) O produto de um número racional qualquer por um número irracional é irracional.
i) O oposto de um número irracional é irracional.
j) O inverso de um número irracional é um número irracional.

38 Considere o segmento $\overline{AB}$ de comprimento 1 em unidade u. Descreva um processo para obter o ponto C da semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que o comprimento do segmento $\overline{AC}$ seja $\sqrt{5}$ na unidade u.



(*Sugestão*: Construa um retângulo cuja medida da base seja 1 unidade u, e da altura, 2 unidades u. Calcule agora a medida da diagonal desse retângulo.)

Resolva os exercícios complementares 18 a 24 e 40 a 43.

O eixo real

Objetivos

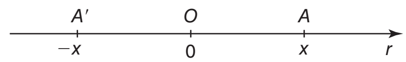
- **Representar** no eixo real todos os tipos de intervalos.
- **Operar** com intervalos.

A cada ponto de uma reta r podemos associar um único número real, e a cada número real podemos associar um único ponto dessa reta. Para isso, adotamos os seguintes procedimentos:

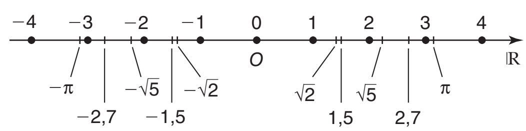
1º) Associamos o número 0 (zero) a um ponto O qualquer de r.

2º) A cada ponto A de uma das semirretas determinadas por O em r, com o ponto A não coincidente a O, associamos um número positivo x, que indica a distância de A até O, em uma certa unidade u.

3º) A cada ponto A', simétrico de A em relação a O, associamos o oposto de x.

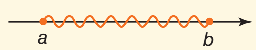
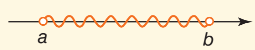
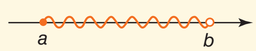
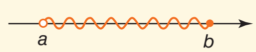
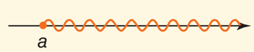
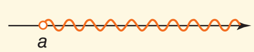
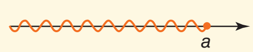
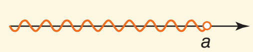
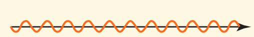


Dessa maneira, cada ponto da reta está associado a um único número real e cada número real está associado a um único ponto da reta. Portanto, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos da reta. O sistema assim construído é o **eixo real**, cuja origem é o ponto O, e cujo sentido é o mesmo da semirreta que representa o conjunto $\mathbb{R}_+$.



Intervalos reais

Considerando a e b números reais quaisquer, com $a < b$, os subconjuntos de $\mathbb{R}$ apresentados na tabela abaixo são chamados de **intervalos reais**.

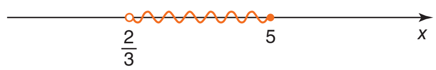
Representação algébrica	Representação no eixo real	Descrição
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ou $[a, b]$		Intervalo fechado de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$		Intervalo aberto de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ou $[a, b[$		Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ou $]a, b]$		Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ ou $[a, +\infty[$		Intervalo ilimitado fechado à esquerda.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$		Intervalo ilimitado aberto à esquerda.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ou $]-\infty, a]$		Intervalo ilimitado fechado à direita.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ou $]-\infty, a[$		Intervalo ilimitado aberto à direita.
$\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$		Intervalo ilimitado de $-\infty$ a $+\infty$.

Notas:

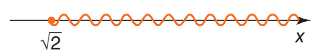
1. O símbolo ∞ significa "infinito".
2. A bolinha cheia (●) em um extremo do intervalo indica que o número associado a esse extremo pertence ao intervalo.
3. A bolinha vazia (○) em um extremo do intervalo indica que o número associado a esse extremo não pertence ao intervalo.
4. O intervalo sempre será aberto nos extremos $+\infty$ e $-\infty$.
5. Os quatro primeiros tipos de intervalos da tabela são chamados de intervalos limitados.

Exemplo

a) O conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x \leqslant 5\right\} = \left]\frac{2}{3}, 5\right]$ é o intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos $\frac{2}{3}$ e 5, cuja representação no eixo real é:



b) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \sqrt{2}\} = [\sqrt{2}, +\infty[$ é o intervalo ilimitado fechado à esquerda em $\sqrt{2}$, cuja representação no eixo real é:



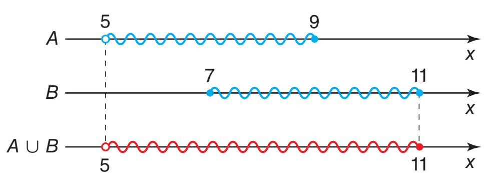
EXERCÍCIO RESOLVIDO

10 Dados os intervalos: $A =]5, 9]$, $B = [7, 11]$, $C =]-2, +\infty[$ e $D =]-\infty, 8]$, determinar:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $C - D$

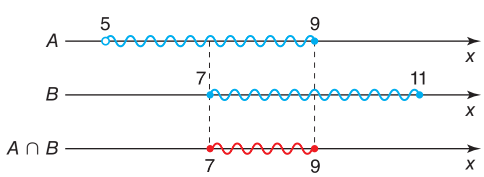
Resolução

a)



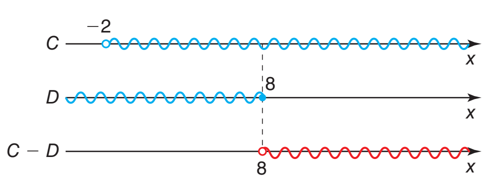
Logo: $A \cup B =]5, 11]$

b)



Logo: $A \cap B = [7, 9]$

c)



Logo: $C - D =]8, +\infty[$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39 O número associado a cada ponto do eixo real é chamado de abscissa do ponto. Assim, os pontos A e B representados no eixo real abaixo têm abscissas 3 e 5, respectivamente.

A distância d entre A e B, também chamada de comprimento do segmento $\overline{AB}$, é a diferença entre as abscissas de A e B, a maior menos a menor, isto é: $d = 5 - 3 = 2$
Generalizando essa ideia para qualquer segmento de reta contido no eixo real:

a) Calcule a distância entre os pontos C e D de abscissas 5 e 15, respectivamente.

b) Calcule a distância entre os pontos E e F de abscissas -4 e 4, respectivamente.

c) Calcule a distância entre os pontos G e H de abscissas $\frac{3}{2}$ e $\frac{23}{4}$, respectivamente.

d) Determine a abscissa do ponto médio do segmento $\overline{IJ}$, em que I e J têm abscissas 5 e 9, respectivamente.

e) Determine a abscissa do ponto médio do segmento $\overline{KL}$, em que K e L têm abscissas $-\frac{1}{5}$ e 8, respectivamente.

f) Determine a abscissa do ponto médio do segmento $\overline{MN}$, em que M e N têm abscissas m e n, respectivamente, com $m < n$.

40 Dados os intervalos: $A = [4, 12]$, $B =]9, 19[$, $C =]\,0, 8]$ e $D =]-\infty, 14]$, determine:

a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $B - D$
d) $D - B$
e) $\complement_C^C$
f) $A \cup B \cup C$
g) $A \cap B \cap C$
h) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

41 Sejam $A =]3, 9]$ e $B =]5, +\infty[$. Sabendo que um número x pertence a $A \cap B$, podemos concluir que x não pertence ao intervalo:

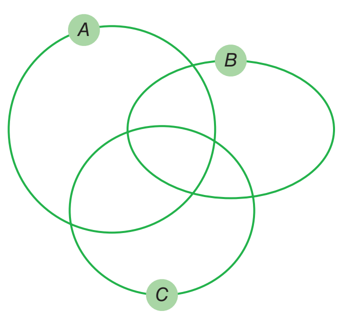
a) $[9, +\infty[$
b) $]8, +\infty[$
c) $[7, 9]$
d) $]-\infty, 9[$
e) $[10, 15]$

Resolva os exercícios complementares 25 a 29.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

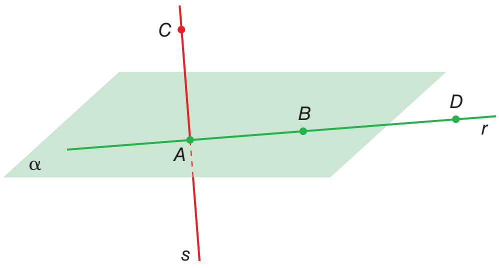
Exercícios técnicos

1 Represente os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 8\}$ e $C = \{0, 1, 3, 7, 9\}$ em um diagrama como este:



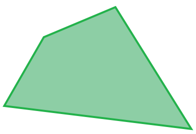
2 Podemos considerar a superfície da lousa de sua sala de aula como uma superfície plana. Por isso, dizemos que ela **está contida** em um plano. Esse plano é infinito em todas as suas direções, isto é, ele continua infinitamente além das margens da lousa. Um plano é constituído por infinitos pontos; e toda reta que passa por dois de seus pontos (distintos) está contida nesse plano (a reta é infinita em seus dois sentidos). Podemos representar um plano por um paralelogramo e nomeá-lo por uma letra grega minúscula: α (alfa), β (beta), γ (gama) etc. Sabendo que os pontos A e B pertencem ao plano α da figura a seguir e que o ponto C não pertence a α, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

a) $r \in \alpha$
b) $r \subset \alpha$
c) $D \in \alpha$
d) $D \subset \alpha$
e) $\overline{AB} \subset \alpha$
f) $\overline{AB} \in \alpha$
g) $s \subset \alpha$

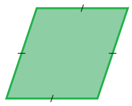


3 Para este exercício, vamos recordar algumas definições da Geometria plana.

- Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.

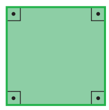


- Um losango é um polígono de quatro lados com todos os lados de mesma medida.



- Um retângulo é um polígono de quatro lados com todos os ângulos internos retos.

- Um quadrado é um polígono de quatro lados com todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos retos.



Indicando por Q, L, R e D os conjuntos dos quadriláteros, losangos, retângulos e quadrados, respectivamente, construa um diagrama representando esses conjuntos. Depois, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações.

a) $L \subset Q$
b) $D \subset R$
c) $D \not\subset L$
d) $Q \supset R$
e) $x \in R \Rightarrow x \in Q$
f) $x \in L \Rightarrow x \in D$

4 Quantos subconjuntos possui um conjunto com 8 elementos?

5 Um conjunto F possui exatamente 128 subconjuntos. Qual é o número de elementos de F?

6 Sendo $A = \{1, 2\}$, temos $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

a) $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$
b) $1 \in A$
c) $1 \in \mathcal{P}(A)$
d) $\{1\} \subset \mathcal{P}(A)$
e) $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(A)$
f) $\{1, 2\} \in A$
g) $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$
h) $\{1, 2\} \subset A$
i) $A \in \mathcal{P}(A)$
j) $A \subset \mathcal{P}(A)$
k) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
l) $\varnothing \subset A$
m) $\varnothing \subset \mathcal{P}(A)$
n) $\varnothing \in A$

7 (PUC-RJ) Se A, B e C são conjuntos em que $n(A) = 25$, $n(B) = 18$, $n(C) = 27$, $n(A \cap B) = 9$, $n(B \cap C) = 10$, $n(A \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$ (sendo $n(X)$ o número de elementos do conjunto X), determine o valor de $n((A \cup B) \cap C)$.

8 (Funrei-MG) Considerando os conjuntos A, B e C de tal forma que $A \cup B = \{1, 2\}$ e $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$, o conjunto $A \cup (B \cap C)$ será igual a:

a) A
b) $A \cup C$
c) $\{3, 4\}$
d) $A \cup B$
e) $\varnothing$

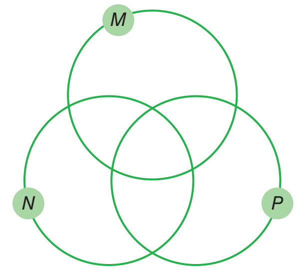
9 Sendo A, B e C conjuntos tais que $x \in [A \cap (B \cup C)]$, é correto afirmar que:

a) $x \in B$
b) $x \in (A \cap B)$
c) $x \in (B \cap C)$
d) $x \in (A \cap C)$
e) $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$

10 (Cefet-PR) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C - A = \{7, 8, 9\}$; $C - B = \{3, 8, 9\}$ e $A \cap B \cap C = \{4\}$, o número de elementos do conjunto C é:

a) 6 **b)** 7 **c)** 5 **d)** 4

11 Represente os conjuntos $M = \{a, b, c, d, g\}$, $N = \{b, c, d, f, h\}$ e $P = \{g, d, h, e, i\}$ no diagrama abaixo.



12 (Cefet-PR) Considere os conjuntos: $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, b, d, e\}$ e $C = \{b, d, f, g\}$. O conjunto Y, tal que $Y \subset A$ e $A - Y = B \cap C$, é:

a) $\{b, c\}$
b) $\{a, d\}$
c) $\{b, d\}$
d) $\{c, d\}$
e) $\{a, c\}$

13 (UFPR) O número de elementos de um conjunto finito X é indicado por $n(X)$. Qual das afirmações a seguir é verdadeira para quaisquer conjuntos finitos A e B?

a) $n(A \cup B) > n(A \cap B)$
b) $n(A \cup B) > n(A)$ e $n(A \cup B) > n(B)$
c) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
d) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
e) $n(A \cap B) > 0$

14 Cada um dos números naturais x e y é formado por três algarismos diferentes entre si, sendo que x contém apenas algarismos ímpares e y, apenas algarismos pares. Sabendo que $x > y$, calcule o maior valor possível da diferença $x - y$.

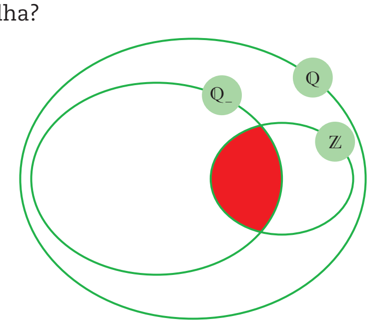
15 (Fuvest-SP) Se x e y são dois números inteiros, estritamente positivos e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um inteiro ímpar?

a) $2x + 3y$
b) $3x + 2y$
c) $xy + 1$
d) $2xy + 2$
e) $x + y + 1$

16 Obtenha a fração geratriz de cada dízima periódica a seguir.

a) 3,2555555....
b) 2,12333333...

17 No diagrama abaixo, quais são os números que compõem o conjunto representado pela região vermelha?



18 Quantos números inteiros existem entre 5 e $5\sqrt{3}$?

19 (UEL-PR) Assinale a alternativa que apresenta um número irracional.

a) 0,13131... (dízima periódica)
b) $\frac{\pi}{2\pi}$
c) $\sqrt{64}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$

20 Um número real x só pode ser representado na forma decimal com infinitas casas decimais. Assinale a afirmação correta.

a) x é irracional.
b) x é racional.
c) x é irracional se for uma dízima periódica.
d) x é racional se for uma dízima não periódica.
e) x é irracional se for uma dízima não periódica.

21 Considerando que todas as medidas mencionadas a seguir estão na mesma unidade, assinale a afirmação correta.

a) Se o perímetro de um quadrado é representado por um número racional, então a medida da diagonal desse quadrado é representada por um número racional.
b) Se o perímetro de um quadrado é representado por um número irracional, então a medida da diagonal desse quadrado é representada por um número racional.
c) Se o perímetro de um quadrado é representado por um número irracional, então a medida da diagonal desse quadrado é representada por um número irracional.
d) É possível existir um quadrado que tenha o perímetro e a medida da diagonal representados por números racionais.
e) Se o perímetro de um quadrado é representado por um número racional, então a medida da diagonal desse quadrado é representada por um número irracional.

22 (Covest-PE) Se α denota um número irracional e r um número racional não nulo, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações a seguir, para quaisquer α e r nas condições enunciadas.

a) $r\alpha$ é um número irracional.
b) $\frac{r}{\alpha}$ é um número racional.
c) $\frac{\alpha}{r}$ é um número irracional.
d) $\alpha + r$ é um número racional.
e) $\alpha - r$ é um número irracional.

23 (UFPB) Das afirmações abaixo, destaque a(s) verdadeira(s).

I. Se x e y são números naturais quaisquer, então $x - y$ é um número natural.
II. Se x é um número racional qualquer e y é um número irracional qualquer, então $x + y$ é um número irracional.
III. Se x e y são números reais tais que $x \cdot y = 1$, então $x = 1$ ou $y = 1$.
IV. Se x e y são números irracionais quaisquer, então o produto $x \cdot y$ é um número irracional.

É (são) verdadeira(s) apenas:

a) II
b) III
c) II e III
d) I e IV
e) I, II e IV

24 (Fuvest-SP) Sabendo que x, y e z são números reais e $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$, então $x + y + z$ é igual a:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

25 Sendo A, B e C intervalos reais tais que $A \cup B =]-5, 8[$ e $A \cup C = [-3, 11[$, determine $A \cup (B \cap C)$.

26 (PUC-MG) Se $A =]-2; 3]$ e $B = [0; 5]$, então os números inteiros que estão em $B - A$ são:

a) -1 e 0
b) 1 e 0
c) 4 e 5
d) 3, 4 e 5
e) 0, 1, 2 e 3

27 (UFF-RJ) O número $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo:

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$
b) $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$
c) $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$
d) $]-1, 1[$
e) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right[$

28 (Fuvest-SP) O número x não pertence ao intervalo aberto de extremos -1 e 2. Sabe-se que $x < 0$ ou $x > 3$. Pode-se, então, concluir que:

a) $x \leqslant -1$ ou $x > 3$
b) $x \geqslant 2$ ou $x < 0$
c) $x \geqslant 2$ ou $x \leqslant -1$
d) $x > 3$
e) nenhuma das anteriores.

29 Considerando como unidade de comprimento o segmento abaixo, construa um segmento de reta de medida $\sqrt[4]{2}$ na unidade u.

Exercícios contextualizados

30 (Uepa) A Câmara dos Deputados reuniu-se extraordinariamente para decidir sobre a instalação de duas Comissões Parlamentares de Inquéritos (CPIs): a do **futebol** e a do **caixa 2**. Dos 320 deputados presentes, 190 votaram a favor da instalação da CPI do **futebol**; 200 pela instalação da CPI do **caixa 2**; 90 votaram a favor da instalação das duas comissões; e x deputados foram contrários à instalação das CPIs. O número x de deputados que votaram contra a instalação das CPIs é:

a) 160
b) 90
c) 70
d) 50
e) 20

31 (UFPB) A Secretaria de Saúde do Estado da Paraíba, em estudos recentes, observou que o número de pessoas acometidas de doenças como gripe e dengue tem assustado bastante a população paraibana. Em pesquisas realizadas com um universo de 700 pessoas, constatou-se que 10% tiveram gripe e dengue, 30% tiveram apenas gripe, e 50% tiveram gripe ou dengue. O número de pessoas que tiveram apenas dengue é:

a) 350
b) 280
c) 210
d) 140
e) 70

32 (PUC-RS) Em uma escola, numa turma de 20 estudantes, 16 jogam futebol, 12 jogam voleibol, e 2 não praticam esporte algum. O número de alunos dessa turma que joga somente futebol é:

a) 4 **b)** 6 **c)** 10 **d)** 12

33 (UFRN) Em um concurso público aplicado a 3.000 candidatos, 2.300 obtiveram notas superiores ou iguais a 4,0, e 2.700 obtiveram notas inferiores ou iguais a 6,0. Calcule o número de candidatos cujas notas foram:

a) maiores ou iguais a 4,0 e menores ou iguais a 6,0;

b) menores que 4,0.

34 (PUC-RJ) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos A ou B. Sabendo que 10 dessas pessoas não usam o produto B e que 2 dessas pessoas não usam o produto A, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos A e B?

35 No início do ano letivo, o professor de Literatura sugeriu aos 1.210 alunos do ensino médio a leitura de três obras de Machado de Assis: *Helena*, *Dom Casmurro* e *Quincas Borba*. No final do ano, o professor realizou uma sondagem, com os mesmos 1.210 alunos, em que cada aluno respondeu "sim" ou "não" a cada uma das seguintes perguntas:

I. Você leu o romance *Helena*, de Machado de Assis?

II. Você leu o romance *Dom Casmurro*, de Machado de Assis?

III. Você leu o romance *Quincas Borba*, de Machado de Assis?

O professor tabulou os resultados da seguinte maneira:

Resposta "sim"	Número de alunos
à pergunta I	487
à pergunta II	449
à pergunta III	465
às perguntas I e II simultaneamente	235
às perguntas I e III simultaneamente	222
às perguntas II e III simultaneamente	216
às perguntas I, II e III simultaneamente	150

De acordo com esses dados:

a) quantos alunos leram apenas o romance *Dom Casmurro?*

b) quantos alunos responderam "não" às três perguntas?

36 (UFMG) Uma pesquisa foi feita com um grupo de pessoas que frequentam, pelo menos, uma das três livrarias, A, B e C. Foram obtidos os seguintes dados:

- das 90 pessoas que frequentam a livraria A, 28 não frequentam as demais;
- das 84 pessoas que frequentam a livraria B, 26 não frequentam as demais;
- das 86 pessoas que frequentam a livraria C, 24 não frequentam as demais;
- 8 pessoas frequentam as três livrarias.

a) Determine o número de pessoas que frequentam apenas uma das livrarias.

b) Determine o número de pessoas que frequentam, pelo menos, duas livrarias.

c) Determine o número total de pessoas ouvidas nessa pesquisa.

37 (UFRJ) Um clube oferece a seus associados aulas de três modalidades de esporte: natação, tênis e futebol. Nenhum associado pôde se inscrever simultaneamente em tênis e futebol, pois, por problemas administrativos, as aulas desses dois esportes serão dadas no mesmo horário. Encerradas as inscrições, verificou-se que, dos 85 inscritos em natação, 50 só farão natação; o total de inscritos para as aulas de tênis foi 17 e, para futebol, 38; o número de inscritos só para as aulas de futebol excede em 10 o número de inscritos só para as de tênis. Quantos associados se inscreveram simultaneamente para aulas de futebol e natação?

38 (Fuvest-SP) Um caixa automático de banco só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário fez um saque de R$ 100,00. Pode-se concluir que entre as notas retiradas:

a) o número de notas de R$ 10,00 é par.

b) o número de notas de R$ 10,00 é ímpar.

c) o número de notas de R$ 5,00 é par.

d) o número de notas de R$ 5,00 é ímpar.

e) o número de notas de R$ 5,00 é par e o número de notas de R$ 10,00 é ímpar.

39 Os comprimentos, em decímetro, de dois caibros são expressos por números pares consecutivos. Um marceneiro cortou-os em pedaços de mesmo comprimento e de maior medida inteira possível, em decímetro, obtendo 67 pedaços. Supondo que não houve perda de madeira nos cortes, quais eram os comprimentos dos dois caibros?

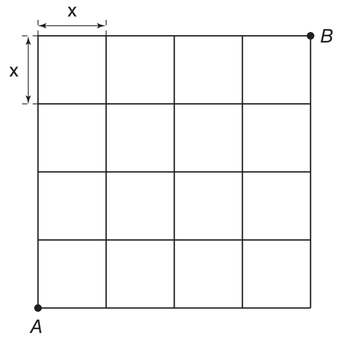
40 A vazão de uma torneira é x litros de água por minuto.

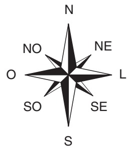
a) Atribua um valor a x de modo que em 1,8 minuto a quantidade de água, em litro, despejada pela torneira possa ser representada por um número inteiro.

b) Atribua um valor a x de modo que em 3 minutos a quantidade de água, em litro, despejada pela torneira possa ser representada por um número racional não inteiro.

c) Qualquer que seja o valor racional atribuído a x, pode-se concluir que, em 2,3 minutos, a quantidade de água despejada pela torneira pode ser representada por um número racional? Por quê?

41 O quadriculado a seguir é formado por quadradinhos de lado x cm. Partindo do ponto A e caminhando sobre os lados dos quadradinhos, sempre para o norte ou para o leste, chega-se ao ponto B.





a) Atribua um valor para x de modo que a distância percorrida de A até B, em centímetro, possa ser representada por um número inteiro.
b) Atribua um valor para x de modo que a distância percorrida de A até B, em centímetro, possa ser representada por um número racional não inteiro.
c) Atribua um valor para x de modo que a distância percorrida de A até B, em centímetro, possa ser representada por um número irracional.
d) Qualquer que seja o valor racional atribuído a x, pode-se concluir que a distância de A até B, em centímetro, pode ser expressa por um número racional? Por quê?
e) Qualquer que seja o valor irracional atribuído a x, pode-se concluir que a distância de A até B, em centímetro, pode ser expressa por um número irracional? Por quê?

42 Os números que mensuram grandezas do cotidiano estão restritos a padrões, como o custo de uma caneta, de um livro ou de um carro; a duração de um dia, de um ano ou de um século; a massa de um pacote de café, de um tijolo ou de uma pessoa etc. Pelo hábito de fazer comparações com esses padrões, temos dificuldade em comparar números "grandes", como a distância de 5 bilhões de quilômetros entre a Terra e um planeta anão, ou a distância de 41 trilhões de quilômetros entre a Terra e a estrela Alfa de Centauro. Por isso, para ter noção de comparações como essas, estudamos as medidas em uma escala menor, isto é, representamos a medida de uma das grandezas por uma unidade com a qual estamos habituados e, por meio de proporções, comparamos as medidas reais na escala adotada.
Se representarmos por um segmento de reta de 1 m a distância entre a Terra e a estrela Alfa de Centauro, a medida do segmento de reta que representa a distância entre a Terra e o planeta anão mede:
a) menos de 0,5 mm.
b) mais de 0,5 mm e menos de 1 mm.
c) mais de 1,0 mm e menos de 1,5 mm.
d) mais de 1,5 mm e menos de 2,0 mm.
e) mais de 2,0 mm e menos de 2,5 mm.

43 (Enem) Se compararmos a idade do planeta Terra, avaliada em 4,5 bilhões de anos ($4{,}5 \cdot 10^9$ anos), com a de uma pessoa de 45 anos, então, quando começaram a florescer os primeiros vegetais, a Terra já teria 42 anos. Ela só conviveu com o homem moderno nas últimas quatro horas e, há cerca de uma hora, viu-o começar a plantar e a colher. Há menos de um minuto, percebeu o ruído de máquinas e de indústrias e, como denuncia uma ONG de defesa do meio ambiente, foi nesses últimos sessenta segundos que se produziu todo o lixo do planeta!

I. O texto permite concluir que a agricultura começou a ser praticada há cerca de:
a) 365 anos.
b) 460 anos.
c) 900 anos.
d) 10.000 anos.
e) 460.000 anos.

II. Na teoria do Big Bang, o universo surgiu há cerca de 15 bilhões de anos, a partir da explosão e expansão de uma densíssima gota. De acordo com a escala proposta no texto, essa teoria situaria o início do universo há cerca de:
a) 100 anos.
b) 150 anos.
c) 1.000 anos
d) 1.500 anos.
e) 2.000 anos.

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Em uma escola, haverá um campeonato de basquete, futebol e vôlei. Uma pesquisa realizada com todos os alunos de uma das classes revelou que, precisamente:

- 12 alunos se inscreveram apenas em basquete, 8 apenas em futebol, e 7 apenas em vôlei;
- 23 alunos não se inscreveram em basquete, 25 não se inscreveram em futebol e 25 não se inscreveram em vôlei;
- 2 alunos se inscreveram nas três modalidades;
- 5 alunos não se inscreveram em nenhuma das modalidades e, portanto, não vão participar do campeonato.

a) Dos alunos dessa classe inscritos no campeonato, quantos se inscreveram em pelo menos duas modalidades?

b) Qual é o número de alunos da classe?

Resolução

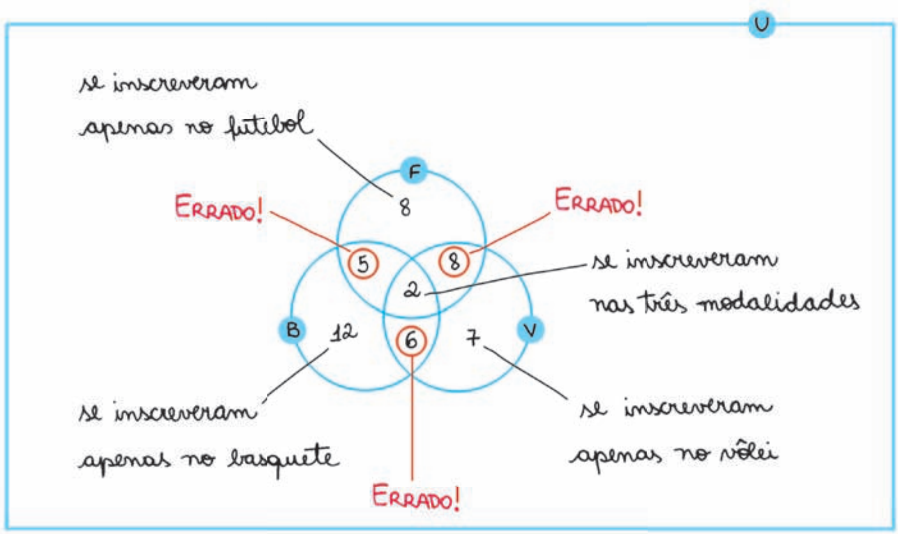
Sejam:

U: conjunto universo dos alunos da classe.

B: conjunto dos alunos que se inscreveram em basquete.

F: conjunto dos alunos que se inscreveram em futebol.

V: conjunto dos alunos que se inscreveram em vôlei.



a) Número de alunos que se inscreveram em pelo menos duas modalidades:

ERRADO!

$6 + 5 + 8 + 2 = 21$

b) Número de alunos da classe:

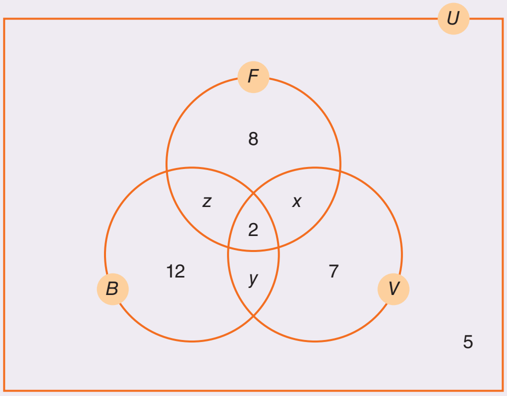
ERRADO!

$12 + 8 + 7 + 6 + 5 + 8 + 2 = 48$

Comentário

Há um erro na resolução, pois, ao indicar no diagrama os 23 alunos que não se inscreveram em basquete, os 25 que não se inscreveram em futebol e os 25 que não se inscreveram em vôlei, o estudante não considerou os 5 alunos que não se inscreveram em nenhuma das três modalidades.

Para preencher o diagrama corretamente, o estudante deveria ter feito assim:



$$5 + 7 + 8 + x = 23$$
$$5 + 12 + 7 + y = 25$$
$$5 + 12 + 8 + z = 25$$

Agora, refaça a resolução corrigindo-a.

Capítulo 2

Introdução ao estudo das funções

O movimento das marés é um fenômeno da natureza bastante conhecido. As pessoas que moram à beira do mar e, especialmente, as que dele vivem, como os pescadores, são capazes de prever esse movimento em função das posições da Lua e do Sol. Embora as previsões dessas pessoas sejam, em grande parte, intuitivas, a Física demonstra que, de fato, o Sol e a Lua exercem uma força gravitacional sobre a Terra, que varia de acordo com sua posição em relação à Terra. Assim, o movimento das marés pode ser descrito em função da força gravitacional.

As contínuas transformações de fenômenos naturais decorrentes de outros caracterizam um aspecto de interdependência. No desenvolvimento científico, as ideias de transformação e interdependência levaram ao conceito de função.

2.1 Sistemas de coordenadas

Adotar um sistema de coordenadas facilita a localização de pontos.

2.2 O conceito de função

Ao conhecer a interdependência de duas grandezas, podemos descrever a relação entre elas por meio de uma lei matemática, que pode representar uma função.

2.3 Gráfico de uma função

Em meados do século XIV, o matemático francês Nicole Oresme, ao estudar o movimento de um corpo, teve a ideia de relacionar as grandezas por meio de um gráfico.

2.4 Análise de funções

A partir da representação de uma função, podemos estudar suas propriedades, como a existência de raízes, seu crescimento, seu decrescimento ou sua constância e sua variação de sinal.

Para pensar

1. Dê exemplos de fenômenos da natureza ou situações do dia a dia em que a medida de uma grandeza dependa de outra.
2. O preço do quilograma de uma espécie de peixe é R$ 15,00. Sabendo que uma pessoa pagou y reais por x quilogramas desse peixe, formule uma equação relacionando x e y.

Seção 2.1

Sistemas de coordenadas

Objetivo

- **Representar** pontos no plano cartesiano.

Termos e conceitos

- sistema cartesiano ortogonal
- par ordenado

Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

Em uma viagem de férias, um automóvel sofre um pequeno acidente em uma rodovia. O motorista, imediatamente, liga para a companhia de seguros.

O atendente, depois de obter as informações necessárias, pergunta:

— Em que ponto da rodovia ocorreu o acidente?

O motorista, olhando para uma marca de quilometragem ao lado da rodovia, responde:

— Exatamente no quilômetro 250.

Essa informação do motorista fornece a **coordenada** do ponto em que ele está na rodovia.

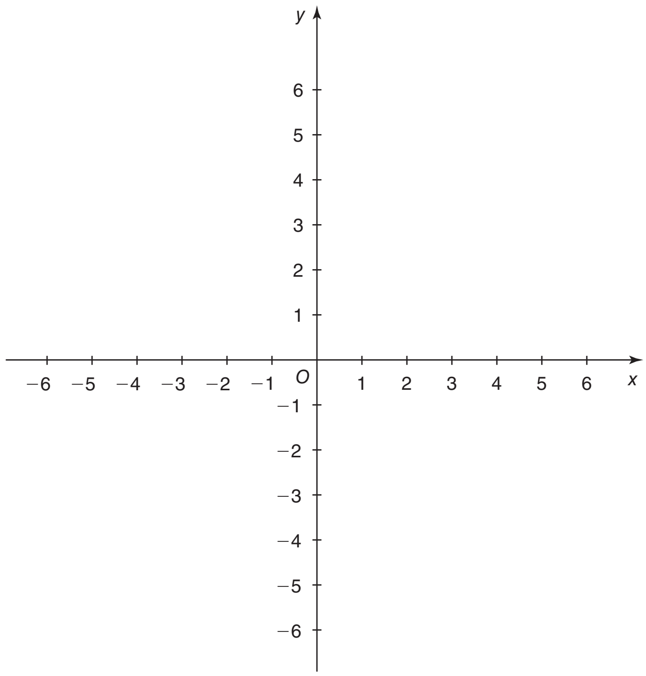
Em muitas outras situações do cotidiano, necessitamos de um sistema de coordenadas. Por exemplo:

- Um ponto da superfície da Terra é determinado por duas coordenadas: a latitude e a longitude.
- Um ponto do espaço aéreo é determinado por três coordenadas: a latitude, a longitude e a altitude.

Do mesmo modo, para localizar um ponto em um plano, podemos adotar um sistema de coordenadas. O mais usual é o **sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**, que apresentaremos a seguir.

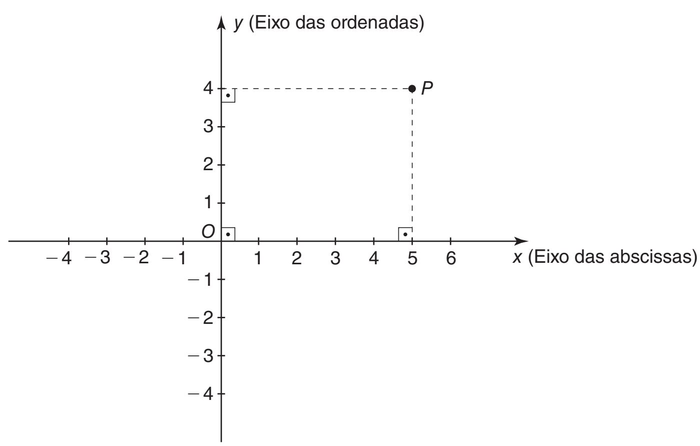
A palavra **ortogonal** tem origem no latim (*orthogōnius*) e significa "que forma ângulo reto". Assim, esse sistema é **ortogonal** porque os eixos formam ângulos retos entre si.

Para localizar um ponto no plano, podemos fixar nesse plano um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, que é formado por dois eixos, *Ox* e *Oy*, perpendiculares entre si no ponto *O*.



René Descartes (1596-1650). Embora o conceito de sistema de coordenadas já fosse utilizado por outros matemáticos, coube a Descartes a sua formalização, na obra *La Géométrie* (1637).

Por exemplo, para determinar as coordenadas do ponto *P* da figura a seguir, traçamos por *P* as perpendiculares a *Ox* e *Oy*, obtendo, nesses eixos, dois números chamados de **abscissa** e **ordenada** do ponto *P*, respectivamente.



No exemplo, as **coordenadas** do ponto *P* são 5 e 4. A **abscissa** é 5, e a **ordenada** é 4. Indicamos esse fato por $P(5, 4)$.

A representação $(5, 4)$ é chamada de "**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4".

Generalidades

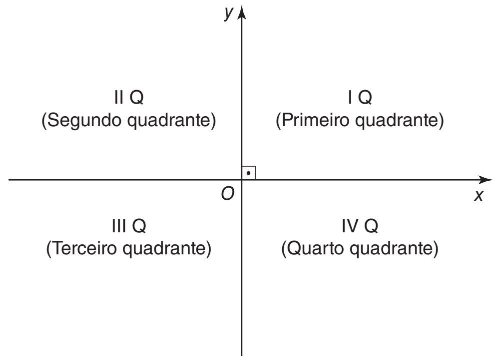
1. Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é:

$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ e $b = d$

Por exemplo:

$(a, 8) = (7, y) \iff a = 7$ e $y = 8$

2. Os eixos Ox e Oy, chamados de **eixos coordenados**, separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumerados conforme a figura:



$P(a, b) \in \text{I Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0$

$P(a, b) \in \text{II Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0$

$P(a, b) \in \text{III Q} \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0$

$P(a, b) \in \text{IV Q} \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0$

Por exemplo:

$(4, 2) \in \text{I Q}; \left(-\frac{1}{2}, 9\right) \in \text{II Q}; (-3, -5) \in \text{III Q}$ e $\left(\frac{3}{2}, -1\right) \in \text{IV Q}$

Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

3. Todo ponto de abscissa nula (igual a zero) pertence ao eixo Oy, e todo ponto de ordenada nula (igual a zero) pertence ao eixo Ox.

Por exemplo:

$(0, -2) \in Oy$ e $(5, 0) \in Ox$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

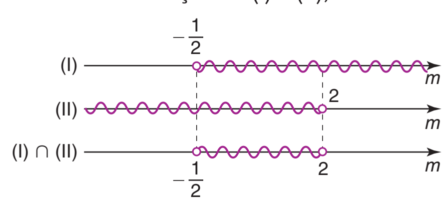
1 Obter os valores reais de m de modo que o ponto $P(2m + 1, 3m - 6)$ pertença ao quarto quadrante.

Resolução

O ponto P pertence ao quarto quadrante se, e somente se:

$$\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ 3m - 6 < 0 \end{cases} \text{ ou seja: } \begin{cases} m > -\frac{1}{2} & \text{(I)} \\ m < 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Efetuando a intersecção de (I) e (II), temos:



Portanto, concluímos que: $-\frac{1}{2} < m < 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Represente, no plano cartesiano, os seguintes pontos:
$A(4, 2)$ $B(2, 4)$ $C(-2, 5)$ $D(5, -2)$ $E(-4, -1)$ $F(-1, 4)$ $G(-6, 0)$ $H(0, -6)$ $I(0, 0)$

2 Para que valores reais de p o ponto $A\left(p - 7, \frac{4}{5}\right)$ pertence ao eixo das ordenadas?

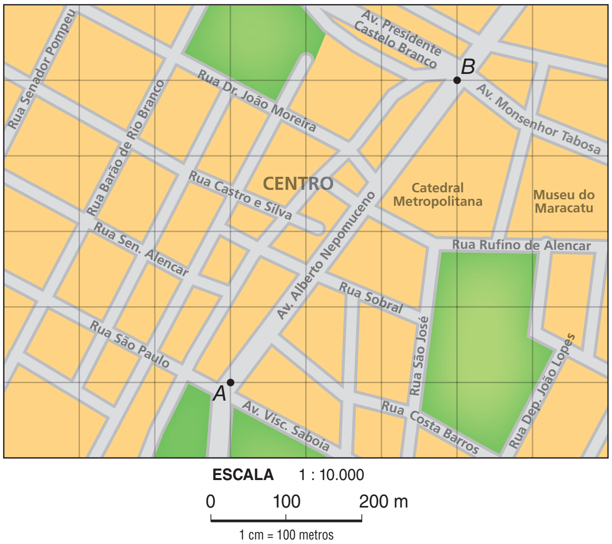
3 Para que valores reais de k o ponto $B(5k + 15, 4k^2 - 36)$ pertence ao eixo das abscissas?

4 Para que valores reais de r o ponto $C\left(\frac{2}{3}, r - 2\right)$ pertence ao 1º quadrante?

5 Para que valores reais de m o ponto $C(5m - 8, m + 2)$ pertence ao 2º quadrante?

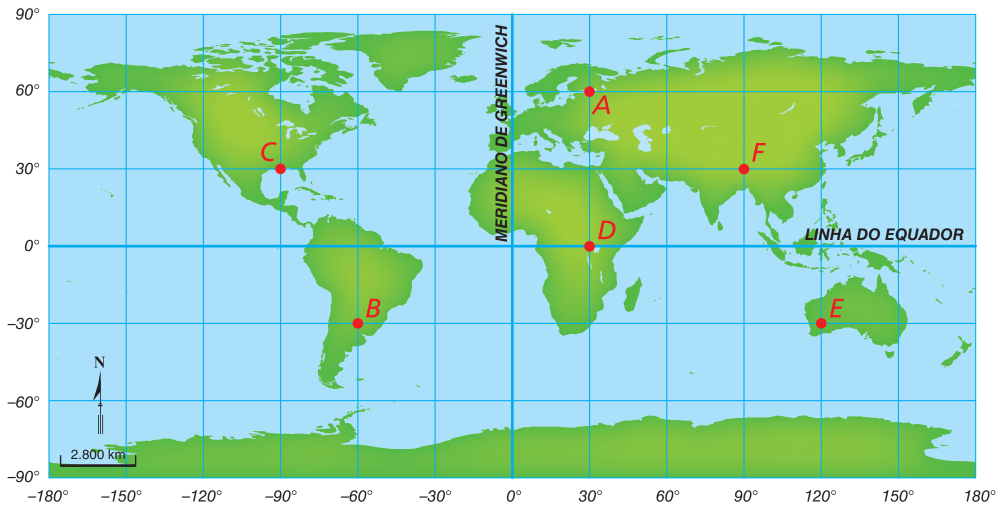
6 Determine os números reais a e b de modo que $(3a - 2b, a + b) = (10, 11)$.

7 O mapa ao lado está na escala 1 : 10.000. Sabendo que o quadriculado é formado por quadradinhos de 1 cm de lado, calcule a distância real entre os pontos da região representada, que correspondem no mapa a A e B.



Fonte: *Guia Quatro Rodas — Brasil*. São Paulo: Abril, 2010.

8 Um ponto P sobre a superfície da Terra é determinado por dois números chamados **latitude** e **longitude**. A latitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um meridiano ligando o ponto P à linha do equador. A longitude de P é a medida em grau do menor arco possível sobre um paralelo terrestre ligando o ponto P ao meridiano de Greenwich. Adotam-se como positivas a latitude ao norte do equador e a longitude a leste do meridiano de Greenwich, e como negativas a latitude ao sul do equador e a longitude a oeste do meridiano de Greenwich. Um ponto sobre o equador tem latitude 0° e um ponto sobre o meridiano de Greenwich tem longitude 0°. Indica-se o ponto P pelo par ordenado (x, y), sendo x a latitude e y a longitude.
O mapa abaixo é uma projeção plana da superfície terrestre.



Fonte: FERREIRA, Graça Maria Lemos. *Atlas geográfico*: espaço mundial. São Paulo: Moderna, 2003.

I. Entre os pontos assinalados em vermelho no mapa, determine as coordenadas do ponto:
- **a)** assinalado na região que corresponde à América do Sul.
- **b)** assinalado na região que corresponde à África.
- **c)** assinalado na região que corresponde à América do Norte.
- **d)** assinalado na região que corresponde à China.
- **e)** assinalado na região que corresponde à Europa.
- **f)** assinalado na região que corresponde à Austrália.

II. Em que continente está o ponto de latitude 60° norte e longitude 120° leste?

Resolva os exercícios complementares 1 a 4 e 26.

Seção 2.2

O conceito de função

Objetivos

- **Reconhecer** uma função em situações do cotidiano.
- **Identificar** o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função.
- **Determinar** a imagem de um elemento do domínio.

Termos e conceitos

- função
- domínio
- contradomínio
- conjunto imagem

A noção de função no cotidiano

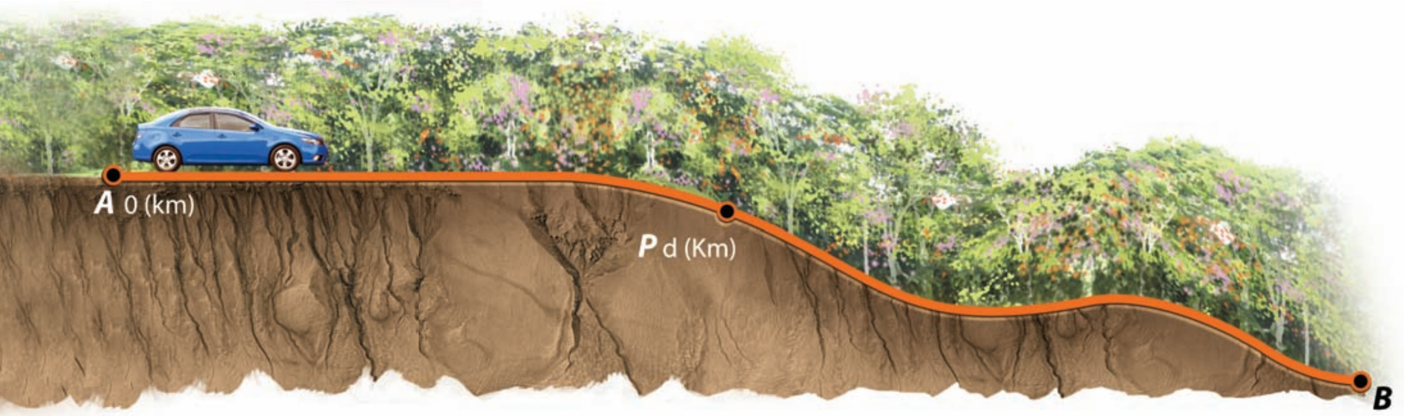
Usamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio etc.

Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.

São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e vazão.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas. Por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão no mar depende da profundidade. Para estudar essas relações de dependência, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas.

Para exemplificar, vamos supor que um automóvel percorra um trecho *AB* de uma estrada à velocidade constante de 80 km/h.



Considerando *A* como ponto de partida, vamos associar a ele a marca 0 km. A cada ponto *P* do trecho *AB*, vamos associar a marca *d* km, que indica a distância de *A* até *P*, medida ao longo da trajetória.

Que distância terá percorrido o automóvel após 2 horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, a distância *d* percorrida por ele, em quilômetro, após 2 horas, será:

$$d = 80 \cdot 2 \Rightarrow d = 160$$

Raciocinando de maneira análoga, podemos construir a tabela abaixo, que expressa a distância *d*, percorrida pelo automóvel, após *t* horas de sua partida.

t (hora)	*d* (quilômetro)
1	80
2	160
3	240
4	320
⋮	⋮

Note que, a cada valor de t, associamos um único valor de d. Por isso, dizemos que a distância d é dada em **função** do tempo.

Embora seja útil, a tabela da página anterior apresenta limitações, pois, por mais que acrescentemos valores a t, sempre haverá valores a ser acrescentados. Por exemplo, a tabela não contém uma linha correspondendo a $t = 2{,}5$ h e, mesmo que acrescentássemos essa linha, não haveria uma linha correspondendo a $t = 2{,}51$ h, e assim por diante. Assim, para representar todos os tempos decorridos e as respectivas distâncias, é mais adequado usar uma equação que relacione a distância percorrida e o tempo; essa equação é:

$$d = 80t$$

Observe que essa equação substitui com vantagens a tabela anterior, pois fornece a distância percorrida em qualquer tempo após a partida, e vice-versa:

- Para determinar a distância d, em quilômetro, após 2,5 horas da partida, basta substituir t por 2,5:

$$d = 80 \cdot 2{,}5 \Rightarrow d = 200$$

- Para determinar o tempo transcorrido, em hora, quando a distância percorrida pelo automóvel é 400 km, basta substituir d por 400:

$$400 = 80t \Rightarrow t = 5$$

Da mesma maneira que relacionamos as grandezas d e t, podemos relacionar outras grandezas, de modo que a **cada valor** de uma seja associado **um único valor** da outra. Relações como essas são chamadas de **funções**.

Exemplos

a) Em um termômetro, a temperatura é dada em **função** do comprimento da coluna de mercúrio (ou de álcool), isto é, a cada comprimento ℓ da coluna está associada uma **única** temperatura.

b) O preço de uma peça de tecido é dado em **função** da metragem desse tecido, isto é, a cada metragem associa-se um **único** preço.

c) Ao despejar água em uma piscina, o nível da superfície da água em relação ao fundo da piscina é dado em **função** da quantidade de água despejada, isto é, para cada quantidade de água despejada é associado um **único** nível da superfície da água.

Dizemos que uma variável *y* é dada em **função** de uma variável *x* se, e somente se, a cada valor de *x* corresponde um único valor de *y*.

A condição que estabelece a correspondência entre os valores de *x* e *y* é chamada de **lei de associação**, ou simplesmente lei entre *x* e *y*. Quando possível, essa lei é expressa por uma equação.

Notas:

1. Podemos abreviar a expressão "*y* é dada em função de *x*" por "*y* é função de *x*".
2. No contexto das funções numéricas, define-se **variável** como um representante genérico dos elementos de um conjunto de números. Usualmente, indicamos uma variável por uma letra. Por exemplo, ao dizer que *x* é uma variável real, estamos afirmando que *x* simboliza um número real qualquer.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Ao completar o tanque de seu carro em um posto de abastecimento, o motorista olhou para a bomba e observou que havia colocado 26 litros de gasolina e que o total a pagar era R$ 72,80.

a) Determinar o valor que o motorista teria pago se colocasse apenas 20 litros de gasolina.

b) Considerando o montante de gasolina despejada no tanque em cada instante do abastecimento, o preço a pagar é função desse montante? Por quê?

c) Indicando por y o preço a pagar por x litros de gasolina, formular uma equação que relacione x e y.

Resolução

a) O preço, em real, do litro de gasolina é o quociente de 72,80 por 26, que é 2,80. Logo, por 20 litros de gasolina, o motorista pagaria, em real, $20 \cdot 2{,}80$, ou seja, R$ 56,00.

b) O preço a pagar é função do montante de gasolina, pois, para cada montante de gasolina despejado no tanque, associa-se um único preço.

c) Como o preço do litro de gasolina é R$ 2,80, o preço y de x litros é dado por: $y = 2{,}80 \cdot x$

3 Um edifício tem dois apartamentos por andar, inclusive no andar térreo. Os apartamentos são numerados do seguinte modo: os do andar térreo têm números 01 e 02, os do primeiro andar têm números 11 e 12, os do segundo andar têm números 21 e 22, e assim por diante.

Considerando a correspondência que associa cada número de andar a um número de apartamento, responder às questões.

a) O andar de número 3 está associado a que números de apartamento?

b) A numeração dos apartamentos é dada em função da numeração dos andares? Por quê?

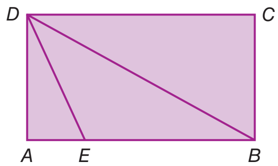
Resolução

a) O andar de número 3 está associado aos números de apartamento 31 e 32.

b) A numeração dos apartamentos não é função da numeração dos andares, pois, para cada número de andar, estão associados dois números de apartamento. Nesse caso, todos os números de andar estão associados a mais de um número de apartamento, mas bastaria que houvesse **pelo menos um** número de andar associado a mais de um valor para que a correspondência não fosse função.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 A figura $ABCD$ é um retângulo tal que: $BD = 6$ cm, $AD = 3$ cm, E é um ponto do lado $\overline{AB}$ e $AE = x$.



Determine a lei que expressa a área y do triângulo BDE em função de x.

10 Um metalúrgico recebe R$ 12,00 por hora trabalhada até o limite de 44 horas semanais, sendo acrescidos 30% no salário/hora a cada hora que exceder o limite.

a) Complete a tabela:

Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R$)
20	
32	
44	
46	
50	

b) O ganho pelas horas trabalhadas é uma função do número de horas semanais trabalhadas? Por quê?

c) Indicando por y o ganho por x horas de trabalho semanal, com $x \leq 44$, elabore uma equação que expresse y em função de x.

d) Indicando por y o ganho por x horas de trabalho semanal, com $x > 44$, elabore uma equação que expresse y em função de x.

11 Um consumidor comprou um automóvel por R$ 20.000,00, constatando que, ao final de cada ano de uso, o valor de mercado do veículo diminui para 90% do valor de um ano atrás. Veja na tabela a seguir os valores do automóvel até o final do 2º ano.

Tempo de uso do automóvel (ano)	Valor de mercado (R$)
0	20.000
1	$0{,}9 \cdot 20.000$
2	$0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 20.000 = (0{,}9)^2 \cdot 20.000$

a) Determine o valor do automóvel ao final de 3 anos de uso.

b) Determine o valor do automóvel ao final de x anos de uso.

c) Indicando por y o valor de mercado do automóvel com x anos de uso, obtenha uma equação que relacione y e x.

d) O valor de mercado do automóvel é dado em função do tempo de uso? Por quê?

12 Para encher uma piscina, que estava vazia, foi aberta uma torneira cuja vazão é de 26 litros por minuto.

a) Indicando por y o volume em litro de água despejada pela torneira em x minutos, obtenha uma equação que relacione x e y.

b) O volume de água despejada é função do tempo? Por quê?

13 Cada ônibus de uma companhia de viação tem 36 lugares, numerados de 1 a 36. Os 50 ônibus da companhia são numerados de 1.001 a 1.050.

Considere a correspondência que associa cada número de assento a um número de ônibus.

a) O número de assento 25 está associado a que número(s)?

b) A numeração dos ônibus é dada em função da numeração dos assentos? Por quê?

14 Em um termômetro, a variação do comprimento da coluna de mercúrio é proporcional à variação da temperatura, obedecendo à razão $\frac{8}{5}$; por exemplo, o comprimento da coluna de mercúrio aumenta 8 mm para cada 5 °C de aumento na temperatura; e diminui 8 mm para cada 5 °C de diminuição na temperatura. Sabe-se que, à temperatura de 0 °C, o comprimento da coluna é 40 mm.

a) Construa uma tabela apresentando os valores, em grau Celsius (°C), e os respectivos comprimentos da coluna, em milímetro, com os registros da temperatura variando de 5 °C em 5 °C desde -15 °C até 15 °C.

b) O comprimento da coluna de mercúrio é dado em função da temperatura? Por quê?

c) Indicando por y o comprimento da coluna de mercúrio, em milímetro, para cada temperatura x, em grau Celsius, formule uma equação que relacione x e y.

Resolva os exercícios complementares 27 a 29.

Formalização do conceito de função

Vimos que uma função associa cada valor de uma grandeza a um único valor de outra grandeza. Por exemplo: a cada medida de tempo associa-se uma única distância percorrida por um automóvel; a cada comprimento da coluna de mercúrio de um termômetro associa-se uma única temperatura; a cada metragem de tecido associa-se um único preço. Desse modo, podemos considerar uma função como um conjunto de pares ordenados de números reais: (tempo, distância); (comprimento, temperatura); (metragem, preço).

Essa ideia permite a generalização do conceito de função, que depende do conceito de relação entre conjuntos definido a seguir.

Quando uma torneira é aberta, o volume de água despejada é função do tempo, pois para cada medida de tempo associa-se um único volume de água.

Relação entre conjuntos

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, chama-se **relação** de A em B qualquer conjunto de pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $x \in B$.

Exemplo

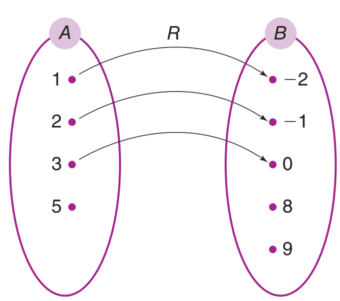
Sendo $A = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 8, 9\}$, a relação R de A em B, que associa um elemento x de A ao elemento $x - 3$ de B, pode ser obtida pela tabela:

x	$x - 3$
1	-2
2	-1
3	0
5	?

Observe que o elemento 5 de A não tem correspondente em B, pois $5 - 3 = 2$ e 2 não pertence a B. Assim, a relação R é dada por:

$$R = \{(1, -2), (2, -1), (3, 0)\}$$

Outra forma de representar essa relação é pelo diagrama de flechas a seguir:

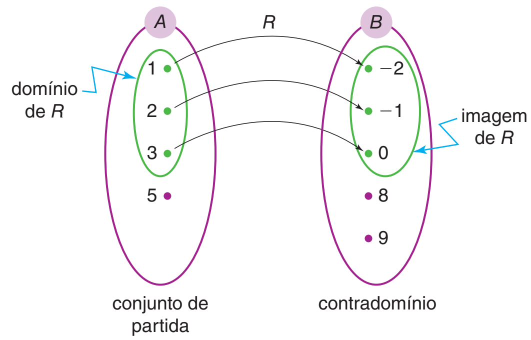


Para qualquer relação de A em B:

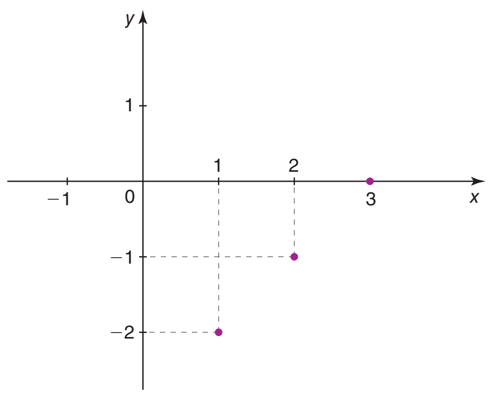
- o conjunto A é chamado de **conjunto de partida** da relação;
- o conjunto B é chamado de **contradomínio** da relação e é simbolizado por $CD(R)$;

- o conjunto formado pelos elementos de A que têm correspondentes em B, através de R, é chamado de **domínio** da relação e é simbolizado por $D(R)$;
- o conjunto formado pelos elementos de B que têm correspondentes em A, através de R, é chamado de **conjunto imagem** da relação e é simbolizado por $Im(R)$.

Para o exemplo anterior, temos $D(R) = \{1, 2, 3\}$ e $Im(R) = \{-2, -1, 0\}$.



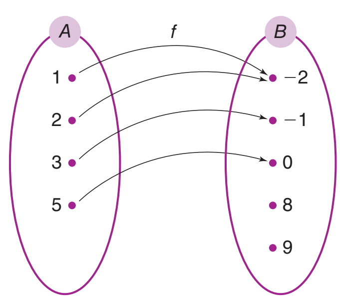
Também podemos representar essa relação por um gráfico cartesiano, que é formado pelos pontos determinados pelos pares ordenados da relação. Veja abaixo.



Com base na definição de relação, formalizamos, a seguir, o conceito de função.

Função

Vamos considerar uma relação f de A em B tal que **qualquer** elemento de A esteja associado, através de f, a um único elemento de B:



Essa propriedade caracteriza um tipo particular de relação, ao qual damos o nome de **função** de A em B. Assim, definimos:

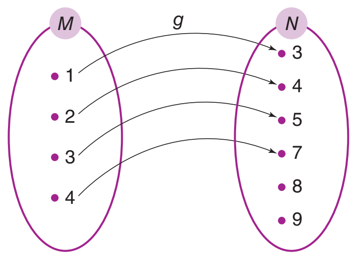
> Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma relação f de A em B é **função** se, e somente se, qualquer elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B.
> Adotaremos a notação $\boldsymbol{f: A \rightarrow B}$ para indicar que f é uma função de A em B.

Destacamos que, como uma função $f: A \longrightarrow B$ é um tipo particular de relação, temos:

- o **domínio** da função é o próprio conjunto de partida, isto é, $D(f) = A$;
- o **contradomínio** da função é o conjunto $CD(f) = B$;
- o **conjunto imagem** da função é o conjunto $Im(f) = \{y \in B \mid (x, y) \in f\}$.

Exemplos

a) A relação g, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de g, um único correspondente em N.



$g: M \longrightarrow N$

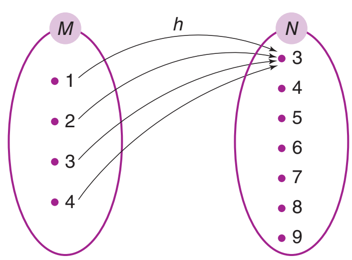
O domínio $D(g)$, o contradomínio $CD(g)$ e o conjunto imagem $Im(g)$ dessa função são dados por:

$D(g) = M = \{1, 2, 3, 4\}$

$CD(g) = N = \{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

$Im(g) = \{3, 4, 5, 7\}$

b) A relação h, abaixo, é uma função de M em N, pois qualquer elemento de M tem, através de h, um único correspondente em N.



$h: M \longrightarrow N$

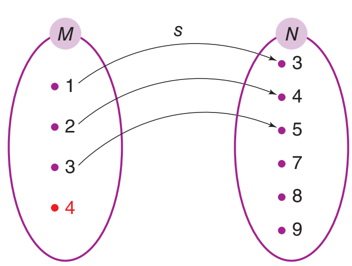
$D(h) = M = \{1, 2, 3, 4\}$

$CD(h) = N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

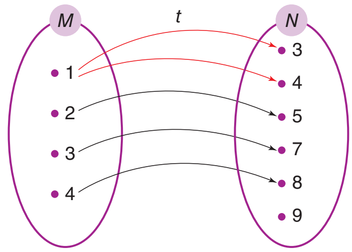
$Im(h) = \{3\}$

Contraexemplos

a) A relação s, abaixo, não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 4) que não está associado, através de s, a algum elemento de N.



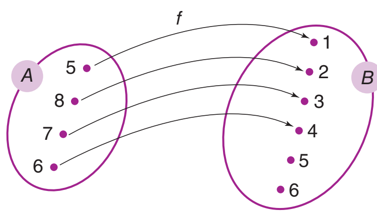
b) A relação t, abaixo, não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 1) que está associado, através de t, a mais de um elemento de N.



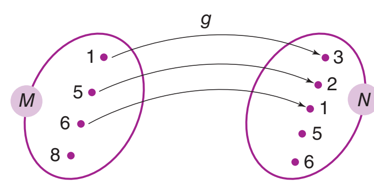
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4 Quais das seguintes correspondências, f, g, h ou t, representam funções?

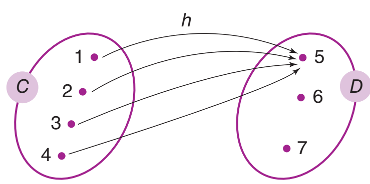
a)



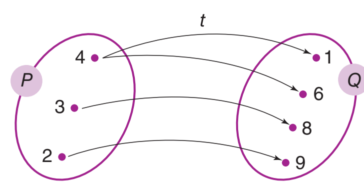
c)



b)



d)



Resolução

a) f é função de A em B, pois todo elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B.

b) h é função de C em D, pois todo elemento de C está associado, através de f, a um único elemento de D.

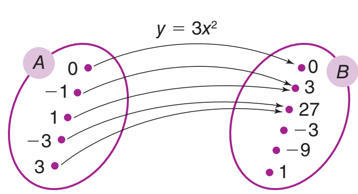
c) g não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 8) que não está associado, através de g, a algum elemento de N.

d) t não é função de P em Q, pois existe elemento em P (o elemento 4) associado, através de t, a mais de um elemento de Q.

5 Dados os conjuntos $A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$ e $B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função f dada pela correspondência $y = 3x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução

Representamos a função por um diagrama de flechas:



Assim, temos:

$D(f) = A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$

$CD(f) = B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$

$Im(f) = \{0, 3, 27\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15 Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 8\}$, quais das relações apresentadas a seguir são funções de A em B?

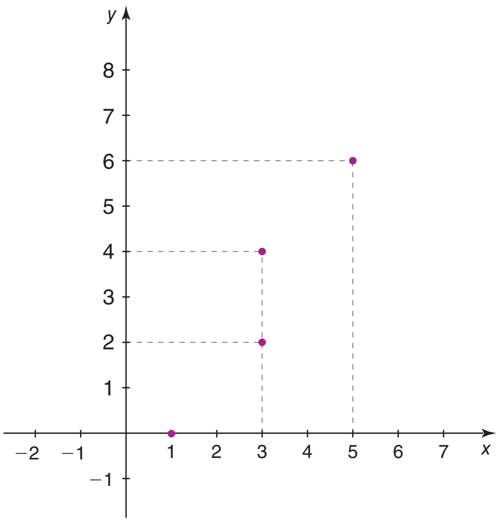
a) $y = \frac{1}{x}$, em que $x \in A$ e $y \in B$

b) $y = x^2 + 1$, em que $x \in A$ e $y \in B$

c) $y^2 = x^2$, em que $x \in A$ e $y \in B$

d) $y = x^3$, em que $x \in A$ e $y \in B$

16 O gráfico abaixo representa uma relação h de $M = \{1, 3, 5\}$ em $N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

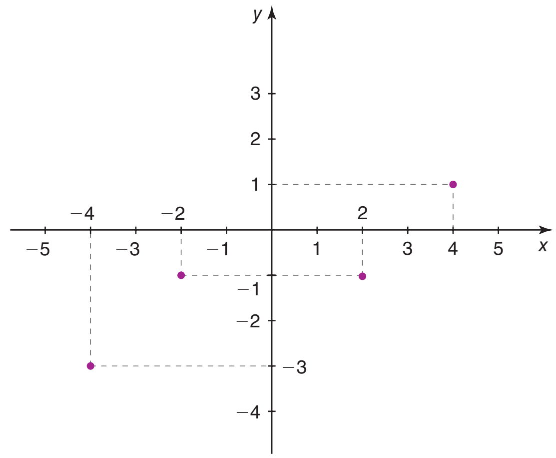


a) Construir o diagrama de flechas dessa relação.

b) Determinar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem dessa relação.

c) Essa relação é uma função de M em N? Por quê?

17 O gráfico abaixo representa uma relação s de $P = \{-4, -2, 2, 4\}$ em $Q = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$.



a) Construir o diagrama de flechas dessa relação.

b) Determinar o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem dessa relação.

c) Essa relação é uma função de P em Q? Por quê?

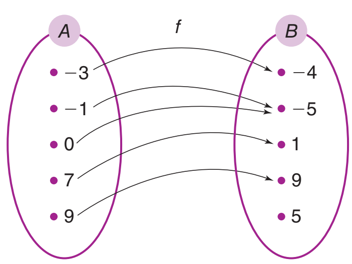
Imagem de *x* pela função *f*

Se (x, y) pertence a uma função f, a ordenada y é chamada de **imagem de *x* pela função *f*** (ou imagem de x através de f). Indicaremos esse fato por $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Vamos estudar algumas particularidades dessa imagem.

Imagem de um elemento pelo diagrama de flechas

Considere a função f descrita pelo diagrama de flechas:



Se um elemento y de B estiver associado, através de f, a um elemento x de A, diremos que y é a imagem de x através de f.

Assim, temos:

$-4 = f(-3)$, ou seja, -4 é imagem de -3 através de f

$-5 = f(-1)$, ou seja, -5 é imagem de -1 através de f

$-5 = f(0)$, ou seja, -5 é imagem de 0 através de f

$1 = f(7)$, ou seja, 1 é imagem de 7 através de f

$9 = f(9)$, ou seja, 9 é imagem de 9 através de f

Imagem de um elemento pela lei $y = f(x)$

Vamos considerar a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que cada elemento x do domínio $\mathbb{R}$ é associado a um único elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ através da lei $f(x) = 5x - 2$.

A lei $f(x) = 5x - 2$ informa que a imagem de cada x do domínio é o número $5x - 2$ do contradomínio. Assim, temos, por exemplo:

- a imagem do elemento 6, através de f, é: $f(6) = 5 \cdot 6 - 2 \Rightarrow f(6) = 28$
  Logo, o par ordenado $(6, 28)$ pertence a f.
- a imagem do elemento $\frac{3}{5}$, através de f, é: $f\left(\frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{3}{5} - 2 \Rightarrow f\left(\frac{3}{8}\right) = 1$

  Logo, o par ordenado $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ pertence a f.

Nota:

Como o símbolo $f(x)$ representa a ordenada do ponto de abscissa x, em vez de escrever $f(x) = 5x - 2$, podemos escrever $y = 5x - 2$, ou seja, o símbolo $f(x)$ pode ser substituído por y, e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6 Sendo a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$, qual é o elemento do domínio de f que possui como imagem o número 6?

Resolução

Sendo a o elemento procurado, devemos ter $f(a) = 6$, isto é:

$$\frac{3a}{a - 2} = 6$$

Assim, obtemos:

$$3a = 6a - 12 \Rightarrow 3a = 12$$

Portanto, $a = 4$.

7 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é tal que $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$ e $f(1) = 9$. Calcular:

a) $f(2)$

b) $f(0)$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Resolução

a) Podemos escrever $2 = 1 + 1$; logo:

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) \cdot f(1) = 9 \cdot 9 \Rightarrow f(2) = 81$$

b) Podemos escrever $0 = 0 + 0$; logo:

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0)$$

Por hipótese, $f(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, temos:

$$f(0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow \frac{f(0)}{f(0)} = f(0)$$

$\therefore f(0) = 1$ ($\therefore$ lemos "portanto".)

c) Podemos escrever $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$; logo, temos:

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

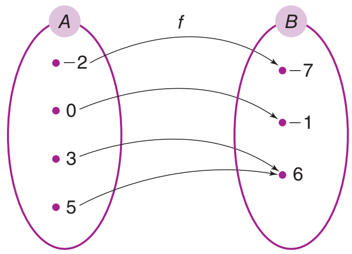
Por hipótese, $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}_+^*$ e $f(1) = 9$; logo, temos:

$$f(1) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \Rightarrow 9 = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 O diagrama abaixo representa uma função $f: A \to B$.



Calcule:

a) $f(-2)$ **b)** $f(0)$ **c)** $f(3) + f(5)$

19 Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5 - x$, calcule:

a) $f(0)$ **b)** $f(3)$ **c)** $f(-2)$ **d)** $f\left(\frac{1}{2}\right)$

20 Sendo a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$, calcule:

a) $f(2)$ **b)** $f(-2)$ **c)** $f\left(\frac{1}{4}\right)$ **d)** $f\left(-\frac{1}{4}\right)$

21 Seja g a função de domínio $A = \{1, -1, 2, -2, 0, 3\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^3 - x + 1$. Determine o conjunto imagem de g.

22 Considere a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x}$. Que números do domínio de f possuem como imagem o número 4?

23 Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = \frac{x - 1}{x + 5}$ e $Im(f) = \left\{2, 0, -\frac{41}{7}\right\}$. Determine o domínio A.

24 Um fazendeiro estabelece o preço da saca de café, em função da quantidade de sacas adquiridas pelo comprador, usando a equação $P(x) = 50 + \frac{200}{x}$, em que P é o preço da saca em dólares e x é o número de sacas vendidas.

a) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir cem sacas?

b) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir duzentas sacas?

c) Sabendo que um comprador pagou 54 dólares por saca, quantas sacas ele comprou?

25 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax^2 + bx$, em que a e b são constantes reais. Determine os números reais a e b sabendo que $f(2) = 16$ e $f(-1) = 7$.

26 (IMT-SP) Uma função satisfaz a relação $f(2x) = 2f(x) + f(2)$ para qualquer valor real de x. Sabendo-se que $f(4) = 6$, calcule $f(16)$.

27 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é tal que $f(3) = 1$ e $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, $\forall\, a, b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(1)$ **b)** $f(9)$ **c)** $f(27)$ **d)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$ **e)** $f\left(\sqrt{3}\right)$

28 (UFSM-RS) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, em que $v(t)$ é o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando $t = 12$ meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estavam vivos no 10º mês era:

a) 80 **b)** 100 **c)** 120 **d)** 220 **e)** 300

Resolva os exercícios complementares 5 a 7 e 30 a 33.

Função real de variável real

Toda função cujos domínio e contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de **função real de variável real**. Por exemplo, a função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 2x - 5$ é uma função real de variável real, pois seu domínio ($\mathbb{N}$) e seu contradomínio ($\mathbb{Z}$) são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Estudo do domínio de uma função real de variável real

Uma forma de descrever precisamente uma função f é explicitar seu domínio, seu contradomínio e a lei que associa cada x do domínio ao correspondente y do contradomínio. Há casos, porém, em que a descrição de uma função pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$, ficando subentendidos o domínio e o contradomínio. Para esses casos, podemos estabelecer o seguinte:

Uma função f pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$ se, e somente se, o domínio de f for o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ em que f pode ser definida e o contradomínio de f for $\mathbb{R}$.

Assim, dada a função $y = f(x)$, seu domínio $D(f)$ e seu contradomínio $CD(f)$ são os conjuntos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \text{ e } CD(f) = \mathbb{R}$$

Exemplos

- Considere a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Como o domínio e o contradomínio não foram explicitados, admitimos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, pois:

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0$$

- Considere a função dada por $g(x) = 5x$. Como o domínio e o contradomínio não foram explicitados, admitimos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \mathbb{R}$, pois, para que $5x$ seja real, basta que x seja real:

$$5x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Note que, para encontrar o domínio de uma função $y = f(x)$, precisamos analisar a lei de associação de f e, assim, obter as restrições da variável x para que exista a função f. Essas restrições são chamadas de **condição de existência**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Determinar o domínio da função $f(x) = \frac{3}{x - 8}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{3}{x - 8}$ também seja real.

Temos: $\frac{3}{x-8} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 8 \neq 0$ (ou seja, $x \neq 8$)

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 8\}$

9 Determinar o domínio da função: $f(x) = \sqrt{x - 5}$

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\sqrt{x - 5}$ também seja real.

Temos: $\sqrt{x - 5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 5 \geqslant 0$ (ou seja, $x \geqslant 5$)

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

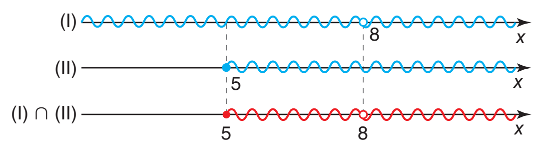
10 Determinar o domínio da função: $f(x) = \dfrac{3}{x-8} + \sqrt{x-5}$

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\dfrac{3}{x-8} + \sqrt{x-5}$ também seja real. Temos:

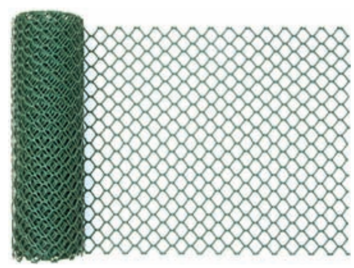
$$\frac{3}{x-8} + \sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ \underbrace{x - 8 \neq 0}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x - 5 \geq 0}_{\text{(II)}}$$

Lembrando que o conectivo "e" indica a intersecção das soluções das inequações (I) e (II), temos:



Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5 \text{ e } x \neq 8\}$

11 Um granjeiro utilizou 200 metros lineares de tela para cercar um terreno retangular.

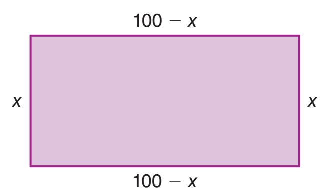


a) Obter a lei $y = f(x)$ que expressa a área y, em metro quadrado, do terreno em função da medida x, em metro, de um dos lados desse terreno.

b) No contexto do problema, qual é o domínio da função f obtida no item **a**?

Resolução

a) Sabemos que o perímetro do terreno é 200 m. Indicando por x a medida, em metro, de um lado do terreno, as outras dimensões, em metro, serão: x, $(100 - x)$ e $(100 - x)$.



Assim, a área y desse terreno é dada por: $f(x) = (100 - x) \cdot x$, ou seja, $f(x) = -x^2 + 100x$

b) Fora de qualquer contexto, o domínio da função $f(x) = -x^2 + 100x$ seria o conjunto $\mathbb{R}$; porém, no contexto do problema, os valores de x estão restritos às possíveis medidas de um lado do terreno. Como o perímetro do terreno é 200 m, temos: $0 < x < 100$.
Assim, o domínio de f é: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 100\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

29 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = 3x + 5$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 9}$

e) $f(x) = 15$

f) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 36} + \sqrt{x - 2}$

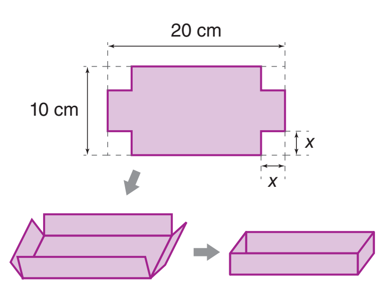
g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

30 O número 5 pertence ao domínio de $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$? Por quê?

31 Um professor propôs a seguinte atividade para sua turma.

Pegue uma folha retangular de cartolina, com 20 cm de comprimento por 10 cm de largura, e adote os seguintes procedimentos:

- recorte quatro quadrados de lado x cm, de modo que cada um deles tenha um vértice coincidindo com um vértice da folha;
- dobre essa folha formando uma caixa sem tampa, conforme mostra a figura:



Indique por $V(x)$ o volume, em centímetro cúbico, da caixa em função da medida x dos lados dos quadrados recortados.

a) Obtenha a equação que associa cada possível medida x ao volume $V(x)$.

b) Indique o domínio da função V.

Resolva os exercícios complementares 8 a 11.

Seção 2.3

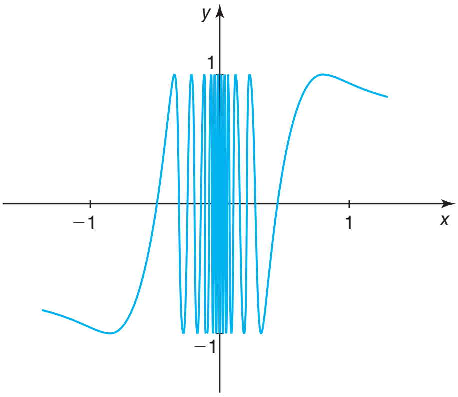
Gráfico de uma função

Objetivo

- **Construir** o gráfico de uma função.

Esboços de gráficos por pontos

Algumas funções podem variar de modo brusco entre dois pontos relativamente próximos; por exemplo, a função representada abaixo $\left(\text{é a função } y = \text{sen}\,\frac{1}{x}\text{, que não será estudada nesta coleção}\right)$ varia tão abruptamente nas proximidades da origem que é impossível representá-la de forma gráfica com precisão.

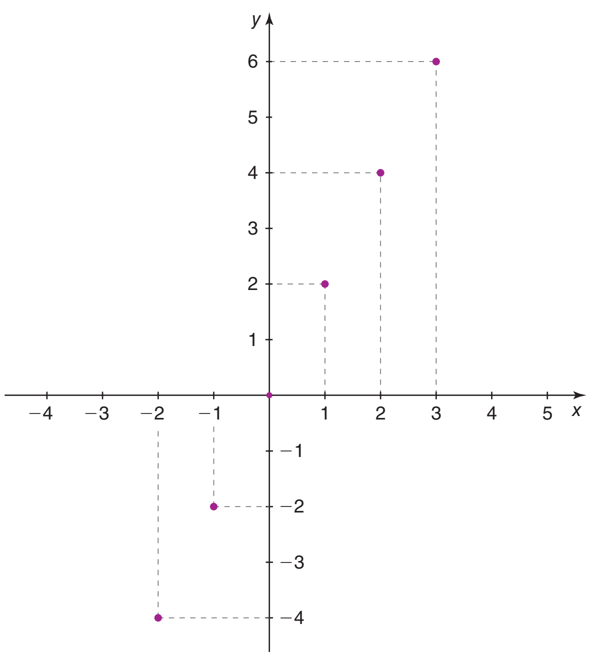


Contudo, as funções $y = f(x)$, que estudaremos nesta coleção, apresentam pequenas variações entre dois pontos relativamente próximos. Por isso, os gráficos referentes a elas podem ser esboçados por meio de pontos que obtemos atribuindo valores a x e calculando os correspondentes valores de y.

Exemplos

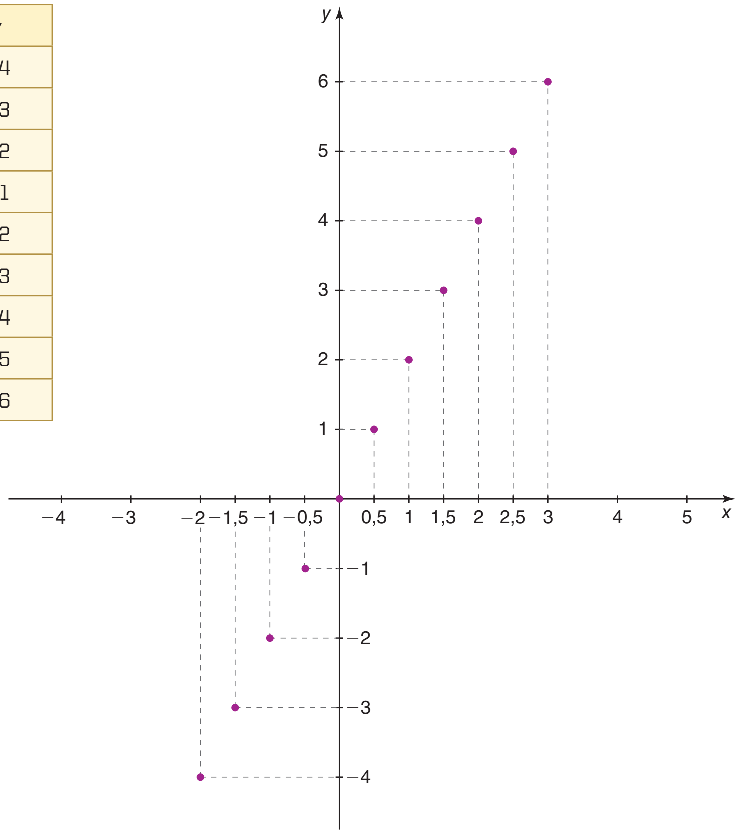
a) Para esboçar o gráfico da função $y = 2x$, primeiro construímos uma tabela atribuindo alguns valores a x e calculamos os correspondentes valores de y. Depois, representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) assim obtidos.

x	y
−2	−4
−1	−2
0	0
1	2
2	4
3	6

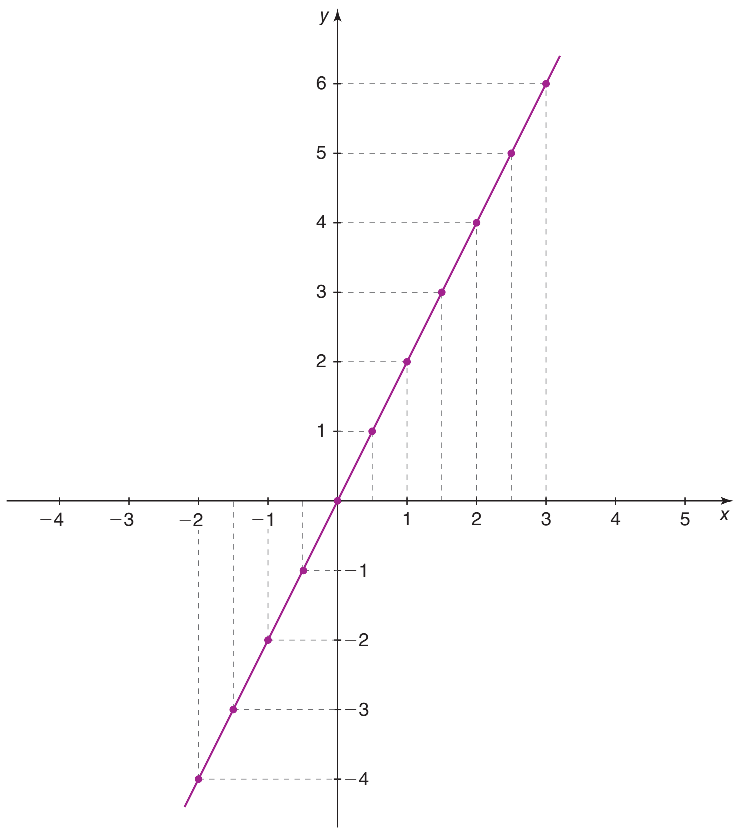


Se quisermos mais pontos entre os já obtidos, podemos atribuir mais valores a x, por exemplo, a cada meia unidade:

x	y
-2	-4
$-1,5$	-3
-1	-2
$-0,5$	-1
1	2
$1,5$	3
2	4
$2,5$	5
3	6



Observamos, até aqui, que os pontos obtidos estão sobre uma mesma reta; então, é razoável admitir que o gráfico da função $y = 2x$ é a reta que contém esses pontos.



Notas:

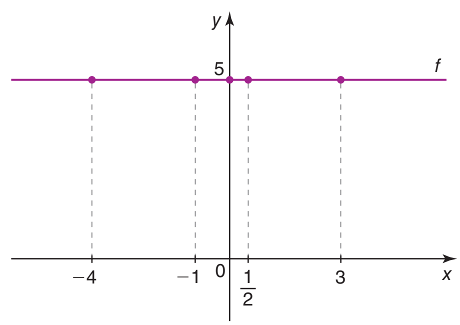
1. Em uma função $y = f(x)$ dizemos que variáveis x e y são **diretamente proporcionais** se, e somente se, para quaisquer valores correspondentes de x e y, tem-se:
   - Se $x = 0$, então $y = 0$;
   - Se $x \neq 0$, então a razão $\frac{y}{x}$ é constante.
2. Quando o gráfico de uma função $y = f(x)$ é uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano, os valores correspondentes de x e y são diretamente proporcionais. No exemplo anterior, temos:
   - Se $x = 0$, então $y = 0$;
   - Se $x \neq 0$, então a razão $\frac{y}{x}$ é constante, observe: $\frac{-4}{-2} = \frac{-2}{-1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = ...$

A pressão da água sobre o mergulhador é diretamente proporcional à profundidade, porém a pressão absoluta, que é a soma das pressões da água e do ar, não é diretamente proporcional à profundidade.

b) Para esboçar o gráfico da função $f(x) = 5$, observamos que, para qualquer valor de x, temos $f(x) = 5$.

x	-4	-1	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(x)$	5	5	5	5	5

Assim, o gráfico de f é formado por todos os pontos de ordenada 5, ou seja, é a reta paralela ao eixo Ox representada abaixo.



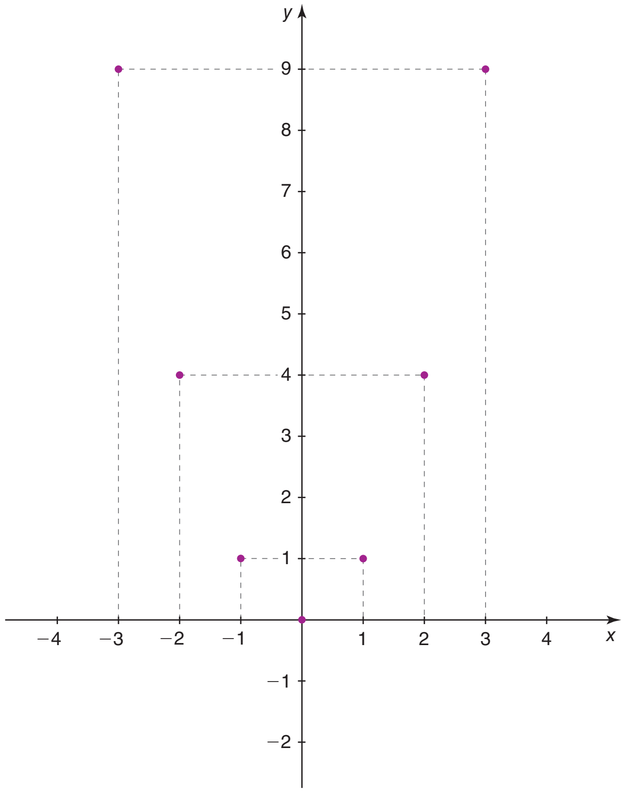
Nota:

Quando a função tem a forma $f(x) = k$, sendo k uma constante real, ela é chamada de **função constante** e seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

O termostato de um forno de micro-ondas estabelece uma temperatura interna constante.

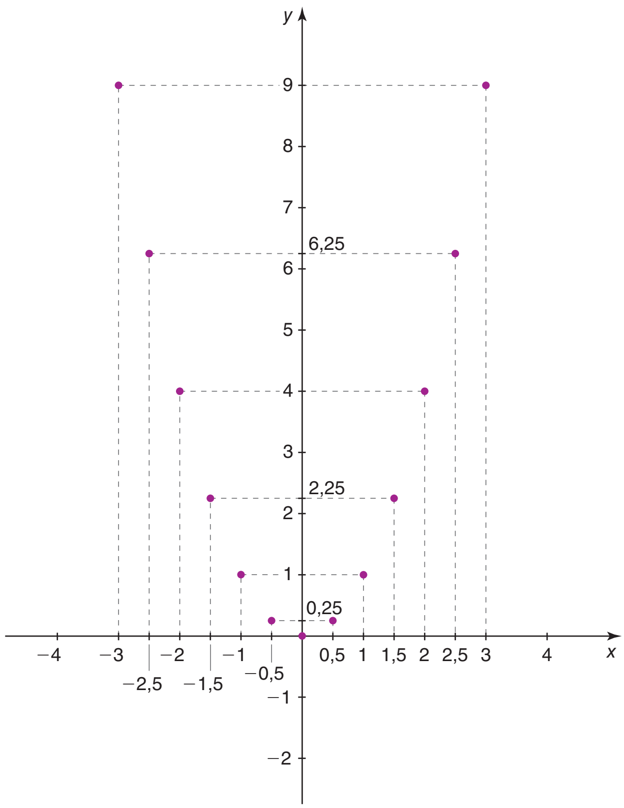
c) Para esboçar o gráfico de $y = x^2$, atribuímos alguns valores a x e calculamos os correspondentes valores de y. Depois, representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) assim obtidos.

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

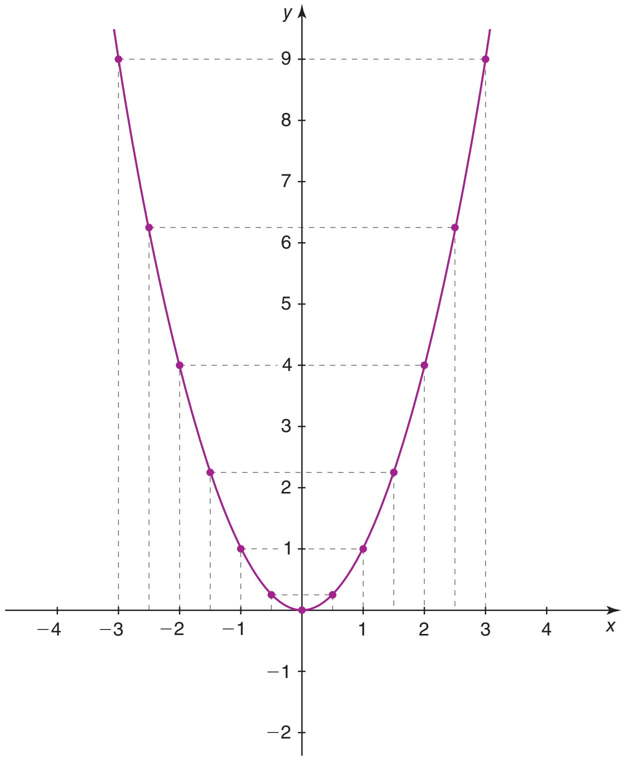


Se não estivermos seguros quanto à forma do gráfico, podemos obter outros pontos além dos já determinados:

x	y
−3	9
−2,5	6,25
−2	4
−1,5	2,25
−1	1
−0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9



Ligando esses pontos por uma curva "suave" — sem falhas, sem forma pontiaguda e sem variações abruptas —, delineamos o gráfico:

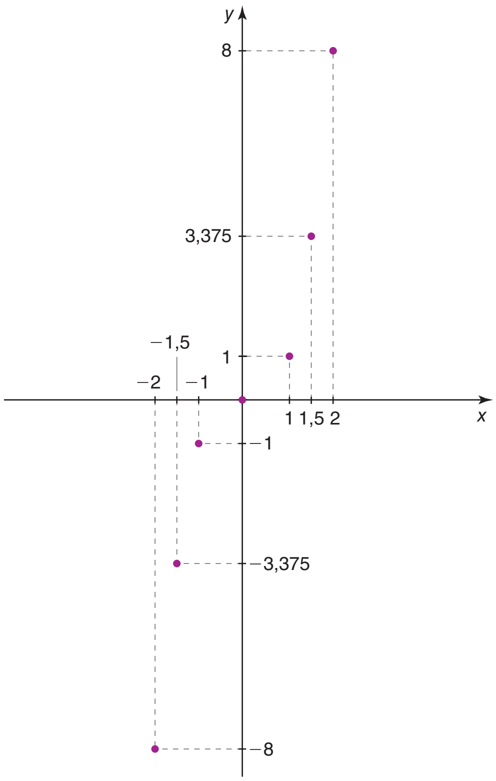


Nota:

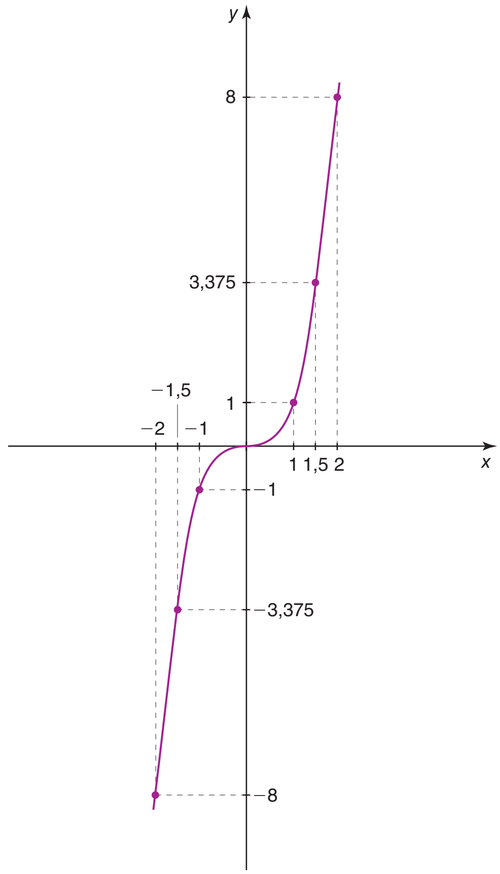
A curva desse exemplo recebe o nome de **parábola**.

d) Para esboçar o gráfico da função $y = x^3$, construímos uma tabela e representamos no plano cartesiano os pares ordenados (x, y) assim obtidos.

x	y
−2	−8
−1,5	−3,375
−1	−1
0	0
1	1
1,5	3,375
2	8

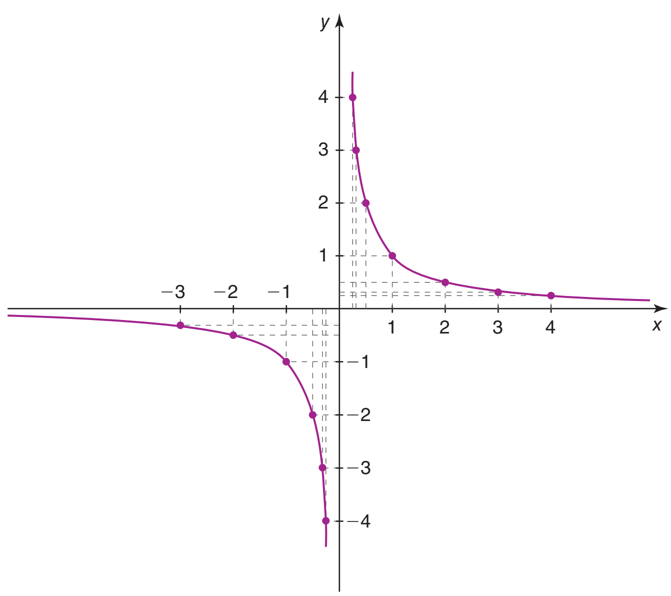


Ligando esses pontos por uma curva “suave”, temos:



e) Para esboçar o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, construímos uma tabela, representamos os pontos no plano cartesiano e, unindo-os por uma curva “suave”, obtemos o gráfico.

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-4	-3	-2	3	2



Notas:

1. Tal como nesse exemplo, o gráfico de toda função do tipo $y = \frac{k}{x}$, sendo k uma constante não nula, recebe o nome de **hipérbole equilátera**.
2. Pelo fato de a distância entre a curva e os eixos coordenados tender a zero, esses eixos coordenados são chamados de **assíntotas** da hipérbole equilátera.
3. Em uma função $y = f(x)$, dizemos que as variáveis x e y são **inversamente proporcionais** se, e somente se, para qualquer valor de x e o correspondente valor de y tivermos $xy = k$, sendo k uma constante real não nula. Assim, em toda função do tipo $y = \frac{k}{x}$, com k constante e não nula, as variáveis x e y são inversamente proporcionais, pois $xy = k$. Por exemplo, na função $y = \frac{1}{x}$, temos $xy = 1$.
   Observe na tabela da página anterior os produtos dos elementos em cada coluna.

A velocidade constante do ciclista é inversamente proporcional ao tempo.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Simulador: *Transformações em um gráfico.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

32 Esboce o gráfico de cada função a partir de alguns pontos obtidos por uma tabela de valores x e y.

a) $y = x$
b) $y = x + 2$
c) $y = 2x^2$
d) $y = 2x^2 - 3$
e) $y = x^3 + 2$
f) $y = -\frac{1}{x}$
g) $y = \sqrt{x}$
h) $y = 2^x$
i) $y = 4$
j) $y = -3$

33 Em uma função $y = f(x)$, dizemos que x e y são diretamente proporcionais se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in f$, temos:

I. Se $x = 0$, então $y = 0$.

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = k$, em que k é uma constante real.

Por exemplo, na função $y = 2x$ as variáveis x e y são diretamente proporcionais, pois para qualquer $(x, y) \in f$ temos:

I. Se $x = 0$, então $y = 2 \cdot 0 = 0$.

II. Se $x \neq 0$, $\frac{y}{x} = 2$.

Em quais das funções abaixo as variáveis x e y são diretamente proporcionais?

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5x$
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x}{3}$
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x + 3$
d) $s: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tal que $s(x) = 4x$
e) $t: [1, 10] \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = \frac{x}{5}$
f) $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = x^2$
g) $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $v(x) = 0$

34 O exercício anterior fornece uma pista do formato do gráfico de uma função cujas variáveis são diretamente proporcionais. Se você compreendeu essa ideia, redija um texto explicando como é o gráfico desse tipo de função.

35 Esboce o gráfico de cada função.

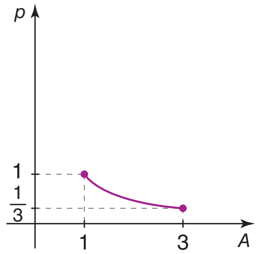
a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

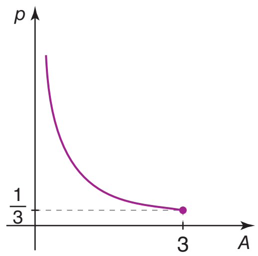
b) $g(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$

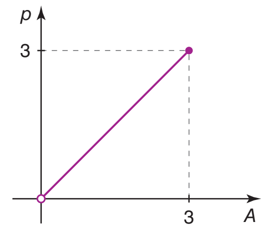
36 Uma pequena fábrica de xampu arca com um custo fixo de 10 mil reais mensais e um custo variável que depende do número de litros produzidos. O custo de produção de cada litro de xampu é R$ 8,00.

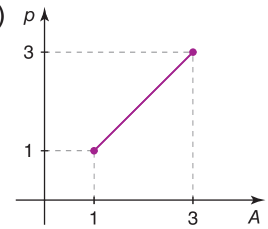
a) Construa uma tabela apresentando, na 1ª coluna, valores x quaisquer, com $0 \leq x \leq 5.000$, que representem o número de litros produzidos em um mês e, na 2ª, os valores correspondentes ao custo total $C(x)$(fixo + variável).
b) Esboce o gráfico da função $C(x)$ que expressa o custo total (fixo + variável) para a produção de x litros mensais, com $0 \leq x \leq 5.000$.
c) Construa uma tabela apresentando na 1ª coluna valores x quaisquer, com $1.000 \leq x \leq 5.000$, que representem o número de litros produzidos em um mês e, na 2ª coluna, a razão entre o custo fixo e o número de litros produzidos, nessa ordem. Observando a tabela, você pode concluir que os valores correspondentes nas duas colunas são direta ou inversamente proporcionais? Por quê?
d) Esboce o gráfico da função $f(x)$ que expressa a razão entre o custo fixo e o número x de litros produzidos mensalmente, com $1.000 \leq x \leq 5.000$.

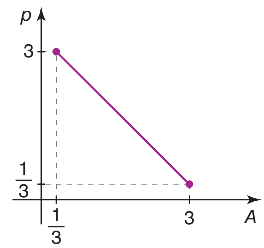
37 A pressão p exercida por uma força de intensidade f sobre uma superfície de área A é calculada por $p = \dfrac{f}{A}$. Se a força tiver a intensidade constante de 1 unidade e a área variar no intervalo $]0, 3]$, o gráfico de p em função de A é:

a)


b)


c)


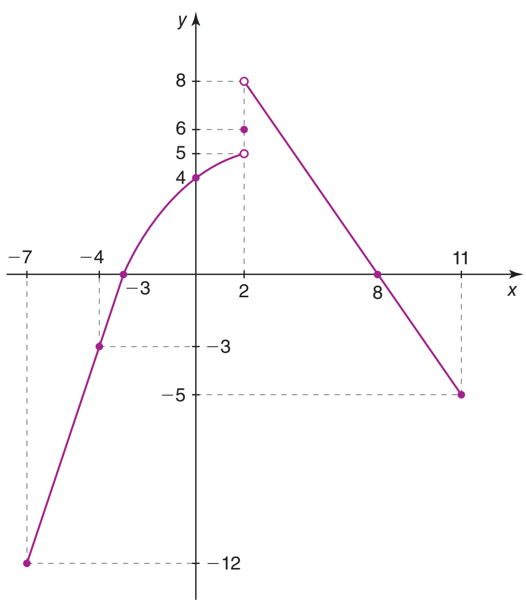
d)


e)


Resolva os exercícios complementares 12 a 14 e 34 a 36.

Imagem de um elemento pelo gráfico de uma função

A figura abaixo é o gráfico cartesiano de uma função f.



Cada ponto (x, y) do gráfico de f deve ser interpretado como $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através de f. Por exemplo, o ponto $P(-4, -3)$ pertence ao gráfico, portanto $f(-4) = -3$. Analogamente, temos:

$(11, -5)$ pertence ao gráfico; logo, $f(11) = -5$

$(8, 0)$ pertence ao gráfico; logo, $f(8) = 0$

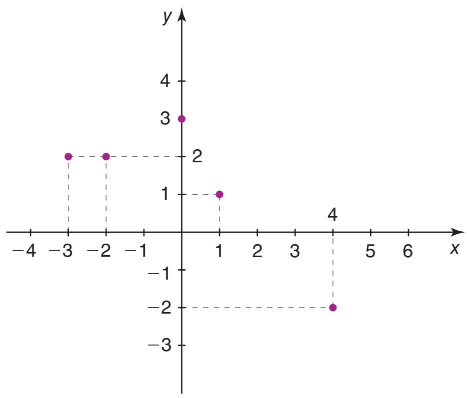
$(2, 6)$ pertence ao gráfico; logo, $f(2) = 6$

$(0, 4)$ pertence ao gráfico; logo, $f(0) = 4$

e assim por diante.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 O gráfico abaixo representa uma função $f: A \rightarrow B$.



Calcular:

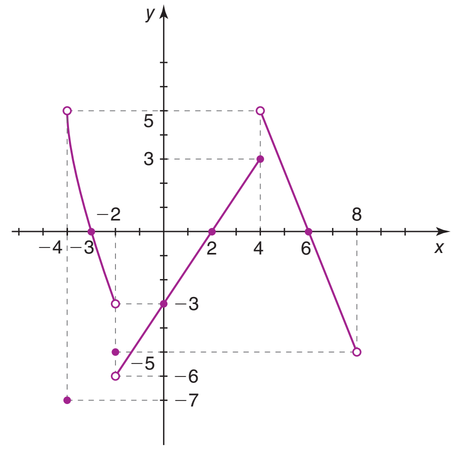
a) $f(-3)$
b) $f(-2)$
c) $f(0)$
d) $f(1)$
e) $f(4)$

Resolução

Cada ponto do gráfico é do tipo $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através de f. Como os pontos do gráfico são $(-3, 2)$, $(-2, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$ e $(4, -2)$, temos:

a) $f(-3) = 2$
b) $f(-2) = 2$
c) $f(0) = 3$
d) $f(1) = 1$
e) $f(4) = -2$

13 O gráfico abaixo representa uma função $f: [-4, 8[\rightarrow \mathbb{R}$.



Determinar:

a) $f(-4)$
b) $f(-2)$
c) $f(0)$
d) $f(2)$
e) $f(4)$
f) $f(6)$

Resolução

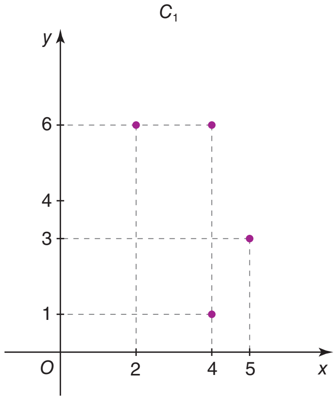
Lembrando que o símbolo "bolinha vazia" (○) **exclui** o ponto do gráfico; que o símbolo "bolinha cheia" (●) **inclui** o ponto no gráfico; e que $f(a)$ é a ordenada do ponto do gráfico cuja abscissa é a, temos:

a) $f(-4) = -7$
b) $f(-2) = -5$
c) $f(0) = -3$
d) $f(2) = 0$
e) $f(4) = 3$
f) $f(6) = 0$

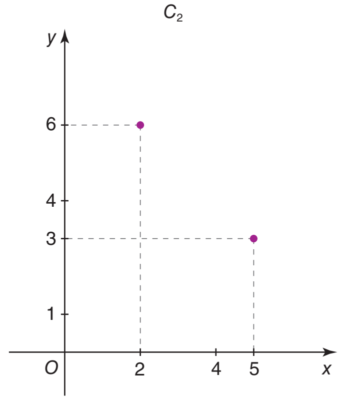
Reconhecimento de uma função por análise gráfica

Os gráficos abaixo representam três relações, C_1, C_2 e C_3, do conjunto $A = \{2, 4, 5\}$ no conjunto $B = \{1, 3, 4, 6\}$:

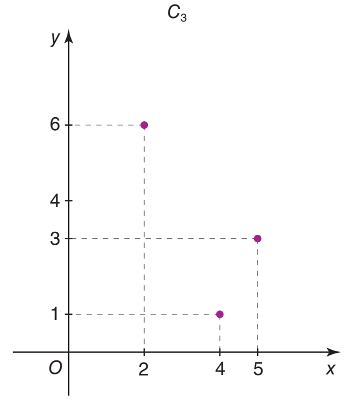
C_1



C_2



C_3



Note que:

- Em C_1, a reta paralela ao eixo Oy, concorrente com o eixo Ox no ponto de abscissa 4, cruza o gráfico em dois pontos distintos: (4, 1) e (4, 6). Isso permite concluir que o gráfico não representa uma função de A em B, pois pelo menos um elemento de A (o elemento 4) possui mais de um correspondente em B.

- Em C_2, a reta paralela ao eixo *Oy*, concorrente com o eixo *Ox* no ponto de abscissa 4, não cruza o gráfico. Isso permite concluir que o gráfico não representa uma função de *A* em *B*, pois pelo menos um elemento de *A* (o elemento 4) não possui correspondente em *B*.
- Em C_3, qualquer reta paralela ao eixo *Oy*, concorrente com o eixo *Ox* em um ponto de abscissa em *A*, intercepta o gráfico em um único ponto. Isso permite concluir que o gráfico representa uma função de *A* em *B*, pois todo elemento de *A* possui um único correspondente em *B*.

Esses exemplos ajudam a entender a propriedade a seguir, que pode ser aplicada para o reconhecimento de uma função por análise gráfica.

Um gráfico representa uma função de domínio *A* se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo *Oy*, concorrente com o eixo *Ox* em um ponto de abscissa em *A*, cruzar o gráfico em um único ponto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Qual dos gráficos representa uma função de $A = [2, 6]$ em $B = [1, 5]$?

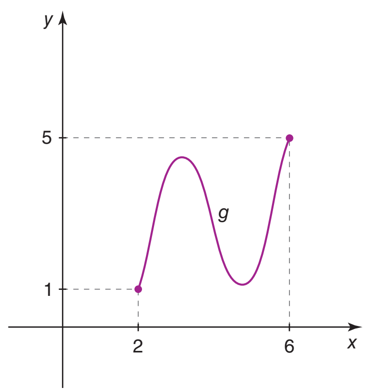


Figura 1

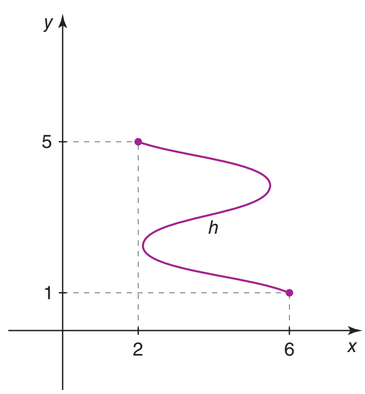
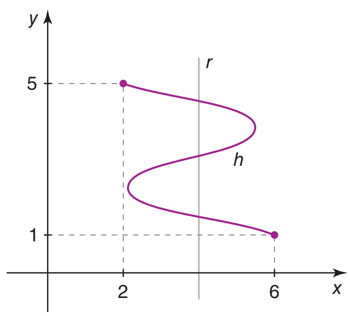


Figura 2

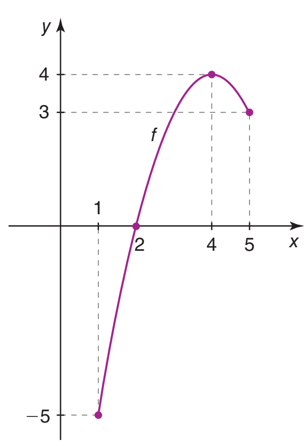
Resolução

Na figura 1, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, com $x \in A$, intercepta o gráfico de *g* em um único ponto. Isso significa que qualquer x do conjunto A está associado a um único y do conjunto B através de *g*. Logo, *g* é função de A em B.

Na figura 2, existe pelo menos uma reta paralela ao eixo Oy que intercepta o gráfico em mais de um ponto, por exemplo, a reta *r* representada abaixo. Logo, *h* não é função de A em B.



15 Determinar o domínio e o conjunto imagem da função *f* representada pelo gráfico abaixo.



Resolução

O domínio da função é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, isto é, $D(f) = [1, 5]$. O conjunto imagem da função é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, isto é, $Im(f) = [-5, 4]$.

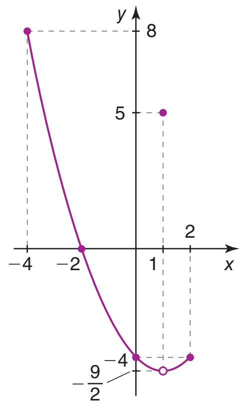
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

38 O gráfico ao lado representa a função:

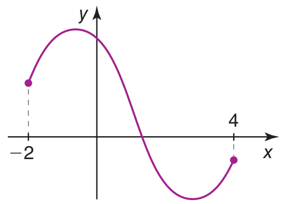
$f: [-4, 2] \to \left]-\frac{9}{2}, 8\right]$

Calcule:

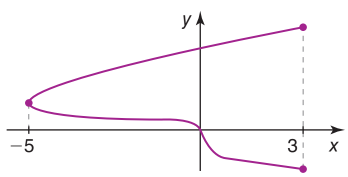
a) $f(-4)$
b) $f(-2)$
c) $f(0)$
d) $f(1)$
e) $f(3)$



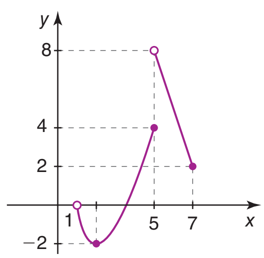
39 Verifique se o gráfico abaixo representa uma função de $A = [-2, 4]$ em $\mathbb{R}$.



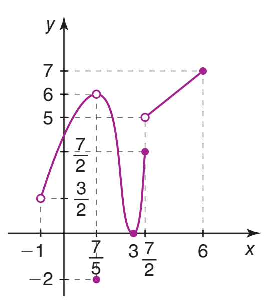
40 O gráfico a seguir representa uma função g de $A = [-5, 3]$ em $\mathbb{R}$. Por quê?



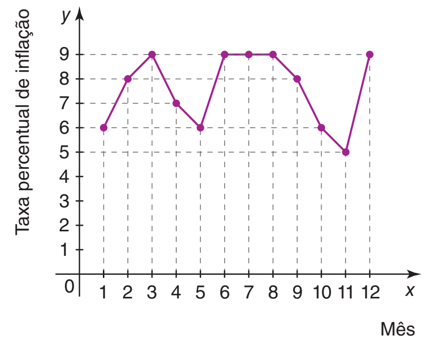
41 Determine o domínio e o conjunto imagem da função f representada a seguir.



42 O gráfico a seguir representa uma função f. Determine o domínio e o conjunto imagem dessa função.

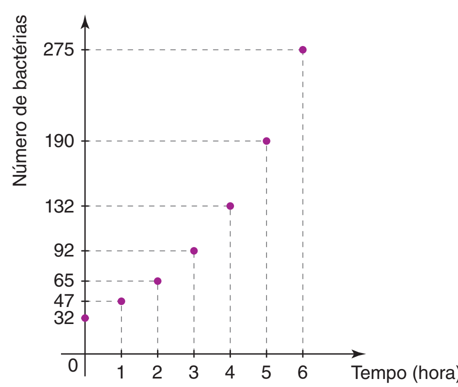


43 O Ministério da Economia de certo país divulgou o balanço da inflação em determinado ano, apresentando o seguinte gráfico, em que y representa a taxa percentual de inflação no mês x.



a) Qual foi a taxa percentual de inflação no mês 4?
b) Qual foi a menor taxa percentual de inflação nesse período?
c) De quantos por cento aumentou a inflação do mês 1 para o mês 3?
d) Construa uma tabela com os dados fornecidos pelo gráfico.
e) A taxa de inflação é função do tempo? Por quê?

44 Um biólogo, ao estudar uma cultura de bactérias, contou-as num determinado instante, ao qual chamou de instante zero. No final de cada uma das seis horas seguintes, fez nova contagem das bactérias. Os resultados dessa experiência estão descritos no gráfico abaixo.



a) Qual era o número de bactérias no início da contagem, isto é, no instante zero?
b) Em quanto aumentou o número de bactérias da quinta para a sexta hora?
c) Em quanto aumentou o número de bactérias da terceira para a quinta hora?
d) O número de bactérias é função do tempo? Por quê?
e) Estime o número de bactérias no instante 5 h 12 min após o início da contagem.

Resolva os exercícios complementares 15 a 19 e 37 a 40.

Análise de funções

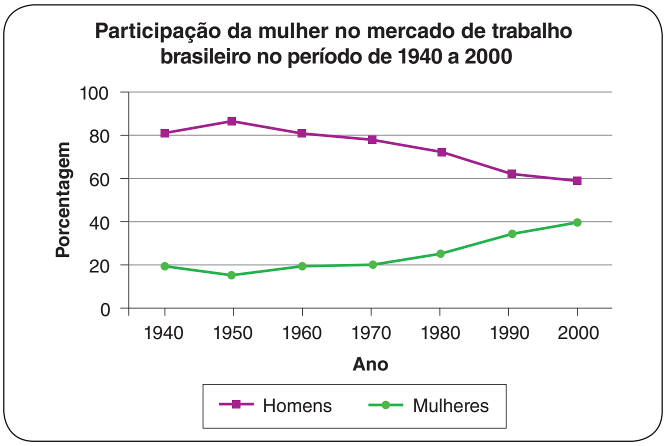
Objetivos

- **Analisar** gráficos de funções.
- **Obter** as raízes de uma função.
- **Estudar** o sinal de uma função.
- **Determinar** os intervalos em que uma função é crescente, decrescente ou constante.

Termos e conceitos

- raiz de uma função
- função crescente
- função decrescente
- função constante

A linguagem gráfica é cada vez mais utilizada para transmitir informações de estudos estatísticos nos meios de comunicação. Além de proporcionar, de maneira eficaz, uma síntese de informações, ela permite uma rápida leitura. Observe o gráfico a seguir, que descreve a participação da mulher no mercado de trabalho brasileiro no período de 1940 a 2000.



Fonte: IBGE. *Anuário estatístico do Brasil*.

Uma simples leitura do gráfico fornece uma variedade de informações; por exemplo:

- Em 1950, o percentual de mulheres no mercado de trabalho era menor que 20%.
- De 1950 a 2000, o percentual de mulheres no mercado de trabalho aumentou a cada década.
- Se for mantida a tendência de crescimento do percentual de trabalho feminino, em breve o número de mulheres será igual ao número de homens no mercado de trabalho.

A Constituição Federal estabelece que são proibidas as diferenças de salários, de exercício de funções e critérios de admissão por motivo de sexo, idade, cor ou estado civil. Apesar disso, muitas empresas ainda pagam salários menores às mulheres que exercem os mesmos cargos que os homens. Grupos de ação civil vêm se organizando para garantir os mesmos direitos às mulheres trabalhadoras.

A correta interpretação dos gráficos do dia a dia depende de fundamentos matemáticos e estatísticos, alguns dos quais já estudamos. Apresentaremos a seguir mais alguns desses fundamentos.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Situações que envolvem funções*.

Raiz de uma função

A balança comercial de um país em determinado período é a diferença entre o valor monetário das exportações e o das importações, nessa ordem. Quando a balança comercial é positiva, dizemos que houve um superávit, e; quando é negativa, dizemos que houve déficit. Quando não há superávit nem déficit, dizemos que a balança comercial foi nula.

Suponha que a balança comercial de um país variou em determinado ano de acordo com a função $f(t) = t^2 - 7t + 10$, em que t representa o tempo, em mês, com $1 \leqslant t \leqslant 12$, e $f(t)$ é o valor da balança comercial em bilhão de dólares. Em quais meses desse ano a balança comercial desse país foi nula?

Para responder a essa questão, basta resolver a equação $f(t) = 0$, isto é:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

Calculando o discriminante dessa equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

Assim, obtemos as raízes da equação:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = 5$$

Concluímos, então, que a balança comercial foi nula nos meses 2 e 5, ou seja, em fevereiro e maio. Os valores de t, 2 e 5, que anulam a função f são chamados de **raízes** de f.

Definimos:

> Chama-se **raiz** (ou **zero**) de uma função real de variável real, $y = f(x)$, todo número r do domínio de f tal que $f(r) = 0$.

Há funções que não têm raízes reais, como as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \frac{3}{x}$. Isto é, não existe nenhum valor de x que faça f ou g se anularem.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Indicar, se existirem, os zeros (ou raízes) da função $g(x) = x^4 - 9x^2$.

Resolução

Os zeros de g, se existirem, são os valores de x que anulam a função; logo, basta determinar as raízes da equação $g(x) = 0$, isto é:

$$x^4 - 9x^2 = 0$$

Fatorando o primeiro membro (colocando o fator comum em evidência), obtemos:

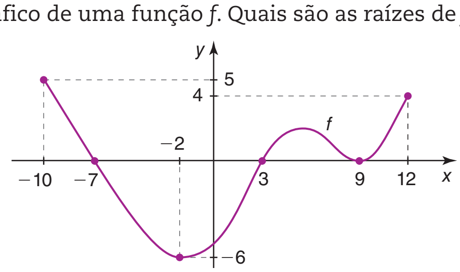
$$x^2(x^2 - 9) = 0$$

Pela propriedade do produto nulo, consideramos que pelo menos um dos fatores do primeiro membro é zero, isto é:

$$x^2 = 0 \text{ ou } x^2 - 9 = 0$$

Portanto, $x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = -3$.
Logo, os zeros (ou raízes) da função g são 0, 3 e -3.

17 No plano cartesiano abaixo, está representado o gráfico de uma função f. Quais são as raízes de f?



Resolução

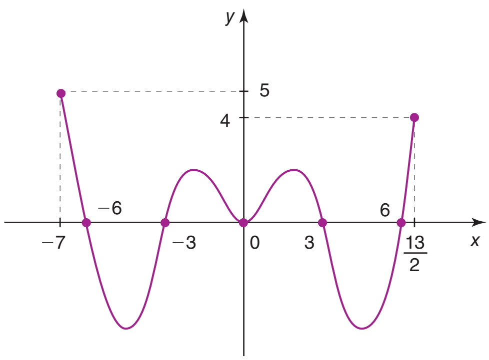
Observando que $f(-7) = 0$, $f(3) = 0$ e $f(9) = 0$, concluímos que as raízes (ou zeros) de f são: -7, 3 e 9.
Note que as raízes de uma função f são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

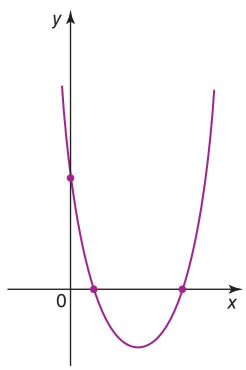
45 Determine as raízes de cada uma das funções reais de variável real.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
b) $y = 5x + 3$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
d) $f(x) = x^4 - 4x^2$
e) $y = x^2 + 1$
f) $z(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
g) $y = -3$

46 Determine as raízes da função f cujo gráfico é dado abaixo.



47 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$.



Determine:

a) as abscissas dos pontos onde o gráfico intercepta o eixo Ox;
b) a ordenada do ponto onde o gráfico intercepta o eixo Oy;
c) as raízes de f.

48 No plano cartesiano, represente o gráfico de uma função que tenha raízes -3, 1 e $\frac{5}{2}$.

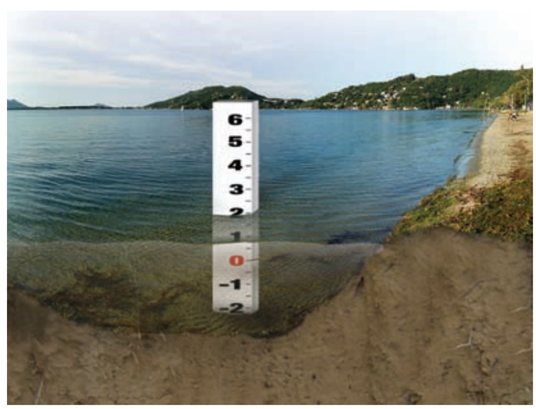
49 A trajetória de uma bola de futebol, chutada a partir de um ponto do campo, pode ser descrita pela função $h(t) = 3t - t^2$, em que $h(t)$ representa a altura da bola, em metro, em relação ao campo, e t representa o tempo, em segundo, desde o instante do chute até o instante em que a bola atinge novamente o solo.

a) No contexto desse problema, quais são as raízes da função h?
b) Qual é a interpretação física das raízes da função h?
c) Qual era a altura da bola, em relação ao campo 1,5 segundo após o chute?
d) Na trajetória descrita pela função h, a bola atingiu 4 m de altura em relação ao campo? Justifique sua resposta.

50 Uma cidade sofre enchentes periódicas com o transbordamento de um rio.

Além do excesso de chuvas, outros fatores também causam enchentes, como o lixo jogado nas ruas, que entope os bueiros e as galerias pluviais, e a impermeabilização do solo nas áreas cimentadas e asfaltadas.

É possível avaliar a extensão da enchente medindo quanto o nível da água do rio está acima de seu nível médio. O medidor desse nível consiste de uma barra graduada, em metro, perpendicular à superfície do rio, conforme mostra a figura:

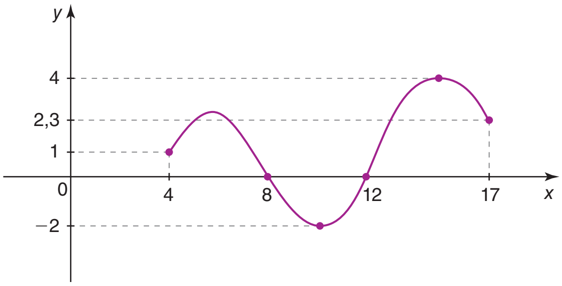


A graduação zero corresponde ao nível médio do rio; as graduações positivas correspondem a alturas acima do nível médio; e, as negativas, a alturas abaixo do nível médio.
Em certo ano, o nível da água pode ser representado pela função $f(t) = t^3 - 9t - 9t^2 + 81$, em que $f(t)$ representa o nível da água, em centímetro, e t representa o tempo, em mês, com $1 \leqslant t \leqslant 12$. Em que meses desse ano o nível da água do rio esteve em seu valor médio?

Resolva os exercícios complementares 20 a 22.

Estudo do sinal de uma função

O gráfico ao lado descreve a temperatura y de uma região, em grau Celsius, em função do tempo x, em hora, no intervalo de 4 às 17 horas de certo dia.



A análise do gráfico permite concluir que a temperatura y foi:

- positiva para $4 \leqslant x < 8$ ou $12 < x \leqslant 17$;
- negativa para $8 < x < 12$;
- nula (0 °C) para $x = 8$ ou $x = 12$.

Essa análise representa o estudo do sinal da temperatura em função do tempo no período considerado.

Estudos como esse podem ser generalizados para qualquer função real de variável real da seguinte maneira:

Sendo f uma função de domínio D, dizemos que:

- f é **positiva** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) > 0$;
- f é **negativa** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) < 0$;
- f se **anula** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) = 0$. Nesse caso, x é raiz da função.

Exemplos

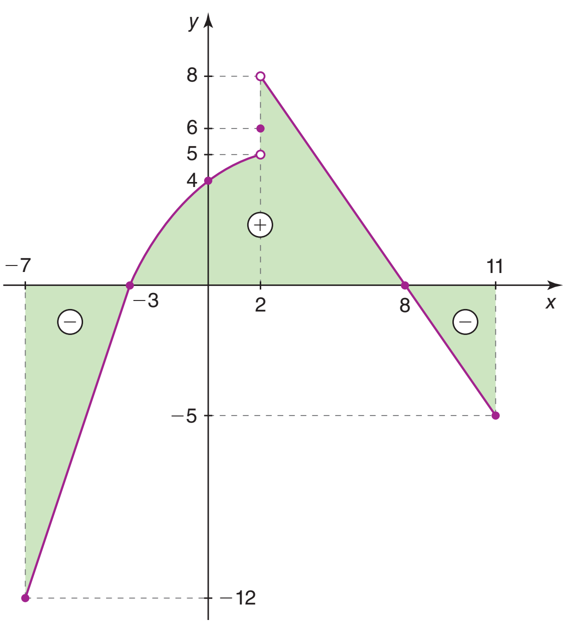
a) Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 4$, temos:

- a função é positiva para $x = -3$, pois $f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$;
- a função é negativa para $x = -1$, pois $f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$;
- a função se anula para $x = 2$, pois $f(2) = 2^2 - 4 = 0$.

Nesse exemplo, 2 é uma raiz da função f (podemos dizer, também, que 2 é um zero da função f).

Note que o sinal da função para um elemento x do domínio é o sinal de $f(x)$, não o sinal de x.

b) Considere o gráfico ao lado (em roxo) de uma função f. Podemos estudar o sinal de f analisando seu gráfico.



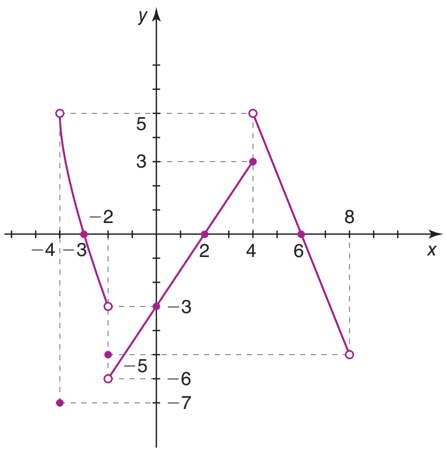
Dada a função f, temos:

- para todo x, com $-3 < x < 8$, temos $f(x) > 0$. Por isso, dizemos que a função f é positiva para $-3 < x < 8$;
- para todo x, com $-7 \leqslant x < -3$ ou $8 < x \leqslant 11$, temos $f(x) < 0$. Por isso, dizemos que f é negativa para $-7 \leqslant x < -3$ ou $8 < x \leqslant 11$;
- para $x = -3$ ou $x = 8$, a função se anula, ou seja, $f(-3) = f(8) = 0$ (os números -3 e 8 são as raízes da função).

Note que as raízes da função são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 O gráfico abaixo representa uma função $f: [-4, 8[\rightarrow \mathbb{R}$.



Determinar:

a) Os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

b) Os valores de x para os quais $f(x) < 0$.

c) Os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

Resolução

Lembramos que o símbolo "bolinha vazia" (○) **exclui** o ponto do gráfico; que o símbolo "bolinha cheia" (●) **inclui** o ponto no gráfico; e que $f(a)$ é a ordenada do ponto do gráfico cuja abscissa é a. Assim:

a) devemos determinar todos os valores do domínio da função cujas imagens, através de f, sejam positivas. Esses valores são todos os números reais do eixo Ox tais que:

$$-4 < x < -3 \text{ ou } 2 < x < 6$$

b) devemos determinar todos os valores do domínio da função cujas imagens, através de f, sejam negativas. Esses valores são todos os números reais do eixo Ox tais que:

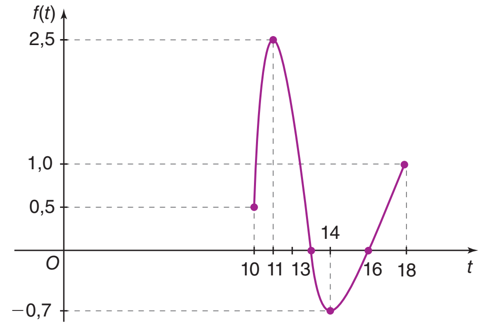
$$x = -4 \text{ ou } -3 < x < 2 \text{ ou } 6 < x < 8$$

c) devemos determinar todos os valores do domínio da função cujas imagens, através de f, sejam iguais a zero. Esses valores, chamados de raízes da função, são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox. Assim, temos:

$$x = -3 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 6$$

19 A Bolsa de Valores de São Paulo – Bovespa – era a bolsa oficial do Brasil até realizar a fusão com a BM&F, que culminou com a criação de uma nova instituição, denominada BM&F Bovespa, em 8 de maio de 2008. Sua sede fica no centro da cidade de São Paulo e seu principal índice econômico é o Ibovespa.

O gráfico a seguir descreve o Ibovespa (Índice da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo) $f(t)$, em porcentagem, em função do horário t, em hora, desde o início do pregão, às 10 h, até o fechamento, às 18 h, de determinado dia.



a) Qual foi o maior valor atingido pelo Ibovespa nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?

b) Qual foi o menor valor atingido pelo Ibovespa nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?

c) Em que horários desse dia o Ibovespa foi nulo?

d) No período do pregão, em que horários o Ibovespa esteve positivo?

e) No período do pregão, em que horários o Ibovespa esteve negativo?

Resolução

a) Observando que $f(11) = 2{,}5$ e que $2{,}5 \geqslant f(t)$ para qualquer t do domínio de f, concluímos que o maior valor do Ibovespa nesse dia foi 2,5% e que esse valor foi atingido às 11 horas.

b) Observando que $f(14) = -0{,}7$ e que $-0{,}7 \leqslant f(t)$ para qualquer t do domínio de f, concluímos que o menor valor do Ibovespa nesse dia foi −0,7% e que esse valor foi atingido às 14 horas.

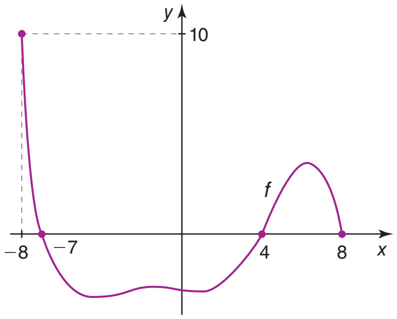
c) A função f se anula nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas. Logo, o Ibovespa foi nulo às 13 horas e às 16 horas.

d) Cada ponto do gráfico é da forma $(t, f(t))$, portanto, os pontos que têm $f(t) > 0$ são aqueles localizados acima do eixo Ot. Esses pontos têm a abscissa t obedecendo à condição $10 \leqslant t < 13$ ou $16 < t \leqslant 18$. Logo, no período do pregão, o Ibovespa esteve positivo antes das 13 horas e depois das 16 horas.

e) Cada ponto do gráfico é da forma $(t, f(t))$, portanto, os pontos que têm $f(t) < 0$ são aqueles localizados abaixo do eixo Ot. Esses pontos têm a abscissa t obedecendo à condição $13 < t < 16$. Logo, no período do pregão, o Ibovespa esteve negativo entre 13 e 16 horas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

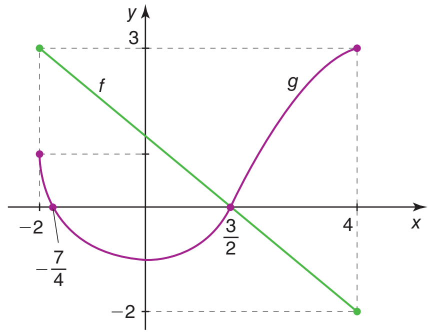
51 O gráfico abaixo representa uma função f de $[-8, 8]$ em $\mathbb{R}$.



Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $f(-8) > f(5)$
b) $f(0) > 0$
c) $f(-7) = 0$
d) $f(4) > 0$
e) $f(2) < 0$
f) $f\left(-\dfrac{15}{2}\right) < 0$
g) Se $4 < x < 8$, então $f(x) > 0$.
h) Se $4 \leqslant x \leqslant 8$, então $f(x) > 0$.
i) Se $-7 < x < 4$, então $f(x) < 0$.
j) Se $f(x) > 0$, então $-8 \leqslant x < -7$ ou $4 < x < 8$.

52 No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de duas funções, f e g, de domínio $[-2, 4]$ e contradomínio $\mathbb{R}$.



Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação:

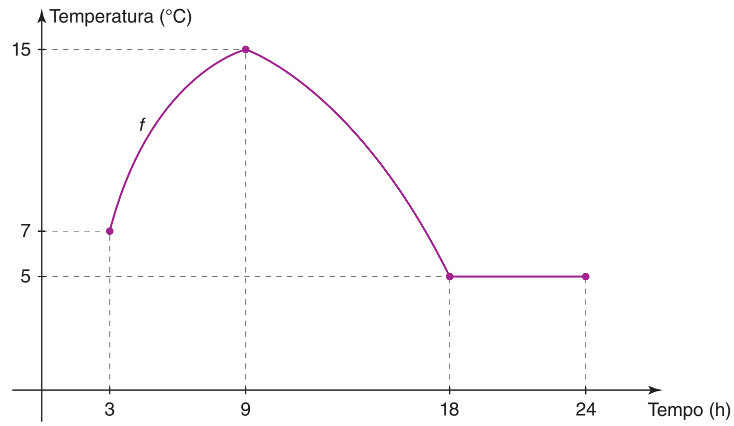
a) $f(3) > 0$
b) $f(2) < 0$
c) $f(1) > 0$
d) $f(-1) > 0$
e) $f(0) < 0$
f) $g(3) > 0$
g) $g(2) > 0$
h) $g(0) > 0$
i) $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = g\left(-\dfrac{7}{4}\right)$
j) $f(3) \cdot g(3) < 0$
k) $f\left(\dfrac{18}{10}\right) \cdot g\left(\dfrac{18}{10}\right) < 0$

Resolva os exercícios complementares 23 e 24.

Variação de uma função

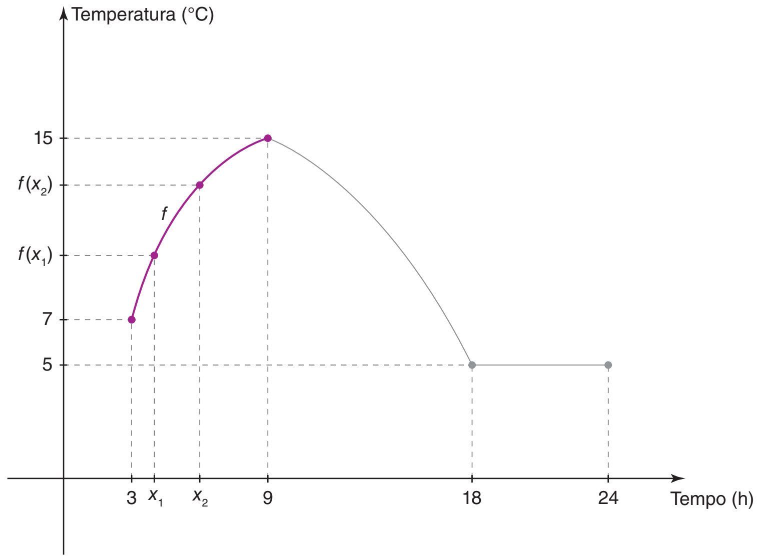
Para limpar uma câmara frigorífica, um operário desligou os motores às 3 h, quando a temperatura interna da câmara era 7 °C. A limpeza foi realizada das 3 h às 9 h, e nesse período a temperatura subiu de 7 °C para 15 °C. Após o término da limpeza, os motores foram religados, de modo que, das 9 h às 18 h, a temperatura desceu de 15 °C para 5 °C e, a partir daí, permaneceu constante em 5 °C.

Após o registro das temperaturas no interior da câmara das 3 h às 24 h, constatou-se que o gráfico abaixo representa a função f que expressa a temperatura y, em grau Celsius, no interior da câmara em função do tempo x, em hora.



Destacamos nesse gráfico que:

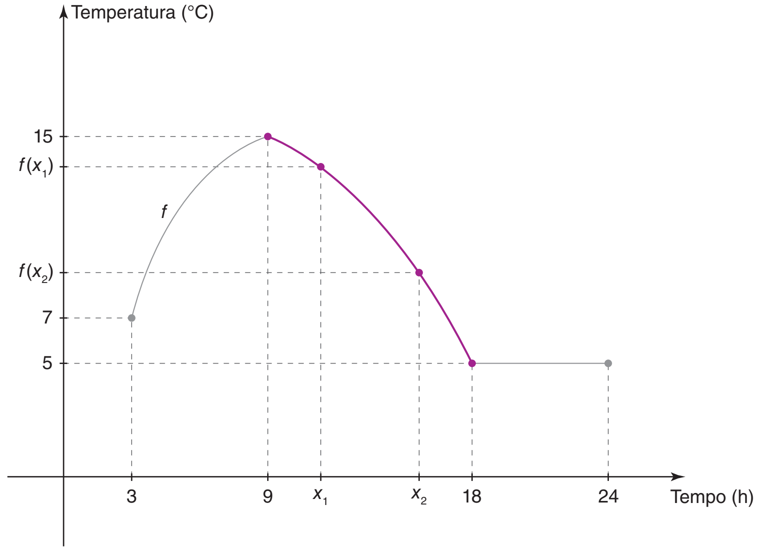
- No intervalo de 3 h a 9 h, quanto maior o tempo, maior é a temperatura, isto é, se $\{x_1, x_2\} \subset [3, 9]$, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Por isso, dizemos que a função f é **crescente** no intervalo $[3, 9]$.



Uma função f é **crescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é maior que a imagem de x_1 através de f. Isto é, f é crescente se, e somente se:

$$\{x_1, x_2\} \subset A \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

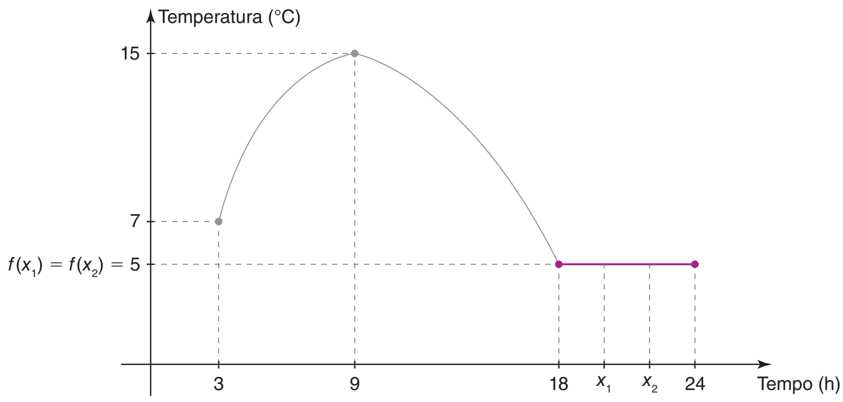
- No intervalo de 9 h a 18 h, quanto maior o tempo, menor é a temperatura, isto é, se $\{x_1, x_2\} \subset [9, 18]$, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$. Por isso, dizemos que a função f é **decrescente** no intervalo $[9, 18]$.



Uma função f é **decrescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é menor que a imagem de x_1 através de f. Isto é, f é decrescente se, e somente se:

$$\{x_1, x_2\} \subset A \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

- No intervalo de 18 h a 24 h, a temperatura é sempre a mesma para qualquer valor do tempo, isto é, para qualquer x pertencente ao intervalo $[18, 24]$, $f(x) = 5$. Por isso, dizemos que a função f é **constante** no intervalo $[18, 24]$



Uma função f é **constante** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para qualquer número x de A, temos $f(x) = k$, sendo k uma constante real.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Taxa média de variação de uma função.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

20 Mostrar que a função $f(x) = 3x + 2$ é crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

Resolução

Vamos considerar dois números reais quaisquer, x_1 e x_2, tais que: $x_2 > x_1$

Multiplicamos por 3 ambos os membros dessa desigualdade: $3x_2 > 3x_1$

Adicionamos 2 a ambos os membros da última desigualdade, obtendo:

$$\underbrace{3x_2 + 2}_{f(x_2)} > \underbrace{3x_1 + 2}_{f(x_1)}$$

Assim, provamos que, para quaisquer números reais x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) > f(x_1)$. Logo, f é uma função crescente.

(*Nota*: Também poderíamos ter esboçado o gráfico de f e, com ele, concluir que f é crescente em todo o domínio da função.)

21 Durante certo período, as temperaturas de uma região foram registradas e constatou-se que, em determinado dia, a temperatura $f(t)$, em grau Celsius, pode ser representada pela função $f(t) = \dfrac{3 + t}{t}$, em qualquer instante t, em hora, com $t > 0$. Mostrar que a temperatura decresceu ao longo desse dia.

Resolução

Mostraremos que f é uma função decrescente para $t > 0$. Para isso, vamos considerar dois instantes, a e b, com $0 < a < b$, assim, temos:

$$\begin{cases} b > a \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Multiplicamos por 3 ambos os membros dessa desigualdade:

$$\frac{3}{b} < \frac{3}{a}$$

Adicionamos 1 a ambos os membros da desigualdade:

$$\frac{3}{b} + 1 < \frac{3}{a} + 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{3 + b}{b}}_{f(b)} < \underbrace{\frac{3 + a}{a}}_{f(a)}$$

Com isso concluímos que, para quaisquer números a e b do domínio de f, temos:

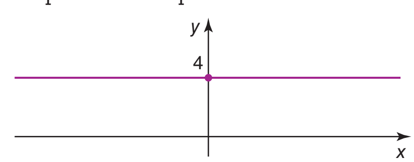
$$b > a \Rightarrow f(b) < f(a)$$

Ou seja, a função f é decrescente em todo o domínio de f. Logo, no contexto do problema, mostramos que a temperatura decresceu ao longo do dia.

22 Construir o gráfico da função $f(x) = 4$.

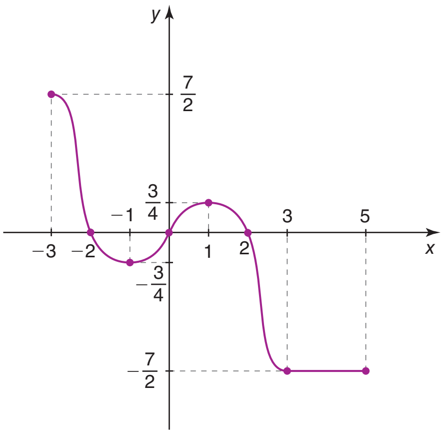
Resolução

Para qualquer valor x do domínio $\mathbb{R}$, temos $f(x) = 4$; logo, o gráfico de f é uma reta paralela ao eixo Ox, formada por todos os pontos de ordenada 4.



Nesse caso, a função f é constante em todo o seu domínio.

53 Uma função f é representada pelo gráfico abaixo.



a) Em que intervalo(s) do domínio a função f é crescente?

b) Em que intervalo(s) do domínio a função f é decrescente?

c) Em que intervalo(s) do domínio a função f é constante?

54 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das funções f, g, h e p descritas nos itens seguintes. Escreva um texto no caderno explicando seu raciocínio.

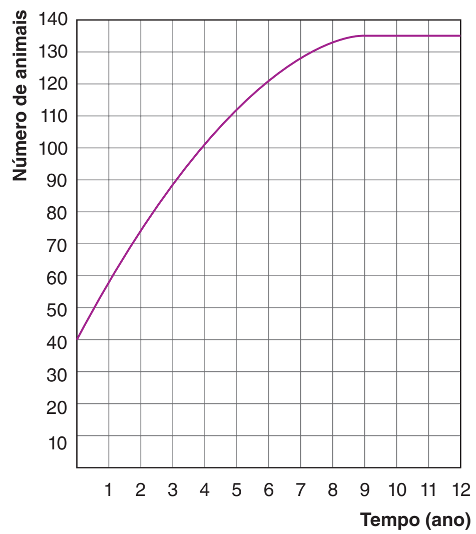
a) De janeiro a junho de 2010, o preço de uma mochila era R\$ 52,00, não sofrendo alteração. A função f fornece o preço dessa mochila em função do tempo, de janeiro a junho de 2010.

b) Uma mangueira ligada a uma torneira alimenta uma piscina. A função g fornece o volume de água contida na piscina em função do tempo, desde a abertura da torneira até o completo enchimento.

c) Um ralo escoa a água de uma piscina. A função h fornece o volume de água contida na piscina em função do tempo, desde a abertura do ralo até o esvaziamento total.

d) Um motorista parte com seu automóvel da cidade A com destino à cidade B, parando apenas durante uma hora para almoçar. A função p expressa a distância percorrida pelo automóvel em função do tempo, desde o momento da partida da cidade A até o momento da chegada à cidade B.

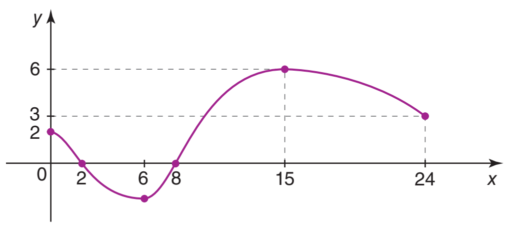
55 Um estudo de doze anos analisou a variação do número de animais silvestres em uma reserva florestal. Essa variação é descrita pelo seguinte gráfico:



Sabendo que todos os animais são nativos da própria reserva e que nenhum deles jamais foi retirado de lá, pode-se concluir que, durante esse estudo, o número de nascimentos foi igual ao número de mortes de animais no intervalo:

a) de 0 a 2 anos
b) de 2 a 4 anos
c) de 4 a 6 anos
d) de 7 a 9 anos
e) de 9 a 12 anos

56 O gráfico abaixo apresenta a temperatura y, em grau Celsius, em uma região, em função do tempo x, em hora, ao longo das 24 horas de um dia de inverno.

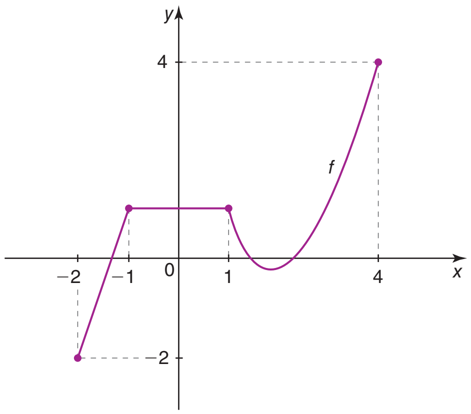


Determine os intervalos de tempo em que:

a) a temperatura foi crescente.

b) a temperatura foi decrescente.

57 (Ufac) O gráfico abaixo é de uma função f definida no intervalo $[-2, 4]$.



Considere as proposições:

I. A função é crescente somente no intervalo $[-2, -1]$.

II. A função $g(x) = f(x) + 2$, com $-2 \leqslant x \leqslant 4$, é tal que $g(-2) = 0$.

III. No intervalo $[-1, 1]$ a função é constante.

IV. A função possui exatamente três raízes no intervalo $[-2, 4]$.

Com relação às proposições I, II, III e IV, é correto afirmar que:

a) todas são verdadeiras;
b) todas são falsas;
c) apenas a afirmação IV é falsa;
d) apenas a afirmação I é falsa;
e) as afirmações I e II são falsas.

58 Usando a definição de função decrescente, mostre que a função $y = 5 - 2x$ é decrescente em todo o seu domínio.

59 Em um trecho de uma estrada, a velocidade v de um caminhão, em quilômetro por hora, em função do tempo t, em hora, pode ser calculada por $v(t) = 6t + 60$.

a) Durante esse trecho, sejam t_1 e t_2 dois valores quaisquer do tempo, em hora. Mostre que se $t_1 > t_2$, então $v(t_1) > v(t_2)$.
b) De acordo com o que você demonstrou no item **a**, é possível concluir que o caminhão esteve em movimento acelerado ou retardado? (O movimento é acelerado ou retardado conforme a velocidade v do caminhão seja crescente ou decrescente.)

60 Durante certo período, o volume v, em litro, de água contida em uma piscina variou em função do tempo t, em hora, de acordo com a função $v(t) = 90.000 - 10t$.

a) No período considerado, sejam t_1 e t_2 dois valores quaisquer do tempo, em hora. Mostre que se $t_1 > t_2$, então $v(t_1) < v(t_2)$.
b) De acordo com o que você demonstrou no item **a**, é possível concluir que a piscina estava sendo enchida ou esvaziada, no período considerado?

61 Considere a função f cujo domínio é o salário médio dos executivos de uma empresa, calculado a cada mês, e o contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(x)$ é a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários da empresa, nessa ordem, calculado a cada mês.

a) Sob que condições essa função é crescente?
b) Sob que condições essa função é decrescente?
c) Sob que condições essa função é constante?
d) Se o salário médio dos executivos crescer e também crescer o salário médio dos outros funcionários, é possível que a função f decresça? Explique.

Resolva os exercícios complementares 25 e 41 a 43.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Para que valor real de t o ponto $A\left(\dfrac{4t}{5} + 1; 2t - 4\right)$ pertence ao eixo das ordenadas?

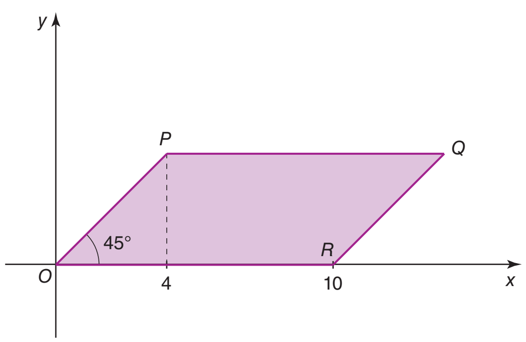
2 Represente no plano cartesiano:

a) todos os pontos (x, y) tal que $x = 0$
b) todos os pontos (x, y) tal que $y = 0$
c) todos os pontos (x, y) tal que $y = x$
d) todos os pontos (x, y) tal que $y = -x$

3 No plano cartesiano, um triângulo tem vértices $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ e $C(3, 6)$.

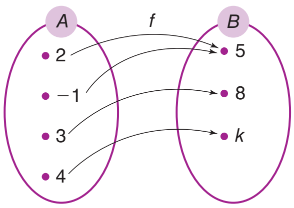
a) Calcule a área do triângulo ABC.
b) Calcule o perímentro do triângulo ABC.

4 O quadrilátero $OPQR$, representado no plano cartesiano a seguir, é um paralelogramo. Determine as coordenadas do ponto Q.



5 O diagrama ao lado representa uma função $f: A \to B$, sendo k uma constante real.
Determine o número k, sabendo que

$$\frac{f(2)}{f(4) - f(3)} = f(-1).$$



6 Sendo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x^2 - x$, determine:

a) O elemento do contradomínio de f que é imagem do número 5.

b) O(s) elemento(s) x do domínio de f que possui (possuem) como imagem o número 2.

7 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ é tal que $f(2) = 5$, $f(3) = 8$ e $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, $\forall\, a, b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(6)$ **c)** $f(27)$ **e)** $f(1)$

b) $f(4)$ **d)** $f(72)$ **f)** $f\left(\frac{1}{4}\right)$

8 Obtenha o conjunto dos valores reais de x para os quais está definida cada função a seguir (essa é outra maneira de pedir o domínio de uma função).

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^4 - 5x^2 + 4}$

b) $y = \dfrac{5}{x^4 - 16} + \sqrt{1 - x}$

c) $u(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1}$

d) $v(x) = \dfrac{7}{x^2 - 3} - \sqrt{5 - 2x}$

9 (FCC) Para que valores reais de k a função real de variável real $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + k}$ tem como domínio o conjunto $\mathbb{R}$?

a) $k > 1$ **c)** $k < 1$ **e)** $k \neq 1$

b) $k \geqslant 1$ **d)** $k \leqslant 1$

10 (UFRN) Seja $f: D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, a função definida por $f(x) = \sqrt{5 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$. O domínio D é:

a) $[-1, 5]$ **d)** $]-1, 5]$

b) $[5, +\infty[$ **e)** $]5, +\infty[- \{-1\}$

c) $]5, +\infty[$

11 (UFPE) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ tem como conjunto imagem:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$ **d)** $\mathbb{R}_+$

b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 4\}$ **e)** $\mathbb{R}_+^*$

c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 4\}$

12 Esboce o gráfico de cada função a partir de alguns pontos obtidos por uma tabela de valores x e y.

a) $y = -x$ **e)** $y = \dfrac{2}{x}$ **i)** $y = 1$

b) $y = x - 2$ **f)** $y = \dfrac{1}{x - 2}$ **j)** $y = -\pi$

c) $y = \dfrac{x^2}{2}$ **g)** $y = \sqrt[3]{x}$

d) $y = (x - 3)^2$ **h)** $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

13 Em uma função $y = f(x)$, dizemos que x e y são inversamente proporcionais se, e somente se, para qualquer $(x, y) \in f$ tem-se $x \cdot y = k$, em que k é uma constante real não nula. Por exemplo, na função $y = \dfrac{2}{x}$ as variáveis são inversamente proporcionais, pois $x \cdot y = 2$ para qualquer par ordenado (x, y) da função.

a) Se x e y são inversamente proporcionais, descreva a forma do gráfico de y em função de x no caso em que $x \cdot y = k$, com $k > 0$.

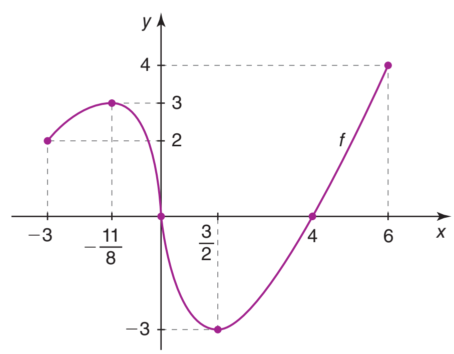
b) Se x e y são inversamente proporcionais, descreva a forma do gráfico de y em função de x no caso em que $x \cdot y = k$, com $k < 0$.

14 Esboce o gráfico de cada função.

a) $h(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $s(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

15 A figura abaixo é o gráfico de uma função f.



Classifique cada uma das afirmações a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right) \in f$

b) O ponto de f de abscissa 4 é o ponto $(4, 0)$.

c) O ponto de f de abscissa -2 tem ordenada menor que 2.

d) Existe apenas um ponto de f com ordenada -3.

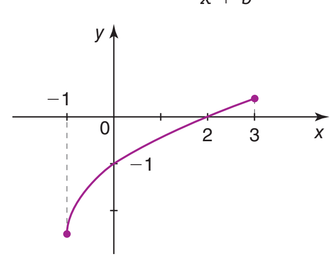
e) Existe apenas um ponto de f com ordenada 3.

f) Existem exatamente três pontos de f com ordenada 2.

16 (Ufal) Seja f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, uma função definida por $f(x) = mx + p$, em que m e p são constantes reais. Se os pontos $(-2, 7)$ e $(2, -1)$ pertencem ao gráfico de f, então $m - p$ é igual a:

a) -6 **b)** -5 **c)** -3 **d)** 1 **e)** 6

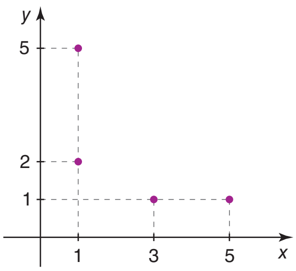
17 (Fuvest-SP) A figura a seguir representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \dfrac{x + a}{x + b}$, para $-1 \leqslant x \leqslant 3$.



a) Determine os valores de a e b.

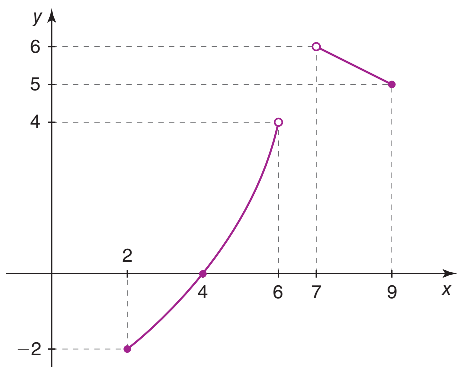
b) Calcule $f(3) - f(-1)$.

18 Uma relação de $A = \{1, 3, 5\}$ em $B = \{-1, 1, 2, 4, 5\}$ tem o seguinte gráfico:



Essa relação é uma função de A em B? Por quê?

19 Determine o domínio e o conjunto imagem da função f representada a seguir.



20 Encontre, se existirem, as raízes das seguintes funções:

a) $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{x}{x+3}$

b) $y = x^4 - 3x^2 - 4$

c) $h(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$

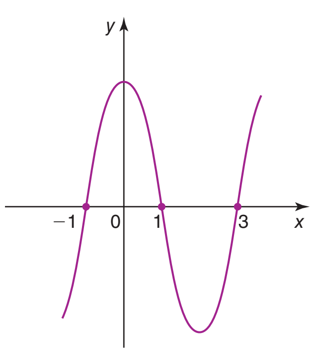
d) $t(x) = \sqrt{x+6} - x$

e) $y = \sqrt{x} + 9$

f) $f(x) = 5$

g) $g(x) = 0$

21 (Uerj) O gráfico a seguir é a representação cartesiana da função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$.



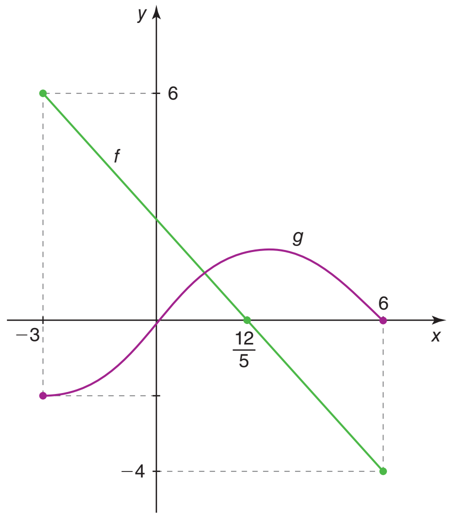
A soma $a + b$ é igual a:

a) 4 **b)** −4 **c)** 2 **d)** −2 **e)** 0

22 (UFRN) A soma de todos os zeros da função $f(x) = (x^2 - 5x + 4)(x^4 - 16)$ é:

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

23 No plano cartesiano abaixo, estão representadas duas funções, f e g, de domínio $[-3, 6]$ e contradomínio $\mathbb{R}$.



Determine os valores de x tais que:

a) $f(x) = 0$

b) $g(x) = 0$

c) $f(x) > 0$

d) $f(x) < 0$

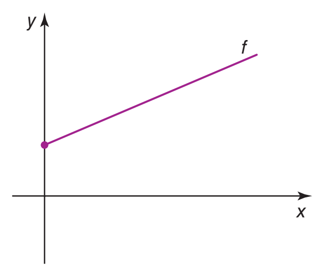
e) $g(x) > 0$

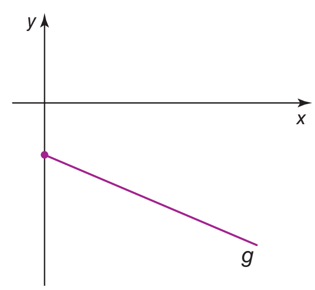
f) $g(x) < 0$

g) $f(x) \cdot g(x) < 0$

h) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$

24 As semirretas representadas nos planos cartesianos abaixo representam duas funções f e g.





Considerando a função h definida por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, para qualquer x, com $x \in \mathbb{R}_+$, podemos afirmar que:

a) a função h possui pelo menos uma raiz.

b) todos os pontos do gráfico da função h estão acima do eixo Ox.

c) todos os pontos do gráfico da função h estão abaixo do eixo Ox.

d) há pelo menos um ponto do gráfico de h cuja ordenada é positiva.

e) $h(0) \cdot h(1) = 0$

25 Aplicando as definições de função crescente e função decrescente, prove que a função $y = x^2$ é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$.

Exercícios contextualizados

26 Para o controle do tráfego metroviário, um sistema cartesiano ortogonal foi associado ao plano por onde transitam os trens do metrô de uma cidade. Duas estações, P e Q, são ligadas por um trajeto retilíneo e podem ser determinadas pelos pares ordenados $P(1, 7)$ e $Q(4, 11)$, em que as coordenadas estão em quilômetro. Qual é a distância percorrida por um trem no trajeto $\overline{PQ}$?

27 Um edifício tem só um apartamento por andar, exceto no andar térreo, onde há apenas a recepção. Os andares são numerados a partir do zero: 0 (térreo), 1 (primeiro andar), 2 (segundo andar) etc., e os apartamentos são numerados a partir do número 1, do primeiro ao último andar: 1, 2, 3, ..., respectivamente.
Considere a correspondência que associa cada número de andar a um número de apartamento. Desse modo:
a) o número 0 de andar está associado a que número de apartamento?
b) o número 2 de andar está associado a que número de apartamento?
c) a numeração dos apartamentos é função da numeração dos andares? Por quê?

28 Por meio de um estudo sobre o consumo C de energia elétrica de uma fábrica, em quilowatt-hora, em função do tempo t, em dia, concluiu-se que $C = 400t$.
a) Qual é o consumo de energia elétrica dessa fábrica em 8 dias?
b) Quantos dias são necessários para que o consumo atinja 4.800 kWh?
c) Se a empresa adquirir uma máquina que consuma 200 kWh diários, qual será a equação que descreve o consumo total da fábrica em função do tempo?

29 (Uepa) O empregado de uma empresa ganha mensalmente x reais. Sabe-se que ele paga de aluguel R$ 120,00 e gasta $\frac{3}{4}$ de seu salário em sua manutenção, poupando o restante. Então:
a) encontre uma expressão matemática que defina a poupança P em função do seu salário x.
b) para poupar R$ 240,00, qual deverá ser seu salário mensal?

30 (UCSal-BA) Um restaurante cobra de seus clientes um preço fixo por pessoa: R$ 15,00 no almoço e R$ 12,00 no jantar. Certo dia, dos 120 clientes que compareceram a esse restaurante, x foram atendidos no jantar. Se foram gastos R$ 6,00 no preparo de cada refeição, a expressão que define o lucro L, em reais, obtido nesse dia, em função de x, é:
a) $L(x) = 120x - 720$
b) $L(x) = 1.440x - 720$
c) $L(x) = -6x + 1.440$
d) $L(x) = -4x + 720$
e) $L(x) = -3x + 1.080$

31 Em uma refinaria de petróleo, uma rachadura num reservatório de gasolina provocou um grande vazamento. Os técnicos responsáveis pelo conserto estimaram que, a partir do instante em que ocorreu a avaria, o volume V de gasolina restante no reservatório (em quilolitro) em função do tempo t (em hora) podia ser calculado pela lei: $V(t) = -2t^2 - 8t + 120$.

a) Qual era a quantidade de gasolina restante no reservatório 3 horas depois da ocorrência da avaria?
b) Calcule a capacidade desse reservatório sabendo que ele estava completamente cheio no momento em que ocorreu a rachadura.
c) Qual será o tempo necessário para que o reservatório fique vazio, caso os técnicos não consigam realizar o conserto?
d) Para que os técnicos consigam salvar 80% da gasolina do reservatório, em quanto tempo deverão realizar o conserto?

32 (UEL-PR) Tome uma folha de papel em forma de quadrado de lado igual a 21 cm e nomeie os seus vértices A, B, C, D, confrme a figura 1. A seguir, dobre-a, de maneira que o vértice D fique sobre o "lado" AB (figura 2). Seja D′ esta posição do vértice D e x a distância de A a D′.

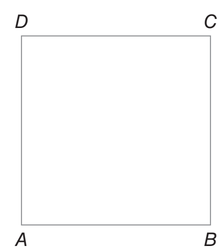


Figura 1

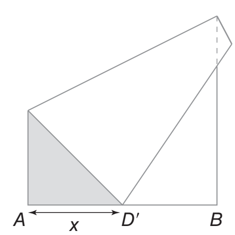


Figura 2

A função que expressa a área do triânculo retângulo sombreado em função de x é:
a) $A = \dfrac{-x^3 + 441x}{42}$
b) $A = \dfrac{x^3 - 441x}{84}$
c) $A = \dfrac{-x^3 + 441x}{84}$
d) $A = \dfrac{441 - x^2}{84}$
e) $A = \dfrac{441 - x^2}{42}$

33 (Unifesp) A tabela mostra a distância *s* em centímetro que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em *t* segundos.

t	*s*
0	0
1	32
2	128
3	288
4	512

A distância *s* é função de *t* dada pela expressão $s(t) = at^2 + bt + c$, onde a, b, c são constantes. A distância *s* em centímetros, quando $t = 2{,}5$ segundos, é igual a:

a) 248 **b)** 228 **c)** 208 **d)** 200 **e)** 190

34 Uma máquina fabrica 2 metros de corda por minuto.

a) Complete a tabela abaixo com a produção de corda dessa máquina, em metro, para os seguintes tempos de funcionamento da máquina, em minuto.

Tempo (min)	Produção (m)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

b) Os valores do tempo e os correspondentes valores da produção dessa máquina são direta ou inversamente proporcionais? Por quê?

c) Indicando por *y* a produção, em metro, para o funcionamento de *x* minutos da máquina, qual é a equação que expressa *y* em função de *x*?

d) Qual é o gráfico da função do item **c** admitindo-se qualquer valor *x* do tempo, com $x \geqslant 0$?

35 No mês de janeiro de 2009, uma indústria gastou R$ 28.800,00 com o consumo de 1.600 hL (hectolitros) de óleo diesel. Não houve alteração no preço do óleo diesel em 2009.

a) Qual foi o gasto, em real, dessa indústria com óleo diesel em novembro, quando o consumo foi de 2.200 hL de diesel?

b) Indicando por *y* o gasto dessa indústria, em real, com *x* hL de diesel, qual é a equação que expressa *y* em função de *x*?

c) Na função do item **b**, as variáveis *x* e *y* são diretamente proporcionais? Por quê?

d) Qual é o gráfico da função do item **b** admitindo-se qualquer valor *x* para o consumo, com $x \geqslant 0$?

36 Considere que a população de insetos que sobrevivem numa plantação é inversamente proporcional à quantidade de agrotóxicos utilizada para combatê-los. Quando se utilizaram 10 L de agrotóxicos, a população sobrevivente foi estimada em 2.000 insetos.

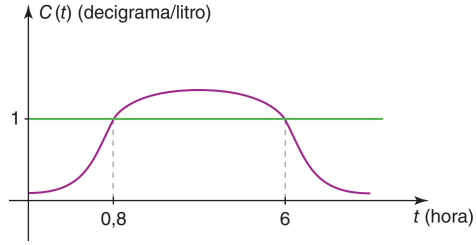
a) Quantos litros de agrotóxicos deveriam ter sido utilizados para que a população de insetos sobreviventes fosse reduzida a 400 indivíduos?

b) Dê a lei que expressa a população sobrevivente $f(x)$ de insetos na plantação em função da quantidade *x*, em litro, de agrotóxicos utilizada.

c) Considerando a função *f* obtida no item anterior, complete a tabela abaixo e represente no plano cartesiano os pontos obtidos.

Quantidade de agrotóxicos (litro)	População de insetos (número de indivíduos)
x	$f(x)$
5	
10	2.000
16	
20	
25	
32	

37 (Vunesp) Uma empresa farmacêutica lançou no mercado um analgésico. A concentração do analgésico, denotada por $C(t)$, em decigrama por litro de sangue, *t* horas após ter sido administrado a uma pessoa, está representada no gráfico esboçado a seguir. Sabe-se que esse analgésico só produz efeito se sua concentração for superior a 1 decigrama por litro de sangue.



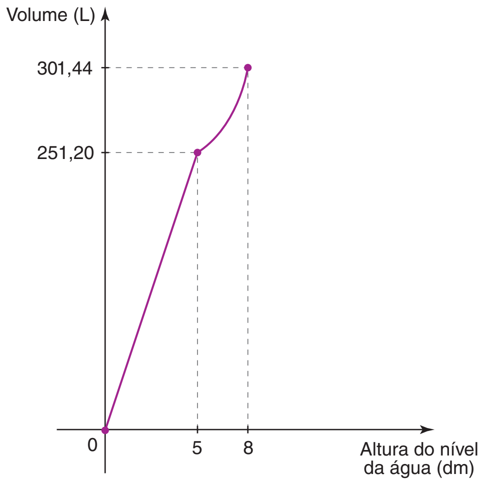
(Obs.: o gráfico não está em escala.)

Analisando o gráfico, determine:

a) após ter sido administrado, quantos minutos decorrerão para que o analgésico comece a fazer efeito;

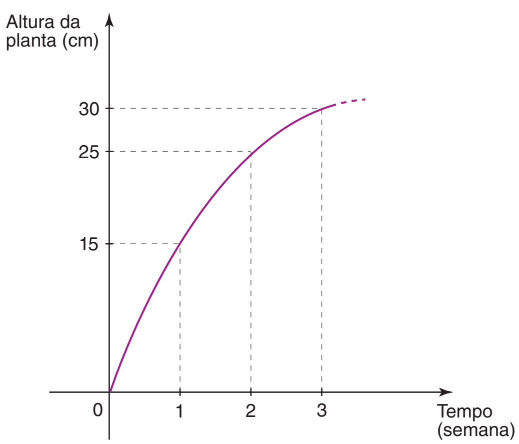
b) por quanto tempo a ação do analgésico permanecerá.

38 O gráfico abaixo apresenta o volume de água, em litro, de um reservatório em função da altura do nível da água, em decímetro.



a) Qual é o volume de água quando o nível da água atinge 5 dm?
b) Qual é o volume de água quando o nível da água atinge 8 dm?
c) Qual é a variação do volume de água quando o nível varia de 5 a 8 dm?

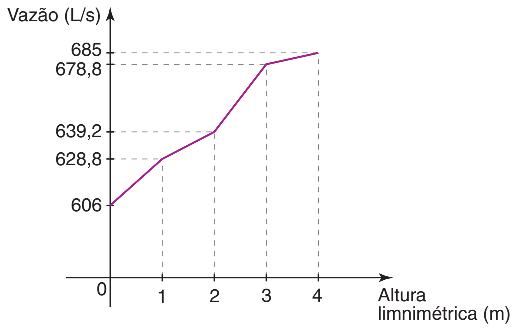
39 O gráfico a seguir representa o crescimento de uma planta, em centímetro, em função do tempo, em semana.



a) Qual era a altura da planta ao final da terceira semana?
b) Qual foi o crescimento da planta durante a terceira semana?
c) Durante qual das três semanas registradas ocorreu o maior desenvolvimento da planta?

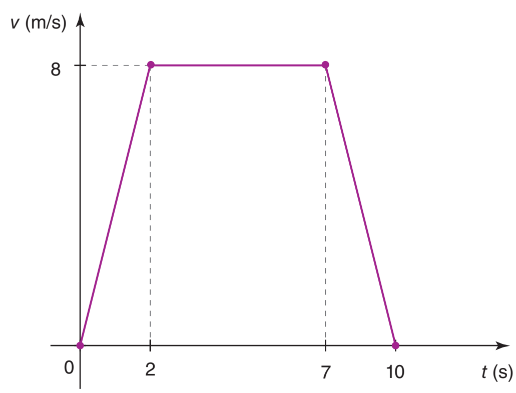
40 Em épocas de chuvas, as enchentes provocadas pelo transbordamento de rios e córregos causam grandes problemas. A incidência de enchentes pode ser prevista pela análise da vazão de um rio em função de sua altura **limnimétrica**. A altura limnimétrica é medida com o **limnógrafo**, que registra continuamente a variação do nível de um rio, adotando como **nível normal** ou **nível 0** (zero) o nível do rio fora da estação de chuvas.

Um engenheiro, estudando a vazão de um rio em litro por segundo (L/s), construiu o gráfico abaixo, que mostra a vazão em função da altura limnimétrica, em metro.



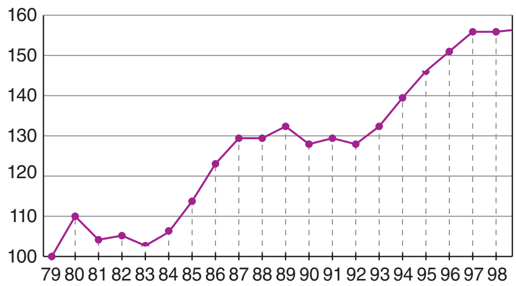
a) Qual é a vazão do rio para a altura limnimétrica zero?
b) Qual é a vazão do rio se ele estiver 4 m acima do nível normal?
c) Se o rio se mantiver, durante 2 horas, 3 m acima do nível normal, qual será a vazão total nesse período de tempo?
d) Sabendo que ocorre enchente somente se a vazão chega a 40.000 litros por minuto, haverá enchente se o rio estiver 3 m acima do nível normal?

41 O gráfico a seguir mostra a velocidade v de um automóvel em função do tempo t.



a) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é crescente?
b) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é decrescente?
c) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é constante?

42 (Unifor-CE) No gráfico abaixo, tem-se a evolução do produto interno bruto (PIB) brasileiro nas duas últimas décadas do século XX, tomando como base o valor de 100 unidades no ano de 1979.



Fonte: IBGE
(Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística)

De acordo com esse gráfico, é correto concluir que:

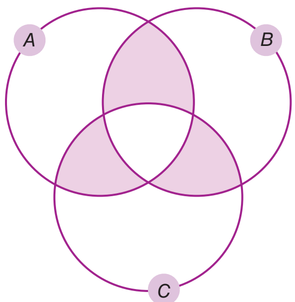
a) Os valores do PIB foram crescentes no período de 1980 a 1989.
b) Os valores do PIB foram decrescentes no período de 1987 a 1992.
c) A diferença entre os valores do PIB dos anos 1989 e 1987 foi igual à dos anos 1992 e 1990.
d) Os valores do PIB foram sempre crescentes.
e) O crescimento do valor do PIB foi maior no período de 1979 a 1980 do que no período de 1993 a 1994.

43 Durante certo período, a pressão interna p de um recipiente variou em função do tempo t conforme a função $p(t) = \frac{t+1}{t}$, em que as unidades de p e t são atmosfera e minuto, respectivamente. Mostre que durante esse período a pressão decresceu com o passar do tempo.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 A região sombreada do diagrama abaixo representa:



a) $(A \cap B \cap C) - (A \cup B)$
b) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
c) $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] - (A \cap B \cap C)$
d) $[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$
e) $(A \cup B) \cap (A \cup B) \cap (B \cup C)$

2 Sejam A e B conjuntos quaisquer. Se $x \notin A$ ou $x \notin B$, então, em relação a um universo U, podemos concluir que:
a) $x \in A'$
b) $x \in B'$
c) $x \in (A' \cup B)$
d) $x \in (A \cap B)'$
e) $x \in (A' \cap B)$

3 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada proposição a seguir.
a) Se o número $x + y$ é irracional e x é racional, então y é irracional.
b) Se o produto xy é um número irracional e y é irracional, então x é irracional.
c) Se o quociente $\frac{x}{y}$ é um número irracional e x é irracional, então y é racional.
d) Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $\sqrt[n]{a}$ é irracional, então $a \in \mathbb{N}$.

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

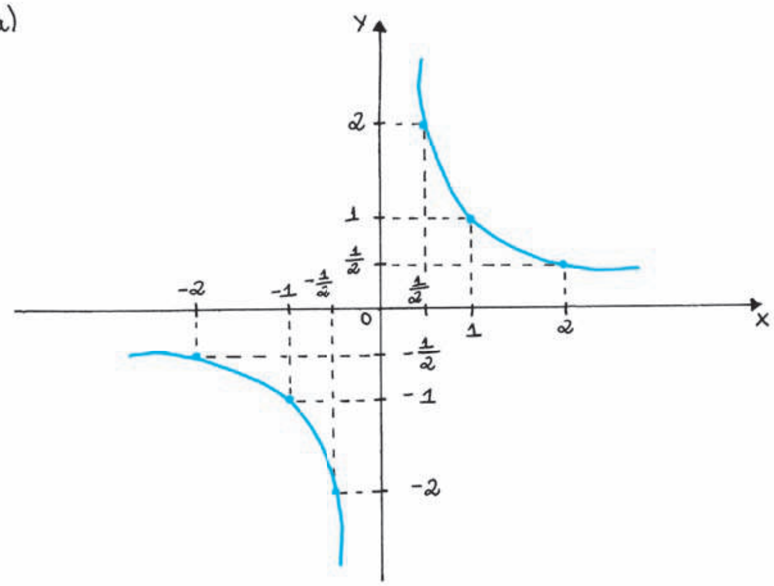
Considerando a função $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

a) esboce seu gráfico;

b) descreva os intervalos onde f é crescente, decrescente ou constante.

Resolução

a)



b) A função f é decrescente em todo seu domínio, $\boxed{\text{pois a curva decresce da esquerda para a direita.}}$

ERRADO!

Comentário

a) O esboço do gráfico apresentado está correto. Poderíamos, ainda, acrescentar que os eixos Ox e Oy são assíntotas do gráfico, isto é, a distância entre o gráfico e cada um dos eixos tende a zero.

b) A resposta que o aluno deu a esse item é incorreta, pois, para que f fosse decrescente em todo o domínio $\mathbb{R}^*$, deveria ser obedecida a seguinte condição: "para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a $\mathbb{R}^*$, com $x_2 > x_1$, tem-se $f(x_2) < f(x_1)$". Verifique que essa condição não é obedecida para todos os valores do domínio.

Agora, refaça a resolução do item b, corrigindo-a.

Capítulo

3

Algumas funções e conceitos fundamentais

Instrumentos analógicos de medida utilizam uma forma de medição ou representação de grandezas na qual um sensor ou indicador acompanha de modo contínuo a variação da grandeza que está sendo medida ou representada. Nesses instrumentos, a variação da grandeza é associada ao deslocamento de um sinalizador (como um ponteiro). Cada deslocamento indica uma medida da grandeza.

Neste capítulo, estudaremos algumas funções e suas propriedades, além de trabalhar a composição e a inversão de funções.

3.1 Considerações sobre algumas funções fundamentais

O estudo de algumas funções particulares permite a extrapolação de ideias para o estudo de conceitos gerais.

3.2 Composição de funções

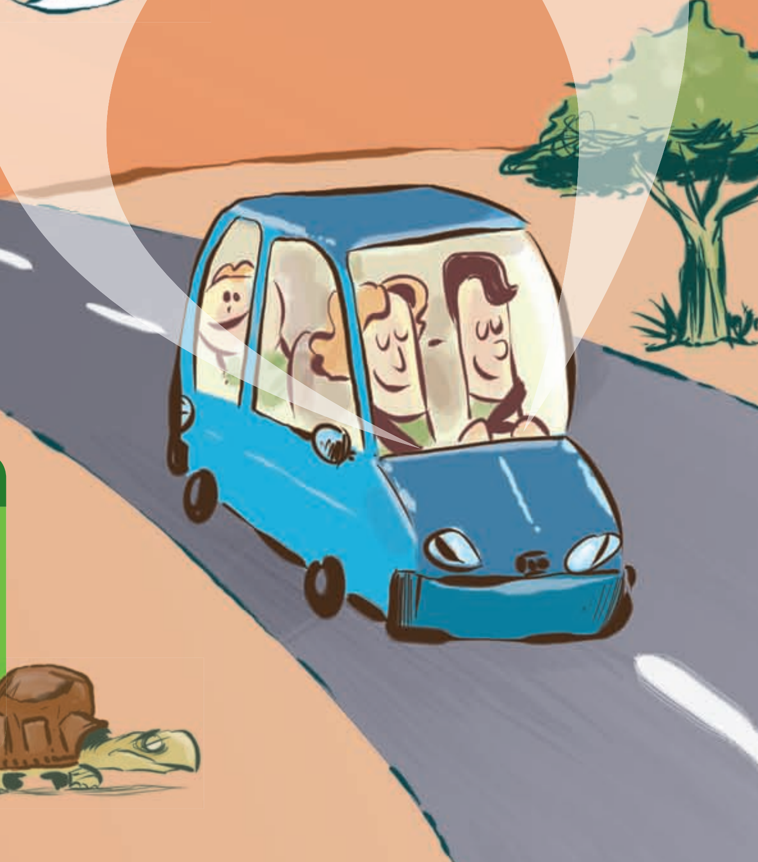
Conhecendo a variação de uma grandeza em função de outra, que também varia em função de uma terceira, podemos, por meio de uma composição de funções, descrever a variação da primeira grandeza em função da terceira.

3.3 Inversão de funções

Muitas vezes, conhecendo a variação de uma grandeza em função de outra, podemos descrever a variação dessa última grandeza em função da primeira.

Cada intervalo de tempo x está associado a um deslocamento $f(x)$ do ponteiro do relógio, e cada deslocamento do ponteiro está associado a um número $n(f(x))$, que é lido no mostrador do relógio.

A velocidade do veículo está associada a um deslocamento do ponteiro do velocímetro, e esse deslocamento está associado a um número, que é lido no visor.



Para pensar

1. Dê exemplos de instrumentos analógicos de medida.
2. No relógio analógico, cada deslocamento de 360° do ponteiro dos minutos representa o intervalo de tempo de 1 hora. Quanto tempo representará o deslocamento de 30° desse ponteiro?
3. Qual deve ser o deslocamento, em grau, do ponteiro dos minutos para representar 20 minutos?

Considerações sobre algumas funções fundamentais

Objetivos

- **Analisar** funções definidas por mais de uma sentença.
- **Reconhecer** função par e função ímpar.

Termos e conceitos

- **função par**
- **função ímpar**

Funções definidas por mais de uma sentença

Acompanhe a situação a seguir.

Em todos os países, os impostos arrecadados das empresas e dos cidadãos devem ser aplicados na manutenção dos serviços públicos e em políticas sociais, econômicas e culturais do Estado. No Brasil, os impostos são arrecadados pela Secretaria da Receita Federal.

O imposto que o contribuinte paga sobre seus rendimentos é chamado de Imposto de Renda (IR). Esse tipo de imposto é calculado em função da renda de cada cidadão, como mostra, a seguir, a tabela progressiva para o cálculo anual do Imposto de Renda de Pessoa Física arrecadado em 2010, com base nos rendimentos do ano de 2009.

Base de cálculo mensal (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do imposto (R$)
até 1.499,15	0,0	0,00
de 1.499,16 até 2.246,75	7,5	112,43
de 2.246,76 até 2.995,70	15,0	280,94
de 2.995,71 até 3.743,19	22,5	505,62
acima de 3.743,19	27,5	692,78

Dados disponíveis em: <http://www.receita.fazenda.gov.br>. Acesso em: 15 jan. 2010.

Por exemplo, uma pessoa que recebeu, em determinado mês de 2010, renda total de R$ 2.000,00, pagou R$ 37,57 de Imposto de Renda, conforme os cálculos abaixo:

$$\underset{\text{alíquota}}{\underset{\uparrow}{7{,}5\%}} \cdot 2.000{,}00 - \underset{\text{parcela a deduzir}}{\underset{\uparrow}{112{,}43}} = 150{,}00 - 112{,}43 = 37{,}57$$

Observe que, na tabela, a "parcela a deduzir do imposto" é subtraída do produto da "alíquota" pela "base de cálculo mensal" e o resultado é o imposto a pagar.

De acordo com a tabela, se a renda mensal de um cidadão é x reais, então o Imposto de Renda mensal $f(x)$ a pagar, em real, pode ser calculado pela função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 1.499{,}15 \\ 0{,}075x - 112{,}43, \text{ se } 1.499{,}16 \leqslant x \leqslant 2.246{,}75 \\ 0{,}15x - 280{,}94, \text{ se } 2.246{,}76 \leqslant x \leqslant 2.995{,}70 \\ 0{,}225x - 505{,}62, \text{ se } 2.995{,}71 \leqslant x \leqslant 3.743{,}19 \\ 0{,}275x - 692{,}78, \text{ se } x > 3.743{,}19 \end{cases}$$

Percebe-se, por esse exemplo, que nem sempre é possível definir uma função por uma única sentença.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 (Uenf-RJ) Uma panela, contendo um bloco de gelo a -40 °C, é colocada sobre a chama de um fogão. A evolução da temperatura T, em grau Celsius, ao longo do tempo x, em minuto, é descrita pela seguinte função real:

$$T(x) = \begin{cases} 20x - 40, \text{ se } 0 \leqslant x < 2 \\ 0, \text{ se } 2 \leqslant x \leqslant 10 \\ 10x - 100, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 100, \text{ se } 20 < x \leqslant 40 \end{cases}$$

O tempo necessário para que a temperatura da água atinja 50 °C, em minuto, equivale a:

a) 4,5 **b)** 9,0 **c)** 15,0 **d)** 30,0

2 (Ufac) O gerente de uma loja anuncia a seguinte promoção: para compras de até R$ 300,00, nenhum desconto. Nas compras acima de R$ 300,00, desconto de 20% sobre o que exceder a esse valor. A função f que fornece o valor a pagar $f(x)$, em real, para uma compra $x \geqslant 0$, em real, é:

a) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 300 \\ 80 + \frac{4x}{5}, \text{ se } x > 300 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 300 \\ 60 + \frac{3x}{5}, \text{ se } x > 300 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 300 \\ 80 + x, \text{ se } x > 300 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 300 \\ 70 + \frac{4x}{5}, \text{ se } x > 300 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 300 \\ 60 + \frac{4x}{5}, \text{ se } x > 300 \end{cases}$

3 O manual do candidato do vestibular da Fuvest de 2009 informava que quem tivesse participado da prova do Enem em 2007 ou 2008 poderia ter um acréscimo na nota da primeira fase do vestibular de 2009. Se o candidato tivesse uma nota E na prova objetiva do Enem e uma nota F na prova da primeira fase da Fuvest, a nota N considerada nessa fase seria dada pela fórmula abaixo, de modo que, caso N não fosse inteiro, seria arredondado para o inteiro superior mais próximo.

$$N = \begin{cases} \frac{4F + E}{5}, \text{ se } E > F \\ F, \text{ se } E \leqslant F \end{cases}$$

Se o candidato tivesse participado do Enem nos anos citados, prevaleceria a maior pontuação E.

a) Se um candidato obteve $F = 40$ e $E = 80$, qual foi sua nota N na primeira fase da Fuvest?

b) Se um candidato obteve $F = 80$ e $E = 40$, qual foi sua nota N na primeira fase da Fuvest?

c) Para $E = 40$, construa o gráfico de N em função de F, admitindo que N pode assumir qualquer valor real de 0 a 100.

4 Em várias cidades brasileiras, foi instituída a TRSD (Taxa de Resíduos Sólidos Domiciliares), conhecida como “taxa do lixo”, que estabelece para cada domicílio o pagamento pelo serviço de coleta, transporte e armazenamento do lixo. Quando instituída em determinada cidade, os domicílios foram tributados em função do volume de lixo gerado, conforme a tabela:

Faixas	Taxa mensal
De 0 até 10 litro(s) de resíduos por dia.	R$ 6,14
Mais de 10 e até 20 litros de resíduos por dia.	R$ 12,27
Mais de 20 e até 30 litros de resíduos por dia.	R$ 18,41
Mais de 30 e até 60 litros de resíduos por dia.	R$ 36,82
Mais de 60 litros de resíduos por dia.	R$ 61,36

Representando por x o volume, em litro, de lixo gerado por um domicílio genérico e por $f(x)$ a taxa mensal correspondente, em real, dê a lei que expressa a taxa mensal desse domicílio em função do volume de lixo gerado.

Resolva os exercícios complementares 1, 20 e 21.

Função par e função ímpar

A paridade de uma função é uma propriedade relacionada à simetria do gráfico em relação ao eixo *Oy* ou à origem *O* do sistema de eixos. O conhecimento dessa simetria auxilia na construção do gráfico e permite a extensão de propriedades pela análise gráfica. A seguir, daremos uma definição algébrica à paridade e sua interpretação geométrica.

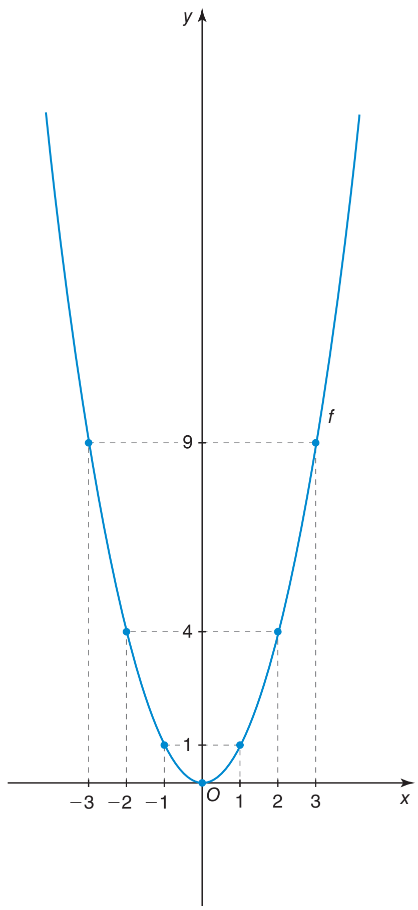
Função par

Uma função f de domínio D é **par** se, e somente se, $f(x) = f(-x)$ para qualquer $x \in D$.

Se uma função é par, as partes de seu gráfico para $x \geqslant 0$ e para $x \leqslant 0$ são simétricas em relação ao eixo *Oy*.

Exemplo

A função $f(x) = x^2$ é par, pois, em relação ao eixo *Oy*, o ramo da parábola para $x \geqslant 0$ é simétrico ao ramo da parábola para $x \leqslant 0$.



Observe que

$(-x)^2 = x^2$ para qualquer x real.

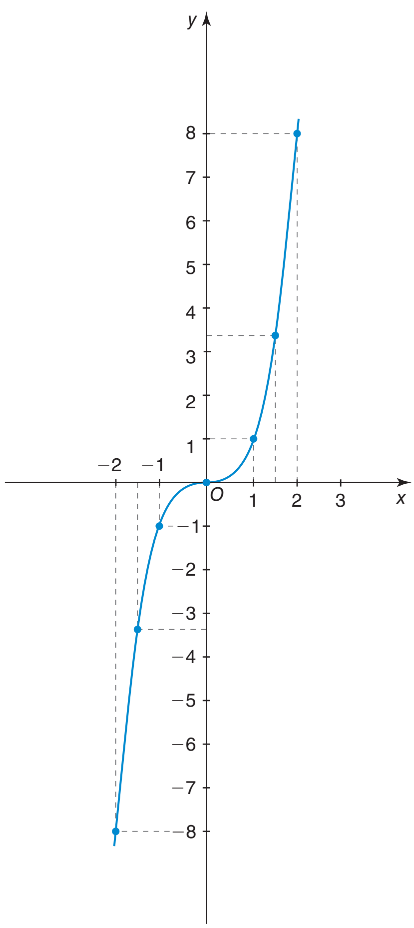
Função ímpar

Uma função f de domínio D é **ímpar** se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$ para qualquer $x \in D$.

Se uma função é ímpar, as partes de seu gráfico para $x \geqslant 0$ e para $x \leqslant 0$ são simétricas em relação à origem *O* do sistema de eixos.

Exemplo

A função $f(x) = x^3$ é ímpar, pois, em relação à origem *O* do sistema de coordenadas, a parte do gráfico para $x \geqslant 0$ é simétrica à parte do gráfico para $x \leqslant 0$.

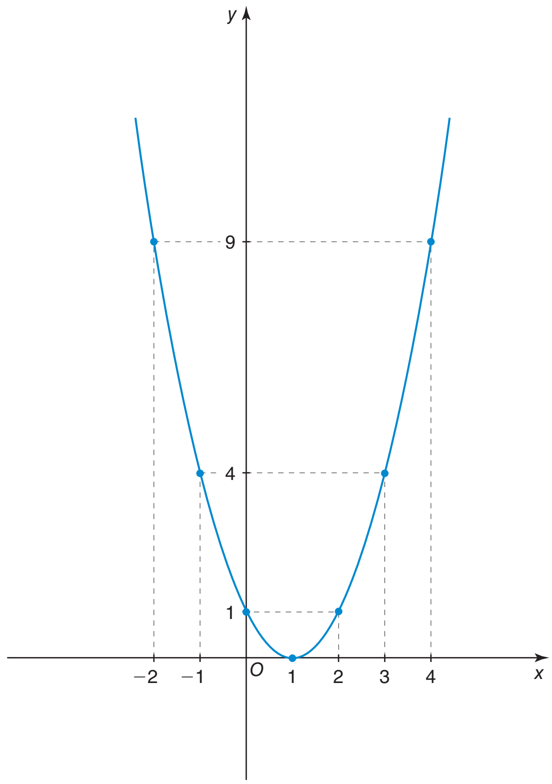


Observe que

$(-x)^3 = -x^3$ para qualquer x real.

Notas:

1. Conhecer a **paridade** (propriedade de ser par ou ímpar) de uma função $y = f(x)$ simplifica a construção de seu gráfico, pois, construindo-se o gráfico para $x \geqslant 0$, automaticamente se obtém o gráfico para $x \leqslant 0$.
2. Existem funções que não são pares nem ímpares, por exemplo, a função $f(x) = (x - 1)^2$ representada abaixo. Observe que, nessa função, os pontos do gráfico para $x \geqslant 0$ não são simétricos aos pontos do gráfico para $x \leqslant 0$, nem em relação ao eixo Oy nem em relação à origem O do sistema de eixos.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Classificar cada uma das funções a seguir como "par", "ímpar" ou "nem par nem ímpar".

a) $f(x) = x^4 + x^2$

b) $g(x) = 4x$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $s(x) = 2x^2 + x$

Resolução

Para saber se uma função f é par ou ímpar, basta calcular $f(-x)$ de modo que:

- se $f(-x) = f(x)$ para todo x do domínio, a função f é par;
- se $f(-x) = -f(x)$ para todo x do domínio, a função f é ímpar.

Caso não ocorra nenhuma das possibilidades acima, concluímos que a função não é par nem ímpar.

a) $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$

Como $f(-x) = f(x)$ para todo x do domínio $\mathbb{R}$, concluímos que f é uma função par.

b) $g(-x) = 4 \cdot (-x) = -4x = -g(x)$

Como $g(-x) = -g(x)$ para todo x do domínio $\mathbb{R}$, concluímos que g é uma função ímpar.

c) $h(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -h(x)$

Como $h(-x) = -h(x)$ para todo x do domínio $\mathbb{R}$, concluímos que h é uma função ímpar.

d) $s(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$

Observando que $s(-x) \neq s(x)$ e $s(-x) \neq -s(x)$ para algum valor de x, concluímos que s não é par nem ímpar. Por exemplo, para $x = 4$, temos:

$$s(-4) = (-4)^2 - 4 = 12 \text{ e } s(4) = 4^2 + 4 = 20$$

Como $s(-4) \neq s(4)$ e $s(-4) \neq -s(4)$, concluímos que existe pelo menos um elemento do domínio $\mathbb{R}$ que não satisfaz nenhuma das duas condições de paridade.

Logo, s não é par nem ímpar.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5 Classifique cada função como "par", "ímpar" ou "nem par nem ímpar".

a) $f(x) = x^2 + 1$

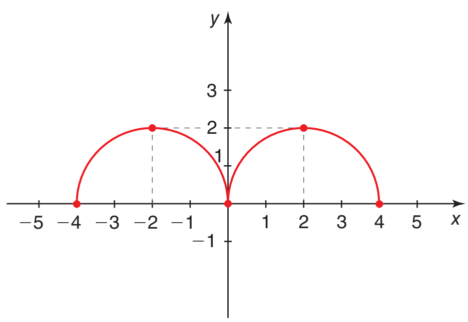
b) $g(x) = \dfrac{x^3}{6}$

c) $h(x) = (x + 1)^2$

d) $r(x) = \sqrt[5]{x}$

e) $q(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$

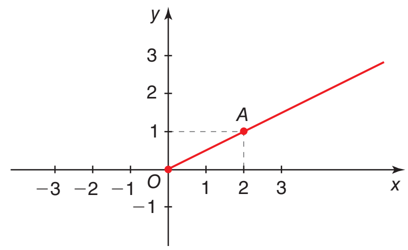
6 O gráfico da função *f*, representado a seguir, é formado por duas semicircunferências.



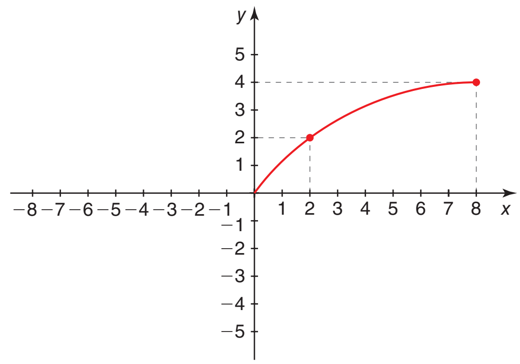
a) Classifique a função *f* como "par", "ímpar" ou "nem par nem ímpar".

b) Calcule $f(3)$.

7 A semirreta $\overrightarrow{OA}$ abaixo é apenas uma parte do gráfico de uma função par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Complete o gráfico da função *f*.



8 A figura abaixo é apenas uma parte do gráfico de uma função ímpar $f: [-8, 8] \rightarrow \mathbb{R}$. Complete o gráfico da função *f*.



Resolva os exercícios complementares 2 a 6.

Cesar Cielo, recordista mundial dos 50 metros livres.

Seção 3.2

Composição de funções

Objetivos

- **Trabalhar** a composição de funções.
- **Resolver** problemas que envolvem funções compostas.

Termos e conceitos

- **função composta**

Função composta

Um técnico acompanhou o desenvolvimento de um atleta desde que ele era adolescente até atingir a idade adulta. Durante esse período, o técnico concluiu que a massa m do atleta, em quilograma, em função da altura h, em metro, variou de acordo com a função:

$$m(h) = 22h^2 \qquad \text{(I)}$$

Também constatou que a altura h do rapaz, em metro, em função do tempo t, em ano, variou de acordo com a função:

$$h(t) = \frac{4t + 1}{2t + 2} \qquad \text{(II)}$$

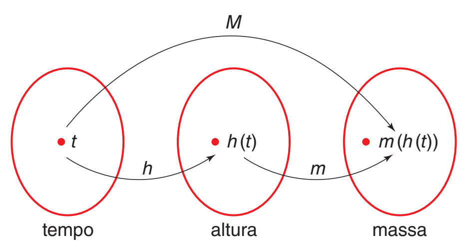
Para uma avaliação da massa m em função do tempo t, o técnico teve de efetuar uma **composição** das funções (I) e (II), isto é, substituiu a variável h da equação (I) por $h(t)$, obtendo:

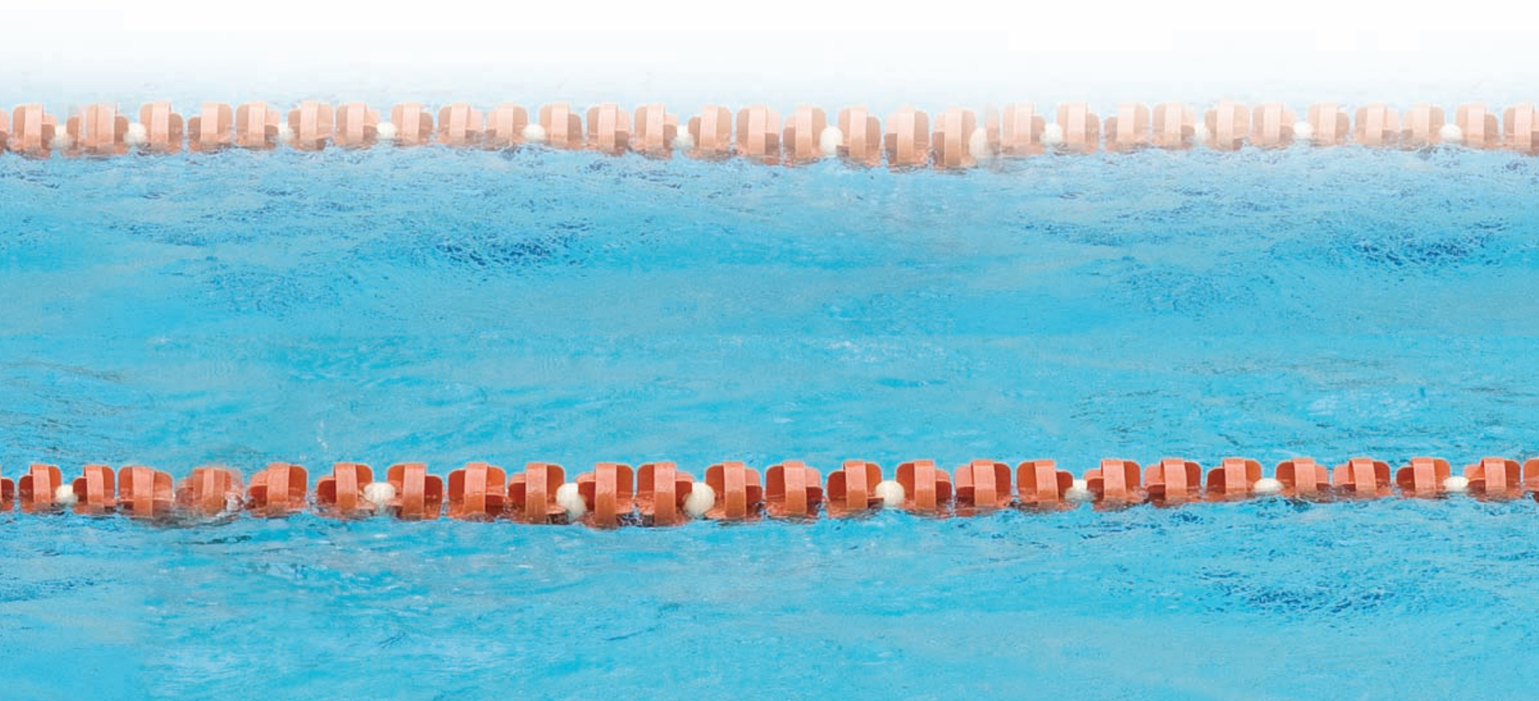
$$m(h(t)) = 22[h(t)]^2 \Rightarrow m(h(t)) = 22 \cdot \left[\frac{4t + 1}{2t + 2}\right]^2$$

Indicando por $M(t)$ esta última função, chegou a:

$$M(t) = 22 \cdot \left[\frac{4t + 1}{2t + 2}\right]^2$$

A função M, que expressa a massa do rapaz em função do tempo, é chamada de **função composta de *m* com *h***. Observe o esquema dessa composição:

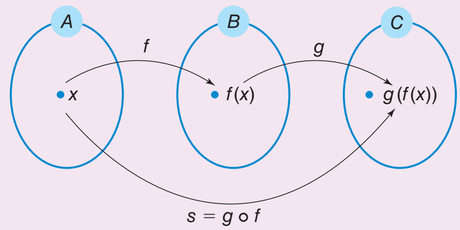




Definimos:

Sejam A, B e C conjuntos não vazios e sejam as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$.

A função $s: A \longrightarrow C$ tal que $s(x) = g(f(x))$ é chamada de **função composta** de g com f. Indica-se essa composição por $\boldsymbol{g \circ f}$.

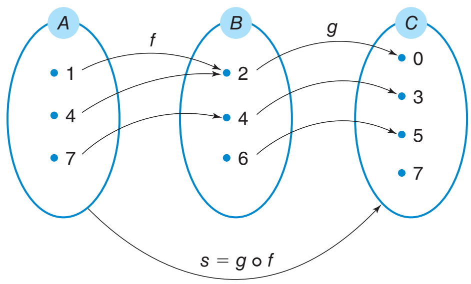


Desse modo, existe a composta de g com f, isto é, $g \circ f$ se, e somente se, $Im(f) \subset D(g)$.

Lemos $\boldsymbol{g \circ f}$ como "g composta com f".

Exemplos

a) Considere as funções f e g:



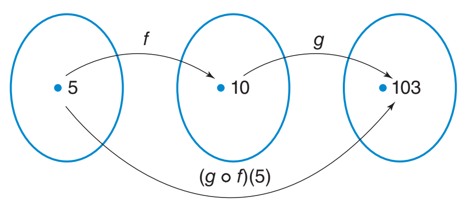
Note que:

- $f(1) = 2$ e $g(2) = 0 \Rightarrow g(f(1)) = 0$; logo, $(g \circ f)(1) = 0$
- $f(4) = 2$ e $g(2) = 0 \Rightarrow g(f(4)) = 0$; logo, $(g \circ f)(4) = 0$
- $f(7) = 4$ e $g(4) = 3 \Rightarrow g(f(7)) = 3$; logo, $(g \circ f)(7) = 3$

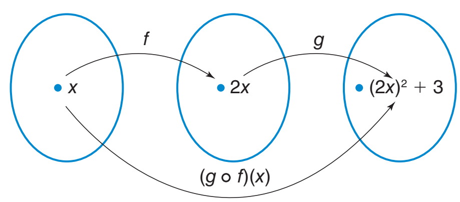
b) Considere as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 + 3$

Observe que:

- $f(5) = 10$ e $g(10) = 103 \Rightarrow g(f(5)) = 103$; logo, $(g \circ f)(5) = 103$



- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 3 = (2x)^2 + 3$



Se existem as composições de funções $g \circ f$ e $f \circ g$, não necessariamente $g \circ f = f \circ g$, ou seja, a composição de funções **não é comutativa**.

Exemplo

Sendo $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2 + 3$, temos:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 3 = (2x)^2 + 3 = 4x^2 + 3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) = 2(x^2 + 3) = 2x^2 + 6$

Observe, portanto, que $g \circ f \neq f \circ g$.

2 Dadas as funções $f(x) = 2x + 5$ e $g(x) = x^2 - 2$, determinar:

a) $(g \circ f)(3)$
b) $(f \circ g)(3)$
c) $(g \circ f)(x)$
d) $(f \circ g)(x)$

Resolução

a) $(g \circ f)(3) = g(f(3))$
Como $f(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$, temos:
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(11) = 11^2 - 2 = 119$

b) $(f \circ g)(3) = f(g(3))$
Como $g(3) = 3^2 - 2 = 7$, temos:
$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(7) = 2 \cdot 7 + 5 = 19$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 - 2 = (2x + 5)^2 - 2 =$
$= 4x^2 + 20x + 25 - 2 = 4x^2 + 20x + 23$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g(x) + 5 =$
$= 2(x^2 - 2) + 5 = 2x^2 + 1$

3 Seja f uma função real de variável real tal que $f(3x - 2) = 6x + 1$. Determinar:

a) $f(4)$
b) $f(x)$

Resolução

a) Primeiro determinamos x de modo que $3x - 2 = 4$:
$3x - 2 = 4 \Rightarrow 3x = 6$
$\therefore x = 2$
A seguir, substituímos a variável x por 2 na igualdade $f(3x - 2) = 6x + 1$, obtendo:

$$f(4) = 6 \cdot \underset{\underset{x}{\uparrow}}{2} + 1 = 13$$

b) Efetuamos a mudança de variável, $3x - 2 = t$, de onde se conclui que $x = \frac{t + 2}{3}$.
Substituímos a variável x por $\frac{t + 2}{3}$ na igualdade $f(3x - 2) = 6x + 1$, obtendo:

$$f(t) = f\left(3 \cdot \underbrace{\frac{t+2}{3}}_{x} - 2\right) = 6 \cdot \underbrace{\frac{t+2}{3}}_{x} + 1 =$$

$= 2(t + 2) + 1 = 2t + 5$
Em vez de $f(t) = 2t + 5$, podemos apresentar a função f com qualquer variável no lugar de t; por exemplo, $f(x) = 2x + 5$.

4 Sejam as funções f, g e h tais que $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 3$ e $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Determinar:

a) $(h \circ g \circ f)(2)$
b) $(h \circ g \circ f)(x)$
c) $(g \circ g \circ f)(-2)$
d) $(g \circ g \circ f)(x)$

Resolução

a) $(h \circ g \circ f)(2) = (h \circ g)(f(2))$
Como $f(2) = 2^2 + 1 = 5$, temos:
$(h \circ g)(f(2)) = (h \circ g)(5) = h(g(5))$
Como $g(5) = 5 + 3 = 8$, concluímos:
$h(g(5)) = h(8) = \sqrt[3]{8} = 2$
Logo, $(h \circ g \circ f)(2) = 2$.

b) $(h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(x^2 + 1) =$
$= h(g(x^2 + 1)) = h(x^2 + 1 + 3) = h(x^2 + 4) =$
$= \sqrt[3]{x^2 + 4}$

c) $(g \circ g \circ f)(-2) = (g \circ g)(f(-2))$
Como $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$, temos:
$(g \circ g)(f(-2)) = (g \circ g)(5) = g(g(5))$
Como $g(5) = 5 + 3 = 8$, concluímos:
$g(g(5)) = g(8) = 8 + 3 = 11$
Logo, $(g \circ g \circ f)(-2) = 11$.

d) $(g \circ g \circ f)(x) = (g \circ g)(f(x)) = (g \circ g)(x^2 + 1) =$
$= g(g(x^2 + 1)) = g(x^2 + 1 + 3) = g(x^2 + 4) =$
$= x^2 + 4 + 3 = x^2 + 7$

5 Durante certo período, um automóvel se deslocou com velocidade v, em metro por segundo, que variou em função do tempo t, em segundo, de acordo com a função $v(t) = 3t + 2$. A distância d, em metro, entre esse automóvel e um ponto fixo A, durante o período considerado, pode ser expressa em função de v por $d(v) = 2v^2 + 5v + 10$.

a) Determinar a distância d para $t = 4$ s.
b) Obter a equação que descreve a distância d em função do tempo t.

Resolução

a) Para $t = 4$, temos: $v(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$
Ou seja, a velocidade v do automóvel no instante $t = 4$ s era 14 m/s.
Substituindo v por 14 na equação $d(v) = 2v^2 + 5v + 10$, obtemos:
$d(14) = 2 \cdot 14^2 + 5 \cdot 14 + 10 = 472$
Assim, concluímos que a distância entre o automóvel e o ponto A, no instante $t = 4$ s, era 472 m.

b) A equação que expressa d em função de t pode ser obtida pela função composta $d \circ v$, ou seja:
$d(t) = (d \circ v)(t) = d(v(t)) =$
$= 2(v(t))^2 + 5 \cdot v(t) + 10 =$
$= 2(3t + 2)^2 + 5(3t + 2) + 10$
$\therefore d(t) = 18t^2 + 39t + 28$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 Dados $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$ e $C = \{11, 3, 27, 35\}$, e as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, tais que $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 2$, construa o diagrama de flechas de f e g e calcule:

a) $(g \circ f)(-1)$
b) $(g \circ f)(1)$
c) $(g \circ f)(2)$
d) $(g \circ f)(x)$

10 Dados $A = \{-2, 2, -3, 3, 0\}$, $B = \{5, 10, 1, 21\}$ e $C = \{2\sqrt{5}, 5, 4, 6, 9\}$, e as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, tais que $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \sqrt{x + 15}$, construa o diagrama de flechas de f e g e determine:

a) $(g \circ f)(2)$
b) $(g \circ f)(0)$
c) $(g \circ f)(-3)$
d) $(g \circ f)(x)$

11 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x + 1$ e $h(x) = 3x + 2$, determine:

a) $(h \circ g \circ f)(8)$
b) $(f \circ g \circ h)(1)$
c) $(f \circ h \circ g)(0)$
d) $(g \circ h \circ f)(-1)$
e) $(h \circ g \circ f)(x)$
f) $(f \circ g \circ h)(x)$
g) $(f \circ h \circ g)(x)$
h) $(g \circ h \circ f)(x)$

12 As funções $f(x) = x^2 + bx$ e $g(x) = ax + 4b$ interceptam-se no ponto $(-2, 0)$.

a) Determine as constantes reais a e b.
b) Calcule $(f \circ g)(x)$.

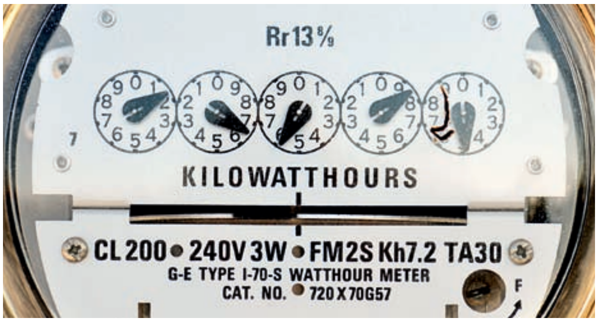
13 Sendo f uma função tal que $f(x + 5) = 2x + 1$, determine:

a) $f(7)$
b) $f(x)$

14 O número y de pés de eucalipto plantados em uma região, em função da área x reflorestada, em metro quadrado, é dado por $y = \frac{x}{2}$. A área x, em metro quadrado, em função do tempo t decorrido, em hora, para a preparação da terra e a plantação, é dado por $x = 6t$.

a) Todo o processo de preparação da terra e de plantação demorou 1.200 h. Quantos pés de eucalipto foram plantados?
b) Escreva uma equação que expresse o número de pés de eucalipto plantados em função do tempo t, em hora.

15 O consumo médio diário y de energia elétrica, em quilowatt-hora (kWh), de uma pousada em função do número x de apartamentos ocupados, é dado por $y = 60 + 4x$. O número médio diário x de apartamentos ocupados em função do preço p da diária por apartamento, em real, é dado por $x = 22 + \frac{600}{p}$, até o limite da capacidade máxima da pousada.



a) Para o preço de R$ 100,00 da diária por apartamento, qual é o consumo médio diário de energia em kWh dessa pousada?
b) Escreva uma equação que expresse o consumo médio diário de energia elétrica, em kWh, em função do preço da diária por apartamento.

Resolva os exercícios complementares 7 a 11 e 22 a 24.

Inversão de funções

Objetivos

- **Verificar** se uma função é invertível.
- **Obter** a inversa de uma função bijetora.

Termos e conceitos

- função injetora
- função sobrejetora
- função bijetora
- função inversa

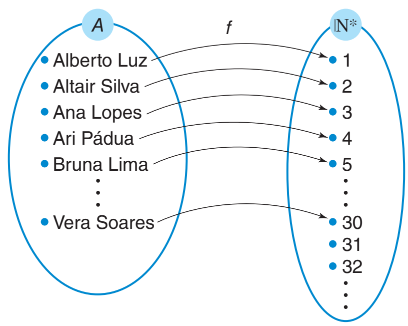
Injeção, sobrejeção e bijeção

Função injetora

Na lista de chamada de uma classe, o nome de cada um dos 30 alunos é associado a um único número natural não nulo, e não há dois alunos com um mesmo número:

Número	1	2	3	4	5	...	30
Nome	Alberto Luz	Altair Silva	Ana Lopes	Ari Pádua	Bruna Lima	...	Vera Soares

Sendo A o conjunto dos nomes dos alunos dessa turma, vamos considerar a função $f: A \longrightarrow \mathbb{N}^*$, que associa o nome de cada aluno ao número de chamada na lista acima:



Como não existem elementos distintos no domínio de f com a mesma imagem, dizemos que f é uma **injeção** de A em $\mathbb{N}^*$. Definimos:

> Uma função $f: A \longrightarrow B$ é **injetora** se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, for obedecida a condição:
>
> $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

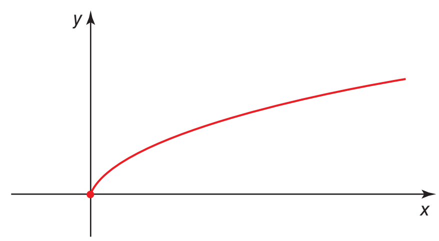
Outra forma de definir função injetora é:

Uma função $f: A \longrightarrow B$ é injetora se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, for obedecida a condição:

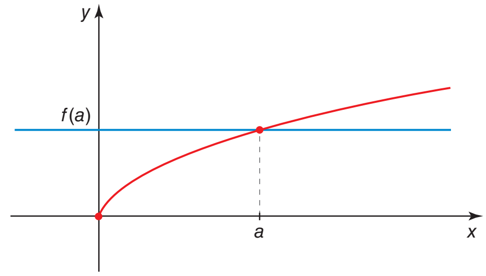
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Exemplo

O gráfico abaixo representa a função $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$.



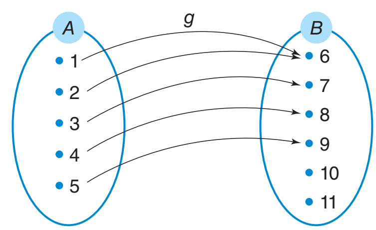
Observe que toda reta paralela ao eixo Ox que corta o gráfico de f intercepta esse gráfico em um único ponto:



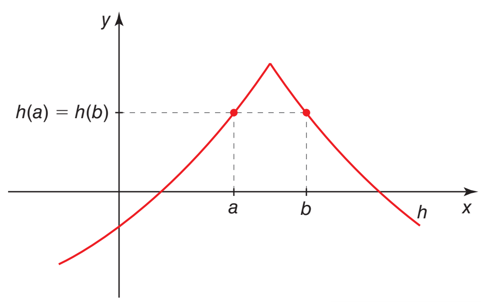
Isso significa que não há elementos distintos no domínio de f que tenham a mesma imagem; logo, f é uma função injetora.

Contraexemplos (funções não injetoras)

a) A função $g: A \rightarrow B$, representada pelo diagrama de flechas abaixo, não é injetora, pois há elementos distintos do domínio de g com a mesma imagem: $g(1) = g(2) = 6$.



b) A função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, representada pelo gráfico abaixo, não é injetora, pois há elementos distintos do domínio de h que têm a mesma imagem: $h(a) = h(b)$.

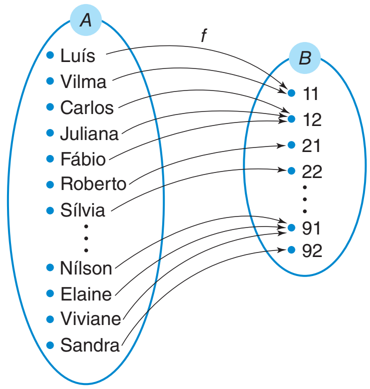


Função sobrejetora

Em um edifício de 9 andares, todos os 18 apartamentos estão habitados. Por medida de segurança, na portaria, há uma lista contendo o nome de todos os moradores e o número do apartamento que ocupam:

Morador(es)	Apartamento
Luís e Vilma	11
Carlos, Juliana e Fábio	12
Roberto	21
Sílvia	22
⋮	⋮
Nílson, Elaine e Viviane	91
Sandra	92

Sendo A o conjunto dos nomes dos moradores desse edifício e B o conjunto dos números dos apartamentos, vamos considerar a função $f: A \longrightarrow B$ que associa o nome de cada morador ao número do apartamento da tabela anterior:



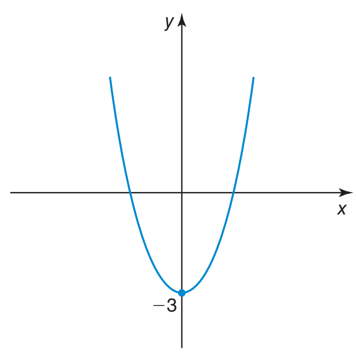
Como qualquer elemento do contradomínio de f é imagem de algum elemento do domínio, isto é, o contradomínio é o conjunto imagem da função f, dizemos que f é uma **sobrejeção** de A em B. Definimos:

> Uma função $f: A \longrightarrow B$ é **sobrejetora** se, e somente se, para todo elemento y do conjunto B, existe x no conjunto A tal que $f(x) = y$.

Em outras palavras, uma função é sobrejetora se, e somente se, seu contradomínio coincide com seu conjunto imagem.

Exemplo

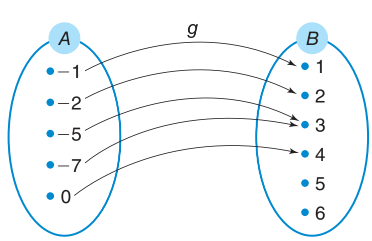
O gráfico abaixo representa a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow [-3, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 3$



Observe que toda reta que é paralela ao eixo Ox e passa por um ponto de ordenada y, com $y \geqslant -3$, intercepta o gráfico. Isso significa que todo elemento do contradomínio de f é imagem de algum x do domínio. Logo, f é uma função sobrejetora.

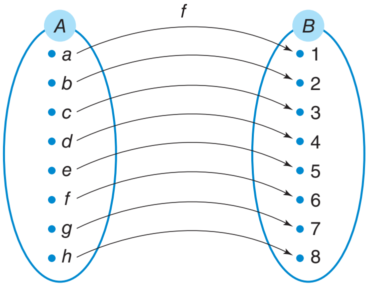
Contraexemplo (função não sobrejetora)

A função $g: A \longrightarrow B$, representada pelo diagrama de flechas abaixo, não é sobrejetora, pois há pelo menos um elemento do contradomínio de g que não é imagem de nenhum elemento do domínio, isto é, $CD(g) \neq Im(g)$.



Função bijetora

Oito candidatos inscreveram-se no concurso interno de promoção de cargo de uma empresa. Cada um deles recebeu um único número de inscrição dentre os números de 1 a 8. Sejam $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ o conjunto dos candidatos inscritos nesse concurso e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ o conjunto dos números de inscrição tal que a função $f: A \longrightarrow B$, que associa cada candidato ao seu número de inscrição, seja representada pelo diagrama de flechas ao lado:

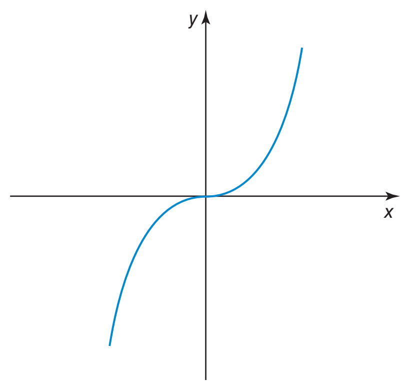


Como a função f é simultaneamente injetora e sobrejetora, dizemos que f é uma **bijeção** de A em B. Definimos:

> Uma função $f: A \longrightarrow B$ é **bijetora** se, e somente se, f é injetora e sobrejetora.

Exemplo

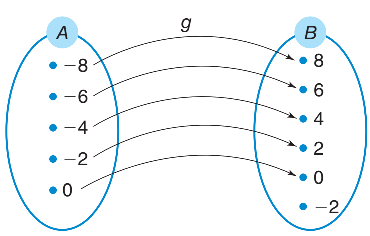
O gráfico abaixo representa a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$.



Observe que toda reta paralela ao eixo Ox intercepta o gráfico em um único ponto. Isso significa que todo elemento do contradomínio $\mathbb{R}$ de f é imagem de um único x do domínio. Logo, f é uma função bijetora.

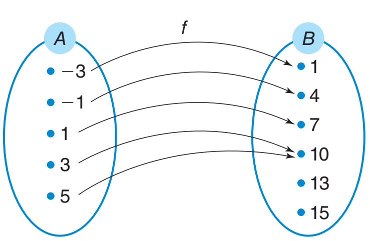
Contraexemplo (função não bijetora)

A função $g: A \longrightarrow B$, representada pelo diagrama de flechas abaixo, é injetora, mas não é sobrejetora. Logo, g não é bijetora.



Nota:

Existem funções que não são injetoras nem sobrejetoras e, portanto, também não são bijetoras. Por exemplo, a função f representada pelo diagrama de flechas ao lado não atende a nenhuma dessas classificações.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6 Em uma biblioteca, todos os livros são catalogados pelo título, além de outros identificadores, e há títulos com mais de um exemplar. Considerando a função f que tem como domínio o conjunto de todos os exemplares da biblioteca e como contradomínio o conjunto dos títulos dos livros catalogados nessa biblioteca, classificar como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

a) f é uma função injetora.
b) f é uma função sobrejetora.
c) f é uma função bijetora.

Resolução

a) F, pois, por hipótese, há mais de um exemplar com um mesmo título. Isso significa que há elementos distintos do domínio de f que têm a mesma imagem. Portanto, f não é injetora.

b) V, pois, por hipótese, todos os livros da biblioteca são catalogados pelo título. Isso significa que, para qualquer título de livro catalogado nessa biblioteca, existe pelo menos um exemplar com esse título na biblioteca, ou seja, qualquer elemento do contradomínio de f é imagem de algum elemento do domínio. Portanto, f é sobrejetora.

c) F, pois, para ser bijetora, uma função deve ser injetora e sobrejetora simultaneamente, e no item **a** mostramos que f não é injetora.

7 Classificar cada uma das funções a seguir como injetora, sobrejetora ou bijetora.

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = x^4$

b) $h: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \dfrac{5}{x-2}$

c) $t: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t(x) = 2x + 4$

Resolução

A classificação de uma função como injetora, sobrejetora ou bijetora, por meio da lei de associação $y = f(x)$, pode ser feita da seguinte maneira:

I. Se, para qualquer elemento k do conjunto imagem da função f, a equação $f(x) = k$ tiver **uma única** solução, então f é injetora.

II. Se, para qualquer elemento k do contradomínio da função f, a equação $f(x) = k$ tiver **pelo menos uma** solução, então f é sobrejetora.

III. Se, para qualquer elemento k do contradomínio da função f, a equação $f(x) = k$ tiver **uma única** solução, então f é bijetora.

Assim:

a) Observando que $CD(g) = \mathbb{R}_+$, considere k, com $k \in CD(g)$. Resolvendo, na variável x, a equação $g(x) = k$, temos:

$$x^4 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{k}$$

Como o contradomínio é $\mathbb{R}_+$, sempre existe $\pm\sqrt[4]{k}$; logo, a função é sobrejetora, pois qualquer k do contradomínio é imagem de algum x do domínio.

Note que, para k positivo, existem dois elementos distintos do domínio de g com a mesma imagem: $\sqrt[4]{k}$ e $-\sqrt[4]{k}$; logo, a função não é injetora, portanto também não é bijetora.

Concluímos que g é apenas sobrejetora.

b) Observando que $CD(h) = \mathbb{R}$, considere k, com $k \in CD(h)$. Resolvendo na variável x a equação $h(x) = k$, temos:

$$\frac{5}{x-2} = k \Rightarrow k(x-2) = 5$$

Assim: $kx - 2k = 5$

$\therefore k(x - 2) = 5$

Note que essa equação, na variável x, só tem solução se $k \neq 0$, pois para $k = 0$ teríamos um absurdo:

$$0 \cdot (x-2) = 5$$

Logo, a função h não é sobrejetora, pois existe o elemento 0 (zero) do contradomínio $\mathbb{R}$ de h que não é imagem de nenhum elemento x do domínio.

Considerando $k \neq 0$, a equação $k(x - 2) = 5$ é equivalente a $x = \dfrac{5 + 2k}{k}$

Assim, para todo k do conjunto imagem de h, isto é, para qualquer $k \neq 0$, a equação $h(x) = k$ tem uma única solução. Portanto, h é uma função injetora.

Note que h não é bijetora, pois não é sobrejetora.

Concluímos que h é apenas injetora.

c) Observando que $CD(t) = \mathbb{R}$, considere k, com $k \in CD(t)$. Resolvendo na variável x a equação $t(x) = k$, temos:

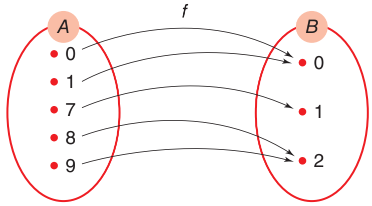
$$2x + 4 = k \Rightarrow x = \frac{k-4}{2}$$

Assim, para qualquer k do contradomínio da função t, a equação $t(x) = k$ tem uma única solução. Logo, t é bijetora.

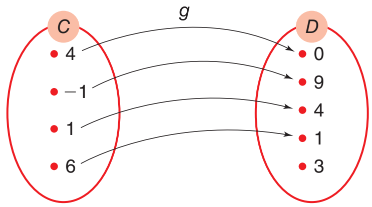
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Classifique, se possível, cada uma das funções abaixo, f, g, h e i, como injetora, sobrejetora ou bijetora.

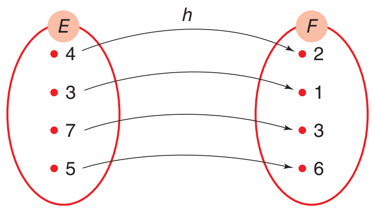
a)



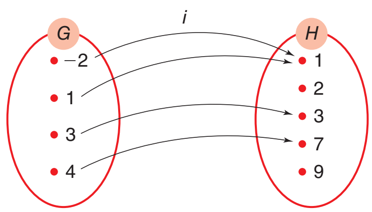
b)



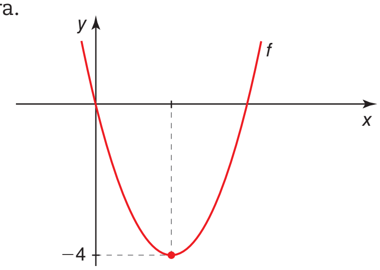
c)



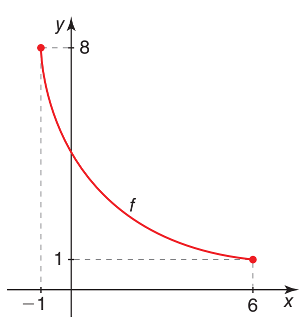
d)



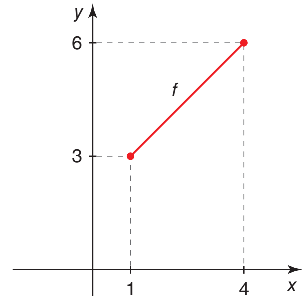
17 Sabendo que a função $f: \mathbb{R} \to [-4, +\infty[$ tem o gráfico abaixo, classifique-a como injetora, sobrejetora ou bijetora.



18 Sabendo que a função $f: [-1, 6] \to [1, 8]$ tem o gráfico abaixo, classifique-a como injetora, sobrejetora ou bijetora.



19 Sabendo que a função $f: [1, 4] \to [0, 6]$ tem o gráfico abaixo, classifique-a como injetora, sobrejetora ou bijetora.



20 Classifique, se possível, cada uma das funções a seguir como injetora, sobrejetora ou bijetora.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 5$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 3x + 2$

c) $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $h(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $t: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}^*$ tal que $t(x) = \dfrac{5}{x - 1}$

e) $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $u(x) = x^2$

21 No certificado de registro e licenciamento de um veículo, podem ser observadas várias funções: a que associa o endereço do proprietário ao CEP (Código de Endereçamento Postal); a que associa o número da placa ao código Renavam (Registro Nacional de Veículos Automotores); a que associa o número da placa à identificação do chassi etc.

Considere o conjunto A, de todas as identificações (letras e algarismos) de placas dos automóveis que circulam legalmente no Brasil, e o conjunto B, das identificações (letras e algarismos) dos chassis desses automóveis. Considere também a função f de A em B, que associa cada identificação de placa de cada automóvel à identificação de seu chassi. Sabendo que não há dois veículos com a mesma identificação de placa nem com a mesma identificação de chassi, a função f é injetora, sobrejetora ou bijetora? Explique.

22 Uma bibliotecária estabeleceu o seguinte sistema de identificação dos títulos da biblioteca: cada título é identificado por uma sequência de cinco algarismos, um traço, um algarismo, uma barra e, finalmente, um algarismo; por exemplo, o livro com a sequência 12315-2/5 é o de título número 12.315 e o exemplar é o de número 2 de um total de 5 títulos iguais. Considere o conjunto A, de todas as identificações dos títulos que essa biblioteca possui, e o conjunto B, de todos esses títulos. A função f que associa cada identificação ao título é injetora, sobrejetora ou bijetora? Explique.

Resolva os exercícios complementares 12 a 15, 25 e 26.

Inversão de funções

Um encanador trabalhou em uma empreitada e cobrou por seu serviço uma parcela fixa de R$ 50,00 mais R$ 10,00 por hora trabalhada. Para seu controle, registrou em uma tabela os números inteiros de horas trabalhadas e os respectivos valores acumulados, em real. Assim:

Número de horas trabalhadas	Valores acumulados (R$)
1	60
2	70
3	80
4	90
5	100

Considerando apenas os números inteiros de horas trabalhadas, o gráfico 1, abaixo, descreve o montante acumulado (m) em função do número de horas trabalhadas (h); e o gráfico 2 descreve o número de horas trabalhadas (h) em função do montante acumulado (m):

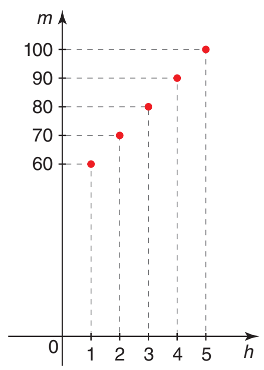


Gráfico 1

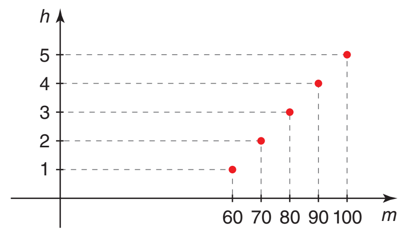
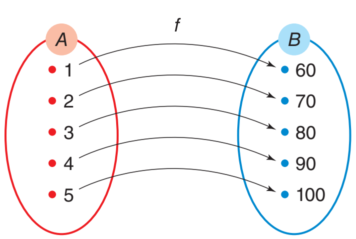


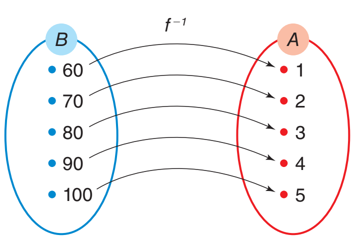
Gráfico 2

Observe que:

- o gráfico 1 representa uma função de domínio $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e conjunto imagem $B = \{60, 70, 80, 90, 100\}$;
- o gráfico 2 representa uma função de domínio $B = \{60, 70, 80, 90, 100\}$ e conjunto imagem $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- se um número b é imagem de um número a em um dos gráficos, então a é imagem de b no outro; por exemplo, no gráfico 1, o número 70 é imagem do número 2 e, no gráfico 2, o número 2 é imagem do número 70.

Por isso, dizemos que as funções representadas pelos gráficos 1 e 2 são **inversas** uma da outra. Se indicarmos por f a função representada pelo gráfico 1, a função inversa de f, representada pelo gráfico 2, será indicada por $\boldsymbol{f^{-1}}$.





$$D(f) = Im(f^{-1}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D(f^{-1}) = Im(f) = \{60, 70, 80, 90, 100\}$$

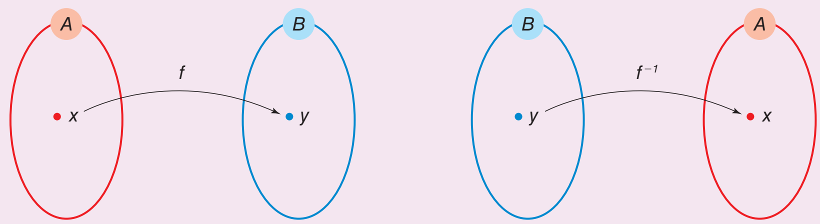
É importante destacar que f é uma bijeção de A em B e, por isso, a relação f^{-1} também é uma função. Lemos $\boldsymbol{f^{-1}}$ como "inversa da função f".

Definimos:

A **inversa** de uma função bijetora $f: A \longrightarrow B$ é a função $f^{-1}: B \longrightarrow A$ tal que:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

para quaisquer x e y, com $x \in A$ e $y \in B$.

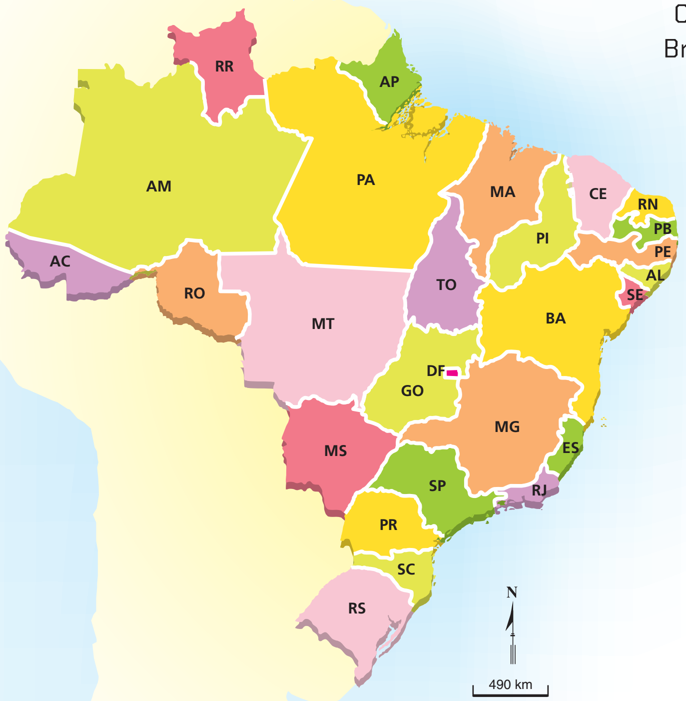


Se uma função f admite função inversa, dizemos que f é **invertível**. Assim:

- Para que uma função f seja invertível, ela deve ser bijetora;
- Se uma função f é invertível, então $D(f) = Im(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = Im(f)$.

Exemplo

O nome de cada unidade da federação do Brasil é identificado por uma sigla. Isso significa que, para cada unidade, está associada uma única sigla e que, para cada uma dessas siglas, está associada uma única unidade da federação, por exemplo: AC (Acre), BA (Bahia) e DF (Distrito Federal). A função f que associa cada uma dessas siglas a uma unidade da federação é portanto bijetora, e sua inversa é a função f^{-1}, que associa cada unidade à sua sigla.



Fonte: FERREIRA, Graça Maria Lemos. *Atlas geográfico*. São Paulo: Moderna, 2003.

A inversa de uma relação

Também podemos definir a inversa de uma relação R da seguinte maneira:

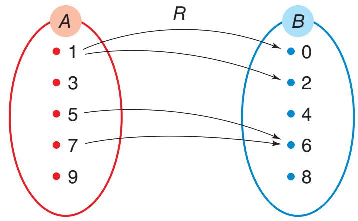
Sejam A e B conjuntos não vazios, R uma relação de A em B, e S uma relação de B em A tal que:

$$(x, y) \in R \iff (y, x) \in S$$

nessas condições, e somente nessas condições, R e S são relações inversas entre si.

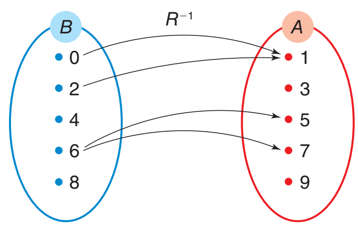
Exemplo

Seja R a relação de $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ em $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, representada pelo diagrama de flechas abaixo.



Assim, $R = \{(1, 0), (1, 2), (5, 6), (7, 6)\}$. A inversa de R é a relação R^{-1} de B em A cujos elementos são os pares ordenados que se obtêm invertendo-se a ordem dos elementos de cada par ordenado de R; isto é: $R^{-1} = \{(0, 1), (2, 1), (6, 5), (6, 7)\}$.

Representando R^{-1} por um diagrama de flechas, temos:

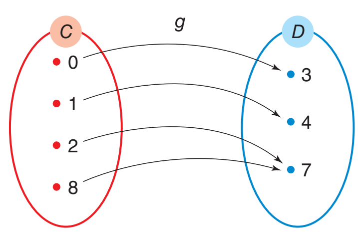


Funções não invertíveis

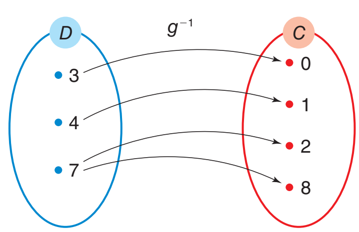
Se uma função g: $C \longrightarrow D$ não é uma bijeção de C em D, então, ou há pelo menos dois elementos em C com a mesma imagem, ou há elemento em D que não é imagem de nenhum elemento de C; portanto, a relação inversa g^{-1}: $D \longrightarrow C$ não é função. Nesse caso, dizemos que a função g não é invertível ou que g não admite função inversa.

Exemplos

a) Seja g: $C \longrightarrow D$ a função representada pelo diagrama de flechas abaixo:

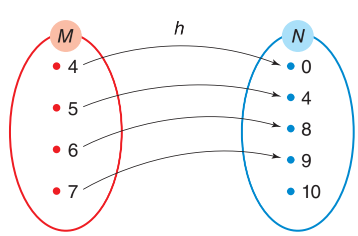


Essa função é sobrejetora, mas não é injetora; logo, não é bijetora. Sua relação inversa é:

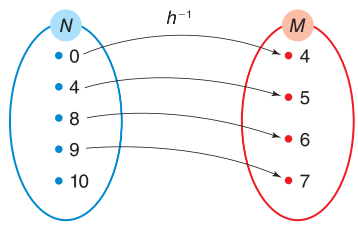


Note que g^{-1} não é função, pois o elemento 7 tem mais de um correspondente no contradomínio C.

b) Seja h: $M \longrightarrow N$ a função representada pelo diagrama de flechas abaixo:



Essa função é injetora, mas não é sobrejetora; logo, não é bijetora. Sua relação inversa é:



Note que h^{-1} não é função, pois existe elemento do domínio N que não tem correspondente no contradomínio M.

Técnica para a obtenção da inversa de uma função

No exemplo que introduz o tópico "Inversão de funções", o encanador cobrou uma taxa fixa de R$ 50,00 mais R$ 10,00 por hora trabalhada. Indicando por m o montante acumulado em h horas de trabalho desse encanador, temos:

$$m = 50 + 10h$$

Essa equação expressa m em função de h, portanto, corresponde ao gráfico 1, apresentado no exemplo introdutório. Se quisermos a equação que corresponde ao gráfico 2, que expressa h em função de m, basta isolar h na equação $m = 50 + 10h$, obtendo:

$$h = \frac{m - 50}{10}$$

Assim, a função $m\colon A \longrightarrow B$, com $m(h) = 50 + 10h$, e a função $h\colon B \longrightarrow A$, com $h(m) = \dfrac{m - 50}{10}$, são inversas uma da outra.

Esse exemplo ajudará a entender os procedimentos descritos a seguir.

Se uma função real de variável real $y = f(x)$ é invertível, sua inversa é obtida do seguinte modo:

I. Trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$.

II. Isolamos a variável y, após a mudança de variáveis efetuada em (I), obtendo $y = f^{-1}(x)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Determinar a inversa da função bijetora $y = 5x + 2$.

Resolução

I. Trocamos x por y e y por x, obtendo: $x = 5y + 2$

II. Isolamos a variável y, após a mudança de variáveis efetuada em (I):

$$x = 5y + 2 \Rightarrow y = \frac{x - 2}{5}$$

Assim, a inversa da função $f(x) = 5x + 2$ é a função $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{5}$.

9 Considerando que a sentença $y = \dfrac{2x}{3x - 1}$ é a lei de associação de uma função bijetora, obter a lei de associação da inversa dessa função.

Resolução

I. Trocamos x por y e y por x, obtendo:

$$x = \frac{2y}{3y - 1}$$

II. Isolamos a variável y, após a mudança de variáveis efetuada em (I):

$$x = \frac{2y}{3y - 1} \Rightarrow 3xy - x = 2y$$

Assim: $3xy - 2y = x \Rightarrow y(3x - 2) = x$

Portanto: $y = \dfrac{x}{3x - 2}$

Logo, a lei de associação da inversa da função f é $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3x - 2}$.

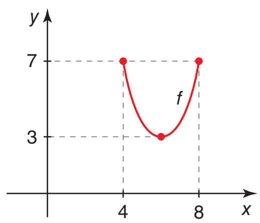
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

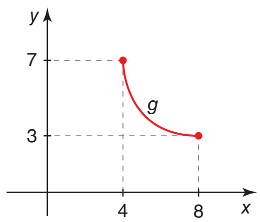
23 Sendo $A = \{0, 1, 4, 9, 16\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, considere a função $f: A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Essa função é invertível? Por quê?

24 Uma função f de $A = \{-2, 2, -1, 1, 0\}$ em $B = \{6, 3, 2\}$ tem como lei de associação: $f(x) = x^2 + 2$. Essa função admite inversa? Por quê?

25 Existe alguma função de $A = \{2, 4, 6, 8\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ que seja invertível? Por quê?

26 Os gráficos abaixo representam duas funções, f e g, de domínio $D = [4, 8]$ e contradomínio $CD = [3, 7]$. Qual dessas funções é invertível? Por quê?





27 Considerando que cada uma das sentenças a seguir é a lei de associação de uma função bijetora, obtenha a lei de associação da inversa de cada função.

a) $y = 6x - 4$

b) $y = \dfrac{5}{x + 4}$

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

28 (UFC-CE) Uma função bijetora f é tal que $f(x + 3) = 2x - 1$. A inversa de f é:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 7}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{2}$

c) $f^{-1}(x) = x + 3$

d) $f^{-1}(x) = 2x - 3$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x - 3}$

29 Considerando que a sentença $f(x) = \dfrac{x^3 + 3}{x^5 - 1}$ é a lei de associação de uma função bijetora, em que o domínio e o contradomínio são os mais amplos subconjuntos possíveis de $\mathbb{R}$, obtenha o conjunto imagem da inversa dessa função.

30 Ao colocar um corpo sobre o prato de uma balança analógica, o ponteiro descreve um arco de medida, em grau, diretamente proporcional à massa do corpo. Para cada 1 kg de massa, o ponteiro descreve um arco de 36°.

a) Escreva uma equação que expresse o deslocamento y do ponteiro, em grau, em função da massa x do corpo colocado sobre a balança, em quilograma, com $x \leq 10$.
b) Escreva uma equação que expresse a massa y, em quilograma, do corpo colocado sobre o prato da balança, em função do deslocamento x do ponteiro, em grau, com $x \leq 360°$.
c) Que relação existe entre as funções obtidas nos itens **a** e **b**?
d) Construa os gráficos das funções obtidas nos itens **a** e **b**.
e) Usando a função do item **a**, calcule o deslocamento do ponteiro, em grau, para um corpo de massa 6,5 kg colocado sobre o prato da balança.
f) Usando a função do item **b**, calcule a massa de um corpo colocado sobre a balança que provoque um deslocamento de 126° do ponteiro.

31 No centro de provas de uma indústria de motocicletas, uma moto percorreu vários trajetos de comprimentos diferentes. O tempo t, em hora, para a moto percorrer cada trajeto em função da velocidade constante v, em quilômetro por hora, adotada no trajeto, é dado por $t = \dfrac{1}{v - 50}$, para $v > 50$.

a) Escreva uma equação que expresse a velocidade v em cada trajeto em função do tempo t.
b) Construa o gráfico da função que expressa t em função de v e o gráfico da função que expressa v em função de t.
c) Qual é o comprimento do trajeto percorrido pela moto à velocidade de 60 km/h?
d) Qual é o comprimento do trajeto percorrido pela moto em 0,5 h?

Resolva os exercícios complementares 16 a 19.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 (UFMG) Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \text{ é racional} \\ \dfrac{1}{x}, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Então é correto afirmar que o maior elemento do conjunto $\left\{f\left(\dfrac{7}{31}\right), f(1), f(3,14), f\left(\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ é:

a) $f\left(\dfrac{7}{31}\right)$

b) $f(1)$

c) $f(3, 14)$

d) $f\left(\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\right)$

2 Classifique cada função a seguir como "par", "ímpar" ou "nem par nem ímpar".

a) $s(x) = x^6 + x^2$

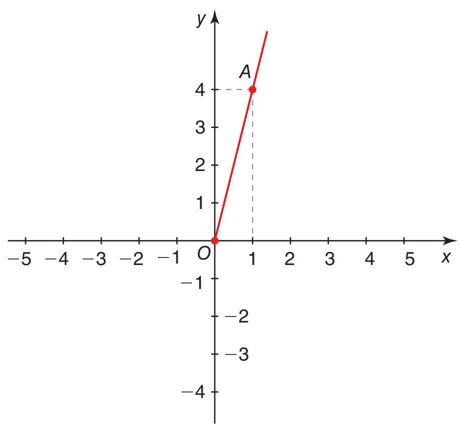
b) $t(x) = x^5 + x$

c) $p(x) = \sqrt{x}$

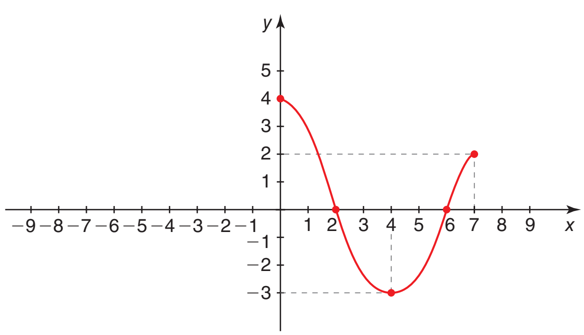
d) $u(x) = \dfrac{x^3}{x - 1}$

e) $v(x) = \sqrt[3]{x} + x$

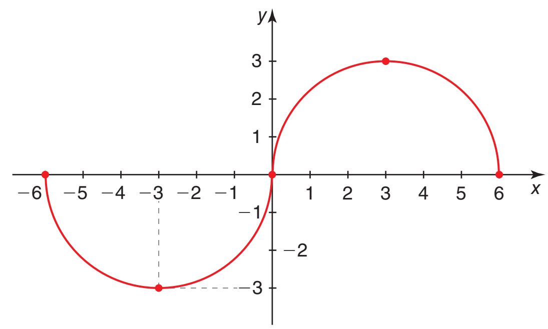
3 A semirreta $\overrightarrow{OA}$ abaixo é apenas uma parte do gráfico de uma função ímpar $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Complete o gráfico da função g.



4 A figura abaixo é apenas uma parte do gráfico de uma função par $f: [-7, 7] \to \mathbb{R}$. Complete o gráfico da função f.



5 O gráfico da função f, representado a seguir, é formado por duas semicircunferências:



a) Classifique a função f como "par", "ímpar" ou "nem par nem ímpar".

b) Calcule $f(4)$.

6 (ITA-SP) Mostre que toda função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, satisfazendo a condição $f(xy) = f(x) + f(y)$, em todo seu domínio, é par.

7 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = 5x - 4$ e $g(x) = 3x + 6$, determine:

a) $(g \circ f)(2)$

b) $(f \circ g)(2)$

c) $(f \circ f)(1)$

d) $(g \circ g)(3)$

e) $(g \circ f)(x)$

f) $(f \circ g)(x)$

g) $(f \circ f)(x)$

h) $(g \circ g)(x)$

8 Sendo $f(x) = kx + 1$ tal que $(f \circ f)(x) = 4x - 1$, determine a constante real k.

9 Considerando as funções $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 - 2x + 2$, determine o valor de x de modo que $(f \circ g)(x) = 2$.

10 (Fatec-SP) Seja a função $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$. O número real x que satisfaz $f(f(x)) = -1$ é:

a) -4

b) -2

c) 2

d) 4

e) 9

11 (ITA-SP) Sejam $f, g: R \to R$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. $f \cdot g$ é ímpar

II. $f \circ g$ é par

III. $g \circ f$ é ímpar

é(são) verdadeira(s)

a) ( ) apenas I.

b) ( ) apenas II.

c) ( ) apenas III.

d) ( ) apenas I e II.

e) ( ) todas.

(*Nota*: A função produto $f \cdot g$ é definida por: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.)

12 Dados os conjuntos: $A = \{3, -3, 1, 2\}$, $B = \{8, 0, 3\}$, $C = \{0, 1, 2\}$, $D = \{5, 8, 11, 7\}$, $E = \{0, 1, 4, 9\}$ e $F = \{0, 1, 2, 3\}$, classifique cada função a seguir como injetora, sobrejetora ou bijetora.

a) $f: A \to B$ tal que $f(x) = x^2 - 1$.

b) $g: C \to D$ tal que $g(x) = 3x + 5$.

c) $h: E \to F$ tal que $h(x) = \sqrt{x}$.

13 Existe alguma função bijetora de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$? Por quê?

14 Sabendo que a função f: [2, 5] → [a, b] tal que $f(x) = 3x + 6$ é bijetora, determine os números reais a e b.

15 Sabendo que a função f: [1, 6] → [a, b] tal que $f(x) = 2 - x$ é bijetora, determine os números reais a e b.

16 Considere a função definida em $A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$ com imagens em $B = \{1, 0, 2, 9, -7, 6\}$ tal que $f(x) = x^3 + 1$. Essa função tem inversa? Por quê?
(*Nota*: Outra forma de indicar que o domínio de uma função f é A e o contradomínio é B é dizer que f está definida em A com imagens em B.)

17 As funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em cada item a seguir, são invertíveis? Por quê?
a) $f(x) = x^2 + 5$
b) $f(x) = x + 3$

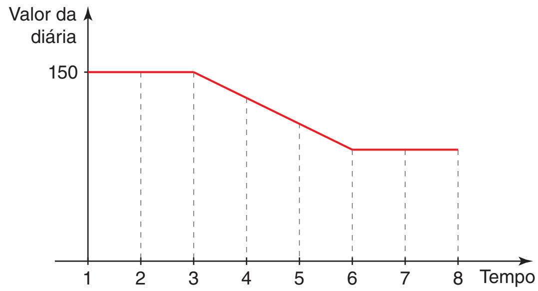
18 Considerando que cada uma das sentenças abaixo é a lei de associação de uma função bijetora, obtenha a lei de associação da inversa de cada uma.
a) $y = 7x + 1$
b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{1 - x}$
c) $g(x) = \sqrt{x}$
d) $h(x) = 5 + \sqrt[3]{x - 3}$

19 Seja a função f: $[0, +\infty[\to]-\infty, 9]$ tal que $f(x) = 9 - x^2$.
a) Esboce o gráfico de f.
b) Como é bijetora, f é invertível. Determine a lei de associação de f^{-1}.
c) Esboce o gráfico de f^{-1}.

Exercícios contextualizados

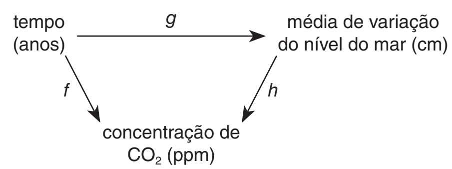
20 (FGV) Para cada número real x admita que $\lfloor x \rfloor$ seja igual a x se x for inteiro, e igual ao maior inteiro menor do que x se x não for inteiro.
a) Calcule o valor de: $\left|\dfrac{\lfloor -2{,}7 \rfloor}{\lfloor 0{,}7 \rfloor - \left\lfloor \dfrac{16}{3} \right\rfloor}\right|$
b) Admita um serviço de entregas do correio cuja tarifa seja R\$ 0,09 por grama ou frações menores que 1 grama (por exemplo, paga-se R\$ 0,27 pelo envio de 2,3 g). Determine uma fórmula que utilize a notação $\lfloor x \rfloor$, sendo x a massa, em grama, para a tarifa $T(x)$, em real, de envio de uma mercadoria de x gramas por esse serviço de entregas do correio.

21 (Enem) Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R\$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R\$ 20,00. Nos dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de
a) R\$ 90,00
b) R\$ 110,00
c) R\$ 130,00
d) R\$ 150,00
e) R\$ 170,00

22 (Vunesp) Seja x o número de anos decorridos a partir de 1960 ($x = 0$). A função $y = f(x) = x + 320$ fornece, aproximadamente, a média de concentração de CO_2 na atmosfera em partes por milhão (ppm) em função de x. A média de variação do nível do mar, em centímetro, em função de x, é dada aproximadamente pela função $g(x) = \frac{x}{5}$. Seja h a função que fornece a média de variação do nível do mar em função da concentração de CO_2. No diagrama seguinte, estão representadas as funções f, g e h.



Determine a expressão de h em função de y e calcule quantos centímetros o nível do mar terá aumentado quando a concentração de CO_2 na atmosfera for de 400 ppm.

23 (Uerj) Admita os seguintes dados sobre as condições ambientais de uma comunidade, com uma população p, em milhares de habitantes:
- C, a taxa média diária de monóxido de carbono no ar, em partes por milhão, corresponde a $C(p) = 0{,}5p + 1$;
- em determinado tempo t, em ano, p será igual a $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$.

Em relação à taxa C:
a) expresse-a como uma função do tempo;
b) calcule em quantos anos essa taxa será de 13,2 partes por milhão.

24 Indicando por c, f e k as medidas de uma mesma temperatura em grau Celsius, grau Fahrenheit e Kelvin, respectivamente, as equações a seguir mostram as relações entre essas medidas:

$$\begin{cases} k = c + 273{,}15 \\ f = 1{,}8c + 32 \end{cases}$$

A equação que expressa f em função de k é:
a) $f = 1{,}8(k - 273{,}15) + 32$
b) $f = k - 241{,}15$
c) $f = 9(k - 273{,}15) + 32$
d) $f = 1{,}8 \cdot 273{,}15 + 32k$
e) $f = 1{,}8 \cdot 273{,}15 - 32k$

25 A cédula de identidade é o documento nacional de identificação no Brasil. Cada cidadão que tem esse documento é identificado, em cada estado da Federação, com um número chamado de Registro Geral (RG). Por ser um documento cuja emissão é de responsabilidade estadual, não há nenhum impedimento legal à solicitação de outra cédula de identidade em outro estado. Assim, é possível que um mesmo cidadão tenha dois ou mais registros gerais diferentes.
Consideremos o conjunto A, de todos os registros gerais emitidos aos cidadãos brasileiros; e o conjunto B, de todos os cidadãos brasileiros que receberam esses registros.

a) A função $f: A \rightarrow B$ que associa cada Registro Geral ao cidadão que o recebeu pode não ser injetora? Por quê?

b) Sob que condição a função f do item **a** será bijetora?

26 O Cadastro de Pessoas Físicas ou CPF é o cadastro da Receita Federal brasileira. Nem todas as pessoas são obrigadas a se inscrever no CPF; só têm essa obrigação aquelas com rendimento tributável proveniente de negócios no Brasil, brasileiras ou não, que vivem ou não no Brasil. Cada contribuinte cadastrado recebe um documento chamado de cartão de CPF, ou simplesmente CPF. Esse documento identifica o contribuinte com um número de onze algarismos. Esse número é único para cada contribuinte e não muda, mesmo quando o cartão é perdido. Consideremos o conjunto A, de todos os números de CPFs distribuídos aos cidadãos brasileiros que vivem no Brasil, e o conjunto B, de todos os cidadãos brasileiros que vivem no Brasil. Classifique como injetora, sobrejetora ou bijetora a função $f: A \rightarrow B$ que associa cada CPF a um cidadão brasileiro.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

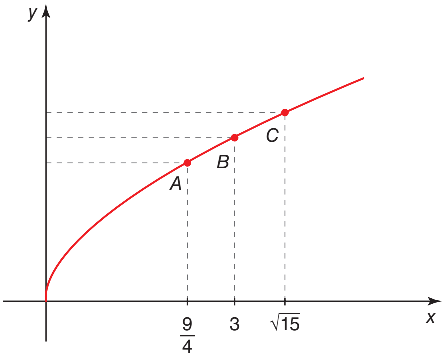
Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Dadas as dízimas periódicas $g = 5{,}4444...$ e $h = 1{,}23333...$, determine a fração geratriz da dízima periódica resultante da soma $g + h$.

2 Determine os valores reais de a e b na igualdade de pares ordenados:

$$(a + 3, 2b - 5) = (8 - b, 3a - 1)$$

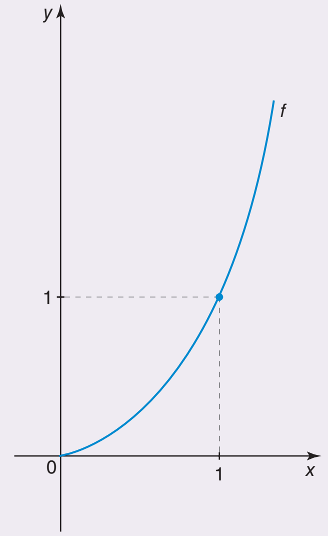
3 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = \sqrt{x}$. As abscissas dos pontos A, B e C são $\frac{9}{4}$, 3 e $\sqrt{15}$, respectivamente. Quais desses pontos têm como ordenadas números irracionais?



Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

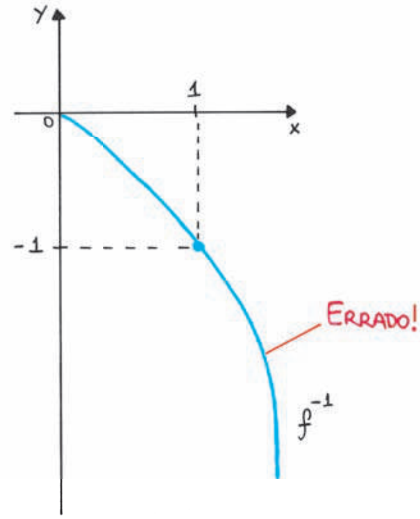
O gráfico abaixo representa a função bijetora f: $[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, com $f(x) = x^2$.



a) Construa o gráfico da função f^{-1}.
b) Determine os valores de x do intervalo $[0, +\infty[$ tal que $f^{-1}(x) < f(x)$.

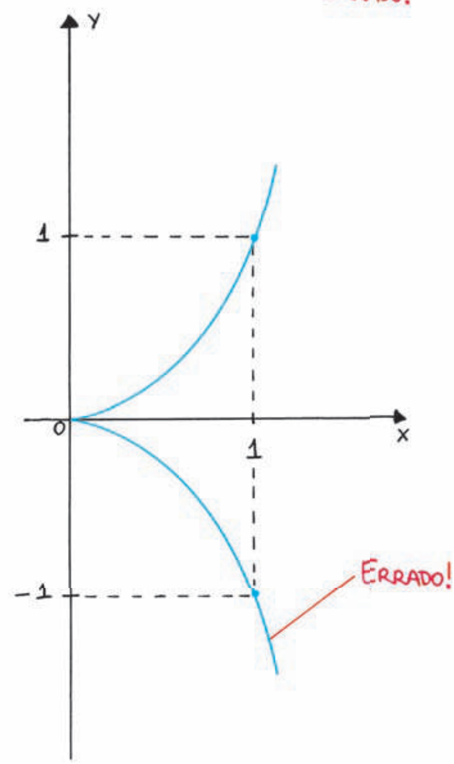
Resolução

a) Os gráficos das funções f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, assim, temos que o gráfico de f^{-1} é:



b) Observando os gráficos de f e f^{-1}, concluímos que $f^{-1}(x) < f(x)$ para todo número real x, com $x > 0$.

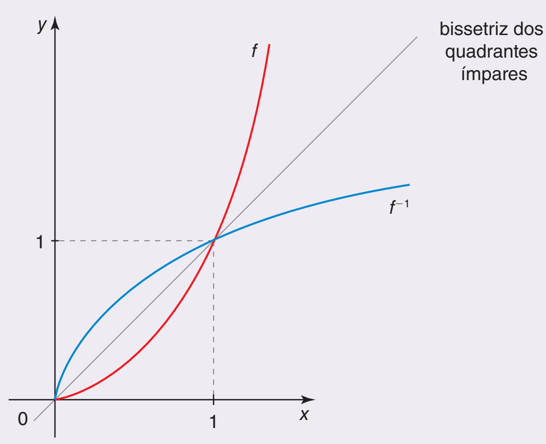
ERRADO!



Comentário

De fato, os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, porém o aluno errou a construção do gráfico de f^{-1}, pois considerou Ox como eixo de simetria em vez da bissetriz dos quadrantes ímpares.

Para construir o gráfico de f^{-1}, transformamos cada ponto $P(a, b)$ do gráfico de f no ponto $P'(b, a)$; o conjunto dos pontos P', assim obtidos, é o gráfico de f^{-1}. Observe na figura abaixo os gráficos de f e de f^{-1}:



Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

4

Função afim

Ao pagar pelo combustível em um posto de abastecimento, ao converter o valor do dólar em real, ao calcular a distância percorrida por um automóvel com velocidade constante e em muitas outras relações, estamos aplicando o conceito de função afim. Neste capítulo, estudaremos essa função e sua utilização em diversas áreas do conhecimento.

4.1 A função afim

A representação de uma função afim no plano cartesiano é uma reta.

4.2 Análise da função afim

Conhecendo a taxa de variação de uma função, podemos analisar seu crescimento ou decrescimento.

4.3 Inequação-produto e inequação-quociente

Estudando o sinal de uma função, podemos simplificar a resolução de inequações-produto e inequações-quociente.

Ao mergulhar, uma pessoa está sujeita a pressões superiores àquela a que estaria submetida se estivesse na superfície da água. Isso ocorre porque, além do ar, a água exerce pressão sobre ela, portanto, quanto maior a profundidade, maior a pressão.

Estudos mostram que a pressão varia linearmente com a profundidade, o que significa que o gráfico da função que relaciona essas grandezas é parte de uma reta.

Para pensar

- Sabe-se que, na superfície do mar, a pressão é de 1 atm (1 kg/cm^2) e, a cada 10 metros de profundidade, a pressão aumenta 1 atm. Qual é a pressão sofrida por um mergulhador que está a 18 m de profundidade?

A função afim

Objetivos

- **Identificar** situações que podem ser representadas por uma função afim.
- **Reconhecer** a lei de uma função afim.
- **Construir** o gráfico de uma função afim.
- **Determinar** a lei de uma função afim.
- **Aplicar** o conceito de função afim na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- função afim
- função linear

Em uma panificadora, a temperatura interna de um forno elétrico desligado era 20 °C. A partir do momento em que o forno foi ligado, a temperatura passou a aumentar 40 °C por minuto, até atingir o valor máximo.

A tabela ao lado mostra alguns valores que descrevem a temperatura y interna do forno, em grau Celsius, em função do tempo x, em minuto, a partir do instante em que o forno foi ligado ($x = 0$), quando sua temperatura interna era 20 °C.

Como a temperatura inicial do forno era 20 °C e, a cada minuto, houve acréscimo de 40 °C na temperatura, podemos verificar que a lei de associação entre x e y é $y = 20 + 40x$.

Tempo (min)	Temperatura (°C)
x	y
0	20
1	60
2	100
3	140
4	180

Essa função é um exemplo de **função afim**, que definimos a seguir.

> Toda função do tipo $f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é denominada **função afim** ou **função polinomial do 1º grau**.

Exemplos

a) $y = 5x - 6$ é uma função afim, em que $a = 5$ e $b = -6$.

b) $y = 4x$ é uma função afim, em que $a = 4$ e $b = 0$.

c) $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{5}$ é uma função afim, em que $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{5}$.

d) Na escala de um termômetro, o comprimento da coluna de mercúrio varia de acordo com a temperatura, de modo que, para cada variação de 1 °C, o comprimento da coluna varia 0,2 cm.

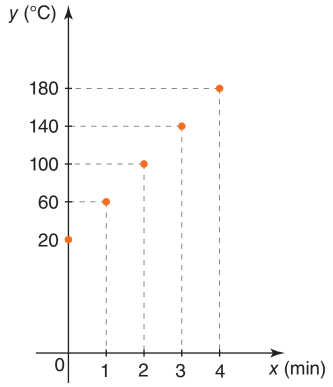
Se a 0 °C o comprimento da coluna é 12 cm, podemos expressar o comprimento y da coluna, em centímetro, em função da temperatura x, em grau Celsius, pela função afim: $y = 12 + 0{,}2 \cdot x$.

Gráfico da função afim

Na introdução da seção 4.1, vimos que a temperatura do forno aumenta 40 °C por minuto a partir do instante em que ele é ligado, quando sua temperatura está em 20 °C. Assim, a temperatura y do forno, em grau Celsius, x minutos depois de ligado, é dada pela função afim: $y = 20 + 40x$.

Para construir o gráfico dessa função, vamos representar no plano cartesiano alguns pontos (x, y), obtidos com base na tabela abaixo:

Tempo (min)	Temperatura (°C)
x	**y**
0	20
1	60
2	100
3	140
4	180



Note que a variação dos valores de y, que indicaremos por Δy, é diretamente proporcional à variação dos valores correspondentes de x, que indicaremos por Δx. Por exemplo:

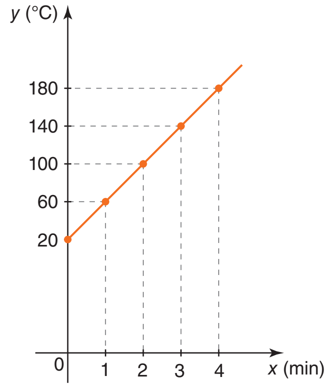
- quando x varia de 0 a 1, a variação correspondente de y é de 20 a 60, portanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{60 - 20}{1 - 0} = \frac{40}{1}$$

- quando x varia de 2 a 4, a variação correspondente de y é de 100 a 180, portanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{180 - 100}{4 - 2} = \frac{80}{2} = \frac{40}{1}$$

Se em uma função $y = f(x)$ as variações de x e y são diretamente proporcionais, então o gráfico de f é formado por pontos de uma reta. Assim, quando y assume os diferentes valores da temperatura, até a temperatura máxima do forno, o gráfico será parte de uma reta.



Esse resultado pode ser generalizado pelo seguinte teorema:

O gráfico de toda função afim é uma reta.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Demonstração.*

Notas:

1. Como o gráfico de uma função afim é uma reta, para construí-lo, basta representar dois pontos distintos da função no plano cartesiano e traçar a reta que passa por eles.
2. Se na função $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, temos $a = 0$, a função não é uma função afim, mas seu gráfico é uma reta. Por exemplo, o gráfico de $y = 4$ é uma reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto de ordenada 4 do eixo Oy.

Ponto de intersecção do gráfico com o eixo *Ox*

Toda reta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, cruza o eixo Ox em um único ponto. Para determinar a abscissa desse ponto, substituímos y por zero na equação, obtendo:

$$0 = ax + b \Rightarrow ax = -b$$
$$\therefore x = -\frac{b}{a}$$

Logo, a reta cruza o eixo Ox no ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Note que o número $-\frac{b}{a}$ é a raiz da função afim.

Exemplo

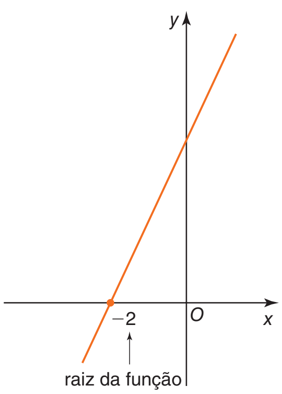
Vamos determinar a abscissa do ponto de intersecção da reta de equação $y = 2x + 4$ com o eixo Ox:

$0 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -4$

$\therefore x = -2$

Logo, a reta cruza o eixo Ox no ponto $(-2, 0)$.

Observe que -2 é a raiz da função.



Ponto de intersecção do gráfico com o eixo *Oy*

Toda reta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, também cruza o eixo Oy em um único ponto. Para determinar a ordenada desse ponto, substituímos x por zero na equação, obtendo:

$$y = a \cdot 0 + b \Rightarrow y = b$$

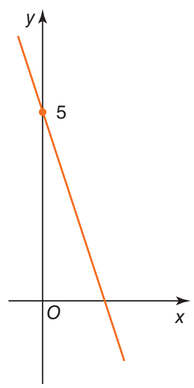
Logo, o ponto de intersecção da reta com o eixo Oy é $(0, b)$. Note que a ordenada desse ponto é o termo independente b da equação da função.

Exemplo

Vamos determinar a ordenada do ponto de intersecção da reta de equação $y = -3x + 5$ com o eixo Oy:

$y = -3 \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5$

Portanto, a reta cruza o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Construir o gráfico da função $y = 3x - 6$.

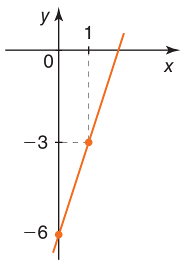
Resolução

A função $y = 3x - 6$ é afim, portanto, seu gráfico é uma reta. Logo, precisamos de dois pontos distintos para determiná-la. Para isso, atribuímos a x dois valores reais, distintos, quaisquer, e calculamos a imagem y de cada um deles.

x	$\overbrace{3x - 6}^{y}$	Ponto da reta
0	$3 \cdot 0 - 6 = -6$	$(0, -6)$
1	$3 \cdot 1 - 6 = -3$	$(1, -3)$

Valores arbitrários

Assim, o gráfico da função $y = 3x - 6$ é:



2 Construir o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \leq 2 \\ -x + 6, \text{ se } 2 < x \leq 4 \\ x + 1, \text{ se } x > 4 \end{cases}$$

e determinar o domínio e o conjunto imagem.

Resolução

Em funções definidas por mais de uma sentença, analisamos cada sentença separadamente:

I. $f(x) = 2x$, se $x \leq 2$. Ou seja, essa parte do gráfico é uma semirreta de origem $(2, 4)$, contida na reta de equação $y = 2x$, cujos pontos têm abscissas no intervalo $]-\infty, 2]$. Para obter essa semirreta, atribuímos a x o valor 2 e qualquer outro valor menor que 2:

x	y
0	0
2	4

II. $f(x) = -x + 6$, se $2 < x \leq 4$. Ou seja, essa parte do gráfico é um segmento de reta contido na reta de equação $y = -x + 6$, cujos pontos têm abscissas no intervalo $]2, 4]$. Para obter esse segmento de reta, atribuímos a x os valores 2 e 4:

x	y
2	4
4	2

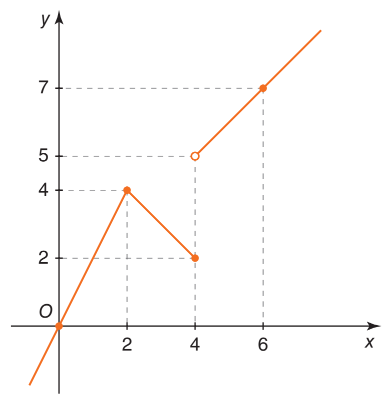
Embora a variável x não possa assumir o valor 2 para essa parte do gráfico, atribuímos a ela esse valor para obter um extremo aberto dessa parte do gráfico.

III. $f(x) = x + 1$, se $x > 4$. Ou seja, essa parte do gráfico é uma semirreta contida na reta de equação $y = x + 1$, cujos pontos têm abscissas no intervalo $]4, +\infty[$. Para obter essa semirreta, atribuímos a x o valor 4 e qualquer outro valor maior que 4:

x	y
4	5
6	7

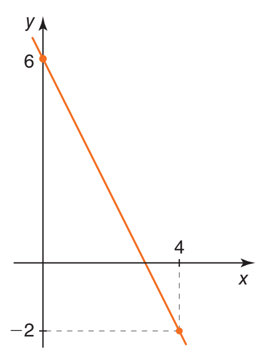
Embora a variável x não possa assumir o valor 4 para essa parte do gráfico, atribuímos a ela esse valor para obter um extremo aberto dessa parte do gráfico.

A reunião dos gráficos deduzidos em (I), (II) e (III) é o gráfico da função f:



O domínio e o conjunto imagem de f são: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) =]-\infty, 4] \cup]5, +\infty[$.

3 Sabendo que o gráfico da função $y = ax + b$ é a reta representada no plano cartesiano abaixo, determinar os valores de a e b.



Resolução

Como o ponto $(0, 6)$ pertence ao gráfico, a sentença $y = ax + b$ deve se tornar verdadeira para $x = 0$ e $y = 6$, isto é:

$6 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 6$

Analogamente, o ponto $(4, -2)$ pertence ao gráfico. Então, devemos ter:

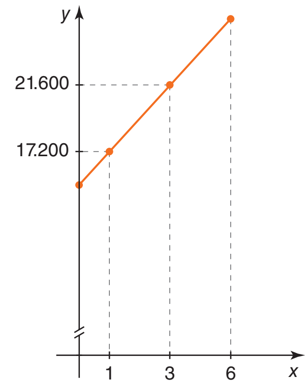
$-2 = a \cdot 4 + b$

Como $b = 6$, temos:

$-2 = a \cdot 4 + 6 \Rightarrow a = -2$

Logo, $a = -2$ e $b = 6$.

4 Quando uma piscina estava com água abaixo do nível normal, abriu-se uma torneira que completou sua capacidade em 6 horas.
O segmento de reta representado no plano cartesiano abaixo é o gráfico que descreve o volume y de água contida na piscina, em litro, em função do tempo x, em hora.



a) Determinar a lei de associação entre x e y.
b) Quantos litros de água havia na piscina no instante em que a torneira foi aberta?
c) Qual é a capacidade total da piscina?

Resolução

a) O gráfico é parte de uma reta; logo, a lei de associação entre x e y é da forma $y = ax + b$.
Como os pontos (1, 17.200) e (3, 21.600) pertencem ao gráfico, temos:

$$\begin{cases} a + b = 17.200 \\ 3a + b = 21.600 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $a = 2.200$ e $b = 15.000$

Logo, a lei de associação procurada é: $y = 2.200x + 15.000$

b) A quantidade de litros que havia na piscina no instante em que a torneira foi aberta corresponde ao instante em que $x = 0$, isto é:

$y = 2.200 \cdot 0 + 15.000 \Rightarrow y = 15.000$

Assim, havia 15.000 litros de água na piscina.

c) A capacidade total da piscina é obtida fazendo-se $x = 6$, pois a torneira permaneceu aberta durante 6 horas para encher completamente a piscina:

$y = 2.200 \cdot 6 + 15.000 \Rightarrow y = 28.200$

Logo, a capacidade total da piscina é 28.200 L.

Função linear

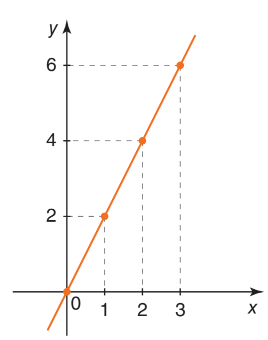
Toda função da forma $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$, é chamada de **função linear**.

Note que a função linear é uma função afim $y = ax + b$ em que $b = 0$.

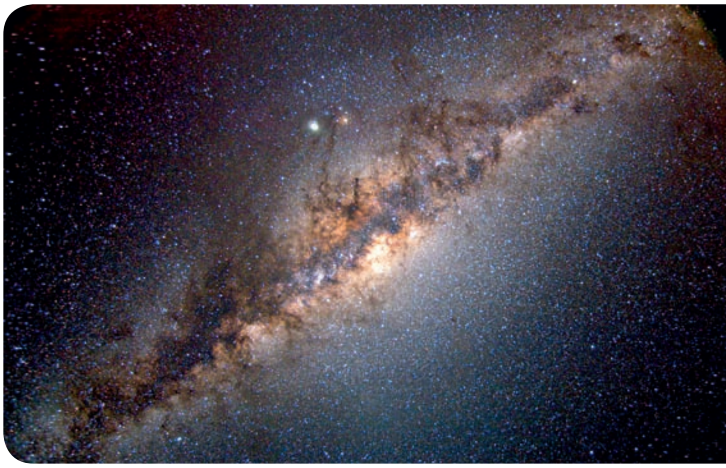
Exemplos

a) A função $y = 2x$ é linear e seu gráfico é:

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6



b) O astrofísico norte-americano Edwin Hubble (1889-1953) concluiu que, desde o Big Bang, o universo vem se expandindo continuamente. Nesse movimento, as galáxias se afastam cada vez mais umas das outras. Em seu estudo, Hubble concluiu que as galáxias se afastam da Via Láctea a uma velocidade diretamente proporcional à distância em que estão dela: quanto mais distante, maior será a velocidade de afastamento. A função linear, deduzida por Hubble, para descrever a velocidade de afastamento é:



$$v = 16R$$

em que v é a velocidade de afastamento da galáxia em quilômetro por segundo, e R é a distância, em milhão de anos-luz, entre a galáxia observada e a Via Láctea.

Assim, uma galáxia que está a 100 milhões de anos-luz da Via Láctea se afasta a uma velocidade de 1.600 km/s.

Propriedades da função linear

P1. Em toda função linear $y = ax$ os valores correspondentes das variáveis x e y são diretamente proporcionais.

P2. O gráfico de uma função linear $y = ax$ é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas.

Exemplo

Na função linear $y = 2x$, temos:

(I) Se $x = 0$, então $y = 0$.

(II) Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$.

Por (I) e (II), concluímos que x e y assumem valores correspondentes diretamente proporcionais.

Consequentemente, como x e y assumem quaisquer valores reais, o gráfico dessa função é uma reta que passa pela origem.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Para cada função abaixo, construa o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem.

a) $y = 3x - 6$

b) $y = -2x + 4$

c) $y = 4x$

d) $y = -2x$

2 Construa o gráfico de cada função.

a) $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x \leqslant 5 \\ 2x - 12, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x \leqslant 2 \\ 3x - 11, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, \text{ se } x \leqslant 3 \\ 8, \text{ se } 3 < x \leqslant 5 \\ -4x + 28, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

3 Represente no plano cartesiano o gráfico de cada função, indicando as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados.

a) $y = 2x - 6$

b) $y = 4 - x$

c) $y = 3x$

d) $y = \frac{3x}{4} + 2$

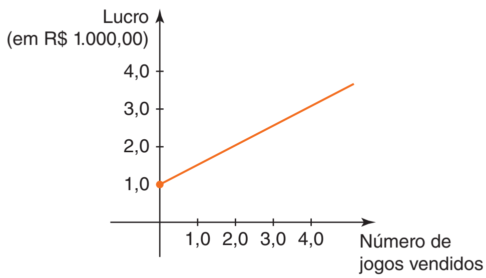
4 Faça o que se pede.

a) Dê três exemplos de função linear e construa o gráfico de cada uma.

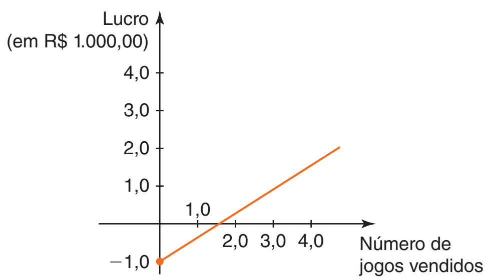
b) Obtenha a função linear cujo gráfico passa pelo ponto (2, 5).

5 (Enem) Uma empresa produz jogos pedagógicos para computadores, com custos fixos de R\$ 1.000,00 e custos variáveis de R\$ 100,00 por unidade de jogo produzida. Desse modo, o custo total para x jogos produzidos é dado por $C(x) = 1 + 0{,}1x$ (em R\$ 1.000,00). A gerência da empresa determina que o preço de venda do produto seja de R\$ 700,00. Com isso, a receita bruta para x jogos produzidos é dada por $R(x) = 0{,}7x$ (em R\$ 1.000,00). O lucro líquido, obtido pela venda de x unidades de jogos, é calculado pela diferença entre a receita bruta e os custos totais.
O gráfico que modela corretamente o lucro líquido dessa empresa, quando são produzidos x jogos, é:

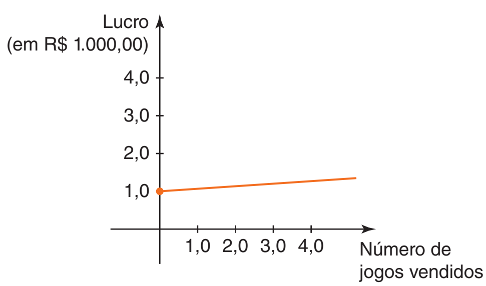
a)



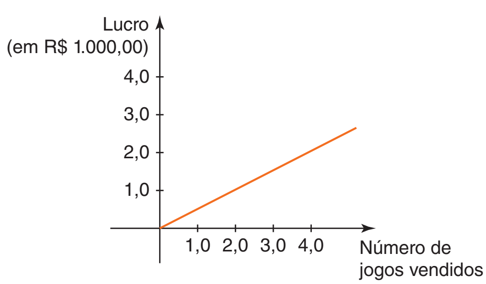
b)



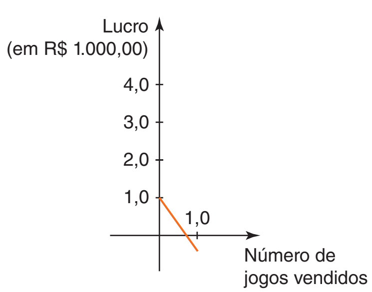
c)



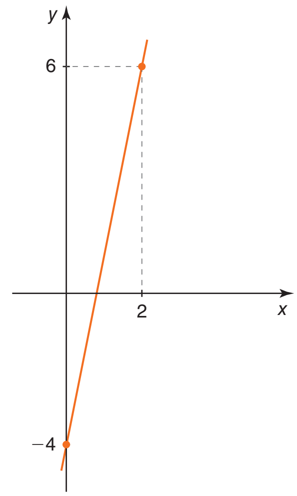
d)



e)



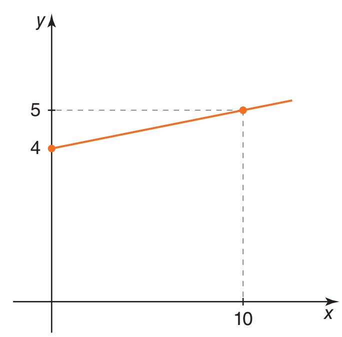
6 Sabendo que o gráfico da função $y = ax + b$ é a reta representada no plano cartesiano abaixo, determine os valores de a e b.



7 A função afim $f(x) = kx + 2$ é crescente e seu gráfico passa pelo ponto $(1, k^2)$. Construa o gráfico de f.

8 Construa o gráfico da função $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$.

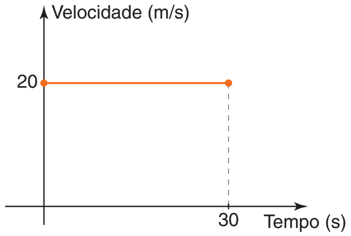
9 Para construir uma estrada, uma empresa cobra uma taxa fixa mais uma taxa que varia em função do número de quilômetros de estrada construída. O gráfico abaixo descreve o custo y da obra, em milhão de reais, em função do número x de quilômetros construídos.



a) Obtenha a lei de associação $y = f(x)$, para $x \geqslant 0$, que determina esse gráfico.
b) Determine a taxa fixa cobrada pela empresa para a construção da estrada.
c) Qual será o custo total da obra se a estrada tiver 50 km de extensão?

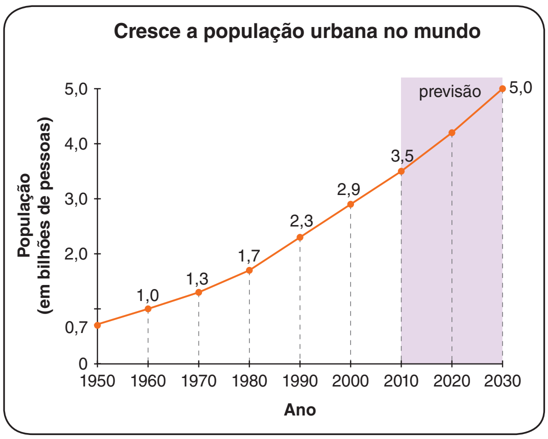
10 A despesa mensal com encargos sociais de uma pequena empresa é dada pela função $D(x) = 20 + \dfrac{x}{10}$, em que $D(x)$ é a despesa, em milhares de reais, e x é o número de funcionários.
a) Qual será a despesa quando a empresa tiver 100 funcionários?
b) Qual será o número de funcionários quando a despesa for 50 mil reais?
c) Construa o gráfico da função D para $50 \leqslant x \leqslant 100$.

11 O gráfico a seguir descreve a velocidade de um móvel em função do tempo durante um trecho de um percurso:



Construa o gráfico que descreve a distância percorrida pelo móvel, em metro, em função do tempo, em segundo, durante esse percurso.

12 (Enem) Uma pesquisa da ONU estima que, já em 2008, pela primeira vez na história das civilizações, a maioria das pessoas viverá na zona urbana. O gráfico a seguir mostra o crescimento da população urbana desde 1950, quando essa população era de 700 milhões de pessoas, e apresenta uma previsão para 2030, baseada em crescimento linear no período de 2008 a 2030.



Fonte: *Almanaque Abril*, 2008. p. 128.

De acordo com o gráfico, a população urbana mundial em 2020 corresponderá, aproximadamente, a quantos bilhões de pessoas?

a) 4,00 **b)** 4,10 **c)** 4,15 **d)** 4,25 **e)** 4,50

13 (Enem) A figura abaixo representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.

Banco S.A	
Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	Vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód.cedente
Data do documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(−) Descontos
	(−) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se $M(x)$ é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então:

a) $M(x) = 500 + 0{,}4x$
b) $M(x) = 500 + 10x$
c) $M(x) = 510 + 0{,}4x$
d) $M(x) = 510 + 40x$
e) $M(x) = 500 + 10{,}4x$

14 (UFMG) A equação $\ell = 0{,}004t + 79{,}8$ fornece o comprimento ℓ, em centímetro, de uma barra de metal em função de sua temperatura t, em grau Celsius (°C). Essa barra, inicialmente à temperatura de 50 °C, sofre aquecimento, e sua temperatura é então aumentada em 20%.

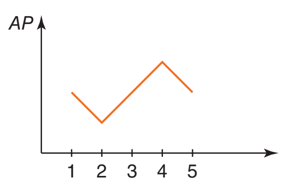
O aumento percentual correspondente, no comprimento da barra, é de:

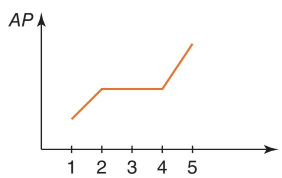
a) 0,02% **b)** 0,05% **c)** 0,04% **d)** 0,08%

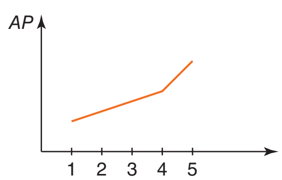
15 (Enem) O quadro apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores em cinco anos consecutivos, numerados de 1 a 5:

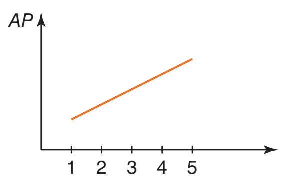
	Safra				
	1	2	3	4	5
Produção (mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (kg/hectare)	1.500	2.500	2.500	2.500	4.000

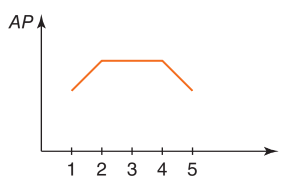
O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:

a)


b)


c)


d)


e)


Resolva os exercícios complementares 1 a 10 e 31 a 54.

Análise da função afim

Objetivos

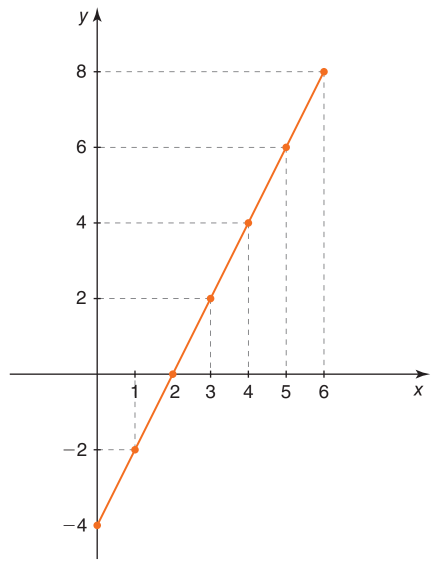
- **Entender** a proporcionalidade na função afim.
- **Aplicar** a taxa de variação na obtenção da lei da função afim.
- **Classificar** uma função afim como crescente ou decrescente.
- **Estudar** o sinal de uma função afim.

Termo e conceito

- **taxa de variação**

Proporcionalidade na função afim

Estudando a temperatura de certa região, no intervalo de 0 a 6 h de um dia de inverno, um meteorologista constatou que a função afim $y = 2x - 4$ descreve a temperatura y, em grau Celsius, em função do tempo x, em hora. O gráfico abaixo representa essa função no intervalo considerado.



Observe que:

- quando x varia de 1 a 3, a variação correspondente de y é de -2 a 2; assim, a razão entre a variação de y e a variação dos valores correspondentes de x é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - (-2)}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$$

  isso significa que a temperatura variou 4 graus Celsius em 2 horas, o que equivale à variação de 2 graus Celsius por hora;

- quando x varia de 3 a 6, a variação correspondente de y é de 2 a 8; assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{6 - 3} = \frac{6}{3} = 2$$

  isso significa que a temperatura variou 6 graus Celsius em 3 horas, o que equivale à variação de 2 graus Celsius por hora;

- quando x varia de x_1 a x_2, com $x_1 \neq x_2$, a variação correspondente de y é de $2x_1 - 4$ a $2x_2 - 4$; assim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_2 - 4 - (2x_1 - 4)}{x_2 - x_1} = \frac{2x_2 - 2x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

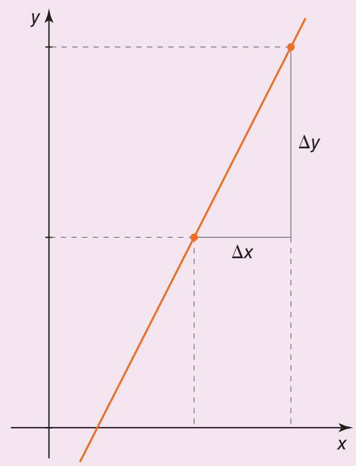
$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

isso significa que, para qualquer variação do tempo considerada no intervalo de 0 a 6 h, a temperatura subiu 2 graus Celsius por hora.

Ou seja, as variações dos valores de y são diretamente proporcionais às correspondentes variações dos valores de x, e a constante de proporcionalidade $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ é exatamente o coeficiente de x na função $y = 2x - 4$. Veremos, a seguir, que resultados análogos podem ser observados em qualquer função afim.

Taxa de variação

Em toda função afim $y = ax + b$, as variações dos valores de y são diretamente proporcionais às correspondentes variações dos valores de x, e a constante de proporcionalidade $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é exatamente o coeficiente de x na função $y = ax + b$.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

Essa constante é chamada de **taxa de variação** da função afim.

Demonstração

Na função afim $y = ax + b$, vamos considerar a variação de x de x_1 a x_2, com $x_1 \neq x_2$.
A variação correspondente de y é de $ax_1 + b$ a $ax_2 + b$.
Assim:

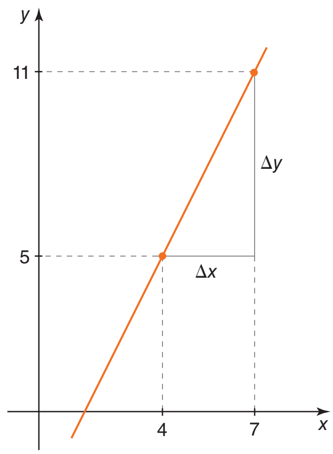
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Nota:

Como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, temos $\Delta y = a \cdot \Delta x$, portanto, Δy em função de Δx é uma função linear.
Por isso, dizemos que em toda função afim $y = ax + b$ os valores x e y variam **linearmente**.

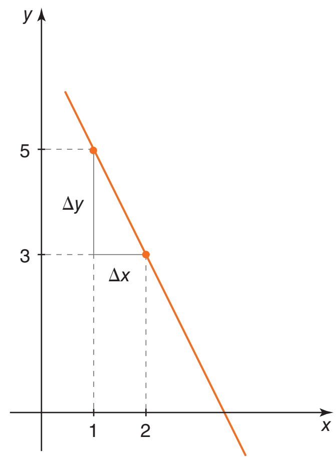
Exemplos

a) A taxa de variação da função $y = 2x - 3$ é 2.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 5}{7 - 4} = 2$$

b) A taxa de variação da função $y = -2x + 7$ é -2.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 3}{1 - 2} = -2$$

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Simulador: *O gráfico da função afim.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Calcular a taxa de variação da função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $A(4, 2)$ e $B(2, 8)$.

Resolução

Para determinar a taxa de variação, basta calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, isto é, a razão da diferença entre as ordenadas para a diferença entre as abscissas dos pontos A e B. As diferenças Δy e Δx devem ser calculadas em um mesmo sentido: ou de A para B ou de B para A.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 8}{4 - 2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 2}{2 - 4} = \frac{6}{-2} = -3$$

Assim, a taxa de variação da função afim cujo gráfico passa pelos pontos A e B é -3.

6 Obter a função afim $y = ax + b$ cujo gráfico passa pelos pontos $A(4, 7)$ e $B(1, 13)$.

Resolução

Primeiro, calculamos a taxa de variação a:

$$a = \frac{13 - 7}{1 - 4} = -2$$

Assim, a função afim tem a forma $y = -2x + b$. Como o ponto $(4, 7)$ pertence ao gráfico dessa função, devemos ter:

$7 = -2 \cdot 4 + b \Rightarrow b = 15$

Concluímos que a função pedida é:

$y = -2x + 15$

7 Quando a temperatura interna de uma sala atinge 30 °C, um aparelho de ar condicionado é ligado automaticamente, fazendo a temperatura variar linearmente com a variação do tempo.
Sabe-se que, no intervalo de 5 a 10 minutos, depois de o aparelho ser ligado, a temperatura variou, respectivamente, de 26 °C a 22 °C.
Elaborar uma equação que expresse a temperatura y, em grau Celsius, da sala em função do tempo x, em minuto, enquanto o aparelho estiver ligado.

Resolução

Como y e x variam linearmente, os valores de y em função de x são representados por uma função afim $y = ax + b$, em que $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, para quaisquer intervalos correspondentes de variação de x e y.
Considerando os intervalos dados no problema, temos:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{22 - 26}{10 - 5} = \frac{-4}{5} = -0{,}8$$

Ou seja, a temperatura da sala varia $-0{,}8$ °C por minuto.
Sabemos que a temperatura da sala no instante em que o aparelho foi ligado era 30 °C. Logo, para $x = 0$, temos:

$30 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 30$

Assim, a equação pedida é $y = -0{,}8x + 30$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

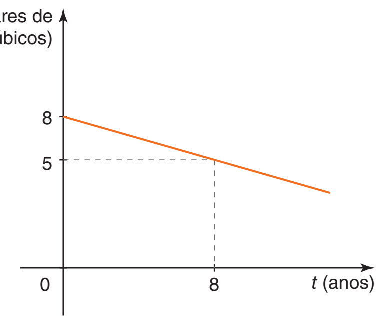
16 Obtenha a função afim $y = ax + b$ que tem taxa de variação 5 e cujo gráfico é a reta que passa pelo ponto $A(2, -3)$.

17 Determine a função afim cujo gráfico passa pelos pontos A e B, nos seguintes casos:

a) $A(3, 9)$ e $B(1, 3)$

b) $A(2, 1)$ e $B(-3, 6)$

18 (Unesp) Ao ser inaugurada, uma represa possuía 8 mil m^3 de água. A quantidade de água da represa vem diminuindo anualmente. O gráfico mostra que a quantidade de água na represa 8 anos após a inauguração é de 5 mil m^3.

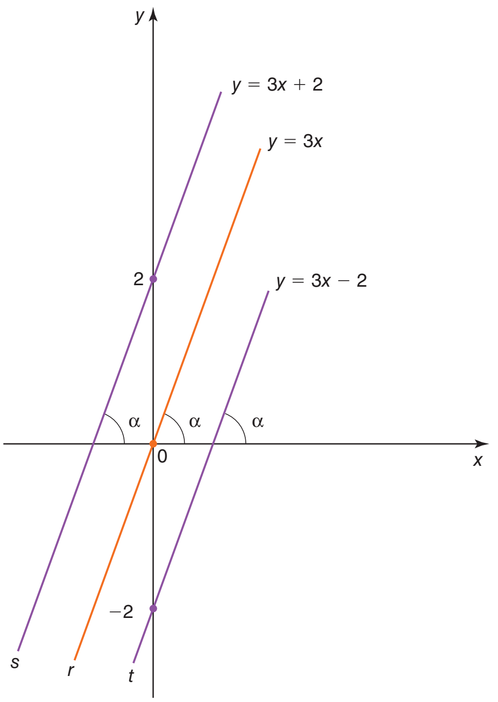


Se for mantida essa relação de linearidade entre o tempo e a quantidade de água em m^3, determine em quantos anos, após a inauguração, a represa terá 2 mil m^3.

Resolva os exercícios complementares 11 e 12.

Propriedade das funções afins que têm a mesma taxa de variação

Observe a figura abaixo.



Transladando 2 unidades para cima a reta r de equação $y = 3x$, obtemos a reta s de equação $y = 3x + 2$; e transladando r 2 unidades para baixo, obtemos a reta t de equação $y = 3x - 2$. Assim, podemos afirmar que as retas s, r e t são paralelas.

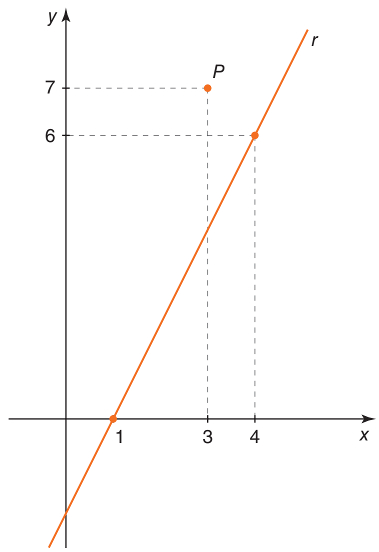
Observe que essas três funções têm a mesma taxa de variação.

Esse exemplo ajuda a entender o fundamento da seguinte propriedade:

Se duas funções afins têm a mesma taxa de variação, então as retas que as representam são paralelas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Obter a equação da reta s, que passa pelo ponto $P(3, 7)$, e é paralela à reta r representada abaixo.



Resolução

A equação da reta s pode ser representada por uma função afim $y = ax + b$, em que a taxa de variação a é a mesma da função representada pela reta r. Sabendo que os pontos (4, 6) e (1, 0) pertencem a r, calculamos a taxa de variação a:

$$a = \frac{6 - 0}{4 - 1} = 2$$

Assim, a equação da reta s tem a forma $y = 2x + b$. Como o ponto (3, 7) pertence a s, devemos ter:

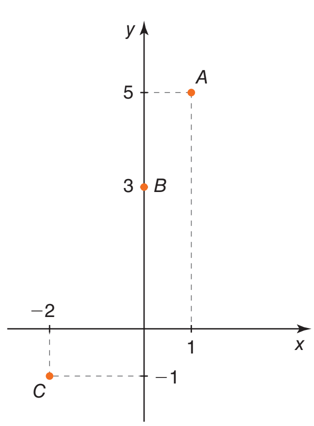
$7 = 2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 1$

Concluímos que a reta s tem equação $y = 2x + 1$.

9 Mostrar que os pontos $A(1, 5)$, $B(0, 3)$ e $C(-2, -1)$ são colineares, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Resolução

Representando os pontos A, B e C no plano cartesiano, obtemos a figura abaixo.



A representação gráfica não garante a colinearidade dos pontos A, B e C, pois o ponto C pode estar fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ a uma distância tão pequena que não seja detectada graficamente. Por isso, usaremos o conceito de taxa de variação para responder a essa questão.

Indicando por a_{AB} e a_{BC} as taxas de variação das funções que têm como gráficos as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente, temos:

$$a_{AB} = \frac{5 - 3}{1 - 0} = 2$$

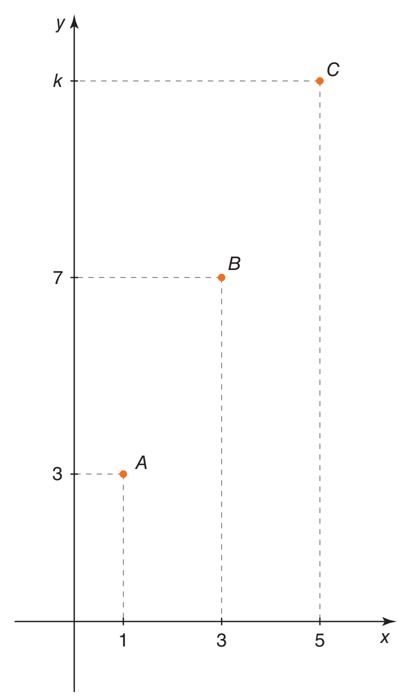
$$a_{BC} = \frac{3 - (-1)}{0 - (-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

Como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm o ponto B em comum e são gráficos de funções com a mesma taxa de variação, concluímos que elas são coincidentes. Logo, os pontos A, B e C são colineares.

10 Determinar o número real k para que os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 7)$ e $C(5, k)$ sejam colineares.

Resolução

Representando os pontos A, B e C no plano cartesiano, obtemos a figura abaixo.



Os três pontos serão colineares se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ forem gráficos de funções afim com a mesma taxa de variação, isto é:

$$\frac{7 - 3}{3 - 1} = \frac{k - 7}{5 - 3} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{k - 7}{2}$$

$\therefore k = 11$

Logo, para os pontos A, B e C serem colineares, devemos ter $k = 11$.

Crescimento e decrescimento

Dada a função afim $f(x) = ax + b$, com taxa de variação a, temos:

I. f é **crescente** se, e somente se, a é **positivo**.

II. f é **decrescente** se, e somente se, a é **negativo**.

Demonstração

Para essas demonstrações, aplicaremos os conceitos estudados no capítulo anterior sobre funções crescentes e funções decrescentes.

I. Considere os números reais x_1 e x_2 quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para $a > 0$, temos a equivalência:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow ax_2 > ax_1$$

Adicionando b a ambos os membros da última desigualdade, temos a equivalência:

$$ax_2 > ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$$

Logo, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$, portanto f é uma função crescente para $a > 0$.

II. Considere os números reais x_1 e x_2 quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para $a < 0$, temos a equivalência:

$$x_2 > x_1 \Leftrightarrow ax_2 < ax_1$$

Adicionando b a ambos os membros da última desigualdade, temos a equivalência:

$$ax_2 < ax_1 \Leftrightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$$

Logo, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$, portanto f é uma função crescente para $a < 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19 Verifique se os pontos A, B e C são colineares nos seguintes casos:

a) $A(1, 2)$, $B(0, -2)$ e $C(3, 10)$

b) $A(0, 3)$, $B(1, 1)$ e $C(2, 4)$

20 Determine o valor da constante p para que os pontos $A(2, 5)$, $B(-1, 4)$ e $C(9, p)$ sejam colineares.

21 O gráfico da função afim $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, passa pelo ponto $(0, 6)$ e forma com os eixos coordenados um triângulo com 12 unidades de área. Calcule as constantes reais a e b.

22 Quando um reservatório continha 400 litros de água, foi aberto um registro para esvaziá-lo à razão de 4 litros por segundo.

a) Obtenha uma equação que expresse a quantidade de água do reservatório, a partir do instante em que foi aberto o registro.

b) Qual é a taxa de variação da função afim obtida no item **a**? O que essa taxa de variação significa?

23 Associou-se um sistema de abscissas a uma estrada, adotando-se o quilômetro como unidade. Durante 17 minutos, um automóvel com velocidade constante percorreu um trecho AB dessa estrada, em que A e B têm abscissas -20 e 14, respectivamente.

a) Durante os 17 minutos considerados, obtenha a função afim que expressa a abscissa s do ponto onde esteve o automóvel em função do tempo t, em minuto.

b) Qual é a taxa de variação da função obtida no item **a**?

c) Qual o significado físico da taxa de variação obtida no item **a**?

24 No dia 1 e no dia 21 de fevereiro, o saldo bancário de uma pessoa era de R$ 2.000,00 e R$ 3.000,00, respectivamente. Sabendo que nesse período o saldo variou linearmente, obtenha a função que expresse o saldo y, em real, em função do dia x, do período considerado.

Resolva os exercícios complementares 13 a 15.

Estudo do sinal

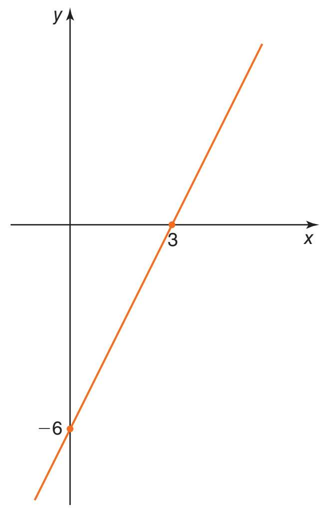
Estudar o sinal de uma função f significa determinar os valores de x para os quais f se **anula**, f é **positiva** ou f é **negativa**. Esse estudo pode ser feito de duas maneiras: algebricamente ou graficamente.

Acompanhe os exemplos.

Exemplo 1

Vamos estudar o sinal da função $f(x) = 2x - 6$.

Graficamente:



- 3 é raiz da função f;
- f é crescente;
- para qualquer x real, com $x > 3$, temos $f(x) > 0$;
- para qualquer x real, com $x < 3$, temos $f(x) < 0$;

Algebricamente:

- a raiz da função f é dada por:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

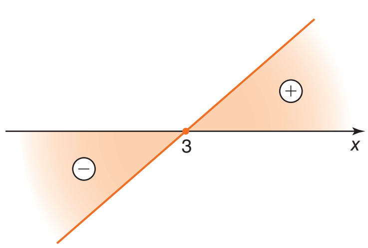
- os valores de x para os quais f é positiva são dados por:

$$2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$$

- os valores de x para os quais f é negativa são dados por:

$$2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$$

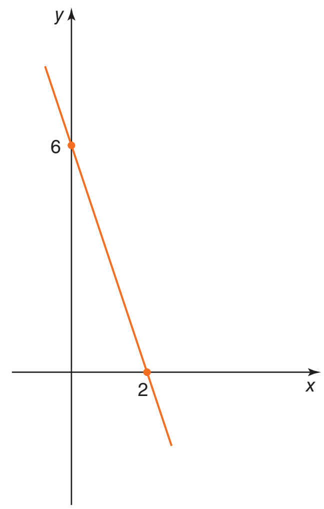
Podemos representar o estudo do sinal dessa função no seguinte esquema:



Exemplo 2

Vamos estudar o sinal da função $f(x) = -3x + 6$.

Graficamente:



- 2 é raiz da função;
- f é decrescente;
- para qualquer x real, com $x > 2$, temos $f(x) < 0$;
- para qualquer x real, com $x < 2$, temos $f(x) > 0$.

Algebricamente:

- a raiz da função f é dada por:

$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

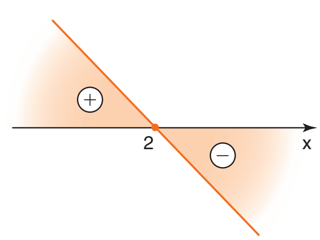
- os valores de x para os quais $f(x)$ é positiva são dados por:

$$-3x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2$$

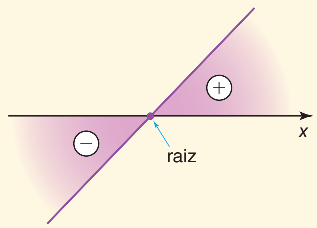
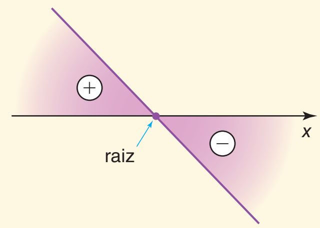
- os valores de x para os quais $f(x)$ é negativa são dados por:

$$-3x + 6 < 0 \Rightarrow x > 2$$

Podemos representar o estudo do sinal dessa função no seguinte esquema:

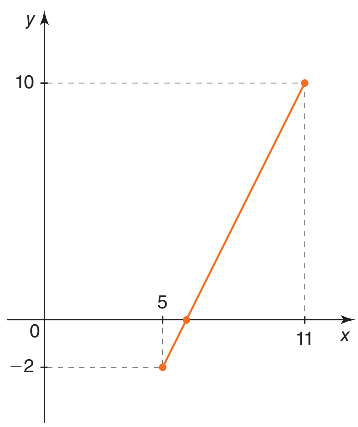


De maneira geral, o estudo do sinal de uma função afim, $f(x) = ax + b$, enquadra-se em um dos casos abaixo:

$a > 0$	$a < 0$
	

EXERCÍCIO RESOLVIDO

11 Em um dia de inverno, a temperatura y de uma região do Rio Grande do Sul, em grau Celsius, em função do horário x, no período das 5 às 11 h, pôde ser descrita pelo gráfico:



a) Em que horário desse período a temperatura atingiu 0 °C?

b) Durante quanto tempo desse período a temperatura esteve negativa?

c) Durante quanto tempo desse período a temperatura esteve positiva?

Resolução

a) O gráfico é um segmento de reta contido na reta que passa pelos pontos (5, −2) e (11, 10); logo, y é uma função afim de x, isto é, $y = ax + b$. Como (5, −2) e (11, 10) pertencem a essa reta, temos:

$$\begin{cases} -2 = a \cdot 5 + b \\ 10 = a \cdot 11 + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 2$ e $b = -12$. Logo, o segmento de reta representado corresponde à função afim $y = 2x - 12$, para $5 \leqslant x \leqslant 11$.

Para determinar o instante em que a temperatura atingiu 0 °C, basta fazer $y = 0$:

$0 = 2x - 12 \Rightarrow x = 6$

Portanto, a temperatura 0 °C ocorreu às 6 h.

b) Pelo item anterior, sabemos que o gráfico cruza o eixo Ox no ponto de abscissa 6. Logo, a simples leitura do gráfico permite concluir que, durante esse período, a temperatura esteve negativa para $5 \leqslant x < 6$, ou seja, durante 1 hora.

c) Do mesmo modo que no item **b**, a leitura do gráfico permite concluir que, durante esse período, a temperatura esteve positiva para $6 < x \leqslant 11$, ou seja, durante 5 horas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25 Estude o sinal de cada função.

a) $f(x) = 4x - 8$

b) $f(x) = -4x + 8$

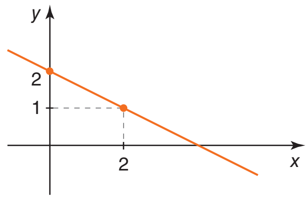
c) $f(x) = -5x + 10$

d) $f(x) = 6x - 12$

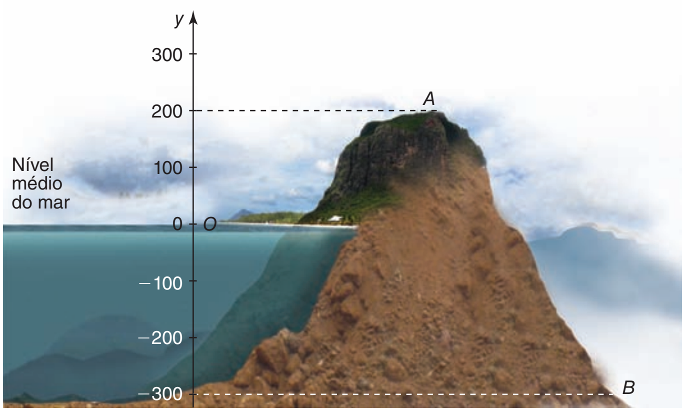
e) $f(x) = 5x$

f) $f(x) = -3x$

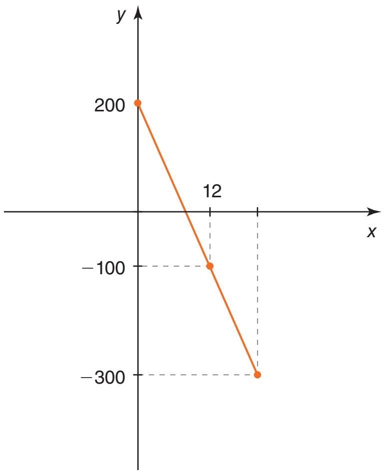
26 Discuta a variação de sinal da função $y = ax + b$, cujo gráfico é:



27 Considere o metro como unidade em um eixo real vertical Oy, orientado para cima, tal que a origem O seja um ponto do nível médio das águas do mar. Chama-se **altitude** de um ponto a ordenada desse ponto no eixo Oy. Por exemplo, na figura abaixo, a altitude do ponto A é 200 m, e a altitude de B é -300 m.



Uma perfuratriz inicia uma cavidade no ponto A com o objetivo de atingir um ponto a -300 m de altitude. Uma previsão da altitude atingida pela broca, em metro, em função do tempo, em hora, é apresentada pelo gráfico a seguir.



a) Escreva a lei de associação entre x e y.

b) Em quantas horas, depois de iniciada a perfuração, a broca atingirá o nível do mar?

c) Quantas horas serão necessárias para a broca atingir o objetivo?

d) Por quanto tempo, durante a perfuração, a broca estará em pontos de altitude positiva?

e) Por quanto tempo, durante a perfuração, a broca estará em pontos de altitude negativa?

Resolva os exercícios complementares 16 a 19 e 55.

Seção 4.3

Inequação-produto e inequação-quociente

Objetivo

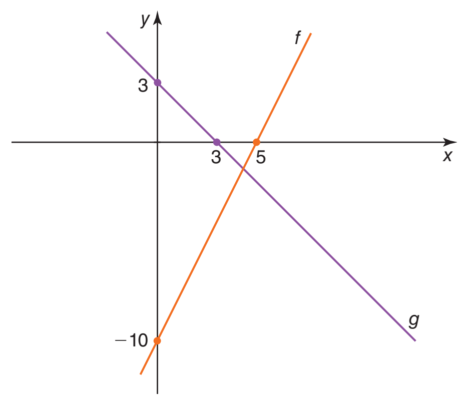
- **Resolver** inequações através do estudo do sinal da função afim.

Introdução

Para quais valores reais de x o produto dos números $2x - 10$ e $-x + 3$ é positivo? Em outras palavras, quais são as soluções reais da inequação abaixo?

$$(2x - 10)(-x + 3) > 0$$

Essa inequação é chamada de **inequação-produto**. Para resolvê-la, podemos considerar $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = -x + 3$, e representar no mesmo plano cartesiano os gráficos das duas funções. Nesse caso, queremos $f \cdot g > 0$, e isso somente ocorrerá quando f e g tiverem o mesmo sinal. Assim, analisando os gráficos, devemos determinar os intervalos do domínio de f e g em que ambas tenham o mesmo sinal (para que o produto $f \cdot g$ seja positivo).



Observe que:

- para $x < 3$, f é negativa e g é positiva;
- para $3 < x < 5$, f é negativa e g é negativa;
- para $x > 5$, f é positiva e g é negativa.

Logo, as funções f e g têm o mesmo sinal para $3 < x < 5$, portanto o conjunto solução S da inequação $(2x - 10)(-x + 3) > 0$, no universo dos números reais, é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$.

Neste tópico, você verá as definições de inequação-produto e de inequação-quociente, e também aprenderá a resolvê-las com o auxílio de um dispositivo prático.

Definições

Inequação-produto é toda inequação que pode ser apresentada sob uma das formas abaixo, em que f e g são funções quaisquer:

$f(x) \cdot g(x) > 0$ $\quad$ $f(x) \cdot g(x) < 0$ $\quad$ $f(x) \cdot g(x) \neq 0$

$f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ $\quad$ $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

Chama-se **inequação-quociente** toda inequação que pode ser apresentada em uma das formas abaixo, em que f e g são funções quaisquer, com $g(x) \neq 0$.

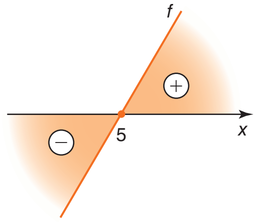
$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ $\quad$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$ $\quad$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ $\quad$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$ $\quad$ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$

Dispositivo prático

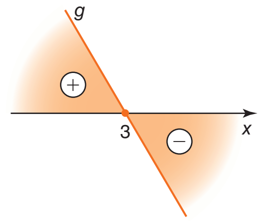
Na resolução da inequação $(2x - 10)(-x + 3) > 0$, podemos representar em um esquema a variação de sinal de cada função, $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = -x + 3$, sem precisar construir os gráficos. Acompanhe.

1º) Estudamos a variação de sinal de cada uma das funções $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = -x + 3$:

$2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$



$-x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$



2º) Com as informações anteriores, construímos o seguinte quadro de sinais:

	$x < 3$	3	$3 < x < 5$	5	$x > 5$
f	−		−		+
g	+		−		−
$f \cdot g$	−		+		−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que esse produto seja positivo, pois queremos $(2x - 10)(-x + 3) > 0$, o conjunto solução S da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}, \text{ ou ainda } S =]3, 5[$$

Essa mesma técnica é aplicada na resolução de inequações-quociente, conforme mostram os exercícios resolvidos 14 e 15.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(6x - 12)(5 - x)(2x - 14) \leqslant 0$.

Resolução

Encontrando as raízes das funções $f(x) = 6x - 12$, $g(x) = 5 - x$ e $h(x) = 2x - 14$ e estudando a variação de sinal de cada uma delas, temos:

	$x < 2$	2	$2 < x < 5$	5	$5 < x < 7$	7	$x > 7$
f	−		+		+		+
g	+		+		−		−
h	−		−		−		+
$f \cdot g \cdot h$	+		−		+		−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g \cdot h$. Queremos que esse produto seja negativo ou nulo:

$(6x - 12)(5 - x)(2x - 14) \leqslant 0$

Logo, o conjunto solução S é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ ou } x \geqslant 7\}$,

ou ainda $S = [2, 5] \cup [7, +\infty[$

13 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(3x + 6)^4(2x - 1)^3(x + 4) \geqslant 0$.

Resolução

Primeiro estudamos o sinal de cada função:

$f(x) = (3x + 6)^4$, $g(x) = (2x - 1)^3$ e $h(x) = x + 4$.

- Raiz de f: $(3x + 6)^4 = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0$

  $\therefore x = -2$

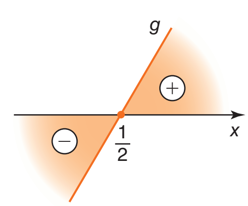
  Sinal de f: lembrando que toda potência de base real e expoente par é positiva ou nula, temos $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Raiz de g: $(2x - 1)^3 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$

  $\therefore x = \frac{1}{2}$

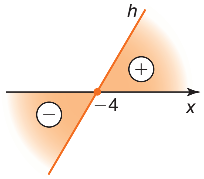
  Sinal de g: lembrando que toda potência de base real e expoente ímpar tem o mesmo sinal da base ou é nula, concluímos que a variação de sinal de $g(x) = (2x - 1)^3$ é a mesma da função $y = 2x - 1$. Ou seja:

  se $x > \frac{1}{2}$, então $g(x) > 0$;

  se $x < \frac{1}{2}$, então $g(x) < 0$.



- Raiz de h:
  $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$
  Sinal de h:
  se $x > -4$, então $h(x) > 0$;
  se $x < -4$, então $h(x) < 0$.



Representando no quadro de sinais o sinal das funções f, g, h e $f \cdot g \cdot h$, temos:

	-4		-2		$\frac{1}{2}$	
f	+		+	+		+
g	−		−	−		+
h	−		+	+		+
$f \cdot g \cdot h$	+		−	−		+

Logo, o conjunto solução S é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{2}\right\}.$

14 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{5}{2x - 6} < 0$.

Resolução

Em inequações-quociente, inicialmente determinamos a condição de existência:

$2x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Como o numerador de $\frac{5}{2x - 6}$ é positivo, a fração será negativa se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja:

$2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$

Observando que $x < 3$ satisfaz a condição de existência ($x \neq 3$), concluímos que o conjunto solução é:

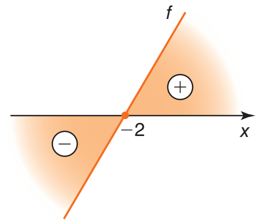
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$, ou ainda $S =]-\infty, 3[$

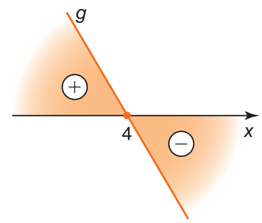
15 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{3x + 6}{4 - x} \leqslant 0$.

Resolução

Condição de existência: $4 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

Estudando o sinal de cada uma das funções, $f(x) = 3x + 6$ e $g(x) = 4 - x$, temos:





	-2		4	
f	−	+		+
g	+	+		−
$\frac{f}{g}$	−	+		−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$. Como nos interessa que esse quociente seja negativo ou nulo, pois queremos $\frac{3x + 6}{4 - x} \leqslant 0$, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > 4\}$$

(*Nota*: Observe que excluímos $x = 4$ do conjunto solução porque a condição de existência exige que $x \neq 4$.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $(2x - 8)(2 - x) > 0$

b) $(4x + 13)(3 - x)(2x - 1) \leqslant 0$

c) $x(3x - 4)(x + 2)(1 - x) < 0$

d) $(x - 1)^6(2x - 8)^3(x - 2) \geqslant 0$

e) $x^2 - 2x - 8 < 0$

f) $(x^2 - 6x + 5)(x - 1) > 0$

(*Sugestão*: nos itens **e** e **f**, fatore os trinômios do 2º grau.)

29 Determine o maior número inteiro x que satisfaz a desigualdade $(x - 1)(2x - 5) \leqslant 0$.

30 Determine o domínio da função real de variável real $f(x) = \sqrt{(2x - 1)(x + 2)(1 - x)}$.

31 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\frac{3x - 6}{5 - x} > 0$

b) $\frac{2x - 10}{3x - 6} < 0$

c) $\frac{(2x - 7)(x - 2)}{x} \leqslant 0$

32 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\frac{x - 2}{x} > 1$

b) $\frac{6x}{5x + 2} \leqslant x$

$\left(\text{Sugestão: No item } \mathbf{a}\text{, faça } \frac{x - 2}{x} - 1 > 0.\right)$

33 (IFJF-MG) O domínio da função real de variável real $f(x) = \sqrt{\frac{x - 2}{7 - x}}$ é:

a) $]7, +\infty[$

b) $[7, +\infty[$

c) $[2, 7]$

d) $]-\infty, 2] \cup]7, +\infty[$

e) $[2, 7[$

Resolva os exercícios complementares 20 a 30 e 56.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Construa o gráfico de cada função a seguir e determine seu domínio e conjunto imagem.

a) $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$

b) $y = -\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}$

c) $y = 3 - x$

d) $y = -\frac{2x}{5}$

2 Represente no plano cartesiano o gráfico das funções abaixo, indicando as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico com os eixos coordenados.

a) $y = 3 - 5x$

b) $y = 3x - \frac{3}{2}$

c) $y = \sqrt{2}x - 2$

d) $y = -4x$

3 Construa o gráfico de cada função:

a) $t(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ 4, \text{ se } 3 < x \leqslant 6 \\ -2x + 16, \text{ se } x > 6 \end{cases}$

b) $s(x) = \begin{cases} -2x + 2, \text{ se } x \leqslant 2 \\ 2x - 6, \text{ se } 2 < x \leqslant 5 \\ x - 3, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

c) $q(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x < 2 \\ 7, \text{ se } x = 2 \\ 2, \text{ se } 2 < x \leqslant 5 \\ -2x + 12, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

4 O gráfico de uma função polinomial do 1º grau passa pelos pontos (1, 3) e (−1, −5). Determine os pontos de intersecção desse gráfico com os eixos coordenados.

5 Construa o gráfico da função $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$.

6 No mesmo plano cartesiano, represente os gráficos das funções $y = 3x - 6$ e $y = -x + 6$ e determine as coordenadas do ponto comum aos dois gráficos.

7 (Mackenzie-SP) A área do trapézio representado ao lado é 60 unidades.
A equação da reta r é:

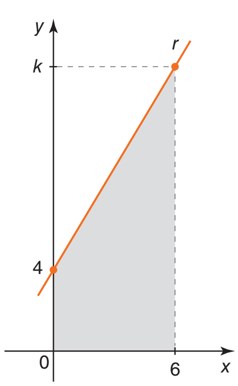
a) $y = 2x + 4$

b) $y = 2x - 4$

c) $y = 3x + 4$

d) $y = 5x + 4$

e) $y = x + 4$



8 Chama-se **função identidade** a função linear $y = x$. Construa o gráfico dessa função e determine seu domínio e conjunto imagem.

9 (UFPI) A função afim cujo gráfico passa pelo ponto (2, 3) e forma com os eixos coordenados um triângulo com 12 unidades quadradas de área é:

a) $f(x) = 5 - x$

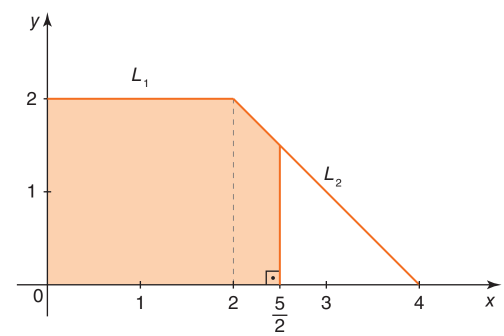
b) $f(x) = 6 - \frac{3x}{2}$

c) $f(x) = 8 - \frac{5x}{2}$

d) $f(x) = 7 - 2x$

e) $f(x) = 9 - 3x$

10 (UFMG-adaptado) Observe esta figura:



Na figura, L_1 e L_2 são segmentos de reta que ligam os pontos (0, 2), (2, 2) e (4, 0).
Uma função $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ é definida associando-se a cada $t \in [0, 4]$ o valor da área da região limitada pelos eixos coordenados, pela reta vertical que intercepta o eixo das abscissas no ponto $(t, 0)$ e pela linha formada pelos segmentos L_1 e/ou L_2.

Por exemplo, o valor de $f\left(\frac{5}{2}\right)$ é a área da região colorida na figura.
Considerando essas informações:

a) Determine os valores de $f(1)$ e $f(3)$.

b) Determine as expressões de $f(t)$ para $0 \leqslant t \leqslant 2$ e para $2 < t \leqslant 4$.

11 Uma reta s do plano cartesiano passa pelo ponto $A(-4, 8)$ e tem taxa de variação −2. Obtenha a função cujo gráfico é a reta s.

12 Determine a função afim cujo gráfico passa pelos pontos A e B, nos seguintes casos:

a) $A(1, -1)$ e $B(4, 1)$

b) $A(1, 2)$ e $B\left(\frac{1}{3}, -2\right)$

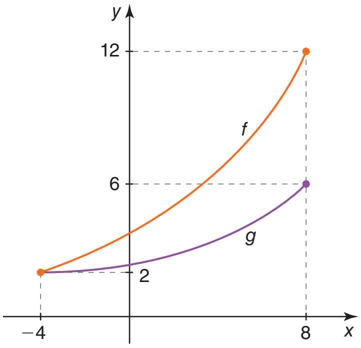
13 Verifique se os pontos A, B e C são colineares nos seguintes casos:

a) $A(1, 3)$, $B(2, 1)$ e $C(3, -1)$

b) $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ e $C(5, 5)$

14 Prove que os pontos $A(2, 3k - 2)$, $B(6, 11k - 18)$ e $C(1, k + 2)$ são colineares para qualquer valor real de k.

15 Duas funções crescentes, $f: [-4, 8] \to [2, 12]$ e $g: [-4, 8] \to [2, 6]$, têm os gráficos:



Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) A taxa de variação da função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $A(-4, 2)$ e $B(6, f(6))$ é maior que a taxa de variação da função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $A(-4, 2)$ e $C(6, g(6))$.

b) Considerando os números distintos p e q do domínio $[-4, 8]$ e os pontos $A(p, f(p))$, $B(q, f(q))$, $C(p, g(p))$ e $D(q, g(q))$, a taxa de variação da função cujo gráfico é a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é menor que a taxa de variação da função cujo gráfico é a reta $\overleftrightarrow{CD}$.

c) Sendo k um número do intervalo $[-4, 8]$, a maior taxa de variação possível de uma função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $(-4, 2)$ e $(k, f(k))$ é $\frac{5}{6}$.

d) Sendo k um número do intervalo $[-4, 8]$, a menor taxa de variação possível de uma função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $(k, g(k))$ e $(8, 12)$ é 3.

16 Discuta graficamente o sinal de cada função:

a) $f(x) = 5x + 4$

b) $f(x) = -4x + 2$

c) $f(x) = \frac{5x}{2} - 1$

d) $f(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$

17 Discuta algebricamente o sinal de cada função:

a) $f(x) = 6x + 5$

b) $f(x) = -3x + 8$

c) $f(x) = \frac{2x}{5} - 1$

d) $f(x) = -\frac{4x}{5} + \frac{2}{3}$

18 Uma função afim f tem taxa de variação positiva e $f(4) \cdot f(5) < 0$. Assinale a afirmação correta:

a) f é decrescente.

b) A raiz de f é um número maior que 5.

c) A raiz de f é um número menor que 4.

d) $f(4) > 0$ e $f(5) < 0$.

e) $f(4) < 0$ e $f(5) > 0$.

19 (Puccamp-SP) Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se os pontos $(-1, 3)$ e $(2, -1)$ pertencem ao gráfico de f, então $f(x) \geqslant 0$ se, e somente se:

a) $x \leqslant 0$

b) $x \leqslant \frac{5}{4}$

c) $x \geqslant 0$

d) $x \geqslant \frac{5}{4}$

e) $x \geqslant 5$

20 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $(x - 1)(2x - 3)(5x - 6) < 0$

b) $3x^2 - 2x - 1 \leqslant 0$

c) $x^2 - 2x \geqslant 0$

d) $x^2 - 9 < 0$

21 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$. (*Sugestão*: Fatore o 1º membro.)

22 (UFSC) Determine o menor número inteiro positivo x tal que $(x - 3)(3x + 1) < -x + 3$.

23 (Unicamp-SP) Sejam dadas as funções $f(x) = px$ e $g(x) = 2x + 5$, em que p é um parâmetro real.

a) Supondo que $p = -5$, determine para quais valores reais de x tem-se $f(x) \cdot g(x) < 0$

b) Determine para quais valores de p temos $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [-8, -1]$.

24 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\frac{4}{2x - 8} > 0$

b) $\frac{3}{x - 5} < 0$

25 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\frac{x + 1}{2 - 3x} \leqslant 0$

b) $\frac{(2x - 4)(3 - x)}{3x - 12} \geqslant 0$

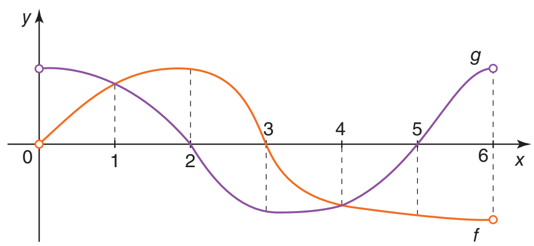
c) $\frac{x^2 - 4x + 3}{2x + 5} \leqslant 0$

26 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\frac{2x - 3}{x - 2} < 2$

b) $\frac{3x}{6x - 1} \geqslant -2x$

27 (UFMG) Neste plano cartesiano, estão representados os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, ambas definidas no intervalo aberto $]0, 6[$:



Seja S o subconjunto de números reais definido por $S = \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \cdot g(x) < 0\}$.

Então, é **correto** afirmar que S é:

a) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 5 < x < 6\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 4 < x < 5\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 5\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 6\}$.

28 (Mackenzie-SP) O conjunto solução da inequação $\frac{x - 1}{x} < 1$ é:

a) $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $\varnothing$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

29 (Ufam) O conjunto das soluções, no conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, da inequação $\frac{x}{x + 1} > x$, é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

c) vazio

d) $\mathbb{R}$

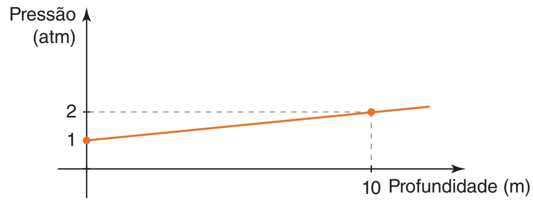
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

30 Determine o domínio da função:

$g(x) = \sqrt{\frac{2}{x + 3}} + \sqrt{\frac{x}{x + 2}}$

Exercícios contextualizados

31 Ao submergir em águas marítimas, o mergulhador sofre aumento de pressão à medida que afunda. O gráfico a seguir descreve esse aumento de pressão, em atmosfera, em função da profundidade, em metro.

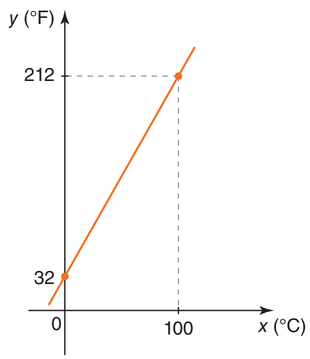


a) Qual é a pressão sofrida pelo mergulhador na superfície do mar?

b) Qual é a pressão sofrida pelo mergulhador a 18 m de profundidade?

c) Obtenha uma equação que expresse a pressão p, em atmosfera, em função da profundidade x, em metro.

32 A relação entre as medidas de temperatura na escala Celsius (°C) e na escala Fahrenheit (°F) está representada no gráfico abaixo.



a) Obtenha a equação que expressa a medida y da temperatura, em grau Fahrenheit, em função da medida x, em grau Celsius.

b) Determine a medida da temperatura em grau Celsius que corresponde a -4 °F.

33 (FGV) Uma empresa fabrica componentes eletrônicos; quando são produzidas 1.000 unidades por mês, o custo de produção é R$ 35.000,00. Quando são fabricadas 2.000 unidades por mês, o custo é R$ 65.000,00. Admitindo que o custo mensal seja uma função polinomial de 1º grau em relação ao número de unidades produzidas, podemos afirmar que o custo (em real) de produção de 0 (zero) unidade é:

a) 1.000
b) 2.000
c) 5.000
d) 3.000
e) 4.000

34 (Covest-PE) Uma dose de certa droga é injetada em um paciente e, às 8 h, a concentração sanguínea da droga é 1,0 mg/mL. Passadas 4 horas, a concentração é 0,2 mg/mL. Admitindo que a concentração seja uma função afim do tempo, em quantos minutos, contados a partir das 12 h, a concentração da droga será zero?

35 (FGV) Um terreno vale hoje R$ 40.000,00, e estima-se que daqui a 4 anos seu valor seja R$ 42.000,00. Admitindo que o valor do imóvel seja função do 1º grau do tempo (medido em ano e com valor zero na data de hoje), seu valor daqui a 6 anos e 4 meses será aproximadamente:

a) R$ 43.066,00
b) R$ 43.166,00
c) R$ 43.266,00
d) R$ 43.366,00
e) R$ 43.466,00

36 Uma fábrica produz papel de presente. A folha é retangular, com 0,8 m de largura, e o comprimento é determinado pela encomenda de cada cliente.

a) Um cliente comprou um rolo de 50 m de comprimento. Que área de papel ele adquiriu?

b) Um cliente comprou um rolo de x m de comprimento. Indicando por y a área de papel adquirida, em metro quadrado, dê a equação que expressa y em função de x e construa o gráfico cartesiano determinado por essa equação para $x > 0$.

c) Um cliente comprou 5 rolos de 50 m de comprimento cada um e 3 rolos de x m de comprimento cada um. Indicando por y a área de papel adquirida, em metro quadrado, dê a equação que expressa y em função de x e construa o gráfico cartesiano determinado por essa equação para $x > 0$.

37 Cada pneu de um automóvel tem 0,5 m de raio. Partindo do repouso, esse veículo percorreu um trecho de uma estrada. Lembrando que o perímetro C de uma circunferência de raio r é calculado por $C = 2\pi r$ e adotando $\pi = 3{,}14$:

a) elabore uma equação que expresse a distância y percorrida pelo automóvel, em metro, em função do número x de voltas de um de seus pneus.

b) construa o gráfico da função do item **a** para $0 \leqslant y \leqslant 3.140$.

c) a função do item **a** é linear? Por quê?

38 Uma correia faz girar duas polias com 4 cm e 12 cm de raio.

a) Escreva uma equação que expresse o número y de voltas da polia maior em função do número x de voltas da polia menor.

b) Construa o gráfico da função do item **a** para $0 \leqslant x \leqslant 5$.

c) A função do item **a** é linear? Por quê?

39 A metragem de corda fabricada por uma máquina é uma função linear do tempo. Se em 5 minutos são fabricados $(3k + 1)$ metros de corda e em $(3k - 1)$ minutos são fabricados 16 m de corda:

a) determine a lei de associação $y = f(x)$, em que y é a quantidade de corda fabricada pela máquina, em metro, e x é o tempo, em minuto.

b) construa o gráfico da função do item **a** no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 5$.

40 (UEL-PR) Um camponês adquire um moinho ao preço de R$ 860,00. Com o passar do tempo, ocorre depreciação linear no preço desse equipamento. Considere que, em 6 anos, o preço do moinho será R$ 500,00. Com base nessas informações, é correto afirmar:

a) em três anos, o moinho valerá 50% do preço de compra.

b) em nove anos, o preço do moinho será um múltiplo de nove.

c) é necessário um investimento maior que R$ 450,00 para comprar esse equipamento após sete anos.

d) serão necessários 10 anos para que o valor desse equipamento seja inferior a R$ 200,00.

e) o moinho terá valor de venda ainda que tenham decorrido 13 anos.

41 (Ufes) Em 1950, as populações de Tóquio e de Nova Iorque eram 7 milhões e 12,6 milhões de habitantes, respectivamente. Em 1974, as populações de Tóquio e de Nova Iorque passaram para 20 e 16 milhões de habitantes, respectivamente. Admitindo-se que o crescimento populacional dessas cidades foi linear no período 1950-1974, o ano em que as duas cidades ficaram com a mesma população foi:

a) 1961
b) 1962
c) 1963
d) 1964
e) 1965

42 (FGV) Uma empresa acredita que, diminuindo em 8% o preço de determinado produto, as vendas aumentarão cerca de 14%. Suponha que a relação entre o preço do produto e a quantidade vendida seja expressa por uma função linear. Nesse caso, uma redução de 14% no preço do produto acarretará um aumento na quantidade vendida de:

a) 18,4%
b) 20%
c) 26,5%
d) 24,5%
e) 8%

43 (UFMG) Um carro bicombustível percorre 8 km com 1 litro de álcool e 11 km com 1 litro do combustível constituído de 75% de gasolina e de 25% de álcool, composição adotada hoje no Brasil. Recentemente, o Governo brasileiro acenou para uma possível redução, nessa mistura, da porcentagem de álcool, que passaria a ser de 20%. Suponha que o número de quilômetros que esse carro percorre com 1 litro dessa mistura varie linearmente de acordo com a proporção de álcool utilizada. Então, é correto afirmar que, se for utilizado 1 litro da nova mistura proposta pelo Governo, esse carro percorrerá um total de:

a) 11,20 km
b) 11,35 km
c) 11,50 km
d) 11,60 km

44 O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida comparativa de fatores como riqueza, alfabetização, educação, esperança de vida e natalidade relativos aos países do mundo. As tabelas a seguir apresentam o IDH do Brasil no contexto mundial.

Ano	IDH
2004	0,790
2005	0,792

Nível de desenvolvimento humano	IDH
Baixo	até 0,499
Médio	de 0,500 até 0,799
Alto	maior ou igual a 0,800

Fonte: PNUD (Programa Nacional das Nações Unidas para o Desenvolvimento).

Admitindo que o IDH brasileiro varie linearmente com a variação do tempo, esse índice no Brasil atingirá 0,863 no ano:

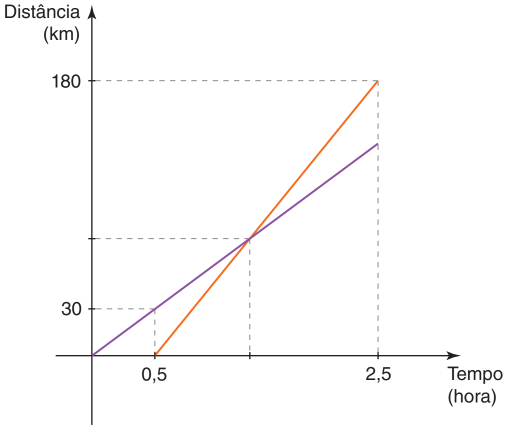
a) 2020
b) 2028
c) 2040
d) 2035
e) 2021

45 (UFMT) A poluição atmosférica em metrópoles aumenta ao longo do dia. Num certo dia, às 8 h, o número de partículas poluentes era 20 em cada milhão de partículas e, às 13 h, era 100 partículas poluentes em cada milhão de partículas. Admitindo que o número de partículas poluentes na atmosfera varie linearmente com a variação do tempo, o número de partículas poluentes às 10 h 30 min desse dia é:

a) 65
b) 60
c) 70
d) 75
e) 55

46 No primeiro dia do mês de julho de certo ano, o dólar custava R$ 2,00 e, a partir daí, seu valor em relação ao real entrou em um processo de valorização. Supondo que o custo do dólar, em real, tenha variado linearmente com o tempo, em dias, no mês de julho, até atingir o valor de R$ 2,21 em 31 de julho, calcule o valor do dólar, em real, no dia 21 de julho.

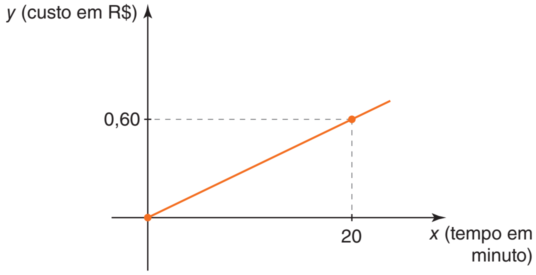
47 (UFRGS) Dois carros partem de uma cidade, deslocando-se pela mesma estrada. O gráfico abaixo apresenta as distâncias percorridas pelos carros em função do tempo.



Analisando o gráfico, verifica-se que o carro que partiu primeiro foi alcançado pelo outro ao ter percorrido exatamente:

a) 60 quilômetros.
b) 85 quilômetros.
c) 88 quilômetros.
d) 90 quilômetros.
e) 91 quilômetros.

48 O quilowatt-hora (kWh) é uma unidade de energia definida como o trabalho executado por um sistema que fornece 1 quilowatt de potência durante uma hora. Essa unidade é muito utilizada na comercialização de energia elétrica, como você já deve ter observado na conta de luz de sua casa.
O gráfico a seguir mostra o valor a ser pago, em real, à companhia de energia elétrica por um banho de chuveiro, em função do tempo, em minuto.



Se o custo por kWh é R$ 0,30, conclui-se que a potência desse chuveiro é:

a) 5,4 kW
b) 5,2 kW
c) 5,0 kW
d) 6,5 kW
e) 6 kW

49 Um vendedor recebe mensalmente um valor fixo de R$ 160,00 mais um adicional de 2% das vendas efetuadas por ele durante o mês.
Com base nisso:

a) construa uma tabela para apresentar os rendimentos mensais desse vendedor nos meses de abril a junho. Sabe-se que em abril a venda foi de R$ 8.350,00, em maio, de R$ 10.200,00, e em junho, de k reais;
b) dê uma equação que expresse o rendimento mensal y desse vendedor em função do valor x de suas vendas mensais e construa o gráfico dessa função.

50 A companhia de saneamento básico de certo estado trabalha com um sistema progressivo de tarifas, que variam de acordo com as seguintes faixas de consumo:

- até o consumo de 10 m^3 de água, é cobrada a tarifa mínima de R$ 12,00;
- sobre o que exceder 10 m^3, até 20 m^3, são cobrados R$ 2,00 por m^3, além da tarifa mínima;
- sobre o que exceder 20 m^3, são cobrados R$ 3,00 por m^3, além do máximo valor possível da faixa anterior.

a) Representar esse sistema progressivo de tarifas por meio de uma função.
b) Esboçar o gráfico da função obtida no item **a**.

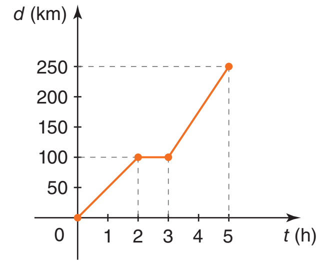
51 (PUC-MG) Certa indústria pode produzir x aparelhos por dia, e o custo C, em real, para produzir um desses aparelhos é dado pela função:

$$C(x) = \begin{cases} 5 + x(12 - x), \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ -\dfrac{3x}{2} + 40, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \end{cases}$$

Se, em um dia, foram produzidos 9 aparelhos e, no dia seguinte, 15 aparelhos, a diferença entre o maior e o menor custo de produção por unidade, nesses dois dias, foi de:

a) R$ 12,00
b) R$ 14,50
c) R$ 15,00
d) R$ 17,50

52 (UFABC-SP) A distância entre a cidade P e a cidade Q é de 250 km, medida ao longo da estrada que as une. Um automóvel parte da cidade P rumo à Q. O gráfico representa a distância d, em quilômetros, desse automóvel à cidade P, em função do tempo t, em horas, após sua partida.

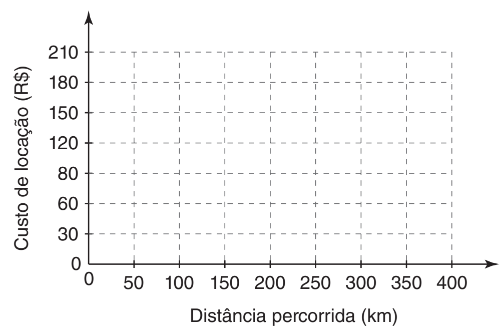


A função $d(t)$ que calcula a distância d do automóvel à cidade P e que corresponde ao intervalo em que o automóvel atingiu a maior velocidade pode ser expressa por:

a) $d(t) = 250 - 100t$
b) $d(t) = 75t$
c) $d(t) = 100$
d) $d(t) = 75t - 125$
e) $d(t) = 50t$

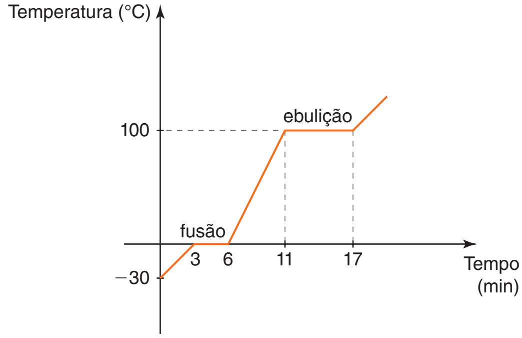
53 (Unicamp-SP) Duas locadoras de automóveis oferecem planos diferentes para a diária de um veículo econômico. A locadora Saturno cobra uma taxa fixa de R$ 30,00, além de R$ 0,40 por quilômetro rodado. Já a locadora Mercúrio tem um plano mais elaborado: ela cobra uma taxa fixa de R$ 90,00 com uma franquia de 200 km, ou seja, o cliente pode percorrer 200 km sem custos adicionais. Entretanto, para cada km rodado além dos 200 km incluídos na franquia, o cliente deve pagar R$ 0,60.

a) Para cada locadora, represente no gráfico abaixo a função que descreve o custo diário de locação em termos da distância percorrida no dia.
b) Determine para quais intervalos cada locadora tem o plano mais barato. Supondo que a locadora Saturno vá manter inalterada a sua taxa fixa, indique qual deve ser seu novo custo por km rodado para que ela, lucrando o máximo possível, tenha o plano mais vantajoso para clientes que rodam quaisquer distâncias.



54 A temperatura constante na qual um sólido se transforma em líquido é chamada de **ponto de fusão**, e a temperatura constante na qual o líquido se transforma em vapor é chamada de **ponto de ebulição**. No intervalo de tempo em que ocorre a fusão, coexistem o sólido e o líquido, e a temperatura permanece constante até que todo o sólido se transforma em líquido. No intervalo de tempo em que ocorre a ebulição, coexistem o líquido e o vapor, e a temperatura permanece constante até que todo o líquido se transforma em vapor.

Em um local ao nível do mar, um bloco de gelo é colocado em um recipiente sobre o fogo. O gráfico a seguir descreve a variação de temperatura em função do tempo e as mudanças de estado ocorridas nessa experiência.



a) Qual era a temperatura inicial do bloco de gelo ao ser colocado no recipiente sobre o fogo?

b) Quanto tempo durou o processo de fusão?

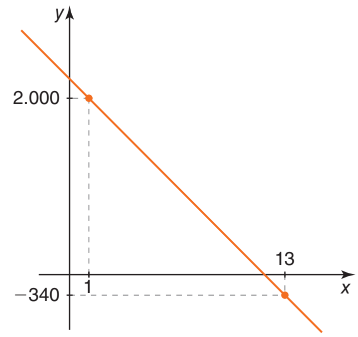
c) Quanto tempo durou o processo de ebulição?

d) Qual era a temperatura da água depois de 9 minutos do início do aquecimento?

e) Durante quanto tempo houve apenas líquido no recipiente?

f) Indicando por $f(x)$ a temperatura em °C, x minutos depois de iniciado o aquecimento, expresse a função f por mais de uma sentença, sabendo que a experiência terminou no exato momento em que todo o líquido se transformou em vapor.

55 No dia 1º de janeiro, a conta bancária de uma pessoa registrava saldo positivo de 2.000 reais. Esse saldo variou linearmente com o tempo durante todos os 31 dias de janeiro, de modo que, no dia 13 de janeiro, o saldo era de −340 reais. O gráfico que descreve o saldo y dessa pessoa, em real, em cada dia x do mês de janeiro, é formado por 31 pontos da reta representada a seguir.



a) Escreva a lei de associação entre x e y.

b) Qual era o saldo desse correntista no dia 31 de janeiro?

c) Durante quantos dias de janeiro o saldo desse correntista esteve positivo?

d) Durante quantos dias de janeiro o saldo desse correntista esteve negativo?

56 (FGV) Um importante conceito usado em economia para analisar o quanto uma variação do preço unitário $p > 0$ influencia na variação da receita é o de elasticidade da demanda, denotado por $E(p)$, uma vez que a elasticidade E é dada em função de p. Se $E(p) > 1$, então se diz que a demanda é elástica, o que quer dizer que um pequeno aumento do preço unitário resulta em uma diminuição da receita, ao passo que um pequeno decréscimo do preço unitário irá causar um aumento da receita. Admitindo a elasticidade da demanda dada por $E(p) = \dfrac{-p^2 - 2p + 1}{-4p + 1}$, então o intervalo de p para o qual a demanda é elástica é:

a) $\left]0, \dfrac{1}{4}\right[\cup \left]-1 + \sqrt{2}, +\infty\right[$

b) $\left]\dfrac{1}{8}, 2\right[$

c) $]0, 2[$

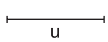
d) $\left]0, \dfrac{1}{4}\right[\cup]2, +\infty[$

e) $\left]\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Construa um eixo real cuja unidade seja a medida do segmento u, abaixo.



Usando régua e compasso, marque nesse eixo real o ponto associado a:

a) $\dfrac{7}{3}$

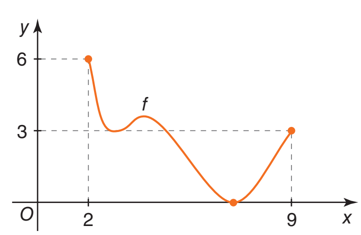
b) $\sqrt{3}$

2 Demonstre que o cubo de um número inteiro ímpar é um número inteiro ímpar. (Sugestão: um número ímpar pode ser representado por $2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$.)

3 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 2$ se $x \in \mathbb{Q}'$. Calcule:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) + f(\sqrt{3}) - f(3 + \sqrt{2}) + f\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) + f(4) + f(0)$$

4 Determine o domínio e o conjunto imagem da função f cujo gráfico é:



Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Um fabricante gastou R$ 900,00 em moldes para a confecção de certo tipo de recipiente de plástico. Além desse valor, o custo de produção de cada recipiente foi R$ 0,15.

a) Obtenha a lei de associação $y = f(x)$ da função f que expressa o custo total, em real, para a fabricação de x frascos.

b) Construa o gráfico da função f obtida no item **a**.

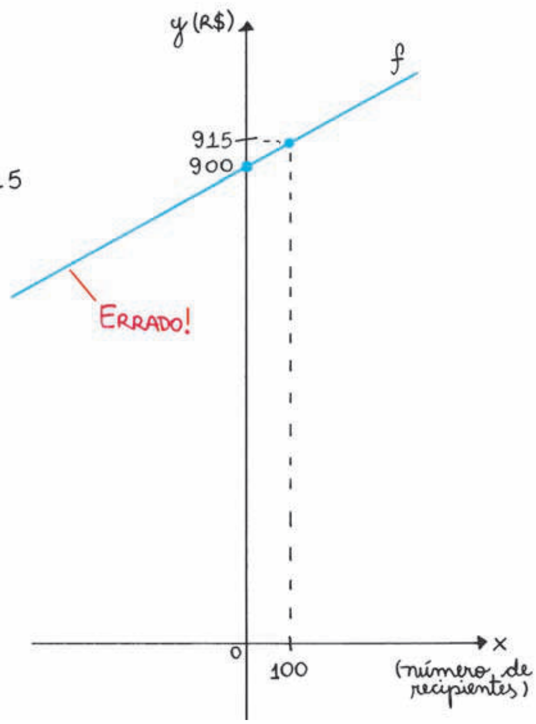
Resolução

a) custo fixo dos moldes: R$ 900,00
custo por frasco: R$ 0,15
Sejam:
x: o número de frascos
y: o custo total (em real)
Assim, a lei de associação é: $y = 900 + 0{,}15 \cdot x$

b) Como a função é afim, seu gráfico é uma reta. Vamos encontrar dois pontos dessa reta:

- para $x = 0$:
$y = 900 + 0{,}15 \cdot 0 \Rightarrow y = 900$
- para $x = 100$:
$y = 900 + 0{,}15 \cdot 100 \Rightarrow y = 915$

Assim:



Comentário

a) A resolução do item **a** está correta. Poderíamos acrescentar que a variável x só pode assumir valores naturais, de zero até o número máximo de recipientes produzidos.

b) O gráfico apresentado no item **b** está incorreto, pois a variável x não pode assumir todos os valores reais.

Agora, refaça o item b, corrigindo-o.

Capítulo

5

Função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada parábola, que pode ser entendida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto fixo e a uma reta fixa.

A função quadrática, também conhecida como função polinomial do 2º grau, pode ser aplicada a várias situações, por exemplo, no cálculo das dimensões de uma lata de refrigerante, para que seja gasto o mínimo de material em sua confecção; no cálculo do alcance máximo de um projétil atirado obliquamente para cima, entre outras.

5.1 A função quadrática

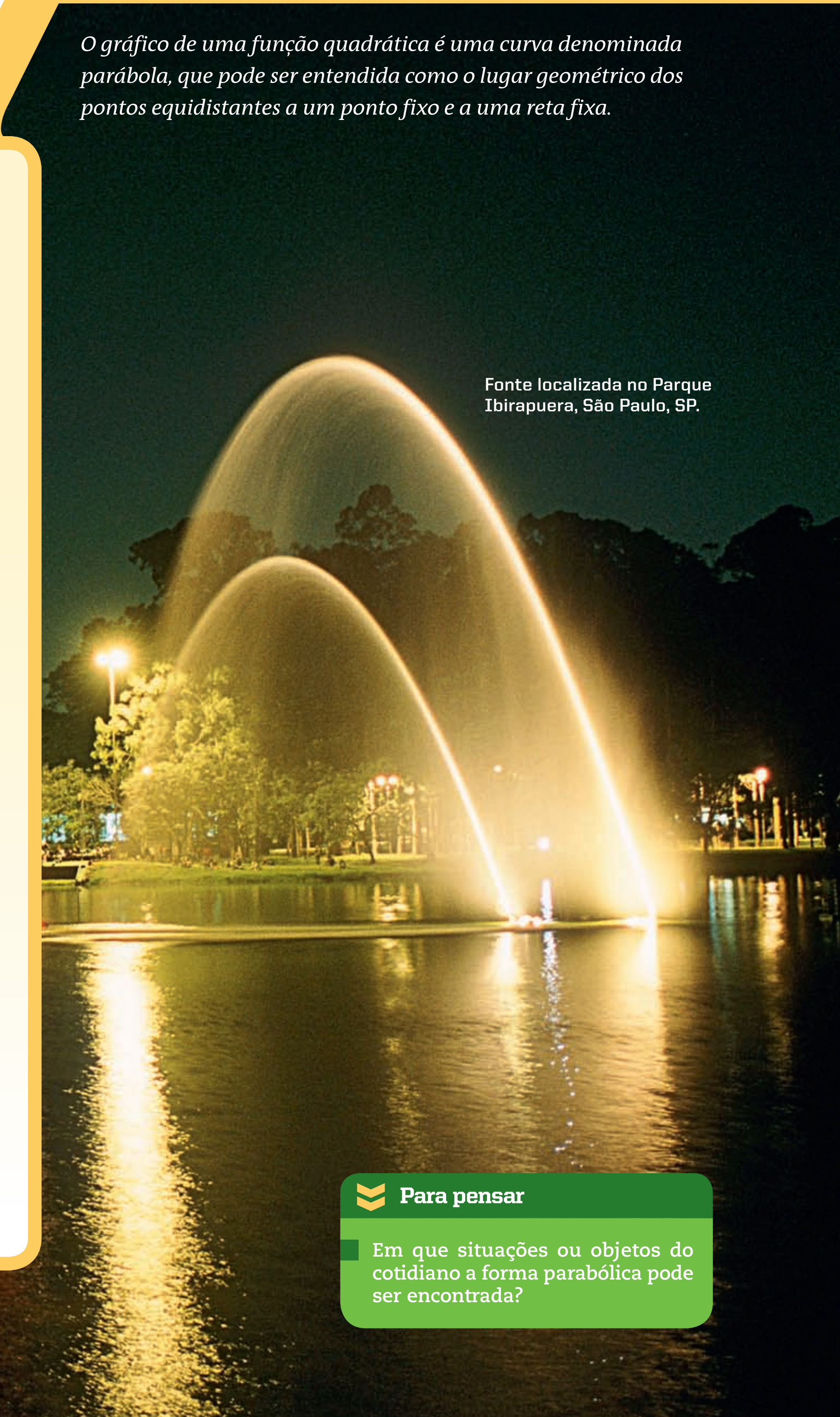
O gráfico da função quadrática é uma curva que se assemelha à trajetória da água lançada obliquamente para cima por uma mangueira ou chafariz. Algumas técnicas e propriedades permitem a sua construção.

5.2 Análise da função quadrática

A variação da função quadrática, o estudo do sinal e seu valor máximo ou mínimo são aspectos fundamentais na análise da função quadrática.

5.3 Inequações polinomiais do 2º grau

O estudo da variação de sinal da função quadrática tem como consequência a resolução das inequações polinomiais do 2º grau.



Fonte localizada no Parque Ibirapuera, São Paulo, SP.

Para pensar

Em que situações ou objetos do cotidiano a forma parabólica pode ser encontrada?

Seção 5.1

A função quadrática

Objetivos

- **Reconhecer** a lei de uma função quadrática.
- **Esboçar** o gráfico de uma função quadrática.
- **Determinar** os pontos notáveis da parábola (intersecção com os eixos e o vértice).
- **Identificar** o domínio e o conjunto imagem de uma função quadrática.

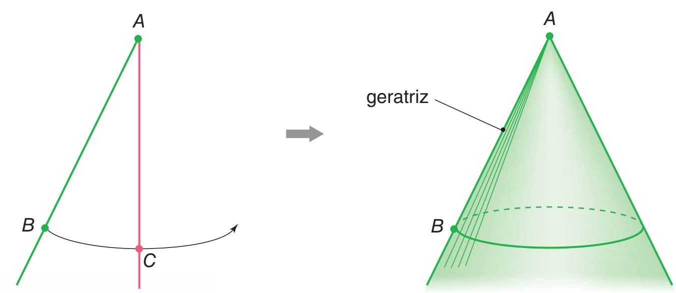
Termo e conceito

- **função quadrática**

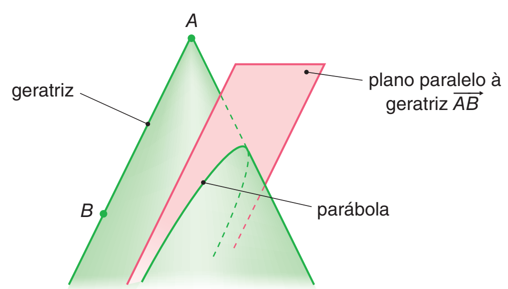
Parábola

O estudo da função polinomial do 2º grau depende, em grande parte, de uma figura plana chamada parábola. Assim como o estudo sobre função afim e sua relação com a reta, visto no capítulo anterior, deu suporte à resolução de algumas situações-problema, o entendimento da função quadrática e sua relação com a parábola poderá auxiliar em outros casos que serão estudados.

Para entender a parábola, considere duas semirretas não colineares, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, de mesma origem A. A rotação de 360° de $\overrightarrow{AB}$ em torno de $\overrightarrow{AC}$ gera uma **superfície cônica ilimitada**. Qualquer semirreta de origem A contida nessa superfície cônica é chamada de **geratriz** da superfície.



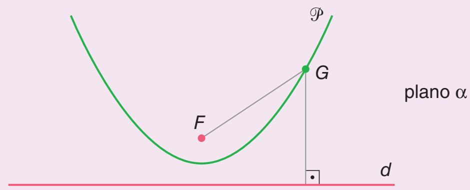
A intersecção de uma superfície cônica ilimitada com um plano paralelo a uma das geratrizes dessa superfície é uma **parábola**.



Você pode visualizar concretamente essa situação iluminando uma parede plana com uma lanterna, de modo que uma geratriz da superfície cônica do facho de luz seja paralela à parede. A intersecção da superfície da parede com a superfície do facho de luz é parte de uma parábola.

Outra forma de visualizar uma parábola é dirigir um jato de água obliquamente para cima. Nesse caso, a trajetória percorrida pela água é **parabólica**.

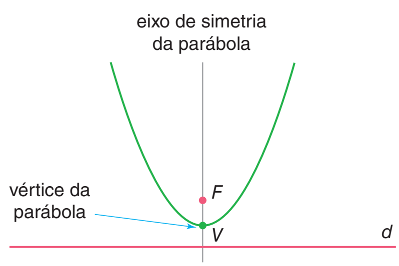
Assim, definimos:

> Dados uma reta d e um ponto F de um plano α, com $F \notin d$, chama-se **parábola** $\mathcal{P}$, de diretriz d e foco F, o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de d e de F.
>
> 
>
>
> $$\mathcal{P} = \{G \in \alpha \mid G \text{ dista igualmente de } F \text{ e } d\}$$

Vértice e eixo de simetria da parábola

Observando a parábola apresentada na definição, temos:

- A reta que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz d é chamada de **eixo de simetria** da parábola. Note que a parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a esse eixo.
- A intersecção da parábola com seu eixo de simetria é o ponto V, chamado de **vértice** da parábola.



Concavidade da parábola

A parábola é uma curva côncavo-convexa, isto é, de um lado é côncava e do outro é convexa. Por exemplo, se observada a partir do foco, a parábola é vista como uma curva côncava; e, se observada a partir de um ponto da diretriz, é vista como uma curva convexa.

Aqui, quando nos referirmos à concavidade da parábola, estaremos considerando a figura côncava.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Esboço de uma parábola com régua e compasso.*

O conceito de função quadrática

Uma indústria fabrica bolas de futebol. O custo de produção mensal dessas bolas é composto de várias parcelas correspondentes a molde, matéria-prima, salário dos operários, transporte, energia elétrica, aluguéis, impostos etc. Algumas dessas parcelas são fixas, independentemente do número de unidades produzidas. Assim, o custo de produção por unidade diminui conforme aumenta a quantidade produzida.

Admitindo que, sob determinadas restrições, para x bolas fabricadas mensalmente, o custo de produção por unidade seja $30 - \dfrac{x}{1.000}$ reais, o custo total dessa produção mensal, em real, é dado por:

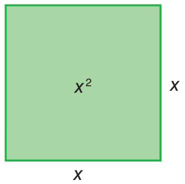
$$f(x) = x\left(30 - \frac{x}{1.000}\right) \Rightarrow f(x) = -\frac{x^2}{1.000} + 30x$$

Neste capítulo, estudaremos funções como essa. Note que essa função é representada por um polinômio do 2º grau; por isso, ela é chamada de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática.**

> Toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é denominada **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau**.

Exemplos

- $y = 5x^2 - 3x + 8$
- $y = -4x^2 + x$
- $g(x) = x^2 - \sqrt{3}$
- A função que relaciona a área A de um quadrado com a medida x do lado é dada por $A(x) = x^2$.



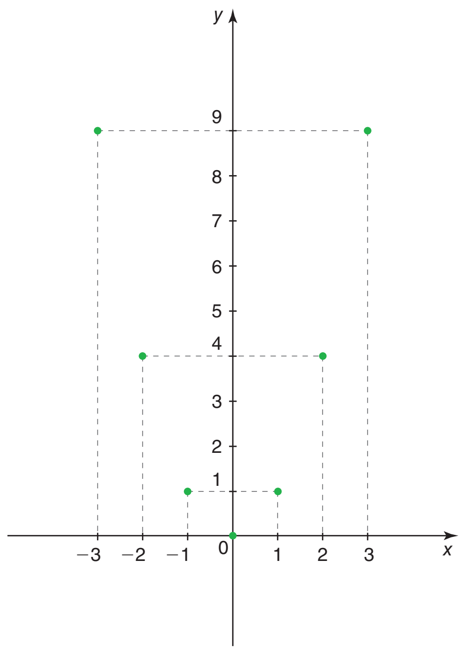
- Em relação a um sistema de abscissas, a posição de um móvel em movimento uniformemente variado é expressa pela função polinomial do 2º grau: $s = s_0 + v_0t + \dfrac{at^2}{2}$, em que s_0 é a abscissa onde está o móvel no instante inicial ($t = 0$), v_0 é a sua velocidade no instante inicial, a é a aceleração escalar constante do móvel e t é o tempo transcorrido desde o instante inicial.

O movimento em queda livre apresenta aceleração constante. Esse é um exemplo de movimento uniformemente variado.

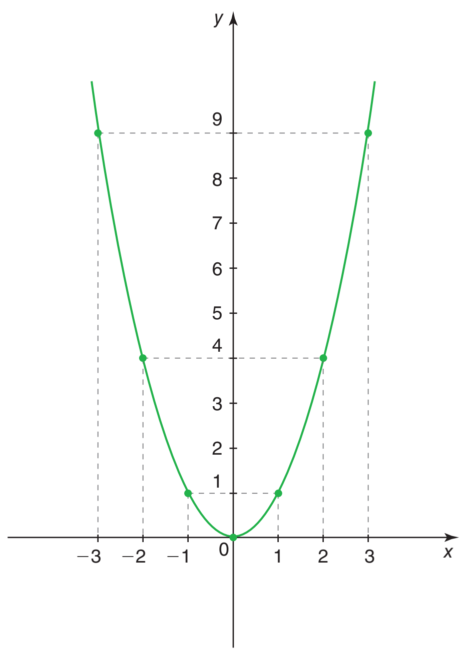
Gráfico da função quadrática

Observe alguns pontos do gráfico da função quadrática $y = x^2$:

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Se atribuirmos a x os infinitos valores reais, obteremos o seguinte gráfico:



É possível provar que essa curva é uma parábola com eixo de simetria vertical (perpendicular ao eixo Ox). Genericamente, pode-se demonstrar que:

O gráfico de uma função é uma parábola com eixo de simetria vertical se, e somente se, essa função é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

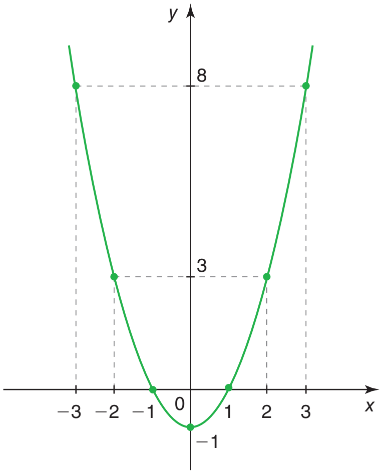
A **concavidade** da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ é:

- voltada para o sentido positivo do eixo Oy (para cima) se, e somente se, $a > 0$;
- voltada para o sentido negativo do eixo Oy (para baixo) se, e somente se, $a < 0$.

Exemplo

Sabemos que o gráfico da função $y = x^2 - 1$ é uma parábola. Assim, para obter um esboço desse gráfico, atribuímos alguns valores a x, representando no plano cartesiano os pontos determinados. A seguir, desenhamos a parábola que passa por esses pontos. Observe:

x	$y = x^2 - 1$
-3	8
-2	3
-1	0
0	-1
1	0
2	3
3	8



Pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox*

Há parábolas que interceptam o eixo das abscissas em um ou dois pontos. Para obter esses pontos a partir de $y = ax^2 + bx + c$, atribuímos o valor de zero à variavel y, obtendo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{(I)}$$

Pela fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Se $\Delta > 0$, então a equação (I) terá duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$. Assim, os pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox serão $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.
- Se $\Delta = 0$, então a equação (I) terá duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$. Logo, a parábola será tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.
- Se $\Delta < 0$, então a equação (I) não terá raiz real. Portanto, a parábola não terá ponto em comum com o eixo Ox.

Ponto de intersecção da parábola com o eixo *Oy*

Para obter esse ponto, atribuímos o valor zero à variável x da equação $y = ax^2 + bx + c$, obtendo:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$$

Logo, o ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy é $(0, c)$.

Exemplo

Para esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$, vamos obter os pontos de intersecção da parábola com os eixos Ox e Oy.

- Fazendo $y = 0$, temos:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$
$$\therefore x = 5 \text{ ou } x = 1$$

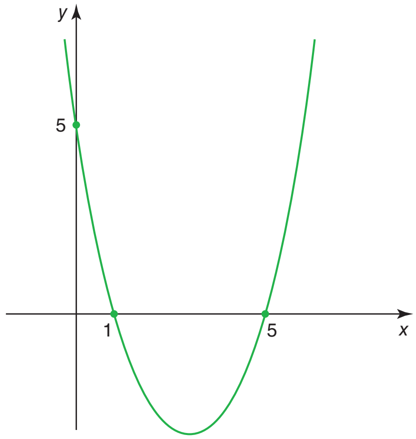
Assim, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(1, 0)$ e $(5, 0)$.

- Fazendo $x = 0$, temos:

$$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5$$

Portanto, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.

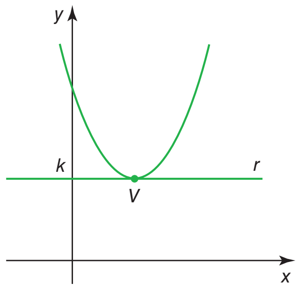
Desse modo, o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$ é:



Observe a concordância entre o sinal do coeficiente a de x^2 e o sentido para onde está voltada a concavidade da parábola: como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

Vértice da parábola

Para determinar as coordenadas do vértice V da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, vamos indicar por k a ordenada de V. Assim, a reta r de equação $y = k$ possui um único ponto em comum com a parábola da ilustração ao lado.



A parábola poderia estar em qualquer outra posição; esta ilustração pretende apenas facilitar o raciocínio.

Portanto, o sistema $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & \text{(I)} \\ y = k & \text{(II)} \end{cases}$ tem uma única solução.

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$ax^2 + bx + c = k$$

ou seja:

$$ax^2 + bx + c - k = 0 \quad \text{(III)}$$

Como essa equação deve ter raízes reais e iguais (pois o sistema tem uma única solução), impomos $\Delta = 0$:

$$b^2 - 4a(c - k) = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac + 4ak = 0$$

$$\therefore k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow k = -\frac{\Delta}{4a}$$

Então, a ordenada do vértice é: $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

Substituindo k por $\frac{4ac - b^2}{4a}$ na equação (III), temos:

$$ax^2 + bx + c - \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) = 0 \Rightarrow \frac{4a^2x^2 + 4abx \cancel{+ 4ac} \cancel{- 4ac} + b^2}{4a} = 0$$

$$\therefore 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 0 \Rightarrow (2ax + b)^2 = 0$$

$$\therefore 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Assim, a abscissa do vértice é: $x_v = -\frac{b}{2a}$

Concluímos que o vértice V da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto:

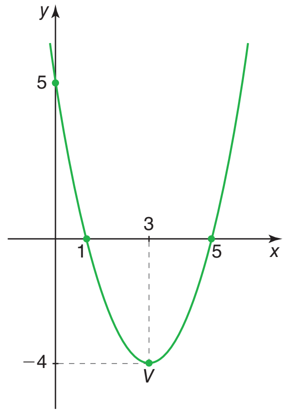
$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

Exemplo

O vértice da parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$ é dado por $V(x_V, y_V)$, em que:

$$x_V = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{[(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5]}{4 \cdot 1} = -4$$

Portanto, o vértice da parábola é o ponto $V(3, -4)$:



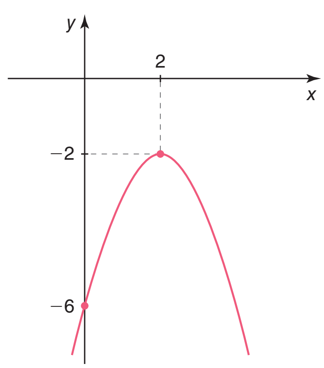
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Simulador: *O gráfico da função quadrática*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Esboçar o gráfico e indicar o domínio e o conjunto imagem da função $y = -x^2 + 4x - 6$.

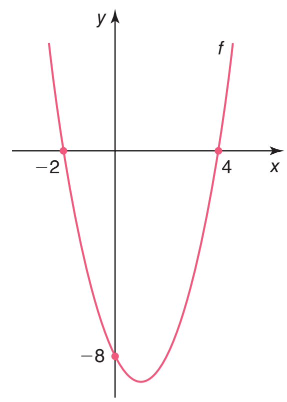
Resolução

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $-x^2 + 4x - 6 = 0$
  $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = -8$
  Como $\Delta < 0$, a função não tem raiz real; portanto a parábola não intercepta o eixo Ox.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 6 \Rightarrow y = -6$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -6)$.
- O vértice V é dado por $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$:
  $-\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$ e $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(-8)}{4 \cdot (-1)} = -2$
  Logo, $V(2, -2)$.
- Assim, esboçamos o gráfico de f:



$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) =]-\infty, -2]$

2 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determinar as constantes reais a, b e c.



Resolução

$(0, -8) \in f \Rightarrow -8 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$(-2, 0) \in f \Rightarrow 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$
$(4, 0) \in f \Rightarrow 0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

Assim, para determinar a, b e c, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c = -8 & \text{(I)} \\ 4a - 2b + c = 0 & \text{(II)} \\ 16a + 4b + c = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos c por -8 em (II) e (III):

$$\begin{cases} 4a - 2b - 8 = 0 \\ 16a + 4b - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16a + 8b + 32 = 0 \\ 16a + 4b - 8 = 0 \end{cases}$$

Adicionamos, membro a membro, as duas equações do último sistema, obtendo:
$12b + 24 = 0 \Rightarrow b = -2$
Substituímos, em (II), b por -2 e c por -8:
$4a - 2 \cdot (-2) - 8 = 0 \Rightarrow a = 1$
Concluímos que $a = 1$, $b = -2$ e $c = -8$.

3 Uma copiadora cobra R$ 0,40 por cópia para até 100 cópias coloridas de uma mesma página. Para 150 cópias, o preço cai R$ 0,02 por cópia; e, assim por diante, a cada 50 cópias, até o limite de 550 cópias, há um desconto de R$ 0,02 por cópia, incidindo sobre todas as cópias adquiridas pelo cliente.

a) Se, obedecendo ao limite estabelecido, um cliente adquirir um lote de $100 + 50x$ cópias, com $x \in \mathbb{N}$, qual será a equação que expressa o valor $f(x)$, em real, pago por esse lote?

b) Construir o gráfico da função f do item **a**.

Resolução

a) Sob o limite estabelecido, qualquer lote com $100 + 50x$ cópias, com $x \in \mathbb{N}$, terá o custo de $0{,}40 - 0{,}02x$ real por cópia. Assim, o custo total do lote será de $(100 + 50x) \cdot (0{,}40 - 0{,}02x)$ reais. Logo:

$f(x) = (100 + 50x)(0{,}40 - 0{,}02x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 18x + 40$

b) Fora do contexto desse problema, o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 18x + 40$ é apresentado na figura 1, abaixo. Porém, no contexto do problema, devemos obedecer à condição $x \in \mathbb{N}$ e $100 + 50x \leqslant 550$, ou seja, $x \in \mathbb{N}$ e $x \leqslant 9$, com o que restringimos o gráfico apenas aos dez pontos da parábola representados na figura 2.

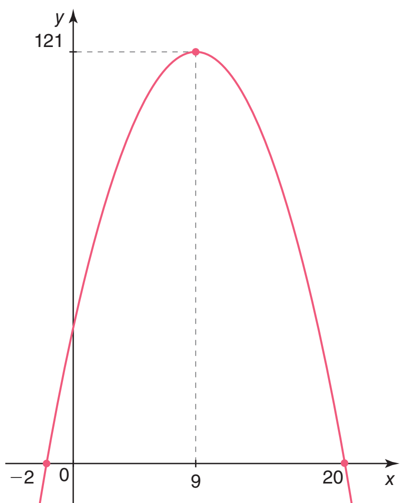


Figura 1

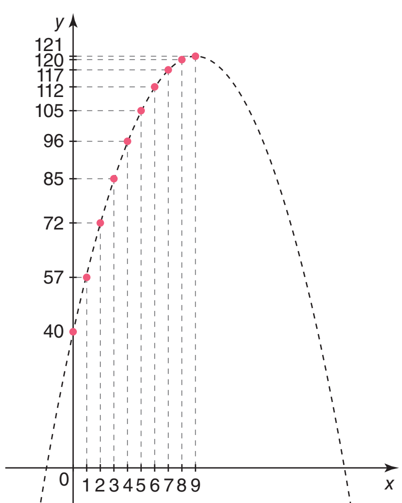


Figura 2

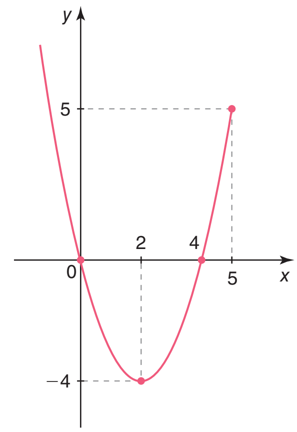
4 Esboçar o gráfico, indicando o domínio e o conjunto imagem da função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ -2x + 17, \text{ se } x > 5 \end{cases}$$

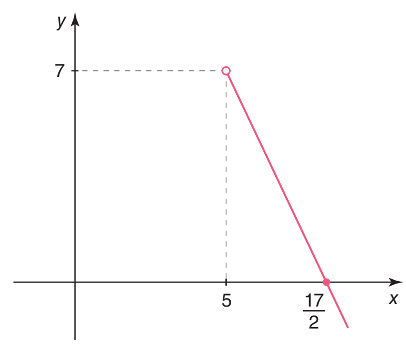
Resolução

Para construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença, analisamos cada sentença separadamente.

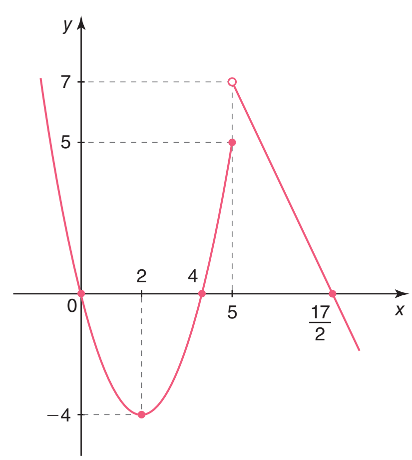
I. O gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x$ para $x \leqslant 5$ é o arco de parábola representado abaixo:



II. O gráfico da função $f(x) = -2x + 17$ para $x > 5$ é a semirreta representada abaixo:



A reunião dos gráficos obtidos em (I) e (II) é o gráfico da função f:



$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 (Vunesp) O desenvolvimento da gestação de uma determinada criança, que nasceu com 40 semanas, 50,6 cm de altura e com 3.446 gramas de massa, foi modelado, a partir da 20ª semana, aproximadamente, pelas funções matemáticas $h(t) = 1{,}5t - 9{,}4$ e $p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246$, em que t indica o tempo em semanas, $t \geqslant 20$, $h(t)$ a altura em centímetro e $p(t)$ a massa em grama. Admitindo o modelo matemático, determine quantos gramas tinha o feto quando sua altura era 35,6 cm.

2 Esboce o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

c) $y = -x^2 + 3x + 10$

d) $g(x) = x^2 - 6x + 9$

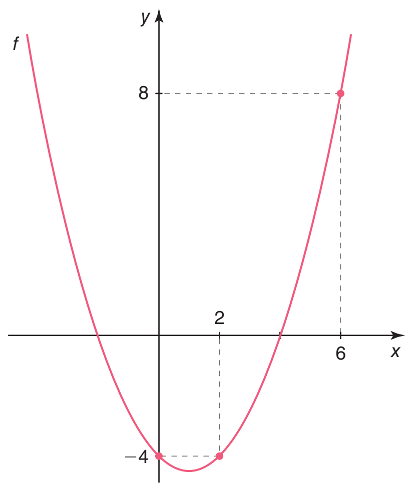
e) $s(x) = 3x^2 - 12x$

f) $y = x^2 - 4$

3 (Ufes) Sabendo-se que a imagem da função $y = x^2 + 5x + (k + 4)$ é o conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$, podemos afirmar que o valor de k é:

a) 0,25 **b)** 0,50 **c)** 0,75 **d)** 1,00 **e)** 1,25

4 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine as constantes reais a, b e c.



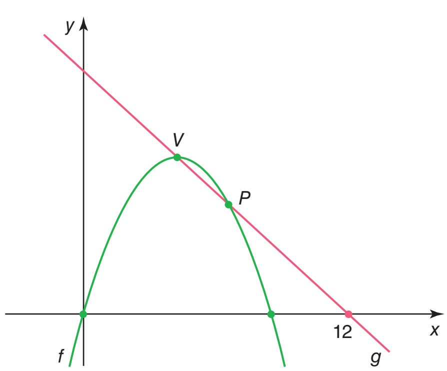
5 (UFSCar-SP) A parábola determinada pela função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tem vértice de coordenadas (4, 2). Se o ponto de coordenadas (2, 0) pertence ao gráfico dessa função, então o produto $a \cdot b \cdot c$ é igual a:

a) −12 **b)** −6 **c)** 0 **d)** 6 **e)** 12

6 O gráfico da função $f(x) = 3x^2 + 2x + k + 5$, em que $k \in \mathbb{R}$, não tem ponto em comum com o eixo das abscissas. Determine os possíveis valores de k.

7 No mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções $y = x^2 - 3x + 2$ e $y = -x + 5$ e determine as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos.

8 Os gráficos a seguir representam as funções f e g e os pontos V e P, comuns aos dois gráficos, em que V é o vértice da parábola que representa a função f.



Se $f(x) = -x^2 + 8x$, o ponto P é:

a) P(6, 12) **b)** P(5 , 15) **c)** $P\left(\frac{11}{2}, \frac{55}{4}\right)$ **d)** P(7, 7) **e)** $P\left(\frac{15}{2}, \frac{15}{4}\right)$

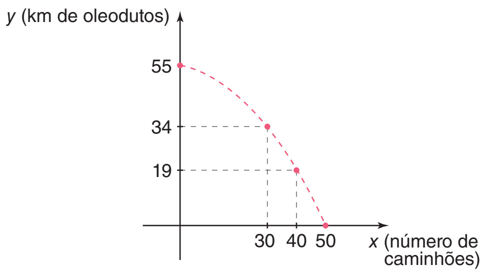
9 Esboce o gráfico de cada função.

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 \text{ se } x \leqslant 1 \\ 3x \text{ se } x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2x - 1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$

10 Um míssil foi lançado a partir de um ponto *O* com o objetivo de atingir um alvo em um ponto *A*, situado no mesmo terreno plano e horizontal em que está o ponto *O*. Considerando o ponto *O* como a origem de um sistema cartesiano com eixo *Oy* vertical e eixo *Ox* horizontal passando por *A*, orientado de *O* para *A*, um engenheiro programou o lançamento de modo que a trajetória do míssil obedecesse à equação $y = x^2 - 5x$. Supondo que o ponto *A* tenha sido atingido e que a unidade adotada no sistema de eixos tenha sido o quilômetro, calcule a distância *OA*.

11 Uma empresa petrolífera destinou determinada verba à construção de oleodutos ou à compra de caminhões. O dinheiro pode ser empregado apenas na compra de caminhões ou apenas na construção de oleodutos ou, ainda, uma parte na compra de caminhões e outra parte na construção de oleodutos. Algumas das possibilidades das aplicações dessa verba estão descritas no gráfico abaixo.



Em Economia, esse gráfico é chamado **curva de possibilidade de produção**. Essa curva é um arco de parábola que passa pelos pontos assinalados. Determine a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ que corresponde a esse gráfico.

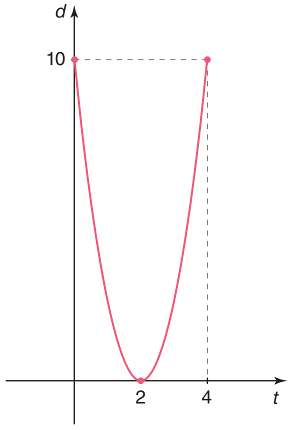
12 Em uma ocorrência policial, foi isolada uma região retangular com três lados formados por uma fita de 20 m, esticada, e o quarto lado em um muro, onde foram fixadas as extremidades da fita, como mostra a figura:

Indicando por *x* e *y* as medidas, em metro, dos lados menor e maior do retângulo, respectivamente:

a) Determine a área, em metro quadrado, da região isolada, em função da medida *x* do lado menor.

b) Se a área da região isolada for 50 m^2, quais serão as medidas *x* e *y* dos lados do retângulo?

13 O gráfico parabólico abaixo descreve a distância *d*, em metro, entre um ponto *A* e um corpo em movimento retilíneo, em função do tempo *t*, em minuto.



Três minutos depois do início das medições de tempo, a distância entre o móvel e o ponto *A* era:

a) 3 m **b)** 2,8 m **c)** 2,6 m **d)** 2,5 m **e)** 2,4 m

Resolva os exercícios complementares 1 a 12 e 24 a 26.

Seção 5.2

Análise da função quadrática

Objetivo

- **Identificar** graficamente e algebricamente o valor máximo e mínimo da função quadrática.

Termos e conceitos

- valor máximo
- valor mínimo

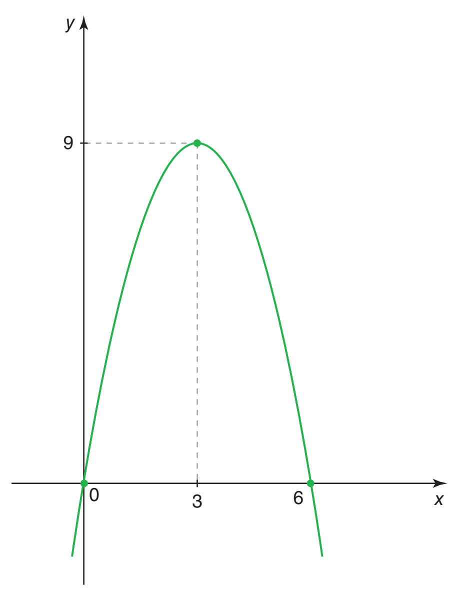
Uma indústria de embalagens confeccionará latas cilíndricas de alumínio para acondicionar 350 mL de refrigerante em cada uma. Quais devem ser as dimensões de cada lata para que seja utilizada a quantidade **mínima** possível de alumínio?

Em uma prova de lançamento de dardo, qual deve ser a medida do ângulo de lançamento para que o dardo alcance a distância **máxima**?

Questões como essas, em que se procura determinar o valor **mínimo** ou o valor **máximo**, são estudadas em Matemática pela aplicação dos conceitos de **máximo** e **mínimo de funções**. Neste tópico, daremos início ao estudo desses conceitos, tratando, por enquanto, apenas de funções quadráticas.

Valor máximo

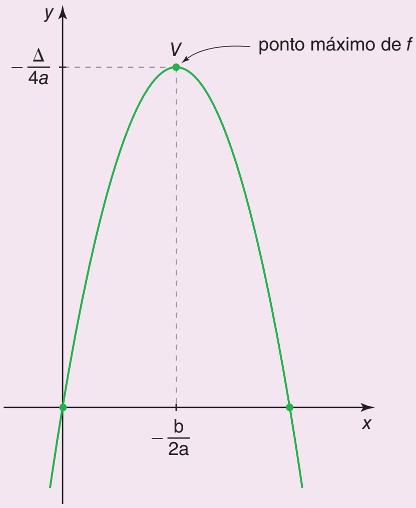
Seja a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico é:



$f(3) = 9$

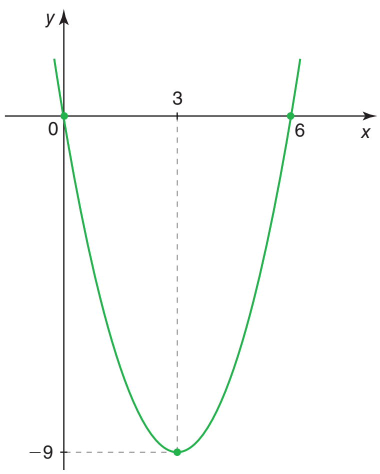
Note que $f(3) \geqslant f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f. Por isso, dizemos que $f(3) = 9$ é o **valor máximo** da função f e que 3 é a **abscissa do ponto máximo da função**. A seguir, definimos esses conceitos.

Se V é o vértice da parábola que representa graficamente a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, então V é chamado de **ponto máximo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor máximo** de f.



Valor mínimo

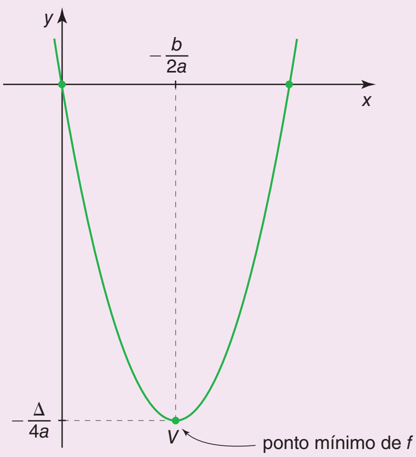
Seja a função $f(x) = x^2 - 6x$, cujo gráfico é:



$f(3) = -9$

Note que $f(3) \leqslant f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f. Por isso, dizemos que $f(3) = -9$ é o **valor mínimo** da função f e que 3 é a **abscissa do ponto mínimo da função**. Definimos esses conceitos a seguir.

Se V é o vértice da parábola que representa graficamente a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, então V é chamado de **ponto mínimo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor mínimo** de f.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Sabe-se que, sob certo ângulo de lançamento, a altura *h* atingida por uma pedra, em metro, em função do tempo *t*, em décimo de segundo, é dada por $h(t) = -\frac{t^2}{60} + t$.

a) Construir o gráfico da altura atingida pela pedra em função do tempo.

b) Qual é a altura máxima atingida pela pedra em relação ao plano horizontal de onde foi lançada?

c) Em quanto tempo, após o lançamento, a pedra atinge a altura máxima?

d) Em quanto tempo, após o lançamento, a pedra atinge o solo, suposto no mesmo plano horizontal de onde ela foi lançada?

Resolução

a) Inicialmente, obtemos os pontos notáveis da parábola.

- Intersecção com o eixo das abscissas:

$$-\frac{t^2}{60} + t = 0 \Rightarrow t\left(-\frac{t}{60} + 1\right) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ ou } -\frac{t}{60} + 1 = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ ou } t = 60$$

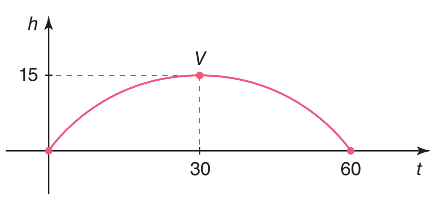
Logo, a parábola intercepta o eixo das abscissas nos pontos (0, 0) e (60, 0). Note, portanto, que a parábola intercepta o eixo das ordenadas também no ponto (0, 0).

- Vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)} = 30 \text{ e}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left(1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right) \cdot 0\right)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)} = 15$$

Portanto, o gráfico da altura atingida em função do tempo é:



b) A altura máxima atingida pela pedra é a ordenada do vértice V do arco de parábola do item **a**, ou seja, 15 m.

c) O tempo para que a pedra atinja a altura máxima, após o lançamento, é a abscissa do vértice V do arco de parábola do item **a**, ou seja, 30 décimos de segundo.

d) A raiz positiva da função, obtida no item **a**, indica o tempo em que a pedra atinge o solo após o lançamento, ou seja, 60 décimos de segundo.

6 Uma indústria produz diariamente x kL (quilolitro) de óleo de milho, com $2 \leq x \leq 7$. O custo y de produção diário, em real por quilolitro de óleo produzido, é dado pela função $y = 40x^2 - 400x + 2.600$.

a) Se a indústria fabricar 2 kL de óleo em um dia, qual será o custo de produção por quilolitro de óleo produzido nesse dia?

b) E se a indústria fabricar 7 kL de óleo em um dia?

c) Construir o gráfico da função $y = 40x^2 - 400x + 2.600$ para $2 \leq x \leq 7$.

d) Qual deve ser a produção diária para que o custo de produção por quilolitro de óleo seja mínimo?

e) Qual é o custo diário mínimo por quilolitro de óleo produzido?

Resolução

a) Para x = 2, temos:

$$y = 40 \cdot 2^2 - 400 \cdot 2 + 2.600 \Rightarrow y = 1.960$$

Logo, para 2 kL de óleo produzidos em um dia, o custo de produção por quilolitro será R$ 1.960,00.

b) Para x = 7, temos:

$$y = 40 \cdot 7^2 - 400 \cdot 7 + 2.600 \Rightarrow y = 1.760$$

Logo, para 7 kL de óleo produzidos em um dia, o custo de produção por quilolitro será R$ 1.760,00.

c) Inicialmente vamos estudar a parábola de equação $y = 40x^2 - 400x + 2.600$, desconsiderando, por enquanto, o intervalo $2 \leq x \leq 7$.

- Intersecção com o eixo das abscissas:

$$40x^2 - 400x + 2.600 = 0$$

$$\Delta = (-400)^2 - 4 \cdot 40 \cdot 2.600 = -256.000$$

Como $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo Ox.

- Intersecção com o eixo das ordenadas:

$$y = 40 \cdot 0^2 - 400 \cdot 0 + 2.600 \Rightarrow y = 2.600$$

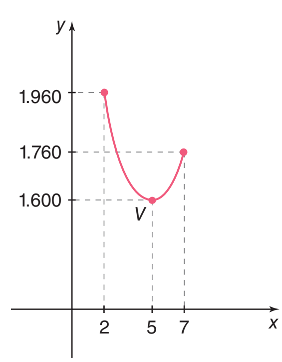
Logo, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 2.600).

- Vértice:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-400)}{2 \cdot 40} = 5 \text{ e}$$

$$x_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-256.000)}{4 \cdot 40} = 1.600$$

Finalmente, esboçamos abaixo o gráfico da parábola, considerando agora o intervalo $2 \leq x \leq 7$:



d) A produção diária para que o custo de produção por quilolitro de óleo seja mínimo é dada pela abscissa do vértice V do arco de parábola do item **c**, isto é, 5 kL.

e) O custo diário mínimo, por quilolitro de óleo produzido, é dado pela ordenada do vértice V do arco de parábola do item **c**, ou seja, R$ 1.600,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14 Determine o valor máximo ou mínimo de cada função a seguir.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $y = -x^2 + 2x + 15$

c) $y = x^2 + 2x + 3$

d) $g(x) = -x^2 + 3x - 3$

15 Determine m, com $m \in \mathbb{R}$, para que a função $f(x) = 2x^2 + x + m + 1$ tenha valor mínimo igual $\frac{3}{4}$.

16 Para que valores reais de k a função quadrática $y = kx^2 + 2x + 5$ admite valor mínimo positivo?

17 Considere todos os retângulos com 20 cm de perímetro.

a) Entre eles, qual é a área do retângulo com 8 cm de base?

b) Entre eles, indicando por x a medida da base de um retângulo qualquer, construa o gráfico da função $A(x)$ que expressa a área do retângulo, em centímetro quadrado, em função da medida x, em centímetro.

c) Qual é a área máxima que um desses retângulos pode ter?

18 (Unifap) Segundo afirmam os fisiologistas, o número N de batimentos cardíacos por minuto, para um indivíduo sadio e em repouso, varia em função da temperatura ambiente T, em grau Celsius, e é dado pela função $N(T) = (0,1)T^2 - 4T + 90$.

a) Essa função possui máximo ou mínimo?

b) A que temperatura o número de batimentos cardíacos por minuto de uma pessoa sadia e em repouso será 90?

c) Se uma pessoa sadia estiver dormindo em um quarto com refrigeração de 20 °C, qual será o número de seus batimentos cardíacos por minuto?

19 Um teste que avaliou o consumo de gasolina de uma nova motocicleta revelou que, quando a velocidade está no intervalo de 50 km/h a 100 km/h, a distância d, em quilômetro, percorrida por litro de gasolina, em função da velocidade v, em quilômetro por hora, é dada por $d(v) = -\frac{v^2}{150} + \frac{16v}{15}$. Pode-se concluir desse teste que, no intervalo considerado, a maior economia de combustível se dá à velocidade de:

a) 90 km/h

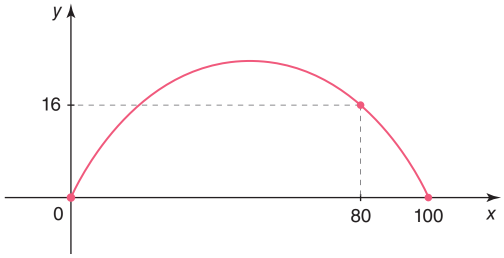
b) 70 km/h

c) 85 km/h

d) 75 km/h

e) 80 km/h

20 O gráfico mostra a trajetória de uma pedra atirada para cima, obliquamente em relação à horizontal:



Os valores nos eixos Ox e Oy indicam, respectivamente, as distâncias, em metro, percorridas pela pedra na horizontal e na vertical (altura). Sabendo que essa trajetória é parabólica, a altura máxima atingida pela pedra foi:

a) 22,5 m

b) 23 m

c) 24,8 m

d) 25 m

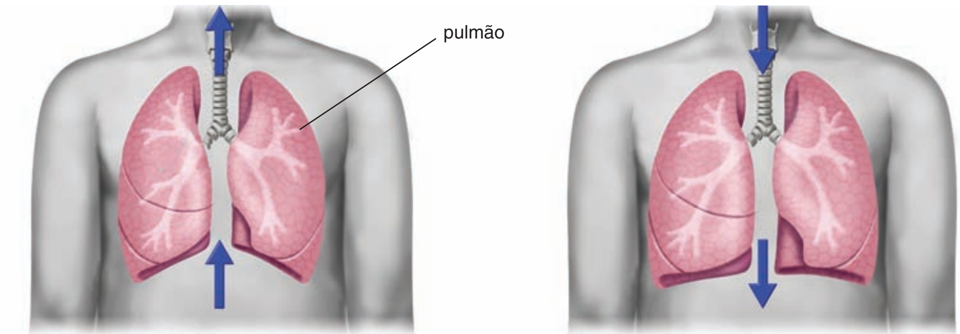
e) 25,4 m

21 Com 140 metros lineares de tela de arame, um fazendeiro construiu dois currais: um quadrado e um retangular, este de comprimento igual ao triplo da largura. Sabendo que a medida escolhida para o lado do quadrado tornou a soma das áreas dos currais a menor possível, calcule a área de cada curral.

Resolva os exercícios complementares 13 a 17 e 27 a 33.

Estudo do sinal

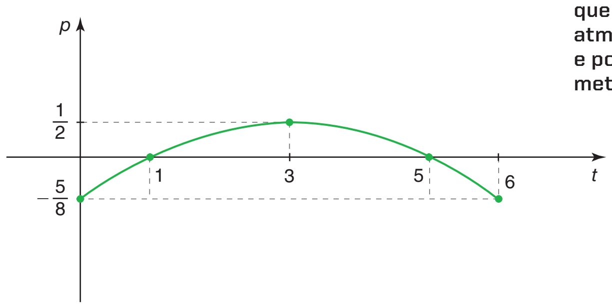
Quando a pressão interna de um recipiente fechado é maior que a externa, dizemos que a pressão interna no recipiente, em relação à externa, é **positiva**. Inversamente, quando a pressão interna é menor que a externa, dizemos que a pressão interna no recipiente é **negativa** em relação à externa. Quando a pressão interna nesse recipiente é igual à externa, dizemos que essa pressão é **nula** em relação à externa. Por exemplo, quando respiramos, a pressão interna nos pulmões, em relação à externa, é negativa na expiração do ar e positiva na inspiração.



Definimos pressão relativa no interior de um recipiente fechado como a diferença entre a pressão interna e a pressão atmosférica local, nessa ordem.

Suponha que, em uma experiência, a pressão interna de um recipiente tenha variado por injeção e exaustão de ar, e que $p(t) = -\frac{t^2}{8} + \frac{3t}{4} - \frac{5}{8}$ cujo gráfico, apresentado a seguir, expressa a pressão relativa p, interna do recipiente, em atmosfera (atm), em função do tempo t, em minuto, durante o tempo que durou a experiência.

Barômetro, instrumento que indica a pressão atmosférica, a altitude e possíveis alterações meteorológicas.



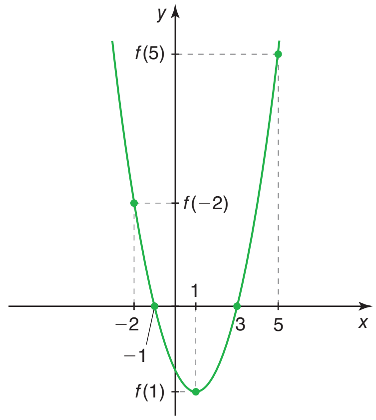
A interpretação desse gráfico permite concluir que, durante os 6 minutos que a experiência durou, a pressão relativa interna do recipiente:

- foi **positiva** para $1 < t < 5$ (isso significa que, no intervalo aberto de 1 a 5 minutos, a pressão interna do recipiente foi maior que a pressão atmosférica local);
- **anulou-se** para $t = 1$ ou $t = 5$ (isso significa que, 1 minuto depois de iniciada a experiência, a pressão interna do recipiente igualou-se à pressão atmosférica local, acontecendo o mesmo 5 minutos depois de iniciada a experiência);
- foi **negativa** para $0 \leqslant t < 1$ ou $5 < t \leqslant 6$ (isso significa que, nos intervalos descritos, a pressão interna do recipiente foi menor que a pressão atmosférica local).

Nesse exemplo, estudamos a variação de sinal de uma função polinomial do 2º grau em um domínio limitado ($0 \leqslant t \leqslant 6$). Do mesmo modo, podemos estudar a variação de sinal de funções quadráticas de domínio real, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo

Considere a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, cujo gráfico é:



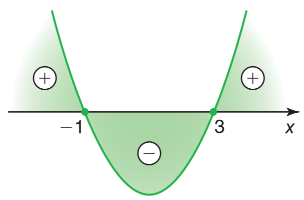
A simples leitura do gráfico permite afirmar que:

- $f(-2)$ e $f(5)$ são positivas;
- $f(1)$ é negativa;
- $f(-1)$ e $f(3)$ são iguais a zero, pois -1 e 3 são as raízes da função.

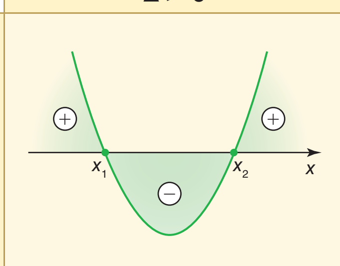
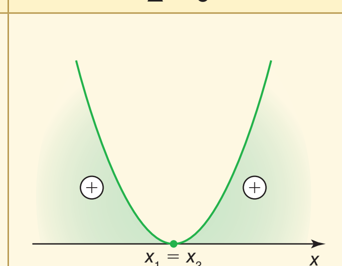
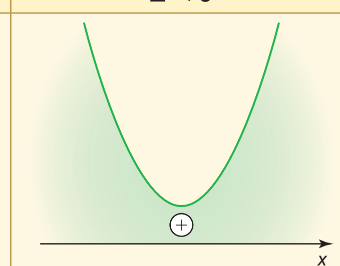
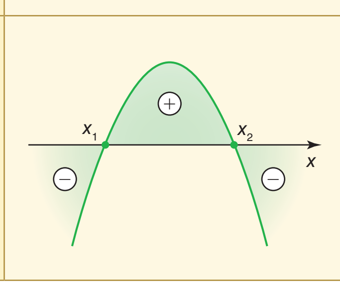
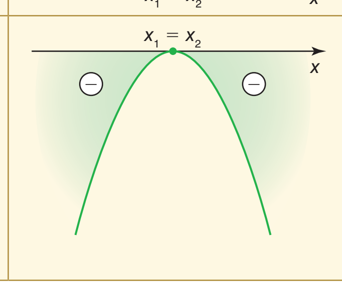
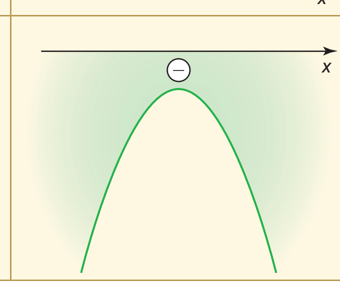
Estudando o sinal de f para todo o domínio real, temos:

- se $x = -1$ ou $x = 3$, então $f(x) = 0$;
- se $x < -1$ ou $x > 3$, então $f(x) > 0$;
- se $-1 < x < 3$, então $f(x) < 0$.

Podemos representar a variação de sinal da função f, resumidamente, em um esquema como este:



De maneira geral, a discussão da variação de sinal de uma função quadrática qualquer, $f(x) = ax^2 + bx + c$, recai sempre em um dos casos abaixo:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Nota:

x_1 e x_2 são as raízes, se existirem, da função f.

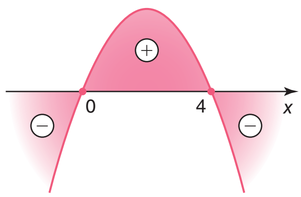
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7 Discutir a variação de sinal da função:
$f(x) = -x^2 + 4x$

Resolução

Vamos representar a variação de sinal de f em um esquema.

- Raízes de f:
  $-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $-x + 4 = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $x = 4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 0 e 4.
- Concavidade:
  Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a parábola tem concavidade voltada para baixo.
  Assim, esquematizamos:



Logo:

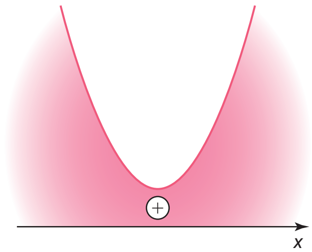
- se $x = 0$ ou $x = 4$, então $f(x) = 0$;
- se $0 < x < 4$, então $f(x) > 0$;
- se $x < 0$ ou $x > 4$, então $f(x) < 0$.

8 Discutir a variação de sinal da função:
$f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

Resolução

Vamos representar a variação de sinal de f em um esquema.

- Raízes de f:
  $2x^2 + 3x + 4 = 0$
  $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23$
  Como $\Delta < 0$, a equação não tem raiz real, portanto a parábola não intercepta o eixo Ox.
- Concavidade:
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola tem concavidade voltada para cima.
  Assim, esquematizamos:



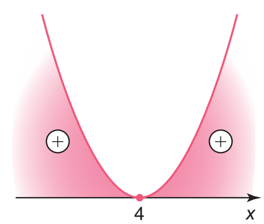
Logo, $f(x) > 0, \forall x$, com $x \in \mathbb{R}$.

9 Discutir a variação de sinal da função:
$f(x) = x^2 - 8x + 16$

Resolução

Vamos representar a variação de sinal de f em um esquema.

- Raízes de f:
  $x^2 - 8x + 16 = 0$
  $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$
  $\therefore x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8 \pm 0}{2}$
  $\therefore x = 4$
  Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa 4.
- Concavidade:
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola tem concavidade voltada para cima.



Pelo esquema acima, temos:

- se $x = 4$, então $f(x) = 0$;
- se $x \neq 4$, então $f(x) > 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 Discuta o sinal de cada uma das funções:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

b) $y = -x^2 - 2x + 3$

c) $g(x) = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 3$

d) $h(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x - 1$

e) $y = 3x^2$

23 Para que valores reais de m a função $f(x) = 3x^2 + 2x + m - 1$ é positiva para qualquer x, com $x \in \mathbb{R}$?

Resolva os exercícios complementares 34 e 35.

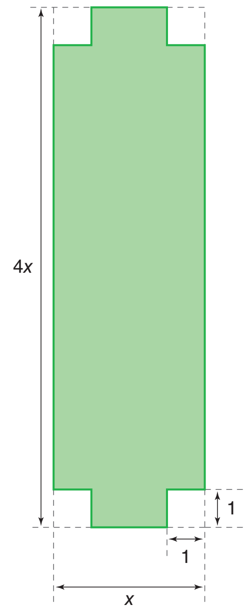
Inequações polinomiais do 2º grau

Objetivo

- **Resolver** inequações que envolvam funções quadráticas.

Observe a situação.

De uma folha retangular de cartolina, com x dm de largura ($x > 2$) e comprimento igual ao quádruplo da largura, foram retirados quatro quadrados de lado 1 dm, restando apenas a parte representada abaixo.



- Quais são os possíveis valores de x para que a área dessa parte restante da cartolina seja menor que 32 dm^2?

Note que a largura e o comprimento do retângulo original, em decímetro, eram x e $4x$, respectivamente; portanto, a área do retângulo, em decímetro quadrado, era $4x^2$. Como foram retirados desse retângulo quatro quadrados de área 1 dm^2, a área $A(x)$ remanescente, em decímetro quadrado, é dada por: $A(x) = 4x^2 - 4$.

Queremos determinar os possíveis valores de x para que a área dessa parte restante seja menor que 32 dm^2, ou seja, devemos obter os valores de x para $A(x) < 32$:

$$4x^2 - 4 < 32 \Rightarrow 4x^2 - 36 < 0$$

A sentença $4x^2 - 36 < 0$ representa uma **inequação polinomial do 2º grau**.

Chama-se **inequação polinomial do 2º grau** toda inequação que pode ser representada por uma das formas abaixo, em que $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$:

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \geqslant 0$
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0$
- $ax^2 + bx + c \neq 0$

A resolução de uma inequação polinomial do 2º grau é fundamentada no estudo da variação de sinal de uma função quadrática, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

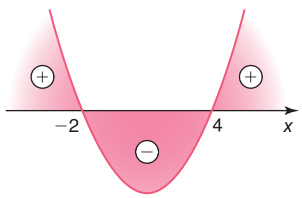
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 - 2x - 8 > 0$.

Resolução

Para resolver essa inequação, devemos estudar o sinal da função $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

- Raízes de f:
  $x^2 - 2x - 8 = 0$
  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36$
  $\therefore x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm 6}{2}$
  Logo, $x = 4$ ou $x = -2$
  Portanto, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 4 e -2.
- Concavidade:
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola tem concavidade voltada para cima.
  Assim, esquematizamos a variação de sinal da função f:



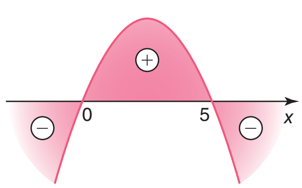
O conjunto solução S da inequação proposta é formado por todos os valores reais de x para os quais $f(x) > 0$, isto é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$

11 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $-x^2 + 5x \geqslant 0$.

Resolução

Iniciamos a resolução com o estudo do sinal da função $f(x) = -x^2 + 5x$.

- Raízes de f:
  $-x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(-x + 5) = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $-x + 5 = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $x = 5$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 0 e 5.
- Concavidade:
  Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a parábola tem concavidade voltada para baixo.
  Assim, esquematizamos a variação de sinal da função f:



O conjunto solução S da inequação proposta é formado por todos os valores reais de x para os quais $f(x) \geqslant 0$, isto é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

12 Retomar a situação da folha retangular de cartolina, com x dm de largura ($x > 2$) e comprimento igual ao quádruplo da largura, da qual foram retirados quatro quadrados de lado 1 dm, e determinar os possíveis valores de x para que a área da parte restante da cartolina seja menor que 32 dm^2.

Resolução

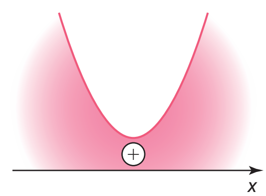
Já vimos que, para determinar os possíveis valores de x para que a área da parte restante seja menor que 32 dm^2, devemos resolver a inequação $4x^2 - 36 < 0$. As soluções dessa inequação são todos os números reais x tais que $-3 < x < 3$. Porém, no contexto do problema, a variável x deve obedecer à condição $x > 2$; concluímos, então, que a área da figura será menor que 32 dm^2 para qualquer número real x tal que $2 < x < 3$.

13 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 + x + 2 < 0$.

Resolução

Estudando a variação de sinal da função $f(x) = x^2 + x + 2$, temos:

- Raízes de f:
  $x^2 + x + 2 = 0$
  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$
  Como $\Delta < 0$, a equação não tem raiz real, portanto, a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.
- Concavidade:
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola tem concavidade voltada para cima.
  Assim, esquematizamos a variação de sinal da função f:



O conjunto solução S da inequação proposta é formado pelos valores reais de x para os quais $f(x) < 0$. Observando que a função f é positiva para qualquer x real, concluímos que $S = \varnothing$.

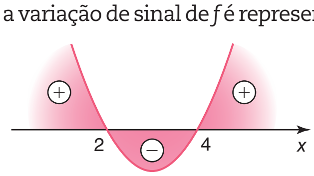
14 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação-quociente:

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{3x - 6} \leqslant 0$$

Resolução

Condição de existência: $3x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e $g(x) = 3x - 6$, temos:

- Raízes de f:
  $x^2 - 6x + 8 = 0$
  $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$
  $\therefore x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm 2}{2}$
  $\therefore x = 4$ ou $x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 4 e 2.
- Concavidade:
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola tem concavidade voltada para cima.
  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

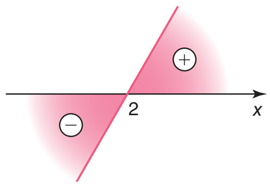


- Raiz de g:

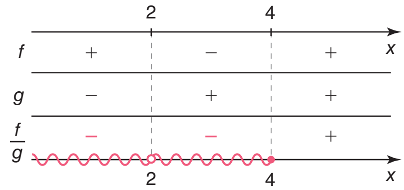
$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.

Como o coeficiente de x é positivo, a função g é crescente, portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:



Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como queremos que esse quociente seja negativo ou nulo, ou seja, $\frac{x^2 - 6x + 8}{3x - 6} \leqslant 0$, e lembrando que a condição para que esse quociente exista é $x \neq 2$, temos como conjunto solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4 \text{ e } x \neq 2\}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $x^2 + 3x - 10 > 0$

b) $-2x^2 + 7x - 3 \geqslant 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$

d) $\frac{3x^2}{5} - \frac{3x}{2} \leqslant \frac{2x}{5} - 1$

e) $\frac{x^2}{3} + x > \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{5}{6}$

f) $(x^2 - 9)(x^2 - 7x + 10) < 0$

g) $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1) \leqslant 0$

h) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 8} \leqslant 0$

i) $\frac{(x - 3)(x^2 - 9)}{x^2 - 2x - 3} > 0$

25 O atual saldo bancário de um cliente é R$ 2.000,00. Iniciando a contagem do tempo a partir deste instante (associamos o tempo zero a este instante), a cada dia, num período de 30 dias, a conta desse cliente receberá, em real, um crédito de $100t$ e um débito de $10t^2$, sendo que t representa o tempo em dias.

a) Dê o saldo S desse cliente em função do tempo t nesse período.

b) Daqui a quantos dias o saldo desse cliente atingirá o maior valor nesse período?

c) Para que valores de t o saldo S é positivo?

d) Considerando a ordem crescente, qual é o primeiro valor de t em que $S < 0$?

26 (Mackenzie-SP) Em $\mathbb{R}$, o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x - 1 \leqslant 3x - 3 \\ x^2 - 4 \geqslant 0 \end{cases}$ é:

a) $[2, +\infty[$

b) $]-\infty, -2]$

c) $[1, 2]$

d) $[-2, 0]$

e) $[0, 1]$

27 Obtenha os possíveis valores reais de m para que o conjunto solução da inequação $2x^2 + 2x + m + 3 > 0$, no universo $\mathbb{R}$, seja o próprio conjunto $\mathbb{R}$.

28 Determine o domínio de cada função.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$

29 Determine o domínio da função: $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{4x - 12}}$

30 (Ufam) O conjunto das soluções, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, da inequação $\frac{x}{x + 1} > x$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

c) vazio

d) $\mathbb{R}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Resolva os exercícios complementares 18 a 23 e 36.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Esboce o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem das funções seguintes.

a) $y = 8x^2 - 2x - 1$

b) $h(x) = 2x^2 - 4x + 4$

c) $y = -x^2 - 10x - 25$

d) $y = -2x^2 + x$

e) $y = 2x^2 + 6x$

f) $t(x) = -3x^2 + x - 1$

g) $y = -x^2 + 5$

h) $y = -x^2 - 4$

i) $y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} - 2$

j) $u(x) = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{5x}{2}$

2 (Fuvest-SP) O gráfico $f(x) = x^2 - bx + c$, em que b e c são constantes reais, passa pelos pontos (0, 0) e (1, 2).

Então $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ vale:

a) $-\dfrac{2}{9}$

b) $\dfrac{2}{9}$

c) $-\dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) 4

3 (Vunesp) O gráfico da função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, em que $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Então, o valor de y que essa função associa a $x = 2$ é:

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

4 Para que valores reais de p a função $f(x) = px^2 - 2x + 5$ tem dois pontos distintos em comum com o eixo das abscissas?

5 (UFT-TO) Seja $f:]-\infty, 2] \rightarrow [-1, \infty[$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$, então a função inversa f^{-1} é:

a) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{2}$

c) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1}$

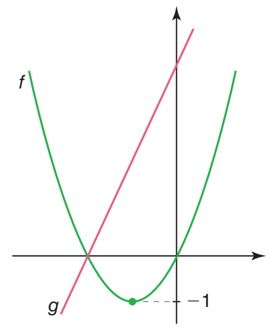
d) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x + 1}$

6 (UFRN)

a) Esboce, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções reais de variável real $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 8x + 12$.

b) Determine as coordenadas (x, y) de todos os pontos em que os gráficos das funções dadas se interceptam.

7 Os gráficos das funções $f(x) = ax^2 + bx$ e $g(x) = 2x + 2$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, são:

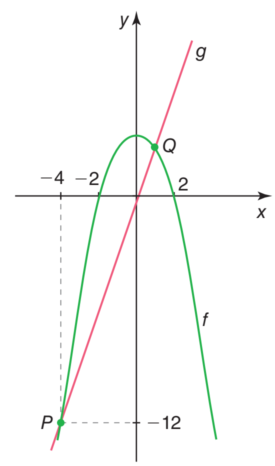


Esses gráficos têm dois pontos, P e Q, em comum, sendo que P pertence ao eixo das abscissas.

a) Calcule os valores das constantes reais a e b.

b) Determine os pontos P e Q.

8 (PUC-MG) No gráfico abaixo, estão representadas a função quadrática f e a função linear g.



O ponto Q é dado por:

a) $Q\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$

b) $Q(1, 3)$

c) $Q\left(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$

d) $Q\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{24}{5}\right)$

e) $Q\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$

9 Represente no mesmo plano cartesiano as parábolas de equações $y = 2x^2 + x - 1$ e $y = x^2 - 5x + 6$, e determine as coordenadas dos pontos comuns a elas.

10 (Fuvest-SP) Para cada número real m, considere a função quadrática $f(x) = x^2 + mx + 2$.
Nessas condições:

a) Determine, em função de m, as coordenadas do vértice da parábola de equação $y = f(x)$.

b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais a imagem de f contém o conjunto $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 1\}$.

c) Determine o valor de m para o qual a imagem de f é igual ao conjunto $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 1\}$ e, além disso, f é crescente no conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$

d) Encontre, para a função determinada pelo valor de m do item **c** e para cada $y \geqslant 2$, o único valor de $x \geqslant 0$ tal que $f(x) = y$.

11 Esboce o gráfico das funções:

a) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -x^2 + 6x - 8, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

b) $t(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 \\ x^2 - 8x + 19, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

12 (UFV-MG) Esboce o gráfico da função real f definida por:

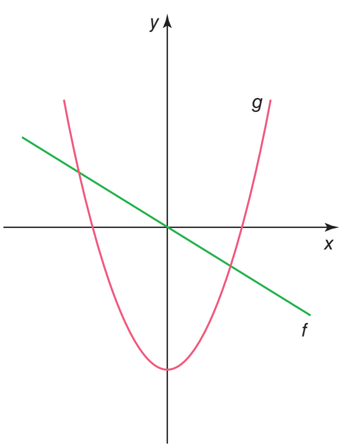
$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2(x + 1), \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

13 Determine o valor máximo (ou mínimo) e a abscissa do ponto máximo (ou do mínimo) de cada uma das funções a seguir.

a) $y = 4x^2 + 2x - 2$
b) $y = 3x^2 - 12x$
c) $y = -x^2 - 2x + 3$
d) $s(x) = x^2 - 8x + 16$
e) $y = -4x^2 + 2x - \dfrac{1}{4}$
f) $y = 3x^2 - 1$

14 Para que valores reais de m a função quadrática $y = (m - 2)x^2 + x + 4$ admite valor máximo positivo?

15 (UFJF-MG) A reta e a parábola representadas abaixo são os gráficos das funções f e g, respectivamente.



Sobre a função $h = f + g$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) + g(x)$, é correto afirmar que:

a) possui ponto de máximo.
b) possui ponto de mínimo.
c) é uma função crescente.
d) é uma função decrescente.
e) é uma função constante.

16 (FGV) Encontre a área do triângulo ABC, cujos vértices obedecem às seguintes propriedades:

1. estão sobre a parábola $y = 2x^2 - 13x + 18$.
2. A e B estão sobre o eixo das abscissas.
3. a abscissa do vértice C é o ponto de mínimo da parábola.
4. as medidas dos lados estão em metros.

17 (UFJF-MG) Considere um retângulo de altura h e de base b. Constrói-se um novo retângulo, cuja nova base é menor que a antiga x unidades, e a nova altura é maior que a antiga x unidades. Qual é o valor de x para que esse novo retângulo tenha área máxima?

a) $\dfrac{b \cdot h}{2}$
b) $\dfrac{b - h}{2}$
c) $\dfrac{b + h}{2}$
d) $\dfrac{h - b}{2}$
e) $\dfrac{b^2 - h^2}{2}$

18 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações a seguir.

a) $(x - 1)(x^2 - 2) > 0$
b) $(x + 2)(x^2 - 4)(x^2 - x - 2) > 0$
c) $(2x - 1)(3x - 1)(x^2 + x - 2) \leqslant 0$

19 Considerando o universo $\mathbb{R}$, resolva as inequações:

a) $\dfrac{(x^2 - 1)(2x - 1)}{-x^2 - 9} \geqslant 0$
b) $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{-x^2 - 2} < 0$
c) $\dfrac{x^2 + x + 1}{-x^2 + 2x - 2} > 0$
d) $\dfrac{2x}{x^2 - 1} \geqslant \dfrac{1}{x - 1}$
e) $\dfrac{x}{x + 1} > \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{x - 1}$
f) $\dfrac{1}{x - 1} \geqslant \dfrac{1}{x^2}$

20 Determine o domínio das funções:

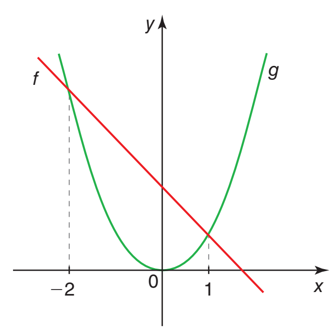
a) $g(x) = \sqrt{\dfrac{6 - 3x}{x^2 - 3x + 2}}$
b) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 2}$

21 (UFV-MG) Sejam as funções reais f e g dadas por $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = 4 - x^4$. Resolva as inequações:

a) $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$
b) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$
c) $f(x) - g(x) < -8$

22 (UEM-PR) Considere uma função real dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x + 3}}$. Existe($m$) valor(es) real(is) para x tal(is) que $f(x)$ seja maior que 1? Em caso afirmativo, determine o(s) possível(is) valor(es) de x para que isso ocorra. Caso contrário, justifique sua resposta.

23 (Uneb-BA) A função quadrática f e a função afim g têm os gráficos:



Da análise dos gráficos, pode-se concluir que o conjunto solução da inequação $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$ é:

a) $]-2, 1[- \{0\}$
b) $]-1, 2[- \{0\}$
c) $\mathbb{R} - [-1, 1]$
d) $\mathbb{R} - [-1, 2]$
e) $\mathbb{R} - [-2, 1]$

Exercícios contextualizados

24 (Enem) Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.
Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a) $V = 10.000 + 50x - x^2$
b) $V = 10.000 + 50x + x^2$
c) $V = 15.000 - 50x - x^2$
d) $V = 15.000 + 50x - x^2$
e) $V = 15.000 - 50x + x^2$

25 (Unicamp-SP) Uma piscina, cuja capacidade é de 120 m^3, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina, t horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a(b - t)^2$ para $0 \leqslant t \leqslant 20$ e $V(t) = 0$ para $t \geqslant 20$.

a) Calcule as constantes a e b.
b) Faça o gráfico da função $V(t)$ para $t \in [0, 30]$.

26 (UnB-DF) A tabela abaixo apresenta informações relativas às pizzas de uma pizzaria.

Tamanho	Diâmetro (cm)	Preço (R$)
pequena	20	6,00
média	30	11,00
grande	40	18,00

Considerando que, nessa pizzaria, o preço P, em real, de uma pizza é calculado pela soma de um custo fixo c com um termo que depende do raio r, em centímetro, da pizza segundo a função $P(r) = c + br + ar^2$, faça o que se pede.

a) Calcule o valor de b.
b) Calcule o valor de c.
c) Determine o preço, em real, de uma pizza gigante, de 50 cm de diâmetro.

27 (UFPE) Suponha que o consumo de um carro, para percorrer 100 km com velocidade de x km/h, seja dado por $C(x) = 0{,}006x^2 - 0{,}6x + 25$. Para qual velocidade esse consumo é mínimo?

a) 46 km/h
b) 47 km/h
c) 48 km/h
d) 49 km/h
e) 50 km/h

28 (FGV) Uma loja de departamentos compra cartuchos para uma determinada impressora a jato de tinta a R$ 8,00 a unidade e prevê que, se cada cartucho for vendido a x reais serão vendidos $200 - 2x$ cartuchos por mês.

a) Encontre uma fórmula que forneça lucro mensal em função do preço de venda x de cada cartucho.
b) Estabeleça matematicamente o intervalo dos valores de x para os quais existe efetivamente lucro.
c) Para que o lucro seja máximo, qual deve ser o preço de venda x de cada cartucho?
d) Qual será o lucro máximo e quantos cartuchos serão vendidos mensalmente ao preço que maximiza esse lucro?

29 (Enem) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de prorrogação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se: $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato. Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11.000
b) 22.000
c) 33.000
d) 38.000
e) 44.000

30 (FGV) Um vidraceiro tem um pedaço de espelho, na forma de um triângulo retângulo, cujos lados medem 60 cm, 80 cm e 1 m, e quer recortar um espelho retangular cujo tamanho seja o maior possível. Para ganhar tempo, ele quer que dois lados do retângulo estejam sobre os lados dos triângulos. Determine as medidas dos lados do retângulo e a sua área.

31 O administrador de uma rede de cinemas observou que, quando o preço do ingresso é R$ 8,00, o número de espectadores por sessão é 120; e que cada R$ 0,20 de aumento no ingresso provoca a diminuição de 2 espectadores por sessão. Essas observações levaram o administrador a estabelecer o preço do ingresso de modo que a receita arrecadada por sessão seja maximizada. O preço estabelecido para o ingresso foi:

a) R$ 9,20
b) R$ 9,00
c) R$ 9,80
d) R$ 10,00
e) R$ 10,20

32 (UFMG) A seção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10 m de largura na base e altura máxima de 6 m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, são reservados 1,5 m para passagem de pedestre, e o restante é dividido em duas pistas para veículos.
As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel, caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos. Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.

33 (Uespi) Um comerciante comprou a unidade de certo artigo por R$ 20,00, e calculou que, se o comercializasse por x reais cada, venderia por dia $(60 - x)$ unidades desses artigos. Considerando $0 < x < 60$ e que o lucro é a diferença entre o preço de venda e o de compra, nessa ordem, nas condições apresentadas, podemos concluir que, para maximizar seu lucro, o comerciante terá de vender:

a) 20 artigos, cada um ao custo de R$ 40,00.
b) 25 artigos, cada um ao custo de R$ 20,00.
c) 30 artigos, cada um ao custo de R$ 30,00.
d) 35 artigos, cada um ao custo de R$ 35,00.
e) 40 artigos, cada um ao custo de R$ 30,00.

34 Quando a temperatura de um recinto hospitalar atinge 6 °C, uma máquina é ligada automaticamente diminuindo a temperatura segundo a função $f(t) = 2t^2 - 8t + 6$, em que $f(t)$ representa a temperatura em grau Celsius e t representa o tempo de funcionamento da máquina em hora. Quando a temperatura atinge o valor mínimo de f, a máquina é desligada automaticamente e, a partir de então, a temperatura aumenta segundo a mesma função f, até atingir 6 °C, quando a máquina é religada, e assim por diante. Sabendo que, à meia-noite de cada dia, a máquina é ligada automaticamente:

a) Construa o gráfico da função f, considerando o intervalo de tempo decorrido desde a meia-noite até o primeiro instante da madrugada em que a máquina é desligada.

b) No intervalo de tempo considerado no item **a**, durante quanto tempo a temperatura do recinto esteve positiva?

c) No intervalo de tempo considerado no item **a**, durante quanto tempo a temperatura do recinto esteve negativa?

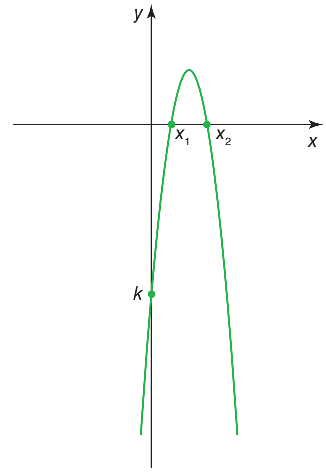
d) Qual é a menor temperatura atingida no recinto?

e) Durante quanto tempo por dia a máquina permanece ligada?

35 O custo C da construção de um edifício de 31 apartamentos foi de 600 mil dólares. O construtor espera que a receita R, em milhares de dólar, apurada pela venda dos apartamentos, cresça de acordo com a função $R = -x^2 + 62x$, em que x é o número de apartamentos vendidos. A função lucro L é a diferença entre a receita R e o custo C da obra, nessa ordem, isto é:

$$L = -x^2 + 62x - 600$$

a) O gráfico da função L é formado por pontos isolados da parábola a seguir (não é considerada toda a parábola, porque a variável x assume apenas valores naturais, com $0 \leqslant x \leqslant 31$). Determine as abscissas x_1 e x_2 e a ordenada k dos pontos comuns ao gráfico e aos eixos coordenados.



b) De acordo com o gráfico do item **a**, qual é o menor número de apartamentos que deve ser vendido para que a função lucro passe a ser positiva?

c) Depois de todos os apartamentos vendidos, qual será a porcentagem de lucro sobre o custo da obra?

36 Um pequeno agricultor estima que, para o próximo ano, as produções de arroz e soja de seu sítio totalizem x toneladas de grãos. A previsão é de que o custo de produção da tonelada de arroz seja $202 + \frac{120}{x + 10}$ reais e que o da tonelada de soja seja de $204 + \frac{40}{x}$ reais. Determine a quantidade x de toneladas de grãos que deve ser produzida nesse sítio no próximo ano para que o custo de produção da tonelada de soja seja menor que o custo de produção da tonelada de arroz.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Esboce o gráfico das funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \frac{1}{x - 2}$

c) $h(x) = \frac{1 + 2x}{x}$

d) $t(x) = \frac{x}{x + 2}$

e) $s(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$

2 Dada a função f: $[-4, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$ definida por $f(x) = 2 + \sqrt{4 + x}$:

a) construa o gráfico de $f^{-1}(x)$;

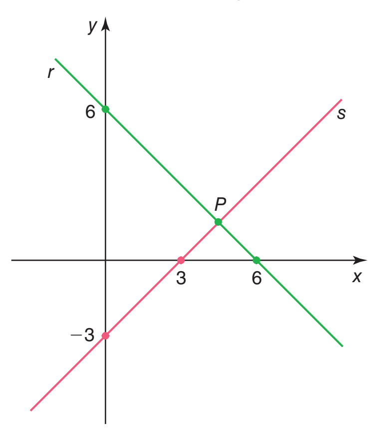
b) construa o gráfico de $f(x)$.

3 Uma função bijetora f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f(x + 3) = 2x + 1$.

a) Determine $f(4)$.

b) Determine $f(x)$.

4 Determine as coordenadas do ponto P comum às retas r e s, representadas a seguir.



Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Uma agência de turismo fretou um ônibus de 40 poltronas para uma viagem. Cada passageiro vai pagar R$ 20,00 mais uma taxa de R$ 4,00 por poltrona que não for ocupada. Qual é a receita máxima, em real, que a agência pode apurar com essa viagem?

Resolução

Seja x o número de passageiros do ônibus.
Assim, (40 − x) é o número de poltronas não ocupadas.
Então, o preço que cada passageiro vai pagar em real é:

$$20 + 4 \cdot (40 - x)$$

Logo, a receita y (em real) apurada pela empresa é:

$$y = x \cdot [20 + 4 \cdot (40 - x)]$$
$$y = x \cdot [20 + 160 - 4x]$$
$$y = -4x^2 + 180x$$

A receita máxima é o valor de y do vértice (y_v):

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$
$$y_v = \frac{-(180^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0)}{4 \cdot (-4)}$$
$$y_v = \frac{-32.400}{-16}$$
$$y_v = 2.025$$

ERRADO!

Logo, a receita máxima que pode ser apurada é R$ 2.025,00.

Comentário

Essa resposta é incorreta, pois o valor x_M para o qual se obtém o valor máximo y_M da função $y = -4x^2 + 180x$ é dado por:

$$x_M = -\frac{b}{2a}$$

ou seja,

$$x_M = -\frac{180}{2 \cdot (-4)} = 22{,}5$$

Esse valor de *x* não convém para o exercício, pois a variável *x* representa um número de pessoas, portanto, deve ser um número natural. Logo, a receita máxima apurada não pode ser R$ 2.025,00.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

CAPÍTULO 1 Conjuntos

Para pensar

1 1.250.000.000 anos

2 ≈41.666.666,67 anos

3 ≈18 dias

Exercícios propostos

1 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$
$B = \{0, 3, 5, 7, 9, 12\}$
$C = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$

2 **a)** $\{-3, 3\}$
b) $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
c) $\{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$
d) $\{0\}$
e) $\varnothing$
f) $\varnothing$
g) $\{57, 58, 59, ..., 116, 117, 118\}$
h) $\{..., -4, -3, -2, -1\}$
i) $\{70, 71, 72, 73, 74, ...\}$

3 **a)** finito **d)** infinito
b) infinito **e)** finito
c) finito

4 $A = \{x \mid x$ é um número ímpar maior que $1\}$

5 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

6 **a)** V **d)** F **g)** V
b) F **e)** V **h)** F
c) V **f)** V

DICA: Se x é um elemento do conjunto A, então a relação entre ambos é a de pertinência, isto é, $x \in A$. Se B é um subconjunto de A, então a relação entre ambos é a de inclusão, isto é, $B \subset A$ ou $A \supset B$.

7 **a)** $\{\varnothing, \{5\}, \{8\}, \{5, 8\}\}$
b) $\{\varnothing, \{6\}\}$
c) $\{\varnothing\}$

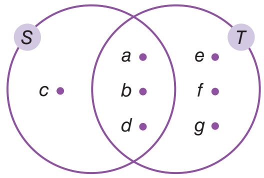
8 32 subconjuntos

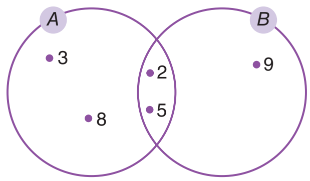
9 $x = 3$ e $y = 1$

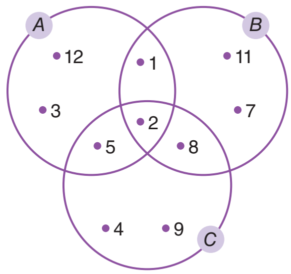
10 **a)** F **d)** F
b) F **e)** V
c) V

11 c

12 **a)** $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b) $\{0, 1, 2\}$
c) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
d) $\varnothing$
e) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
f) $\{0, 1, 2\}$
g) $\varnothing$
h) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
i) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

13


14


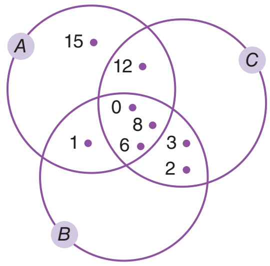
15


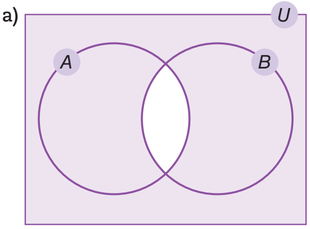
16 **a)** {Igor, Carla, Tiago, Leandro, Janice}
b) {Igor, Carla, Tiago}
c) $\varnothing$

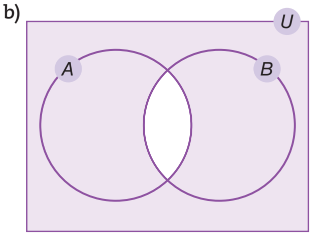
17 b

18 **a)** V **d)** V **g)** F
b) V **e)** F **h)** F
c) V **f)** V

19 **a)** $\{1, 2, 9\}$
b) $\{5, 7\}$
c) $\{5, 7\}$
d) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
e) $\{1, 2, 9\}$
f) $\{1, 2, 3, 9\}$
g) não existe
h) $\varnothing$
i) $F = \{1, 2, 3, 8, 6, 4, 9\}$

20


21 **a)**


b)


22 **a)** $A - B = \{PR, SC, RS\}$
b) $B - A = \{SP, RJ, MG, ES\}$
c) Não existem esses conjuntos, pois $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

23 **a)** $\overline{A} = \{x \in U \mid x$ é mulher$\}$
b) $\overline{B} = \{y \in U \mid y$ tem menos de 16 anos de idade$\}$
c) $\overline{C} = \{z \in U \mid z$ tem mais de 20 anos de idade$\}$
d) $\overline{B \cap C} = \{p \in U \mid p$ tem menos de 16 anos ou mais de 20 anos de idade$\}$
e) $\overline{B} \cup \overline{C}$ $\{q \in U \mid q$ tem menos de 16 anos ou mais de 20 anos de idade$\}$

24 988 **25** 12 **26** 77

27 24%
DICA: Como o percentual é um valor relativo, você pode supor que o número de funcionários equivale a um índice 100, e raciocinar com o número fictício de 100 funcionários.

28 8

29 **a)** F **e)** V **h)** V
b) V **f)** F **i)** F
c) V **g)** F **j)** V
d) V

30 **a)** $\frac{38}{9}$ **b)** $\frac{559}{99}$

31 **a)** 4
b) 4
c) Não existe.
DICA: No item **c**, lembre-se de que entre dois números racionais distintos quaisquer existem infinitos outros números racionais, e entre dois números reais distintos quaisquer existem infinitos outros números reais.

32 **a)** irracional **f)** irracional
b) racional **g)** racional
c) racional **h)** irracional
d) irracional **i)** irracional
e) irracional **j)** irracional

33 $a = 0$; $b = -9$; $c = \frac{5}{6}$; $d = \sqrt{7}$

34 resposta possível: $\sqrt{28}$ e $\sqrt{35}$

DICA: Sendo $\{n, a\} \subset \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, se $\sqrt[n]{a}$ não é inteiro, então é irracional.

35 resposta possível:

$\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$ e $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

36 resposta possível: 1,5 e 1,6

37 a) F; b) V; c) F; d) V; e) V; f) F; g) F; h) F; i) V; j) V

38 $\sqrt{5}$ u

39 a) 10; b) 8; c) $\frac{17}{4}$; d) 7; e) $\frac{39}{10}$; f) $\frac{m + n}{2}$

40
a)]9, 12]
b) [4, 19[
c)]14, 19[
d) $]-\infty, 9]$
e) $]-\infty, 0] \cup]8, 14]$
f)]0, 19[
g) $\varnothing$
h) $[4, 8] \cup]9,12]$

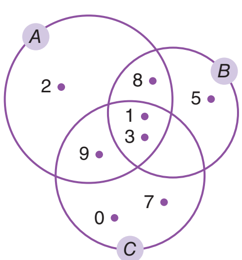
DICA: Pode-se aplicar a propriedade distributiva da intersecção em relação à união de conjuntos, isto é:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

41 e

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1



2 a) F; b) V; c) V; d) F; e) V; f) F; g) F

3 a) V; b) V; c) F; d) V; e) V; f) F

4 256 subconjuntos

5 7 elementos

DICA: Decomponha em fatores primos o número 128.

6 a) V; b) V; c) F; d) F; e) V; f) F; g) V; h) V; i) V; j) F; k) V; l) V; m) V; n) F

7 12

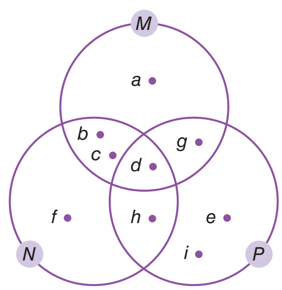
8 d

9 e

DICA: Aplique a propriedade distributiva da intersecção em relação à união de conjuntos.

10 c

11



12 e

13 d

DICA: Represente A e B em um diagrama de Venn.

14 771

15 c

16 a) $\frac{293}{90}$ b) $\frac{637}{300}$

17 São os números inteiros não positivos.

18 3 números

19 d

20 e

21 e

DICA: Se o lado de um quadrado tem medida a, então a diagonal desse quadrado mede $a\sqrt{2}$, o que é facilmente demonstrável pelo teorema de Pitágoras.

22 a) V; b) F; c) V; d) F; e) V

23 a

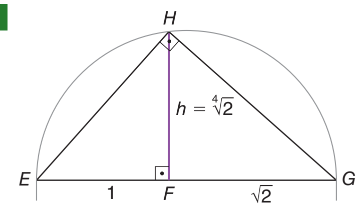
24 c

25 $[-3, 8[$

DICA: Aplique a propriedade distributiva da união em relação à intersecção de conjuntos, isto é:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

26 c **27** c **28** a

29



DICA: Primeiro, construa um segmento de medida $\sqrt{2}$. Depois, construa a figura acima, concluindo que:
$h^2 = 1 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow h = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

• **Exercícios contextualizados**

30 e **31** e **32** b

33 a) 2.000 b) 700

34 3

35 a) 148 b) 332

36 a) 78 b) 87 c) 165

37 23 **38** c

39 66 dm e 68 dm

40
a) resposta possível: $x = 5$
b) resposta possível: $x = 1,5$
c) Se x é racional, n é racional, pois o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

41
a) resposta possível: $x = 8$
b) resposta possível: $x = 3,2$
c) resposta possível: $x = 8\sqrt{2}$
d) Sim, pois o produto de dois números racionais é um número racional.
e) Sim, pois o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

42 a

43 I) d II) b

Análise da resolução

a) 6 alunos
b) 38 alunos

CAPÍTULO 2 Introdução ao estudo das funções

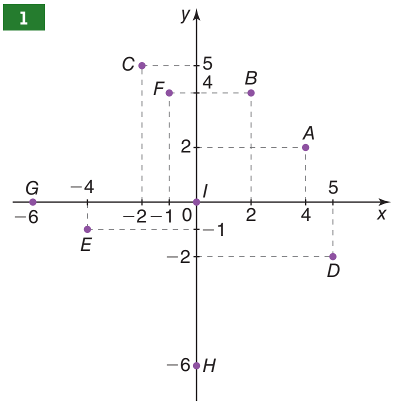
Para pensar

1 resposta pessoal

2 $y = 15x$

Exercícios propostos

1



2 $p = 7$

3 $k = 3$ ou $k = -3$

4 $r > 2$

5 $-2 < m < \frac{8}{5}$

6 $a = \frac{32}{5}$; $b = \frac{23}{5}$

7 500 m

8 I. a) $B(-30°, -60°)$
b) $D(0°, +30°)$
c) $C(+30°, -90°)$
d) $F(+30°, +90°)$
e) $A(+60°, +30°)$
f) $E(-30°, +120°)$

II. Ásia

DICA: Se necessário, consulte um atlas para identificar as regiões.

9 $y = \frac{9\sqrt{3} - 3x}{2}$

DICA: Obtenha a medida do segmento $\overline{EB}$, em função de x, e lembre-se de que a área S do triângulo BDE é dada por:

$$S = \frac{EB \cdot AD}{2}$$

10 a)

Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R$)
20	240,00
32	384,00
44	528,00
46	559,20
50	621,60

b) Sim, pois a cada número de horas semanais trabalhadas associa-se um único valor ganho.

c) $y = 12x, 0 \leqslant x \leqslant 44$

d) $y = 528 + 15{,}60 \cdot (x - 44)$, com $x > 44$

11 a) R$ 14.580,00
b) $(0{,}9)^x \cdot 20.000$
c) $y = 20.000 \cdot (0{,}9)^x$
d) Sim, pois a cada tempo de uso (em ano) associa-se um único valor de mercado do automóvel.

12 a) $y = 26x$
b) Sim, pois a cada tempo decorrido associa-se um único volume de água despejada.

13 a) 1.001, 1.002, 1.003, ..., 1.050.
b) Não, pois a cada número de assento está associado mais de um número de ônibus.

14 a)

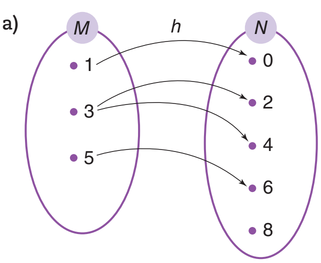
Temperatura (°C)	Comprimento da coluna (mm)
−15	16
−10	24
−5	32
0	40
5	48
10	56
15	64

b) Sim, pois a cada temperatura associa-se um único comprimento da coluna de mercúrio.

c) $y = 40 + \frac{8x}{5}$

15 a) Não é função.
b) É função.
c) Não é função.
d) É função.

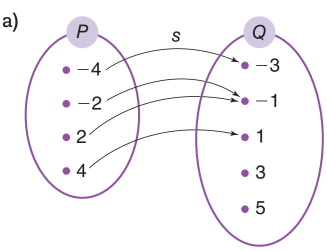
16 a)



b) $D(h) = \{1, 3, 5\}$
$CD(h) = N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
$Im(h) = \{0, 2, 4, 6\}$

c) A relação h não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 3) que está associado, por h, a mais de um elemento de N.

17 a)



b) $D(s) = \{-4, -2, 2, 4\}$
$CD(s) = Q = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
$Im(s) = \{-3, -1, 1\}$

c) A relação s é função de P em Q, pois qualquer elemento de P está associado, por s, a um único elemento de Q.

18 a) −7 b) −1 c) 12

19 a) 5
b) 2
c) 7
d) $\frac{9}{2}$

20 a) $\frac{5}{2}$
b) $-\frac{5}{2}$
c) $\frac{17}{4}$
d) $-\frac{17}{4}$

21 $Im(g) = \{-5, 1, 7, 25\}$

22 6 e −2

23 $A = \left\{-11, 1, -\frac{33}{8}\right\}$

24 a) 52 dólares
b) 51 dólares
c) 50 sacas

25 $a = 5$; $b = -2$

26 30

27 a) zero
b) 2
c) 3
d) −1
e) $\frac{1}{2}$

DICA: No item **a**, para obter $f(1)$, calcule $f(1 \cdot 3)$; no item **b**, para obter $f(9)$, calcule $f(3 \cdot 3)$ etc.

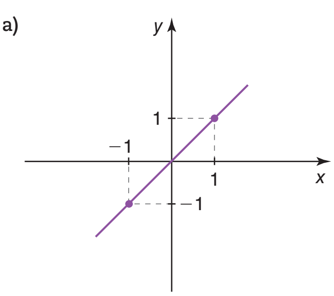
28 d

29 a) $D(f) = \mathbb{R}_+$
b) $D(f) = \mathbb{R}$
c) $D(f) = \mathbb{R}$
d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$
e) $D(f) = \mathbb{R}$
f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 6\}$
g) $D(f) = \mathbb{R}^*$

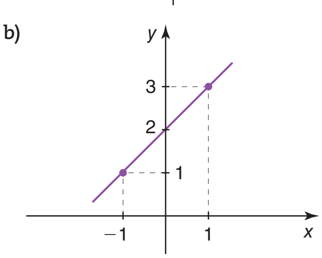
30 Não, pois, para $x = 5$, teríamos $f(5) = \frac{2}{0}$, que não é definido.

31 a) $V(x) = (20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x$
b) $D(V) =]0, 5[$

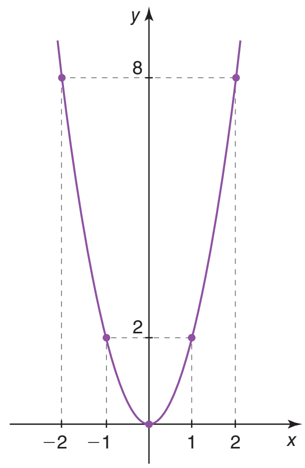
32 a)



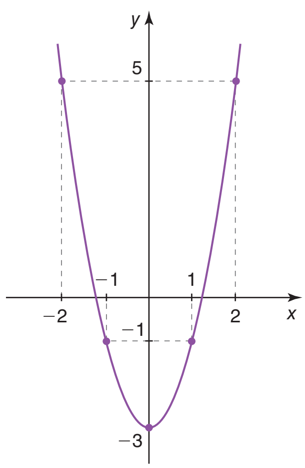
b)



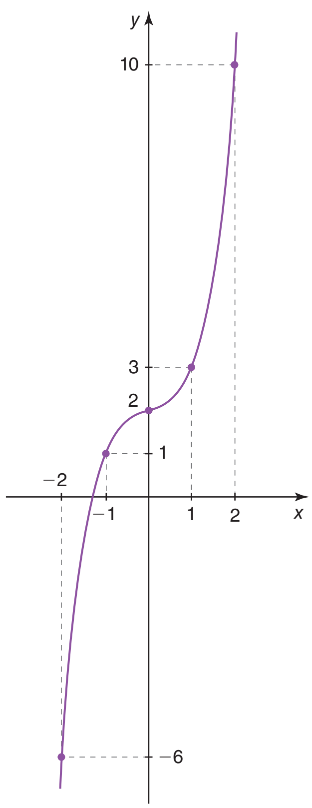
c)



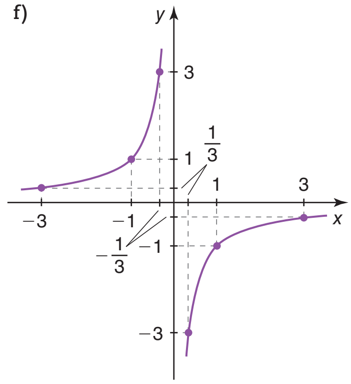
d)



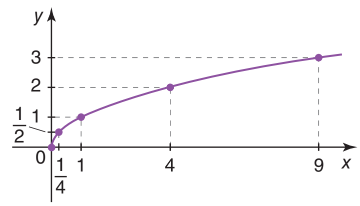
e)



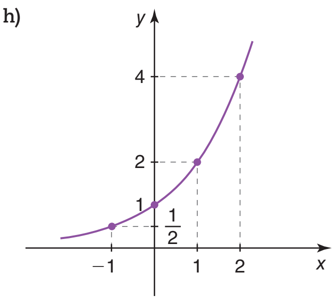
f)



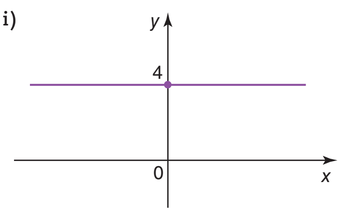
g)



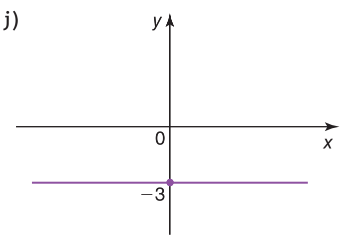
h)



i)



j)



33 a) x e y são diretamente proporcionais.

b) x e y são diretamente proporcionais.

c) x e y não são diretamente proporcionais.

d) x e y são diretamente proporcionais.

DICA: O fato de $0 \notin D(s)$ não descarta a possibilidade de x e y serem diretamente proporcionais, pois (I) é condicional, isto é, "se $x = 0$, então $y = 0$".

Como, neste caso, *x* não pode ser zero, as variáveis x e y serão diretamente proporcionais se for obedecida apenas a condição (II).

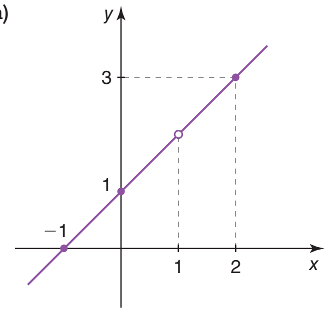
e) x e y são diretamente proporcionais.

f) x e y não são diretamente proporcionais.

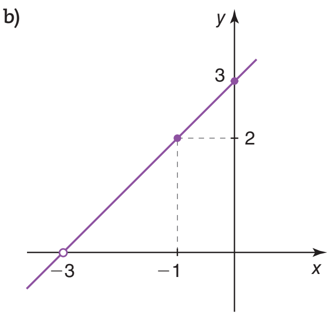
g) x e y são diretamente proporcionais.

34 resposta pessoal

35 a)



b)

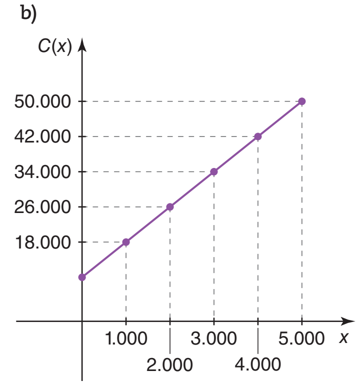


DICA: Sob a condição de existência, simplifique cada fração.

36 a)

x	*C*(*x*)
0	10.000
1.000	18.000
2.000	26.000
3.000	34.000
4.000	42.000
5.000	50.000

b)

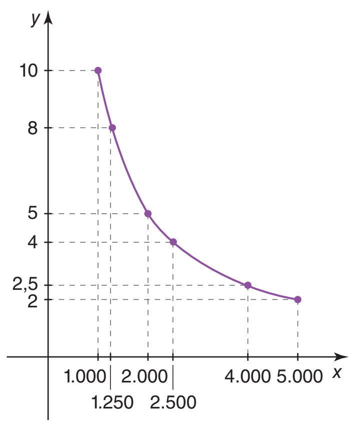


c)

x	$\frac{10.000}{x}$
1.000	10
1.250	8
2.000	5
4.000	2,5
5.000	2

Os valores correspondentes nas duas colunas são inversamente proporcionais, pois o produto de dois elementos correspondentes quaisquer é constante.

d)



37 b

38 a) 8
b) zero
c) -4
d) 5
e) $f(3)$ não está definida, pois $3 \notin D(f)$.

39 Sim, pois qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, com $x \in [-2, 4]$, intercepta o gráfico em um único ponto.

DICA: O gráfico de uma relação R de domínio $D(R)$ representa uma função se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, com $x \in D(R)$, intercepta o gráfico em um único ponto.

40 Não, porque existe pelo menos uma reta paralela ao eixo Oy que intercepta o gráfico em mais de um ponto.

41 $D(f) =]1, 7]$; $Im(f) = [-2, 8[$

42 $D(f) =]-1, 6]$; $Im(f) = \{-2\} \cup [0, 7]$

43 a) 7%
b) 5%
c) 3%

d)

Mês	Taxa de inflação (%)
1	6
2	8
3	9
4	7
5	6
6	9
7	9
8	9
9	8
10	6
11	5
12	9

e) Sim, pois a cada mês está associado um único valor da taxa de inflação.

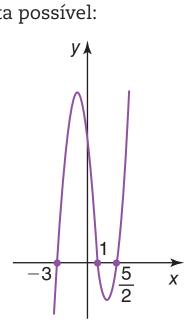
44 a) 32
b) 85
c) 98
d) Sim, pois a cada instante está associando um único número de bactérias.
e) ≈ 207

45 a) 1 e 3
b) $-\frac{3}{5}$
c) 3 e -3
d) 0, 2 e -2
e) Não existem raízes.
f) 0, 2 e 4
g) Não existem raízes.

46 $-6, -3, 0, 3$ e 6

47 a) 1 e 5 b) 5 c) 1 e 5

48 Resposta possível:



Duas ou mais funções podem ter as mesmas raízes, mesmo tendo gráficos diferentes.

49 a) $t = 0$ ou $t = 3$
b) As raízes indicam os instantes em que a altura da bola, em relação ao campo, foi igual a zero. Assim, no momento do chute, $t = 0$, e três segundos após o chute, $t = 3$, a bola esteve em contato com o campo.
c) 2,25 m
d) Não, pois para $h(t) = 4$ temos $\Delta < 0$, logo a equação não possui raiz real.

50 nos meses 3 e 9, ou seja, em março e setembro.

51 a) V
b) F
c) V
d) F
e) V
f) F
g) V
h) F
i) V
j) V

52 a) F
b) V
c) V
d) V
e) F
f) V
g) V
h) F
i) V
j) V
k) V

53 a) $[-1, 1]$
b) $[-3, -1]$ e $[1, 3]$
c) $[3, 5]$

54 a) f é constante.
b) g é crescente.
c) h é decrescente.
d) p é crescente durante o percurso e constante durante o almoço.

55 e

56 a) $[6, 15]$
b) $[0, 6]$ e $[15, 24]$

DICA: Considere dois pontos distintos quaisquer $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ do gráfico de f.

57 d

58 demonstração

59 a) $t_1 > t_2 \Rightarrow 6t_1 > 6t_2$
$\therefore 6t_1 + 60 > 6t_2 + 60 \Rightarrow$
$\Rightarrow v(t_1) > v(t_2)$
b) acelerado

60 a) $t_1 > t_2 \Rightarrow -10t_1 < -10t_2$
$\therefore 90.000 - 10t_1 < 90.000 - 10t_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow v(t_1) < v(t_2)$
b) esvaziada

61 a) Se a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários aumentar a cada mês.
b) Se a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários diminuir a cada mês.
c) Se a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários permanecer constante.

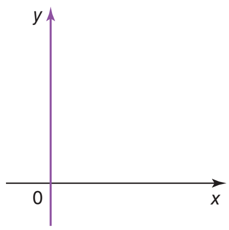
d) Sim, é possível. Para isso, basta que o salário médio dos executivos aumente menos que o salário dos outros funcionários. Assim, a diferença entre os salários diminuirá e, portanto, a função f irá decrescer.

Exercícios complementares

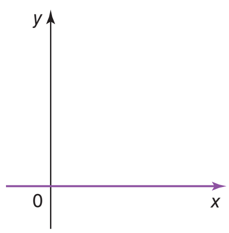
• **Exercícios técnicos**

1 $-\frac{5}{4}$

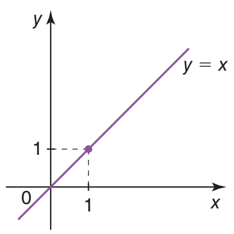
2 a)



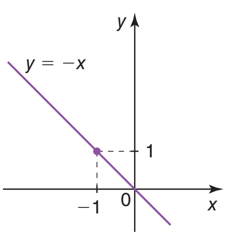
b)



c)



d)



3 a) 12 b) $4(1 + \sqrt{10})$

4 Q(14, 4)

DICA: Lados opostos de um paralelogramo têm medidas iguais.

5 9

6 a) 70

b) 1 e $-\frac{2}{3}$

7 a) 40 c) 512 e) 1

b) 25 d) 8.000 f) $\frac{1}{25}$

8 a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$

DICA: A resolução de uma equação da forma $ax^4 - bx^2 + c = 0$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, pode ser feita com a mudança de variável: $x^2 = y$.

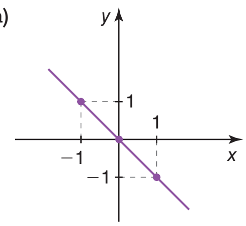
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ e } x \neq -2\}$

c) $D(u) = \mathbb{R}$

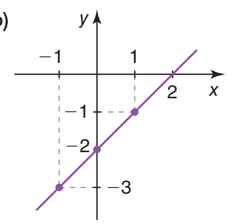
d) $D(v) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{5}{2} \text{ e } x \neq -\sqrt{3} \text{ e } x \neq \sqrt{3}\right\}$

9 a **10** d **11** a

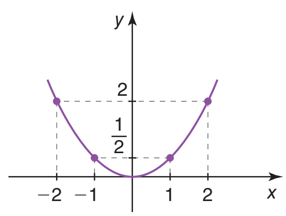
12 a)



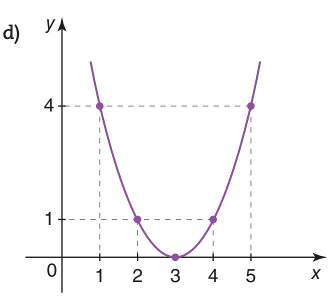
b)



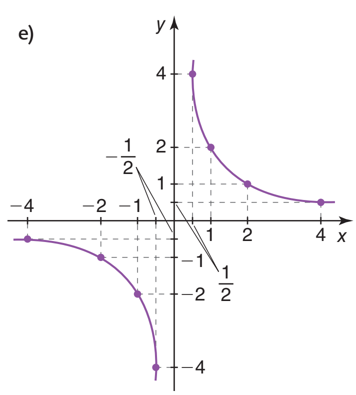
c)



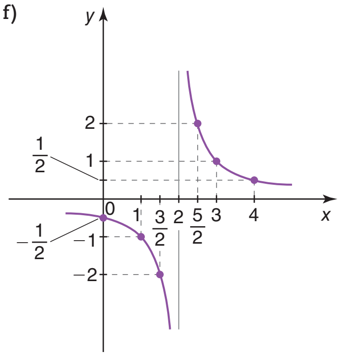
d)



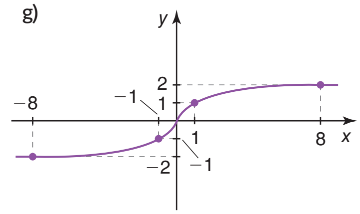
e)



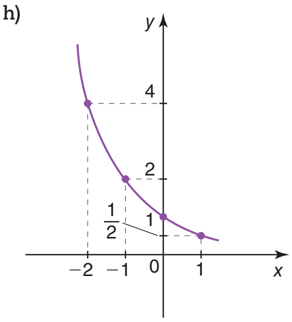
f)



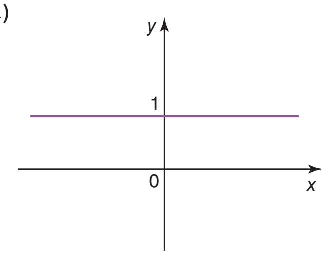
g)



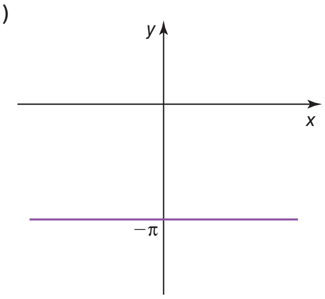
h)



i)



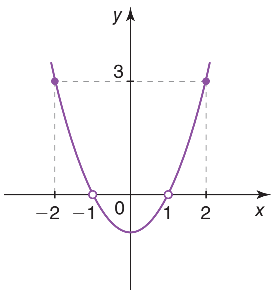
j)



13 a) O gráfico é uma hipérbole equilátera cujos ramos estão no 1º e 3º quadrantes.

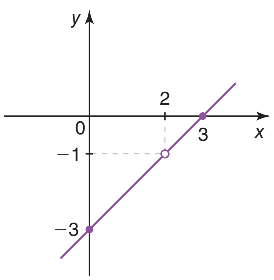
b) O gráfico é uma hipérbole equilátera cujos ramos estão no 2º e 4º quadrantes.

14 a)



DICA: $p^2 - 2pq + q^2 = (p - q)^2$

b)



15 a) V c) F e) F
b) V d) V f) V

16 b

17 a) $a = -2$; $b = 2$
b) $\frac{16}{5}$

18 Não, porque existe elemento em A que está associado, por R, a mais de um elemento de B.

19 $D(f) = [2, 6[\cup]7, 9]$;
$Im(f) = [-2, 4[\cup [5, 6[$

20 a) -1 e 6
b) -2 e 2
c) $-1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$
d) 3
e) Não existem raízes reais.
f) Não existem raízes reais.
g) Todo número real é raiz.

21 b
DICA: As abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas são as raízes da função.

22 a

23 a) $\frac{12}{5}$
b) 0 e 6
c) $-3 \leq x < \frac{12}{5}$
d) $\frac{12}{5} < x \leq 6$
e) $0 < x < 6$
f) $-3 \leq x < 0$
g) $-3 \leq x < 0$ ou $\frac{12}{5} < x < 6$

DICA: O produto $f(x) \cdot g(x)$ é negativo se, e somente se, $f(x)$ e $g(x)$ têm sinais contrários.

h) $0 < x < \frac{12}{5}$

24 c **25** demonstração

- **Exercícios contextualizados**

26 5

27 a) nenhum
b) 2
c) Não, pois o número zero de andar não está associado a nenhum número de apartamento.

28 a) 3.200 kWh c) $C = 600t$
b) 12 dias

29 a) $P = \frac{x}{4} - 120$ b) R$ 1.440,00

30 e

31 a) 78.000 L c) 6 h
b) 120.000 L d) 2 h

32 c **33** d

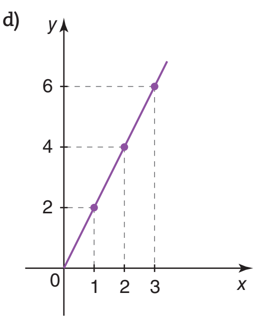
34 a)

Tempo (min)	Produção (m)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

b) Os valores t do tempo e os correspondentes valores p da produção são diretamente proporcionais, pois:
I. Para $t = 0$, tem-se $p = 0$;
II. Para $t = 0$, tem-se que a razão $\frac{p}{t}$ é constante.

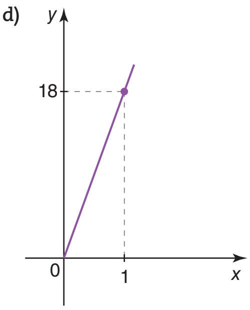
c) $y = 2x$

d)



35 a) R$ 39.600,00
b) $y = 18x$
c) Sim, pois:
I. se $x = 0$, então $y = 0$
II. se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = 18$

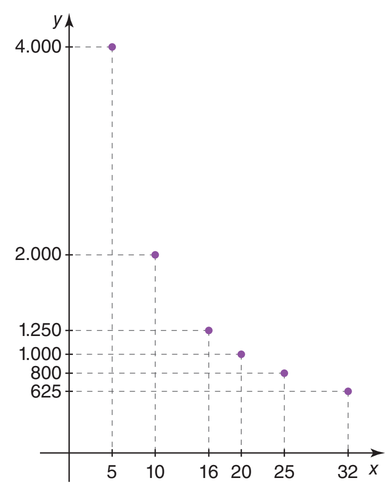
d)



36 a) 50 litros
b) $f(x) = \frac{20.000}{x}$, para $x > 0$
DICA: O produto do número de litros pelo número de insetos sobreviventes é constante.

c)

x Quantidade, em litro, de agrotóxicos	$f(x)$ População de insetos (número de indivíduos)
5	4.000
10	2.000
16	1.250
20	1.000
25	800
32	625



37 a) 48 minutos
b) 5 horas e 12 minutos

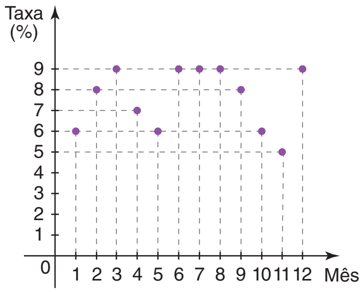
38 a) 251,20 L c) 50,24 L
b) 301,44 L

39 a) 30 cm c) a primeira
b) 5 cm

40 a) 606 L/s c) 4.887.360 L
b) 685 L/s d) sim

41 a) [0, 2] b) [7, 10] c) [2, 7]

42 a)



b) crescente
c) constante
d) decrescente
e) 0%

43 demonstração

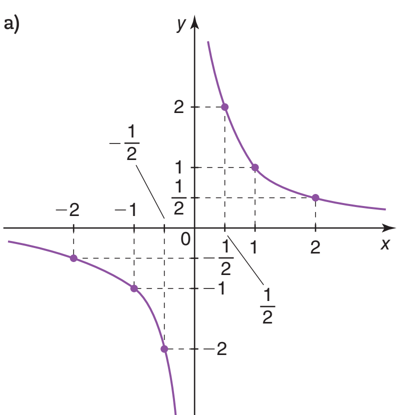
Exercícios de revisão cumulativa

1 d **2** d

3 a) V c) F
b) F d) F

Análise da resolução

a)



b) f é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$ e f é decrescente em $\mathbb{R}_-^*$.

CAPÍTULO 3 **Algumas funções e conceitos fundamentais**

Para pensar

1 resposta pessoal

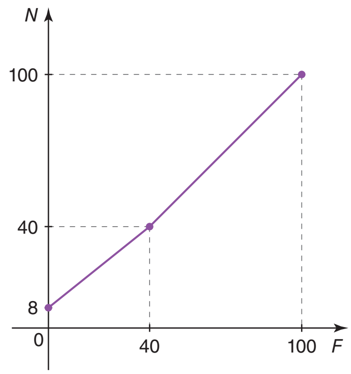
2 5 minutos **3** 120°

Exercícios propostos

1 c
DICA: Observe que $T(10) < 50 < T(20)$.

2 e

3 a) 48
b) 80
c)

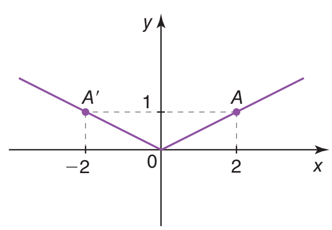


4 $f(x) = \begin{cases} 6{,}14, \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 12{,}27, \text{ se } 10 < x \leq 20 \\ 18{,}41, \text{ se } 20 < x \leq 30 \\ 36{,}82, \text{ se } 30 < x \leq 60 \\ 61{,}36, \text{ se } x > 60 \end{cases}$

5 a) par
b) ímpar
c) nem par nem ímpar
d) ímpar
e) par

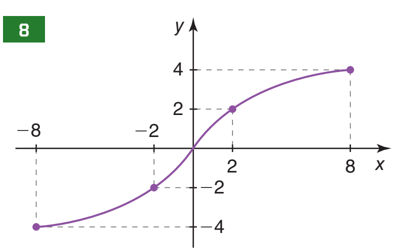
6 a) par b) $\sqrt{3}$
DICA: Aplique o teorema de Pitágoras.

7



DICA: O gráfico de uma função par é formado por duas partes simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

8



9 a) 3 c) 27
b) 11 d) $4x^2 + 4x + 3$

10 a) $2\sqrt{5}$
b) 4
c) 5
d) $\sqrt{x^2 + 16}$

11 a) 11 e) $3\sqrt[3]{x} + 5$
b) $\sqrt[3]{6}$ f) $\sqrt[3]{3x + 3}$
c) $\sqrt[3]{5}$ g) $\sqrt[3]{3x + 5}$
d) 0 h) $3\sqrt[3]{x} + 3$

12 a) $a = 4$; $b = 2$
b) $16x^2 + 72x + 80$
DICA: No ponto comum aos gráficos de f e g, tem-se $f(x) = g(x)$.

13 a) 5
b) $2x - 9$
DICA: Faça a mudança de variável $x + 5 = t$.

14 a) 3.600
b) $y = 3t$

15 a) 172 kWh
b) $y = 148 + \dfrac{2.400}{p}$

16 a) sobrejetora
b) injetora
c) bijetora
d) nem sobrejetora nem injetora

17 sobrejetora

18 bijetora

19 injetora

20 a) nem injetora nem sobrejetora
DICA: Uma função pode não ser injetora nem sobrejetora.
b) bijetora
c) bijetora
d) bijetora
e) sobrejetora

21 A função f é bijetora, pois a cada identificação de placa corresponde uma única identificação do chassi e vice-versa.

22 f é sobrejetora, pois todos os livros da biblioteca são catalogados pelo título. Isto significa que para qualquer título de livro catalogado na biblioteca existe pelo menos um exemplar com esse título, ou seja, qualquer elemento do contradomínio de f é imagem de algum elemento do domínio. Além disso, f não é injetora, pois há mais de um exemplar com o mesmo título, ou seja, há elementos distintos do domínio que possuem a mesma imagem.

23 Sim, porque f é uma bijeção de A em B e, por isso, a relação inversa f^{-1} também é uma função.

24 Não, pois f não é uma bijeção de A em B e, por isso, a relação inversa f^{-1} não é uma função.

25 Não, pois não há função de A em B que seja bijetora, já que $n(A) \neq n(B)$.

26 g, pois g é bijetora.

DICA: Se uma reta paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de uma função v em mais de um ponto, isto significa que há mais de um valor do domínio com a mesma imagem, através de v.

27 a) $y = \dfrac{x + 4}{6}$

b) $y = \dfrac{5 - 4x}{x}$

c) $y = \dfrac{3x + 1}{2 - x}$

28 a

29 $Im(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$

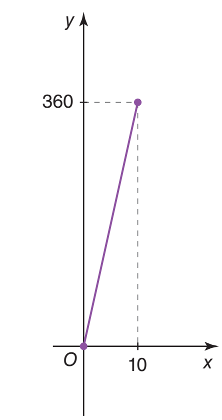
DICA: Se f e f^{-1} são funções inversas, então $Im(f) = D(f^{-1})$ e $Im(f^{-1}) = D(f)$.

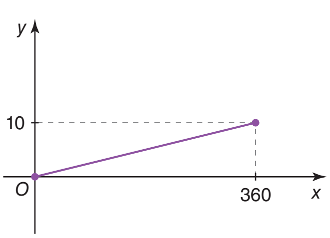
30 a) $y = 36x$, com $0 \leq x \leq 10$

b) $y = \dfrac{x}{36}$, com $0° \leq x \leq 360°$

c) As funções obtidas são inversas uma da outra.

d)





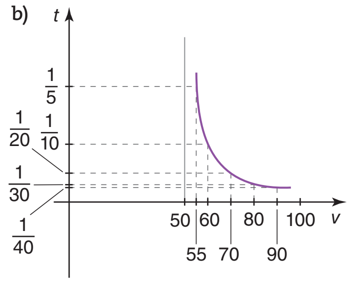
e) 234°

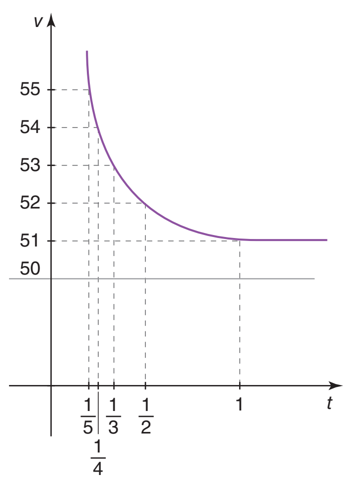
f) 3,5 kg

DICA: Represente as grandezas em uma regra de três.

31 a) $v = \dfrac{1 + 50t}{t}$

b)





c) 6 km   d) 26 km

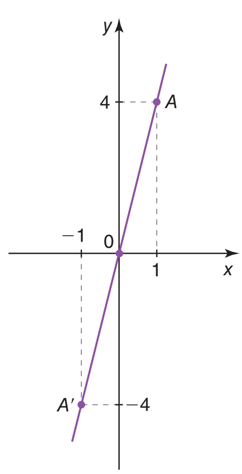
Exercícios complementares

• Exercícios técnicos

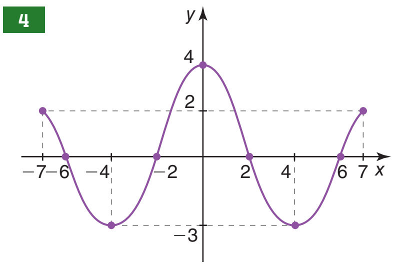
1 c

2 a) par
b) ímpar
c) nem par nem ímpar
d) nem par nem ímpar
e) ímpar

3



4



5 a) ímpar
b) $2\sqrt{2}$

DICA: O raio da circunferência mede 3 unidades.

6 demonstração

7 a) 24   e) $15x - 6$
b) 56   f) $15x + 26$
c) 1   g) $25x - 24$
d) 51   h) $9x + 24$

8 -2

9 $x = 1$ ou $x = 2$

10 c

11 d

12 a) sobrejetora
b) injetora
c) bijetora

13 Não. Para que exista uma função bijetora $f\colon D \to E$, com D e E finitos e não vazios, é necessário que D e E tenham o mesmo número de elementos. Como $n(A) \neq n(B)$, concluímos que não existe uma função bijetora de A em B.

14 $a = 12$; $b = 21$

DICA: Se uma função v cujo gráfico é formado por pelo menos dois pontos é injetora, então v é crescente ou decrescente.

15 $a = -4$; $b = 1$

16 Não, pois f não é bijetora e, por isso, a relação inversa f^{-1} não é uma função.

17 a) Não, pois ela não é bijetora.
b) Sim, pois ela é bijetora.

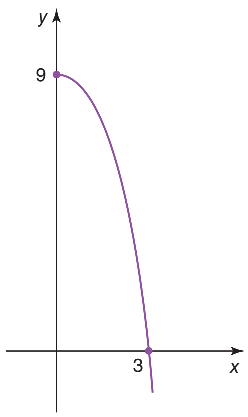
18 a) $y = \dfrac{x - 1}{7}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$

c) $g^{-1}(x) = x^2$

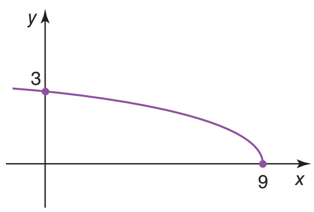
d) $h^{-1}(x) = (x - 5)^3 + 3$

19 a)



b) $f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x}$

c)



• **Exercícios contextualizados**

20 a) -1

b) $T(x) = \begin{cases} 0{,}09 \cdot \lfloor x \rfloor, \text{ se } x \text{ é inteiro} \\ 0{,}09 \cdot (\lfloor x \rfloor + 1), \text{ se } x \text{ não é inteiro} \end{cases}$

21 a

22 $h(y) = \dfrac{y - 320}{5}$; $h(400) = 16$ cm

DICA: $g = h \circ f$

23 a) $C(t) = 0{,}05t^2 + 6$

b) 12 anos

24 a

25 a) f pode não ser injetora, pois é possível que um mesmo cidadão brasileiro tenha dois (ou mais) registros gerais diferentes.

b) f será bijetora se todo cidadão brasileiro que recebeu o registro geral tiver um único registro.

26 injetora

Exercícios de revisão cumulativa

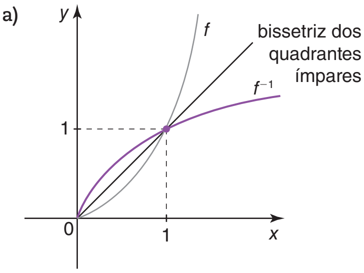
1 $\dfrac{601}{90}$

2 $a = \dfrac{6}{5}$; $b = \dfrac{19}{5}$

3 B e C

Análise da resolução

a)



b) Para todo x real tal que $x > 1$.

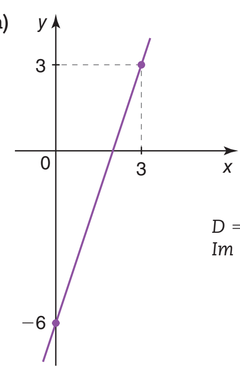
CAPÍTULO 4 Função afim

Para pensar

2,8 atm

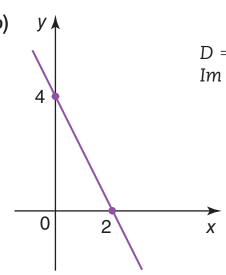
Exercícios propostos

1 a)



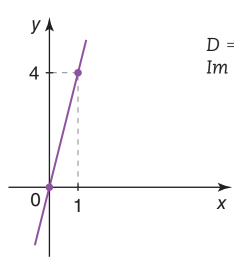
$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

b)



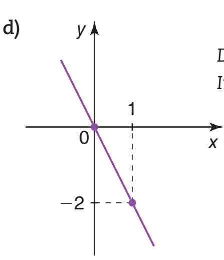
$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

c)



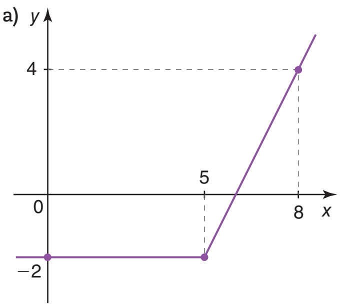
$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

d)

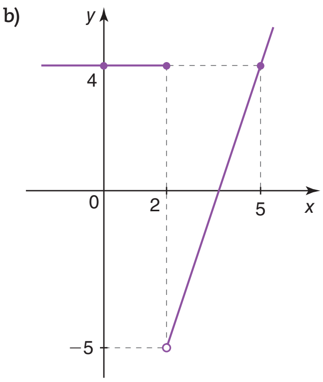


$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

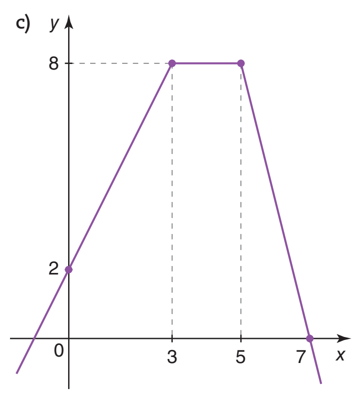
2 a)



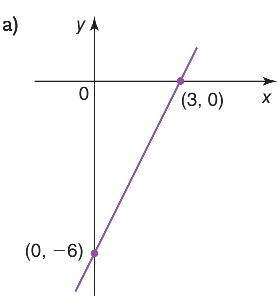
b)



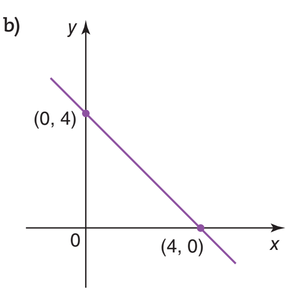
c)



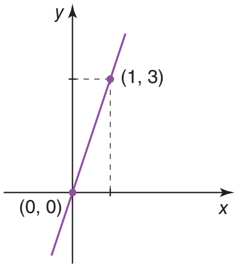
3 a)



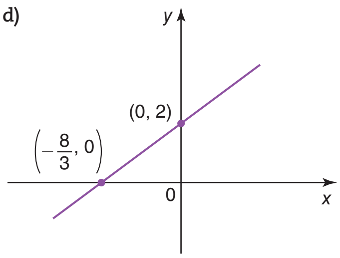
b)



c)



d)



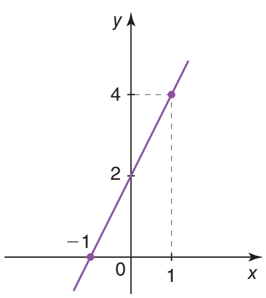
4 a) resposta pessoal

b) resposta possível: $y = \frac{5x}{2}$

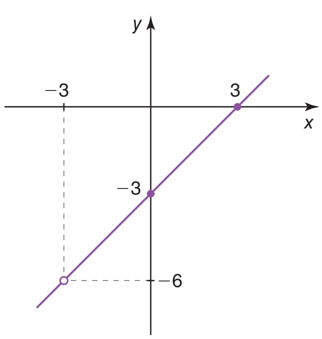
5 b

6 $a = 5$; $b = -4$

7



8



DICA: Sob a condição de existência, simplifique a fração.

9 a) $y = \frac{x}{10} + 4$, com $x \geq 0$

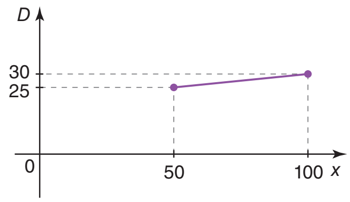
b) 4 milhões de dólares

c) 9 milhões de dólares

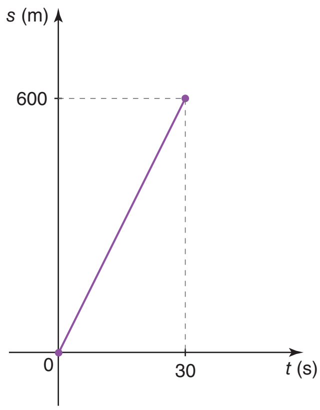
10 a) R$ 30.000,00

b) 300

c)



11



DICA: A distância s percorrida a uma velocidade constante v em um tempo t é dada por: $s = vt$.

12 d

13 c

14 b

15 a

16 $y = 5x - 13$

17 a) $y = 3x$ b) $y = -x + 3$

18 16 anos

19 a) A, B e C são colineares.

b) A, B e C não são colineares.

20 $\frac{22}{3}$

21 $a = \frac{3}{2}$; $b = 6$

22 a) $y = 400 - 4x$

b) A taxa de variação é −4. Essa taxa indica que vazam 4 litros de água por segundo do reservatório.

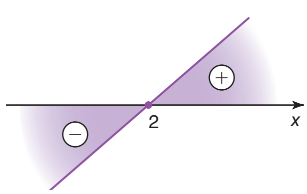
23 a) $s = -20 + 2t$

b) A taxa de variação é 2.

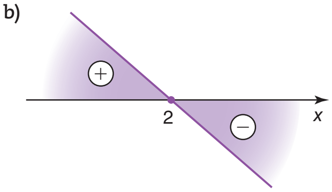
c) A taxa de variação indica que a cada minuto a distância percorrida aumenta 2 km, portanto essa taxa é a velocidade do automóvel.

24 $y = 50x + 1.950$

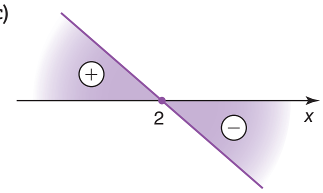
25 a)



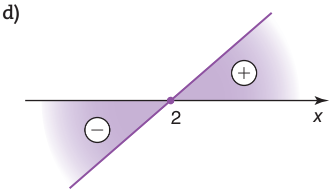
b)



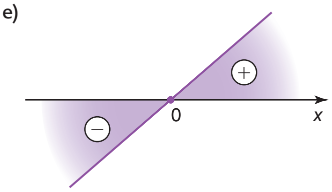
c)



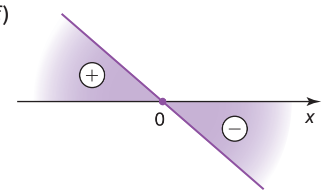
d)



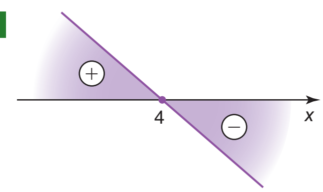
e)



f)



26



DICA: Obtenha uma equação que relacione x e y.

27 a) $y = -25x + 200$

b) 8 horas

c) 20 horas

d) 8 horas

e) 12 horas

28 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 3\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 0 < x < 1 \text{ ou } x > \frac{4}{3}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$

DICA: Uma potência da base não nula e expoente ímpar tem o mesmo sinal da base. Uma potência de base não nula e expoente par é positiva.

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

29 2

30 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$

31 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq \frac{7}{2}\right\}$

32 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

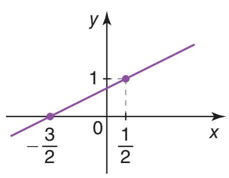
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{5} < x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{4}{5}\right\}$

33 e

Exercícios complementares

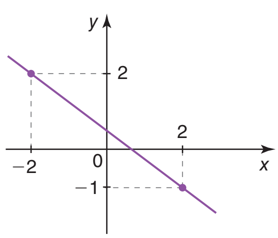
• **Exercícios técnicos**

1 a)



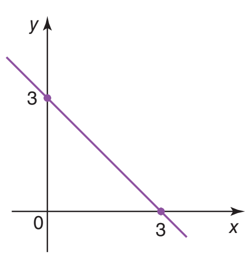
$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

b)



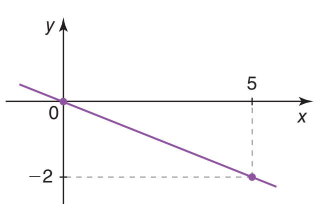
$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

c)



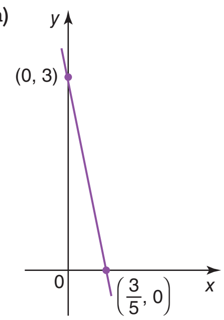
$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

d)

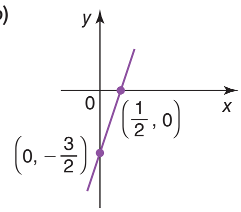


$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

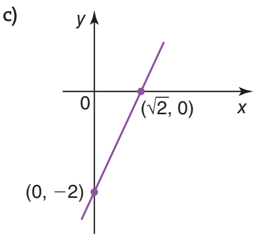
2 a)



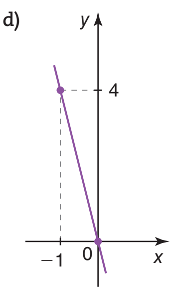
b)



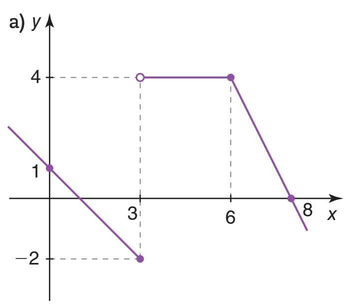
c)



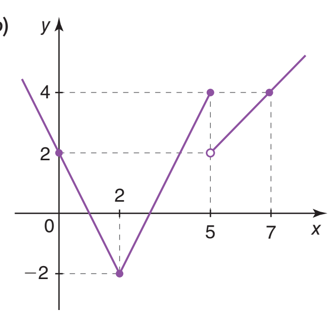
d)



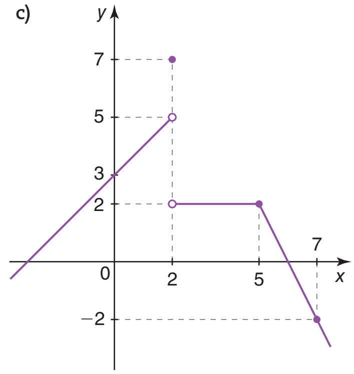
3 a)



b)

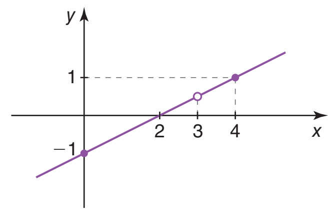


c)



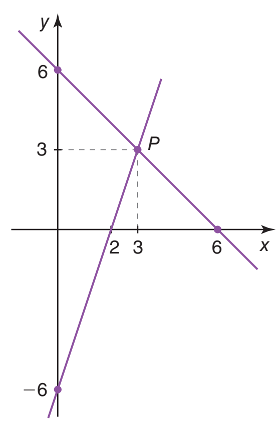
4 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $(0, -1)$

5



DICA: Se x_1 e x_2 são as raízes do trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, então a forma fatorada desse trinômio é: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

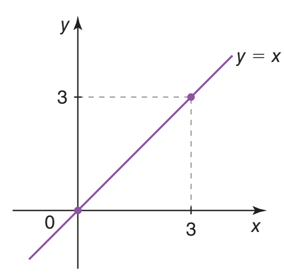
6



7 a

DICA: Se as bases de um trapézio de altura h medem b e B, então a área S desse trapézio é $S = \frac{(b + B)h}{2}$.

8



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

9 b

10 a) $f(1) = 2$; $f(3) = \frac{11}{2}$

b) $f(t) = \begin{cases} 2t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ -\frac{t^2}{2} + 4t - 2, \text{ se } 2 < t \leqslant 4 \end{cases}$

11 $y = -2x$

DICA: Se a taxa de variação da função afim é -2, então a lei de associação entre x e y é da forma $y = -2x + b$, com $b \in \mathbb{R}$.

12 a) $y = \frac{2x}{3} - \frac{5}{3}$ b) $y = 6x - 4$

13 a) A, B e C são colineares.

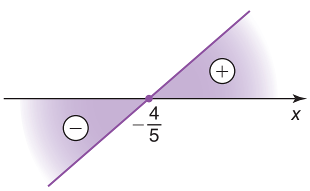
b) A, B e C não são colineares.

14 demonstração

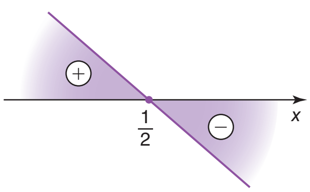
15 a) V b) F c) V d) F

DICA: Se uma função v cujo gráfico é formado por pelo menos dois pontos é injetora, então v é crescente ou decrescente.

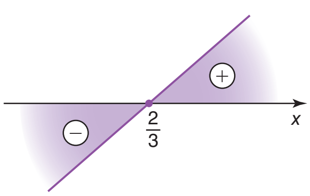
16 a)



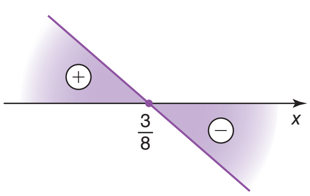
b)



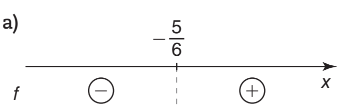
c)



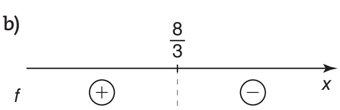
d)



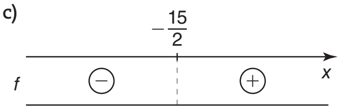
17 a)



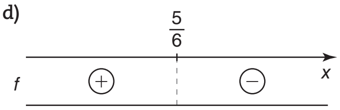
b)



c)



d)



18 e

DICA: O produto de dois números reais é negativo se, e somente se, eles têm sinais contrários.

19 b

20 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } \frac{6}{5} < x < \frac{3}{2}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

21 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

22 1

23 a) para $x < -\frac{5}{2}$ ou $x > 0$

b) $p \leqslant -3$

24 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

25 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > \frac{2}{3}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } 3 \leqslant x < 4\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\right\}$

26 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{12} \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$

27 a **28** d **29** b

30 $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } x \geqslant 0\}$

- **Exercícios contextualizados**

31 a) 1 atmosfera

b) $p = 2{,}8$ atmosferas

c) $p = 0{,}1x + 1$

32 a) $y = \frac{9x}{5} + 32$ b) -20 °C

33 c

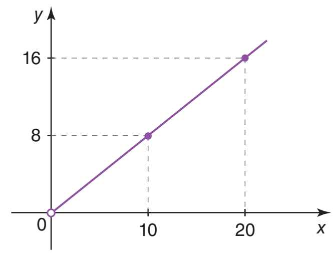
DICA: Obtenha a função afim cujo gráfico passa pelos pontos (1.000, 35.000) e (2.000, 65.000).

34 60 min

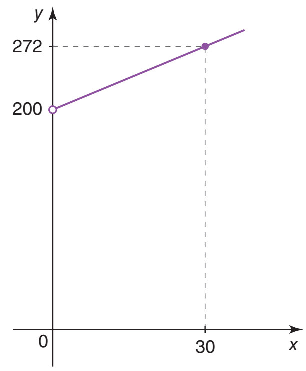
35 b

36 a) 40 m²

b) $y = 0{,}8x$, com $x > 0$

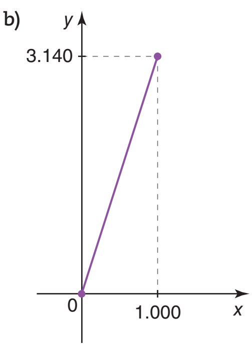


c) $y = 2{,}4x + 200$, com $x > 0$



37 a) $y = 3{,}14x$

b)



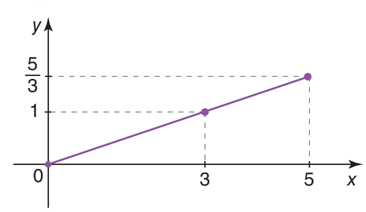
c) Sim, pois:

- Se $x = 0$, então $y = 0$.
- Se $x \neq 0$, a razão de y para x é constante, ou seja, $\frac{y}{x} = 3{,}14$.

38 a) $y = \frac{x}{3}$

DICA: Relacione os números de voltas das polias através de uma regra de três.

b)

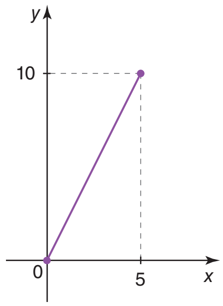


c) Sim, pois:

- Se $x = 0$, então $y = 0$.
- Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$.

39 a) $y = 2x$

b)



40 e

41 d

DICA: Dizer que a variação de uma função f é linear equivale a dizer que f é uma função afim.

42 d **43** a **44** c

45 b

DICA: Obtenha a função afim cujo gráfico passa pelos pontos (8, 20) e (13, 100).

46 R$ 2,14

47 d

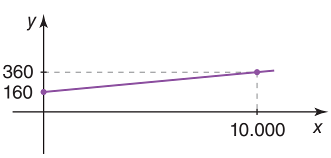
DICA: Obtenha as equações das retas que contêm esses gráficos e, a seguir, determine o ponto de intersecção dos gráficos.

48 e

49 a)

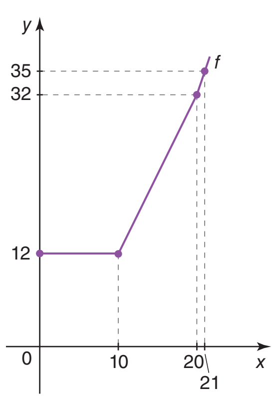
	Vendas (R$)	Rendimento (R$)
Abril	8.350	327
Maio	10.200	364
Junho	k	$160 + 0{,}02k$

b) $y = 160 + 0{,}02x$



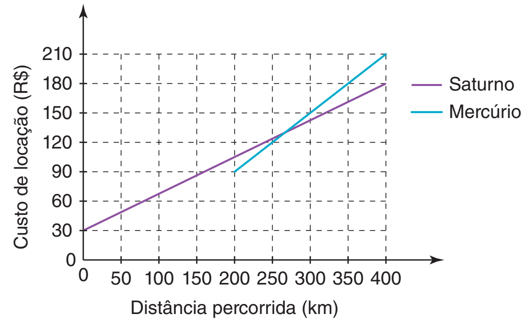
50 a) $f(x) = \begin{cases} 12, \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 2x - 8, \text{ se } 10 < x \leq 20 \\ 3x - 28, \text{ se } x > 20 \end{cases}$

b)



51 b **52** d

53 a)



b) Para $x \in [30, 150[$ ou $x > 300$, o plano da locadora Saturno é mais barato. Para $x \in]150, 300[$, o plano da locadora Mercúrio é mais barato. O novo custo por quilômetro rodado deve ser R$ 0,30.

54 a) −30 °C d) 60 °C

b) 3 minutos e) 5 minutos

c) 6 minutos f) $f(x) = \begin{cases} 10x - 30, \text{ se } 0 \leq x < 3 \\ 0, \text{ se } 3 \leq x < 6 \\ 20x - 120, \text{ se } 6 \leq x < 11 \\ 100, \text{ se } 11 \leq x \leq 17 \end{cases}$

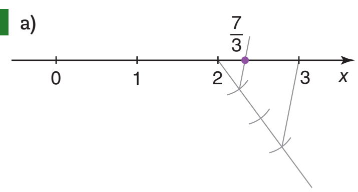
55 a) $y = -195x + 2.195$ c) 11

b) −3.850 reais d) 20

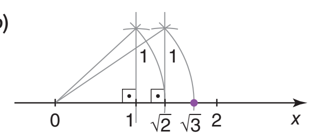
56 d

Exercícios de revisão cumulativa

1 a)



b)



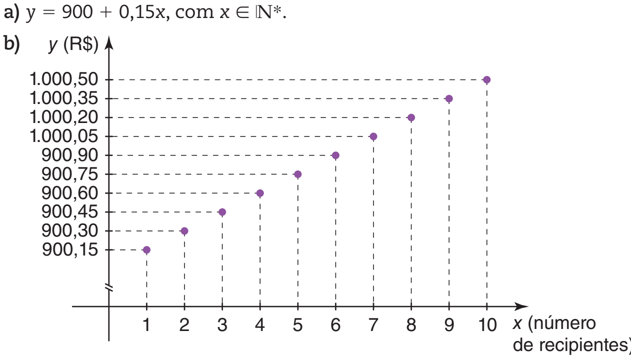
2 demonstração **3** 5

4 $D(f) = [2, 9]$; $Im(f) = [0, 6]$

Análise da resolução

a) $y = 900 + 0{,}15x$, com $x \in \mathbb{N}^*$.

b)



CAPÍTULO 5 Função quadrática

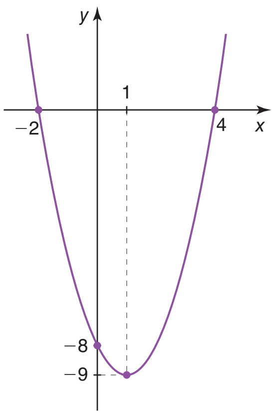
Para pensar

resposta pessoal

Exercícios propostos

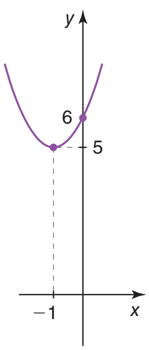
1 1.506 gramas

2 a)



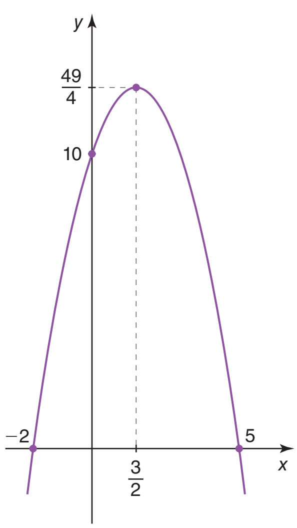
$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -9\}$

b)



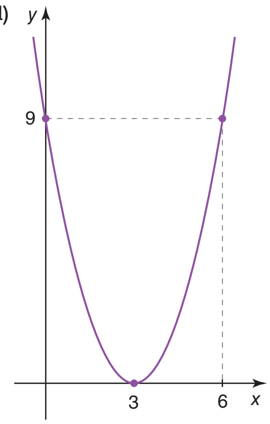
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 5\}$

c)



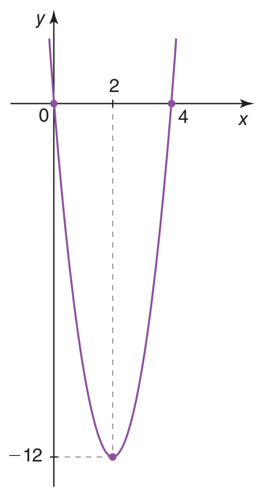
$D = \mathbb{R}$; $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{49}{4}\right\}$

d)



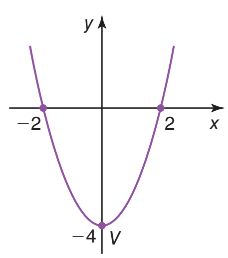
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}_+$

e)



$D(s) = \mathbb{R}$; $Im(s) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -12\}$

f)



$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$

3 e

4 $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ e $c = -4$

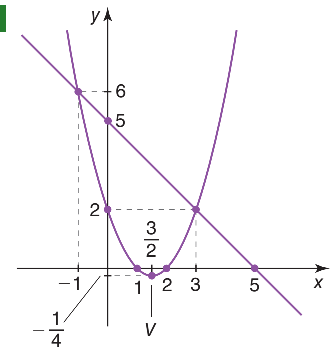
DICA: Substituindo as variáveis x e y da equação pelas coordenadas de cada um dos três pontos assinalados, obtém-se uma equação nas incógnitas a, b e c.

5 e

6 $k > -\frac{14}{3}$

DICA: Uma equação polinomial do 2º grau não tem raízes reais quando o discriminante é negativo.

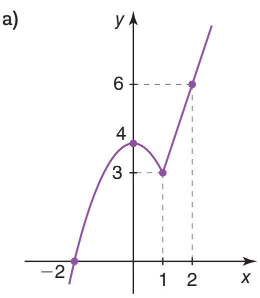
7



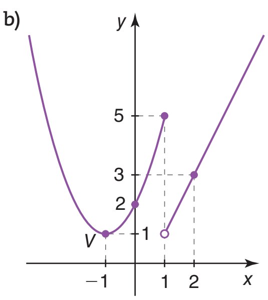
DICA: As coordenadas de cada ponto comum aos dois gráficos satisfazem as duas equações simultaneamente.

8 a

9 a)



b)



10 5 km

11 $y = -\frac{x^2}{50} - \frac{x}{10} + 55$

12 a) $A(x) = -2x^2 + 20x$

DICA: A área A do retângulo é dada por $A = xy$, em que $2x + y = 20$.

b) $x = 5$ m e $y = 10$ m

13 d

14 a) valor mínimo: -4

b) valor máximo: 16

c) valor mínimo: 2

d) valor máximo: $-\frac{3}{4}$

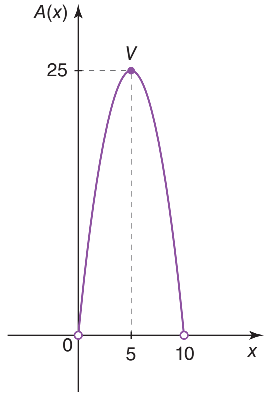
15 $m = -\frac{1}{8}$

16 $k > \frac{1}{5}$

DICA: A função admite mínimo positivo se, e somente se, $k > 0$ e $\Delta < 0$.

17 a) 16 cm²

b)



c) 25 cm²

DICA: Sendo x e y as dimensões do retângulo, o perímetro P e a área A são dados por: $P = 2x + 2y$ e $A = xy$.

18 a) Essa função possui mínimo.

b) 40 °C

c) 50 batimentos por minuto

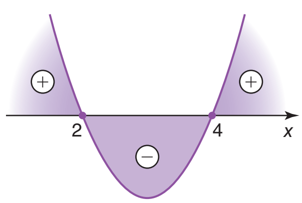
19 e

20 d

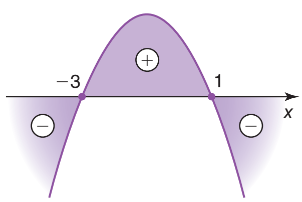
21 área do curral quadrado: 225 m²; área do curral retangular: 300 m²

DICA: Indique por x a medida do lado do quadrado e por y a medida da largura do retângulo.

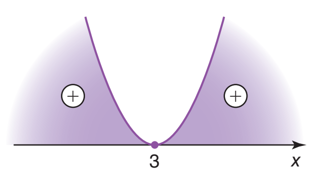
22 a)



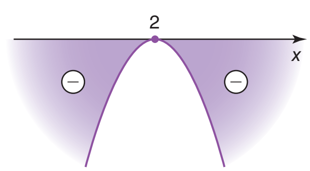
b)



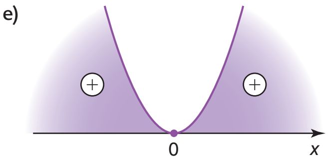
c)



d)



e)



23 $m > \frac{4}{3}$

24 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

25 a) $S = -10t^2 + 100t + 2.000$, com $t \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant t \leqslant 30$

b) daqui a 5 dias

c) $0 \leqslant t < 20$

d) 21

26 a

27 $m > -\frac{5}{2}$

28 a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

b) $D = \mathbb{R}$

29 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2 \text{ ou } x > 3\}$

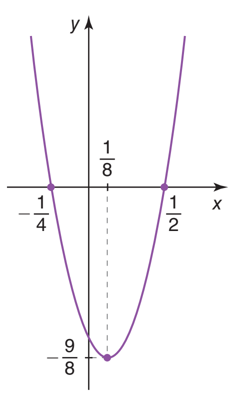
30 b

DICA: Essa inequação é equivalente a $\frac{x}{x+1} - x \geqslant 0$.

Exercícios complementares

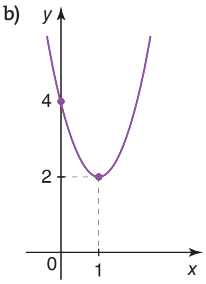
- **Exercícios técnicos**

1 a)



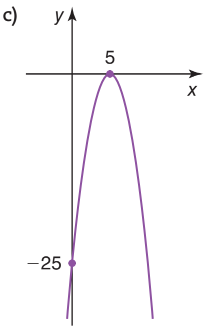
$D = \mathbb{R};\ Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{8}\right\}$

b)



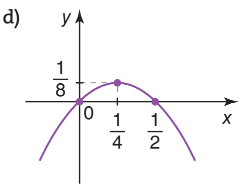
$D(h) = \mathbb{R};\ Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

c)



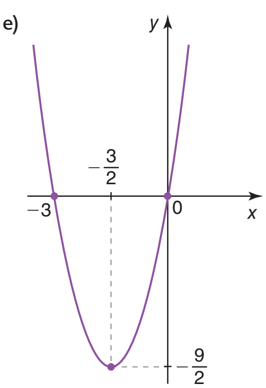
$D = \mathbb{R};\ Im = \mathbb{R}_-$

d)



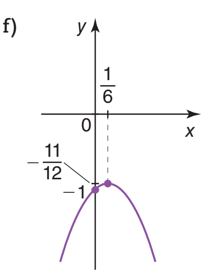
$D = \mathbb{R};\ Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{8}\right\}$

e)



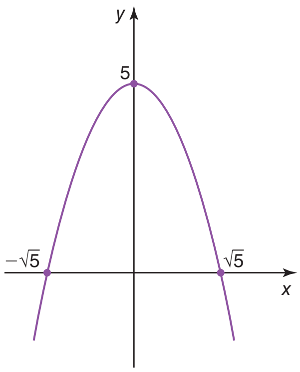
$D = \mathbb{R};\ Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

f)



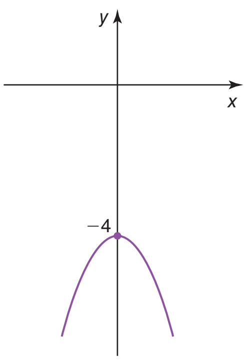
$D(t) = \mathbb{R};\ Im(t) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{11}{12}\right\}$

g)



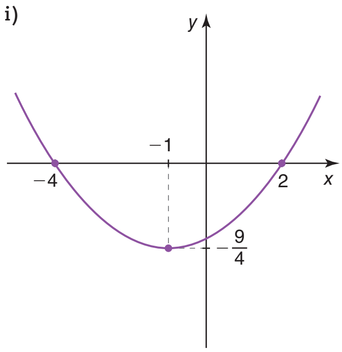
$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

h)



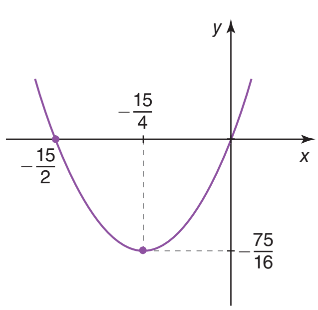
$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -4\}$

i)



$D = \mathbb{R}$; $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$

j)



$D(u) = \mathbb{R}$; $Im(u) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{75}{16}\right\}$

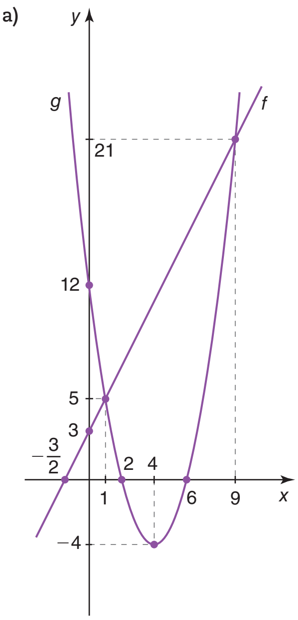
2 a

3 d

4 $p < \frac{1}{5}$

5 a

6 a)



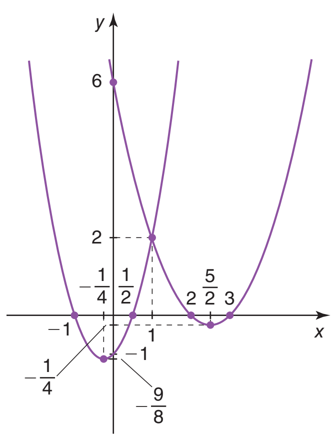
b) (9, 21); (1, 5)

7 a) $a = 4$; $b = 4$

b) $P\,(-1, 0)$; $Q\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

8 b

9



(1, 2) e (−7, 90)

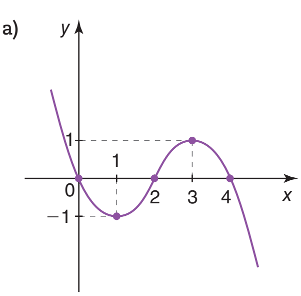
10 a) $x_v = -\frac{m}{2}$ e $y_v = \frac{8 - m^2}{4}$

b) $m \leqslant -2$ ou $m \geqslant 2$

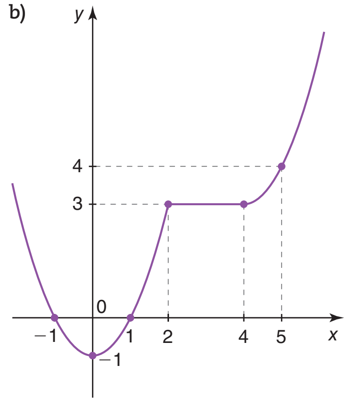
c) $m = 2$

d) $x = -1 + \sqrt{y - 1}$

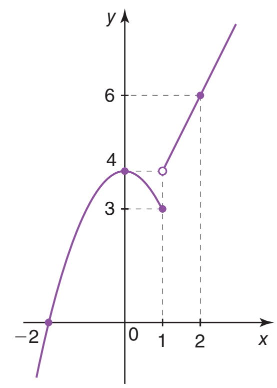
11 a)



b)



12



13 a) valor mínimo: $-\frac{9}{4}$;

abscissa do mínimo: $-\frac{1}{4}$

b) valor mínimo: −12;

abscissa do mínimo: 2

c) valor máximo: 4;

abscissa do máximo: −1

d) valor mínimo: 0;

abscissa do mínimo: 4

e) valor máximo: 0;

abscissa do máximo: $\frac{1}{4}$

f) valor mínimo: −1;

abscissa do mínimo: 0

14 $m < 2$

15 b

16 $\frac{125}{32}$

17 b

18 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < 1 \text{ ou } x > \sqrt{2}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 2\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$

19 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

20 a) $D = \{x \in \mathbb{R} | x < 1\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant -\sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2}\}$

21 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant -2 \text{ ou } -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \text{ ou } x \geqslant 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leqslant x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x \leqslant 2\}$

DICA: A variação de sinal do produto $f(x) \cdot g(x)$ é a mesma do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$.

c) $S = \varnothing$

22 sim, para $-3 < x < -1$ ou $x > 2$

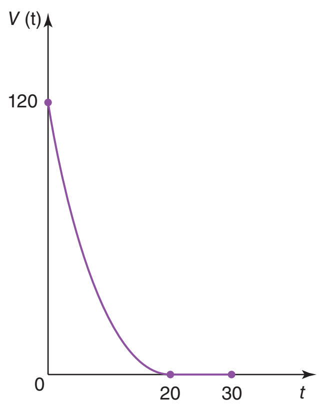
23 e

• Exercícios contextualizados

24 d

25 a) $a = 0,3$; $b = 20$

b)



26 a) $b = 0$

b) $c = 2$

c) R$ 27,00

DICA: Observe que P é função do raio r e que a tabela apresenta o diâmetro das pizzas.

27 e

DICA: Interprete $C(x)$ como o número de litros de combustível consumidos no trajeto.

28 a) $L(x) = -2x^2 + 256x - 5.600$

b) $28 < x < 100$

c) R$ 64,00

d) R$ 2.592,00; 72 cartuchos

29 b

30 30 cm e 40 cm; 1.200 cm^2

31 d

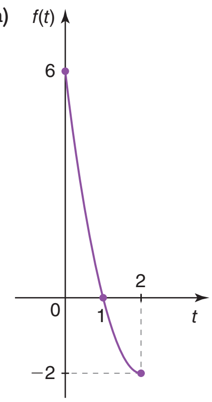
DICA: Sendo x o número de espectadores, a receita $R(x)$ é dada por:

$R(x) = (8 + 0,20x)(120 - 2x)$

32 2,76 m

33 a

34 a)



b) Esteve positiva por 1 hora.

c) Esteve negativa por 1 hora.

d) −2 °C

e) 12 horas

35 a) $x_1 = 12$; $x_2 = 50$; $k = -600$

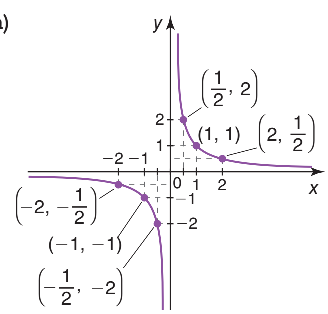
b) 13

c) ≈ 60,1%

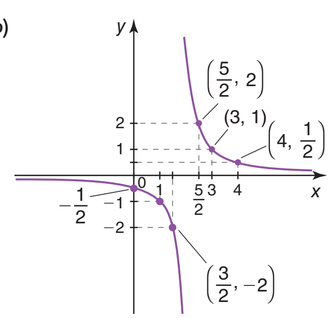
36 qualquer valor entre 10 e 20 toneladas

Exercícios de revisão cumulativa

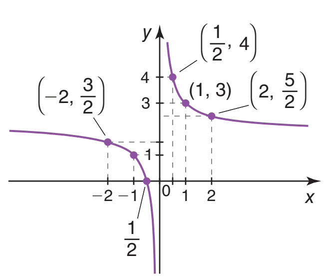
1 a)



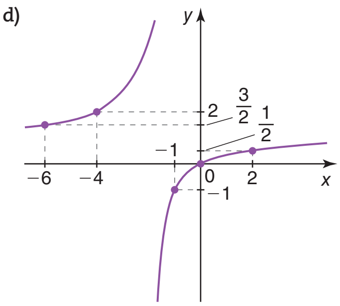
b)



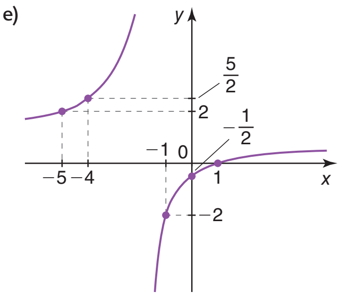
c)



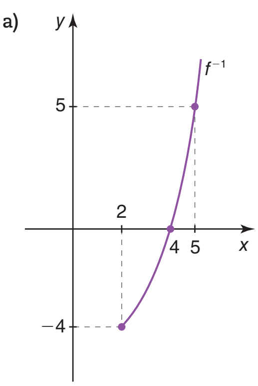
d)



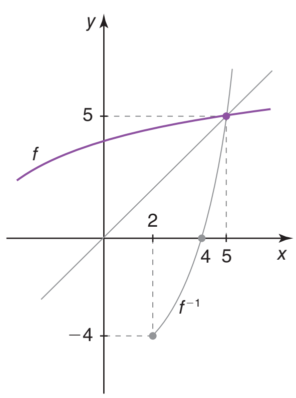
e)



2 a)



b)



3 a) 3

b) $f(x) = 2x - 5$

4 $P\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Análise da resolução

R$ 2.024,00

TEXTO COMPLEMENTAR

Propriedade P1 da união de conjuntos: $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$

Demonstração

Essa propriedade, que pode ser lida como "$B \subset A$ equivale a $A \cup B = A$", ou "$B \subset A$ se, e somente se, $A \cup B = A$", afirma que as duas sentenças a seguir são verdadeiras:

(I) Se B é subconjunto de A, então $A \cup B = A$.

(II) Se $A \cup B = A$, então B é subconjunto de A.

Por isso, para demonstrá-la, devemos demonstrar separadamente (I) e (II).

Demonstração de (I):

- Se x pertence a A, então x pertence a $(A \cup B)$; logo, A está contido em $(A \cup B)$.
- Se x pertence a $(A \cup B)$, então x pertence a A ou a B, mas, como B está contido em A, temos que, se x pertence a $(A \cup B)$, então x pertence a A; logo $(A \cup B)$ está contido em A.

  Assim, provamos que A é subconjunto de $(A \cup B)$ e que $(A \cup B)$ é subconjunto de A. Logo, podemos concluir que $(A \cup B) = A$.

Demonstração de (II):

- Se x pertence a B, então x pertence a $(A \cup B)$, mas como $A \cup B = A$, temos que x pertence a A. Assim, provamos que, se x pertence a B, então x pertence a A, o que significa que B é subconjunto de A.

As demonstrações de (I) e (II) permitem concluir a propriedade P1.

Nota:

Veremos adiante como fica a demonstração dessa propriedade adotando os símbolos matemáticos.

TEXTO COMPLEMENTAR

Propriedade P1 da diferença de conjuntos: $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing$

Demonstração

Essa propriedade, que pode ser lida como "$B \subset A$ equivale a $B - A = \varnothing$", ou "$B \subset A$ se, e somente se, $B - A = \varnothing$", afirma que as duas sentenças a seguir são verdadeiras:

(I) Se B é subconjunto de A, então $B - A = \varnothing$.

(II) Se $B - A = \varnothing$, então B é subconjunto de A.

Por isso, para demonstrá-la, devemos demonstrar separadamente (I) e (II).

Demonstração de (I):

Se x pertence a $B - A$, então x pertence a B e não pertence a A, mas como B está contido em A, deduzimos que não existe x tal que x pertence a B e não pertence a A.

Portanto, $B - A = \varnothing$.

Demonstração de (II):

Se $B - A = \varnothing$, então não existe x tal que x pertence a B e x não pertence a A. Assim concluímos que, se x pertence a B, então x pertence a A, ou seja, B é subconjunto de A.

As demonstrações de (I) e (II) permitem concluir a propriedade P1.

Nota:

Veremos adiante como fica a demonstração dessa propriedade adotando os símbolos matemáticos.

TEXTO COMPLEMENTAR

A origem dos números

Pela precariedade de evidências, os estudos sobre a origem do número envolvem, necessariamente, tanto fatos comprovados quanto suposições, como mostra o texto a seguir.

"O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* e *menos* quando se acrescentavam ou retiravam alguns objetos de uma coleção pequena, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso. Com a evolução gradual da sociedade, tornaram-se inevitáveis contagens simples. Uma tribo tinha que saber quantos eram seus membros e quantos eram seus inimigos e tornava-se necessário a um homem saber se seu rebanho de carneiros estava diminuindo. É provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Para uma contagem de carneiros, por exemplo, podia-se dobrar um dedo para cada animal. Podia-se também contar fazendo-se ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda. Então, talvez mais tarde, desenvolveu-se um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. E, mais tarde ainda, com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números. Esse desenvolvimento hipotético encontra respaldo em relatórios de antropólogos que estudaram povos primitivos em nossa época."

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 1995. p. 25-26.

TEXTO COMPLEMENTAR

Teoremas sobre números inteiros

Qualquer propriedade da Matemática que pode ser demonstrada é chamada de **teorema**. Neste item, estudaremos as demonstrações de alguns teoremas envolvendo números inteiros.

Demonstrações de um teorema da forma $p \Rightarrow q$

Em todo teorema que apresenta uma afirmação p da qual se pode concluir uma afirmação q, as afirmações p e q são chamadas, respectivamente, de **hipótese** e **tese**, sendo o teorema representado por $p \Rightarrow q$. Essa sentença pode ser lida das seguintes formas:

- p implica q;
- se p, então q;
- p é condição suficiente para q;
- q é condição necessária para p.

Por exemplo, a propriedade "Se k é um número inteiro par, então $k + 1$ é um número inteiro ímpar" é um teorema da forma $p \Rightarrow q$, onde p é a sentença "k é um número inteiro par", e q é a sentença "$k + 1$ é um número inteiro ímpar".

A ideia fundamental para a demonstração de teoremas do tipo $p \Rightarrow q$ é:

> Se o fato de uma afirmação p ser verdadeira garantir que outra afirmação q também é verdadeira, então a sentença $p \Rightarrow q$ é verdadeira.

Exercícios resolvidos

1 Demonstre que: "se a e b são números pares, então $a + b$ é um número par".

Resolução

Uma técnica de demonstração de um teorema do tipo $p \Rightarrow q$ consiste em deduzir a tese q a partir da hipótese p, isto é, admite-se que a hipótese p é verdadeira e conclui-se a tese q. Essa técnica de demonstração é chamada de **demonstração direta**.

Assim, admitindo-se que a e b são números pares, temos, por definição, que $a = 2n$ e $b = 2k$, com $\{n, k\} \subset \mathbb{Z}$.

Logo: $a + b = 2n + 2k = 2(n + k)$

Como a soma de dois números inteiros é um número inteiro (propriedade P3), temos que $n + k$ é um número inteiro e, portanto, $2(n + k)$ é um número par.

Logo, $a + b$ é um número par.

(*Nota*: a sentença "se a e b são números pares, então $a + b$ é um número par" poderia ter sido enunciada de outra forma, por exemplo, "a soma de dois números pares é um número par".)

2 Sendo x um número inteiro, demonstra-se que: "se x^2 é ímpar, então x é ímpar".

Resolução

Outra técnica de demonstração de um teorema do tipo $p \Rightarrow q$ consiste em anexar à hipótese p a negação da tese q (essa negação é indicada por $\sim q$) e provar que, ao se admitir como verdadeira a "nova hipótese" p e $\sim q$, chega-se a um absurdo, com o que se conclui que $p \Rightarrow q$. Essa técnica de demonstração é chamada de **demonstração indireta** ou **demonstração por absurdo**.

A negação da tese é x não é ímpar, ou seja, x é par, pois x é inteiro. Anexando essa negação à hipótese x^2 é ímpar, temos a "nova hipótese": x^2 é ímpar e x é par.

Sendo x um número par, temos, por definição, que $x = 2n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Assim:

$x^2 = (2n)^2 \Rightarrow x^2 = 4n^2$

$\therefore\ x^2 = 2(2n^2)$

Como $2n^2$ é um número inteiro, deduzimos que $2(2n^2)$ é um número par, ou seja, x^2 é um número par. O que é um **absurdo**, pois, por hipótese, x^2 é um número ímpar.

Como, admitindo que x é par chega-se a um absurdo, concluímos que o número inteiro x não poder ser par e, portanto, x é ímpar.

Demonstrações de um teorema da forma $p \Rightarrow q$

Observe que são verdadeiras as duas implicações:

- $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
- $x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$

Pelo fato de essas duas implicações serem verdadeiras, dizemos que as sentenças $x - 3 = 0$ e $x = 3$ são equivalentes e escrevemos $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Generalizando:

> Duas sentenças p e q, tais que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, são chamadas de sentenças equivalentes. Indica-se essa equivalência por $p \Leftrightarrow q$.

A dupla implicação $p \Leftrightarrow q$ pode ser lida das seguintes formas:

- p equivale a q;
- p, se e somente se, q;
- p é condição necessária e suficiente para q;
- q é condição necessária e suficiente para p.

Exemplos

a) $x = 3 \Leftrightarrow 2x = 6$

Essa sentença é **verdadeira**, pois são verdadeiras as duas implicações:

$x = 3 \Rightarrow 2x = 6$ e $2x = 6 \Rightarrow x = 3$

b) $x = 5 \Leftrightarrow x^2 = 25$

Essa sentença é **falsa**, pois é falsa a implicação $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$.

c) Demonstrar que o quadrado de um número inteiro é par se, e somente se, esse número é par, isto é, x^2 é par $\Leftrightarrow$ x é par, com $x \in \mathbb{Z}$.

Resolução

A proposição "x^2 é par $\Leftrightarrow$ x é par, com $x \in \mathbb{Z}$" pode ser decomposta nas duas proposições:

x é par $\Rightarrow$ x^2 é par, com $x \in \mathbb{Z}$ (I) e

x^2 é par $\Rightarrow$ x é par, com $x \in \mathbb{Z}$ (II)

Demonstração de (I):

- Pela hipótese, x é par; logo, podemos representar x por $x = 2n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Então: $x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot 2n^2$
- Como, por P5, $2n^2$ é inteiro, concluímos que $2 \cdot 2n^2$ é par. Assim, demonstramos que x^2 é par.

Demonstração de (II):

Faremos essa demonstração por absurdo.

- Consideramos que x não seja par, isto é, que x seja ímpar. Então, podemos representar x por $x = 2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$

- Como por P3 e por P5, $(2n^2 + 2n)$ é inteiro, então $x^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ é impar.

  Mas isso é um absurdo, pois, por hipótese, x^2 é par. Como, admitindo x ímpar, chegamos a um absurdo, concluímos que x não pode ser ímpar, portanto x é par.

Assim, está demostrada a parte (II).

Pela demonstração de (I) e (II), provamos que:

x^2 é par $\Leftrightarrow$ x é par, com $x \in \mathbb{Z}$

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstrações adotando símbolos matemáticos

Veremos novamente a demonstração da propriedade P1 da união de conjuntos e da P1 da diferença de conjuntos, agora adotando os símbolos matemáticos.

Se B é subconjunto de A, então $A \cup B = A$ e, se $A \cup B = A$, então B é subconjunto de A. Ou seja: $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$

Demonstração

A sentença $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$ pode ser decomposta em duas sentenças:

$$\underbrace{B \subset A \Rightarrow A \cup B = A}_{(I)} \quad \text{e} \quad \underbrace{A \cup B = A \Rightarrow B \subset A}_{(II)}$$

Demonstração de (I):
- $x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B)$; logo, $A \subset (A \cup B)$.
- $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$, mas como $B \subset A$, temos:
  $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A$; logo $(A \cup B) \subset A$.

Assim, provamos que $A \subset (A \cup B)$ e $(A \cup B) \subset A$.
Logo, podemos concluir que $(A \cup B) = A$.
Demonstração de (II):
- $x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$, mas como $A \cup B = A$, temos $x \in B \Rightarrow x \in A$; logo $B \subset A$.

As demonstrações de (I) e (II) permitem concluir que: $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$

Sendo A e B conjuntos quaisquer, temos: $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing$

Demonstração

A sentença $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing$ pode ser decomposta em duas sentenças:

$$\underbrace{B \subset A \Rightarrow B - A = \varnothing}_{(I)} \quad \text{e} \quad \underbrace{B - A = \varnothing \Rightarrow B \subset A}_{(II)}$$

Demonstração de (I):
$x \in (B - A) \Rightarrow x \in B$ e $x \notin A$, mas como $B \subset A$, não existe x tal que $x \in B$ e $x \notin A$.
Portanto, $B - A = \varnothing$.
Demonstração de (II):
Se $B - A = \varnothing$, então $x \in B \Rightarrow x \in A$, ou seja, $B \subset A$.
As demonstrações de (I) e (II) permitem concluir que: $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing$

TEXTO COMPLEMENTAR

Vamos demonstrar que a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 não é um número racional.

Demonstração

A medida d da diagonal de um quadrado de lado 1 é dada por:
$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$
Precisamos mostrar que d não é racional. Para isso, faremos uma demonstração por absurdo.

Suponhamos que existam dois números inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Podemos admitir, sem perda de generalidade, que a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível, isto é, mdc$(p, q) = 1$. Assim, temos apenas dois casos a considerar: p é par ou p é ímpar.

1º caso
Sendo p um número par, podemos representá-lo por $p = 2n$, como $n \in \mathbb{Z}$.
Assim: $\left(\frac{2n}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2$
$\therefore\ 2n^2 = q^2$
Note que q^2 é par, pois $2n^2$ é par. Além disso, q é par, pois o quadrado de um número inteiro é par se, e somente se, esse número é par. Essa conclusão é absurda, pois, sendo p e q números pares, a fração $\frac{p}{q}$ não é irredutível. Logo, o primeiro caso não pode ocorrer.

2º caso
Sendo p um número ímpar, podemos representá-lo por $q = 2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$.
Assim:
$\left(\frac{2n+1}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow (2n + 1)^2 = 2q^2$
O quadrado de um número ímpar é sempre ímpar, logo $(2n + 1)^2$ é ímpar. Então, temos:

$$\underbrace{(2n+1)^2}_{\text{ímpar}} = \underbrace{2q^2}_{\text{par}}$$

Essa última igualdade é absurda, pois não existe um número que seja par e ímpar simultaneamente. Logo, o segundo caso também não pode ocorrer.
Como não é possível nenhum dos dois casos, concluímos que não existe nenhum racional $\frac{p}{q}$ cujo quadrado seja igual a 2. Assim, demonstramos que a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 não é um número racional.

TEXTO COMPLEMENTAR

Vamos demonstrar que: "A razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é igual a um número decimal com representação finita ou é igual a uma dízima periódica."

Demonstração

Na divisão do número natural a pelo número natural n, com $n \neq 0$, o resto r é tal que $0 \leqslant r < n$.

- Se $r = 0$, o quociente é um número com representação decimal finita.
- Se $0 < r < n$, então r pode assumir no máximo $n - 1$ valores: 1, 2, 3, ... , $n - 1$. Assim, no máximo no n-ésimo resto, um dos restos anteriores vai se repetir, provocando uma repetição nas casas decimais do quociente, o que dará origem a uma dízima periódica.

TEXTO COMPLEMENTAR

Taxa média de variação de uma função


DBURKE/ALAMY/OTHER IMAGES

Um automóvel passou por um radar localizado em um ponto A e, 30 segundos depois, por um radar em um ponto B. No radar em A, a velocidade registrada foi 22 m/s, e, no radar em B, foi 28 m/s.

A **taxa média de variação da velocidade** desse veículo no trecho AB, em relação ao tempo, é a razão entre a diferença das velocidades registradas em A e em B e o tempo transcorrido durante o trajeto do veículo no trecho AB. Isto é, indicando por Δv e Δt a variação da velocidade e a correspondente variação do tempo, respectivamente, temos:

taxa média de variação da velocidade =

$$= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(28 - 22)\text{ m/s}}{30\text{ s}} = 0{,}2\ \frac{\text{m/s}}{\text{s}}$$

Essa taxa média de variação indica que o veículo aumentou sua velocidade em 0,2 m/s a cada segundo.

Para qualquer função $y = f(x)$, a razão entre a variação de valores de y e a correspondente variação de valores de x, nessa ordem, é chamada de **taxa média de variação** de y em relação a x.

Ou seja, se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois pontos distintos do gráfico da função $y = f(x)$, então qualquer uma das razões abaixo é a taxa média de variação de y em relação a x, quando este varia de x_A a x_B.

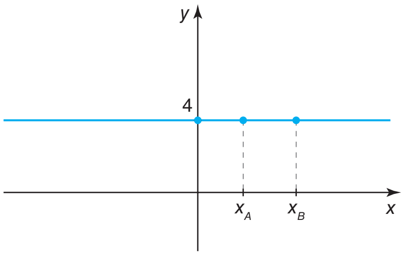
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ ou } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Por meio da taxa média de variação de uma função f, as propriedades seguintes permitem identificar os subconjuntos S do domínio de f onde a função é constante, crescente ou decrescente:

- f é **constante** em S se, e somente se, a taxa média de variação de f é **nula** para quaisquer valores distintos x_1 e x_2 de S;
- f é **crescente** em S se, e somente se, a taxa média de variação de f é **positiva** para quaisquer valores distintos x_1 e x_2 de S;
- f é **decrescente** em S se, e somente se, a taxa média de variação de f é **negativa** para quaisquer valores distintos x_1 e x_2 de S.

Exemplos

a) Considerando a função $y = 4$, sejam $A(x_A, 4)$ e $B(x_B, 4)$ dois pontos distintos quaisquer do gráfico dessa função.



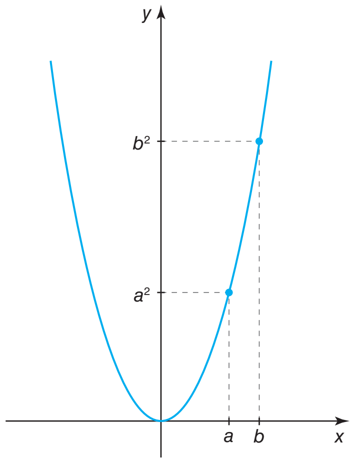
A taxa média de variação da função, quando x varia de x_A a x_B, é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 4}{x_B - x_A} = 0$$

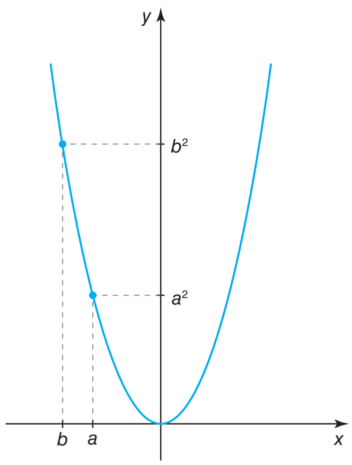
b) Vamos considerar a função $y = x^2$ e dois pontos distintos, $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$, do gráfico dessa função. A taxa média de variação da função, quando x varia de a a b, é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = b + a$$

- Para a e b positivos, a soma $(a + b)$ é positiva; logo, a função é crescente no intervalo $]0, +\infty[$.



- Para a e b negativos, a soma $(a + b)$ é negativa; logo, a função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$.



Exercícios resolvidos

1 Um automóvel passou pelo ponto A de uma estrada e, 10 segundos depois, passou pelo ponto B. No trecho AB, a distância d entre o automóvel e o ponto A, em metro, em função do tempo t, em segundo, pode ser expressa pela equação

$$d(t) = \frac{t^2 + 330t}{15}.$$

a) Calcular a taxa média de variação da distância d entre o automóvel e o ponto A, em relação ao tempo, 3 segundos após a passagem pelo ponto A.

> A taxa média de variação da distância em relação ao tempo é chamada de **velocidade média**.

b) Calcular a velocidade média do automóvel no intervalo de 1 a 5 segundos após a passagem pelo ponto A.

Resolução

a) $$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(3) - d(0)}{3 - 0} =$$

$$= \frac{\frac{3^2 + 330 \cdot 3}{15} - \frac{0^2 + 330 \cdot 0}{15}}{3 - 0} = 22{,}2$$

Isso significa que a velocidade média do automóvel, nos 3 primeiros segundos após a passagem pelo ponto A, foi 22,2 m/s.

b) Essa velocidade média é a taxa média de variação da distância d, em metro, em relação ao tempo, em segundo, no intervalo de 1 a 5 s:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(5) - d(1)}{5 - 1} =$$

$$= \frac{\frac{5^2 + 330 \cdot 5}{15} - \frac{1^2 + 330 \cdot 1}{15}}{5 - 1} = 22{,}4$$

Logo, a velocidade média pedida é 22,4 m/s.

2 Usando o conceito de taxa média de variação, mostrar que a função $f(x) = 3x - 4$ é crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

Resolução

Sendo $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$ dois pontos distintos quaisquer do gráfico de f, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_2 - 4 - (3x_1 - 4)}{x_2 - x_1} = \frac{3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 3$$

Como a taxa de variação é positiva para quaisquer dois pontos distintos do gráfico de f, concluímos que f é crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

Exercícios propostos

1 Calcule a taxa média de variação da função $f(x) = x^3 + x$ quando x varia no intervalo:

a) [1, 3]

b) [−2, 0]

2 Calcule a taxa média de variação da função $f(x) = \frac{x - 3}{x - 4}$ quando x varia de:

a) 6 a 9

b) 0 a 3

3 Usando a definição de taxa média de variação de uma função, prove que a função $f(x) = \frac{3}{2 - x}$ é crescente no intervalo $]2, +\infty[$.

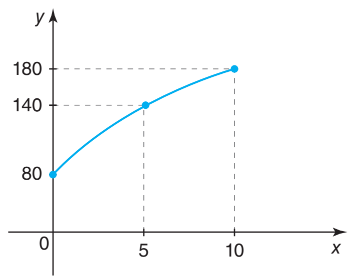
4 Aplicando a definição de taxa média de variação de uma função, prove que a função $f(x) = x^4$ é:

a) crescente no intervalo $[0, +\infty[$;

b) decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.

5 Aplicando a definição de taxa média de variação de uma função, prove que a função $f(x) = 4 - 3x$ é decrescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

6 O gráfico abaixo descreve o endividamento externo y, em bilhão de dólares, de um país, em função do tempo t, em ano, em um período de 10 anos.



Pode-se afirmar que, nesses 10 anos, a taxa média de variação da dívida externa desse país, em relação ao tempo, foi:

a) crescente.

b) maior nos últimos 5 anos.

c) maior nos primeiros 5 anos.

d) constante em qualquer intervalo de tempo considerado nesse período.

e) nula em algum intervalo de tempo considerado nesse período.

7 O volume V de um *iceberg*, em metro cúbico, durante o degelo causado pela elevação de temperatura, é calculado em função do tempo t, em mês, em determinado período, por: $V(t) = \frac{40.000}{t + 1}$.

a) Qual era o volume do *iceberg* no início do degelo, isto é, no tempo $t = 0$?

b) Calcule a taxa média de variação do volume desse *iceberg*, em metro cúbico, no intervalo de 2 a 3 meses após o início do degelo.

8 Um balão meteorológico é solto do solo. A altura do balão, em metro, em relação ao solo, após t segundos depois de ser solto, é dada por $h(t) = t^2 + 2t$.

NATIONAL GEOGRAPHIC/GETTY IMAGES

a) Calcule a taxa média de variação da altura h, em metro, em relação ao tempo t, em segundo, no intervalo de 2 a 4 segundos depois da soltura do balão.

b) Calcule a velocidade média do balão, em metro por segundo, no intervalo de 2 a 4 segundos após a soltura.

9 Uma pequena pedra é atirada em um lago provocando ondas circulares de centro no ponto de impacto onde a pedra caiu.

Em uma dessas ondas, a medida r do raio, em centímetro, em função do tempo t, em segundo, é dada por $r(t) = 40t$.

LEONID SEREBRENNIKOV/ALAMY/OTHER IMAGES

a) Calcule a taxa média de variação do comprimento do raio, em centímetro, em relação ao tempo t, em segundo, de 3 a 5 segundos após o impacto da pedra na água.

b) Sabendo que a área A de um círculo de raio r é dada por $A(r) = \pi r^2$, calcule a taxa média de variação da área, em centímetro quadrado, do círculo limitado por essa onda, em relação ao tempo t, em segundo, no intervalo de 1 a 4 segundos após o impacto da pedra na água.

10 Ao ser inflada, uma bola tem a medida r de seu raio, em centímetro, aumentada em função do tempo t, em segundo, de acordo com a equação $r(t) = \frac{3t}{5}$.

a) Calcule a taxa média de variação do comprimento do raio, em centímetro, em relação ao tempo t, em segundo, no intervalo de 3 a 5 segundos após o início do enchimento da bola.

b) Sabendo que a área A da superfície de uma bola de raio r é dada por $A(r) = 4\pi r^2$, calcule a taxa média de variação da área da superfície da bola, em centímetro quadrado, em relação ao tempo t, em segundo, no intervalo de 1 a 3 segundos após o início do enchimento da bola.

c) Sabendo que o volume V de uma bola de raio r é dado por $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$, calcule a taxa média de variação do volume da bola, em centímetro cúbico, em relação ao tempo t, em segundo, no intervalo de 2 a 4 segundos após o início do enchimento da bola.

11 Segundo a lei de Boyle, para gases confinados sob temperatura constante, a pressão p exercida sobre o gás e o volume v desse gás são inversamente proporcionais, isto é, $pv = k$, em que k é uma constante não nula.

Suponha que a pressão p, em atm (atmosfera), varie em função do tempo t, em minuto, de acordo com a equação $p(t) = 8 + 2t$.

a) Calcule a taxa média de variação da pressão, em atmosfera, em relação ao tempo t, em minuto, no intervalo de 1 a 2 min depois de iniciado o aumento de pressão sobre o gás.

b) Supondo $pv = 4$, calcule a taxa média de variação do volume v, em litro, em relação ao tempo t, em minuto, quando t varia de 1 a 2 min.

12 Usando a definição de taxa média de variação de uma função, prove que a função $f(x) = x^3$ é crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

13 Aplicando a definição de taxa média de variação de uma função, prove que a função $f(x) = \sqrt{x}$ é crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

ROTEIRO DE ESTUDO

Vamos variar os parâmetros a e b da função $g(x) = f(x + a) + b$ e observar a relação entre o gráfico de g e o gráfico de f.

1 Substitua a por zero e atribua um valor qualquer ao parâmetro b. Repita algumas vezes esse procedimento, atribuindo outros valores para b, e responda:

a) Como é obtido o gráfico de g, a partir do gráfico de f, quando o valor de b é positivo?

b) Como é obtido o gráfico de g, a partir do gráfico de f, quando o valor de b é negativo?

c) Como é obtido o gráfico de g, a partir do gráfico de f, quando b é igual a zero?

d) Podemos dizer que, quando o parâmetro b assume um valor diferente de zero, o gráfico da função g pode ser obtido por uma:

- translação horizontal do gráfico da função f.
- reflexão do gráfico da função f em relação ao eixo Ox.
- translação vertical do gráfico da função f.
- reflexão do gráfico da função f em relação ao eixo Oy.

2 Substitua b por zero e atribua um valor qualquer ao parâmetro a. Repita algumas vezes esse procedimento, atribuindo outros valores para a, e responda:

a) Como é obtido o gráfico de g, a partir do gráfico de f, quando o valor de a é positivo?

b) Como é obtido o gráfico de g, a partir do gráfico de f, quando o valor de a é negativo?

c) Como é obtido o gráfico de g, a partir do gráfico de f, quando a é igual a zero?

d) Podemos dizer que, quando o parâmetro a assume um valor diferente de zero, o gráfico da função g pode ser obtido por uma:

- translação horizontal do gráfico da função f.
- reflexão do gráfico da função f em relação ao eixo Ox.
- translação vertical do gráfico da função f.
- reflexão do gráfico da função f em relação ao eixo Oy.

3 Atribua valores quaisquer a a e a b. Como é obtido o gráfico de g, a partir do gráfico de f:

a) quando a e b são positivos?

b) quando a e b são negativos?

c) quando a é positivo e b é negativo?

d) quando a é negativo e b é positivo?

4 Substitua os parâmetros a e b por zero.

a) Clique no botão $g(-x)$. Qual é a relação entre o gráfico obtido e o gráfico de f?

b) Clique no botão $-g(x)$. Qual é a relação entre o gráfico obtido e o gráfico de f?

5 Podemos concluir que o gráfico da função definida por $g(-x)$ pode ser obtido por uma:

- translação horizontal do gráfico da função definida por $g(x)$.
- reflexão do gráfico da função definida por $g(x)$ em relação ao eixo Oy.
- translação vertical do gráfico da função definida por $g(x)$.
- reflexão do gráfico da função definida por $g(x)$ em relação ao eixo Ox.

6 Também podemos concluir que o gráfico da função definida por $-g(x)$ pode ser obtido por uma:

- translação horizontal do gráfico da função definida por $g(x)$.
- reflexão do gráfico da função definida por $g(x)$ em relação ao eixo Oy.
- translação vertical do gráfico da função definida por $g(x)$.
- reflexão do gráfico da função definida por $g(x)$ em relação ao eixo Ox.

7 Agora varie os parâmetros a e b e, utilizando os botões $g(-x)$ e $-g(x)$, observe as transformações produzidas nos gráficos dessas funções.

TEXTO COMPLEMENTAR

Demonstração de que o gráfico de toda função afim é uma reta

Demonstraremos o seguinte teorema:

O gráfico de toda função afim é uma reta.

Demonstração

Sejam $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$ e $P(x_P, y_P)$ três pontos distintos quaisquer do gráfico da função $y = ax + b$. Temos, então:

$$y_M = ax_M + b \qquad \text{(I)}$$
$$y_N = ax_N + b \qquad \text{(II)}$$
$$y_P = ax_P + b \qquad \text{(III)}$$

Subtraindo membro a membro (I) e (II), obtemos:

$$y_M - y_N = ax_M + b - ax_N - b \Rightarrow y_M - y_N = a(x_M - x_N)$$

Como M e N são pontos distintos do gráfico da função, temos $x_M \neq x_N$, portanto:

$$\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = a \qquad \text{(IV)}$$

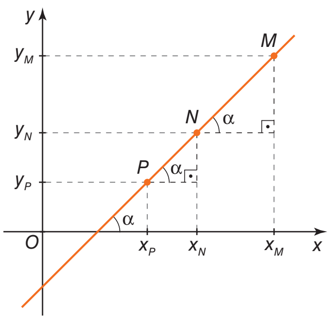
Subtraindo membro a membro (II) e (III), obtemos:

$$y_N - y_P = ax_N + b - ax_P - b \Rightarrow y_N - y_P = a(x_N - x_P)$$

Como N e P são pontos distintos do gráfico da função, temos $x_N \neq x_P$, portanto:

$$\frac{y_N - y_P}{x_N - x_P} = a \qquad \text{(V)}$$

As equações (IV) e (V) mostram que são semelhantes os triângulos retângulos de hipotenusas $\overline{NM}$ e $\overline{PN}$ e de catetos paralelos aos eixos coordenados, conforme mostra a figura abaixo.



Assim, as retas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{NP}$ formam ângulo de mesma medida α com o eixo Ox. Logo, essas retas são paralelas. Como **$\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{NP}$ são paralelas** e têm o ponto N em comum, concluímos que $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{NP}$ são retas coincidentes e que, portanto, M, N e P são pontos colineares, isto é, são pontos de uma mesma reta. Provamos assim que quaisquer três pontos distintos do gráfico de $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, são colineares. Concluímos que o gráfico dessa função é uma reta.

ROTEIRO DE ESTUDO

Vamos variar os parâmetros a e b da função $f(x) = ax + b$ e observar o comportamento do gráfico da função f.

1 Atribuindo o valor zero ao parâmetro b e 1 ao parâmetro a, obtemos a função $f_1(x) = x$. Construa esse gráfico e, em seguida, mantenha o parâmetro b igual a zero e atribua outro valor ao parâmetro a. Repita esse procedimento algumas vezes e responda:

a) Qual é o ponto comum a todos os gráficos obtidos?

b) Podemos dizer que quando o parâmetro a assume um valor não nulo e diferente de 1, mantendo b igual a zero, o gráfico da função pode ser obtido por uma:

- translação horizontal do gráfico da função f_1.
- rotação do gráfico da função f_1 em relação à origem do sistema de eixos.
- translação vertical do gráfico da função f_1.
- reflexão do gráfico da função f_1 em relação ao eixo Oy.

2 Construa os gráficos sugeridos a seguir e analise cada uma das situações com relação às transformações geométricas: translação (horizontal ou vertical), rotação (em relação a qual ponto) e reflexão (em relação a qual eixo).

a) Fixando um valor positivo para o parâmetro a, atribua valores positivos ao parâmetro b.

b) Fixando um valor negativo para o parâmetro a, atribua valores negativos ao parâmetro b.

c) Fixando um valor negativo para o parâmetro b, atribua valores positivos ao parâmetro a.

3 Fixe um valor qualquer para o parâmetro b e atribua valores em ordem crescente ao parâmetro a, a partir de $a = 1$. Para algum valor de a, o gráfico é uma reta paralela ao eixo Oy? Justifique.

4 Fixe um valor qualquer para o parâmetro b e atribua valores em ordem decrescente ao parâmetro a, a partir de $a = -1$. Descreva os gráficos assim construídos como transformações do gráfico em que $a = -1$.

5 Atribuindo valores quaisquer para os parâmetros a e b, com $a \neq 0$, algum dos gráficos é uma reta paralela ao eixo Ox? Justifique.

6 Construa o gráfico da função: $f(x) = -3x + 6$ e a partir dele responda:

a) Qual é a raiz de f?

b) f é crescente ou decrescente?

c) Para quais valores de x f é positiva?

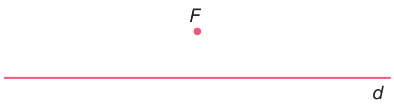
d) Para quais valores de x f é negativa?

7 A partir da análise gráfica, determine o conjunto solução da inequação: $\frac{3x + 6}{4 - x} \leqslant 0$

TEXTO COMPLEMENTAR

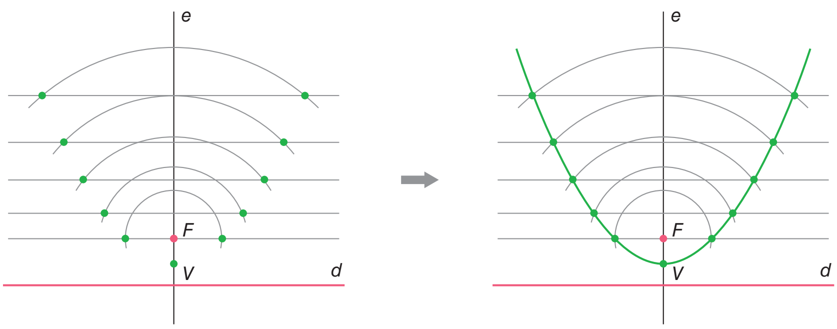
Esboço de uma parábola com régua e compasso

Vamos obter, com régua e compasso, alguns pontos da parábola que tem como foco o ponto *F* e como diretriz a reta *d*, representados abaixo.



- Primeiro, traçamos o eixo de simetria e da parábola.
- O vértice *V* da parábola é o ponto médio do segmento cujos extremos são *F* e o ponto de intersecção da reta *e* e da reta *d*.
- Por alguns pontos da semirreta $\overrightarrow{VF}$, distintos de *V*, traçamos retas paralelas a *d*.
- Com a ponta-seca do compasso em *F* e abertura igual à distância entre *d* e uma das retas paralelas descritas, traçamos um arco que cruza essa reta em dois pontos. Esses pontos pertencem à parábola, pois equidistam de *F* e *d*.
- Repetimos o procedimento para cada uma das paralelas traçadas, encontrando mais pontos da parábola.

Unindo por meio de uma curva os pontos assim determinados, obtemos um esboço da parábola de foco *F* e diretriz *d*:



Exercícios propostos

1 Representando em seu caderno uma reta *d* e um ponto F distante 3 cm de *d*, esboce, com régua e compasso, a parábola de foco F e diretriz *d*.

2 Em uma parábola de foco F, diretriz *d* e vértice V, a distância entre V e *d* é 2 cm. Qual é a distância entre o foco F e a diretriz *d*?

ROTEIRO DE ESTUDO

Vamos variar os parâmetros reais a, m e k da função $f(x) = a(x + m)^2 + k$ e observar o comportamento do gráfico da função f.

1 Fixe valores quaisquer aos parâmetros m e k. Com esses valores fixos, atribua valores positivos e valores negativos ao parâmetro a, obtendo algumas parábolas. Descreva o sentido da concavidade das parábolas para:

a) valores positivos de a.

b) valores negativos de a.

2 Fixe um valor diferente de zero ao parâmetro a e o valor zero ao parâmetro m. Com esses valores fixos, atribua diferentes valores ao parâmetro k, obtendo assim os gráficos de algumas funções. Indicando por f_1 uma dessas funções, podemos dizer que o gráfico de cada uma das demais funções obtidas é uma:

- translação horizontal do gráfico da função f_1.
- rotação do gráfico da função f_1 em relação à origem do sistema de eixos.
- translação vertical do gráfico da função f_1.
- reflexão do gráfico da função f_1 em relação ao eixo Oy.

3 Fixe um valor diferente de zero ao parâmetro a e um valor qualquer ao parâmetro k. Com esses valores fixos, atribua diferentes valores ao parâmetro m, obtendo assim os gráficos de algumas funções. Indicando por f_2 uma dessas funções, podemos dizer que o gráfico de cada uma das demais funções obtidas é uma:

- translação horizontal do gráfico da função f_2.
- rotação do gráfico da função f_2 em relação à origem do sistema de eixos.
- translação vertical do gráfico da função f_2.
- reflexão do gráfico da função f_2 em relação ao eixo Oy.

4 Atribuindo um valor diferente de zero ao parâmetro a, a função terá sempre um valor mínimo ou máximo para quaisquer valores dos parâmetros m e k? Justifique.

5 Partindo da função inicial $f(x) = (x - 1)^2 + k$, determine valores para o parâmetro k de maneira que a função tenha:

a) duas raízes reais e iguais.

b) duas raízes reais e distintas.

c) nenhuma raiz real.

6 A partir da análise gráfica, determine o conjunto solução da inequação:
$(x + 1)^2 - 1 > 0$

CONTEÚDO DIGITAL - PARTE 1

Animações

Situações que envolvem funções: altitude em função da pressão

Matemática 1 > Parte 1 > Cap. 2 > Seção 2.1

A animação mostra o salto de um paraquedista fazendo uma relação entre altitude e pressão atmosférica.

Situações que envolvem funções: temperatura e umidade relativa em função do tempo

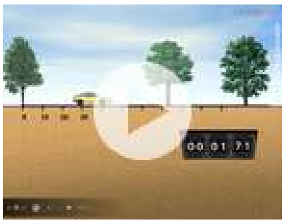
Matemática 1 > Parte 1 > Cap. 2 > Seção 2.2

Essa animação permite observar a variação da temperatura e da umidade relativa do ar durante dias em uma determinada região.

Situações que envolvem funções: volume em função do tempo

Matemática 1 > Parte 1 > Cap. 2 > Seção 2.3

Nesta animação é possível observar algumas situações da vazão de água em uma residência, representada pelo gráfico do volume em função do tempo.



Situações que envolvem funções: velocidade em função do tempo

Matemática 1 > Parte 1 > Cap. 2 > Seção 2.4

Essa animação mostra um carro que parte do repouso e descreve um movimento. Com base nisso, é construído um gráfico da velocidade em função do tempo, retratando a variação da velocidade do carro.

PARTE II

PARTE II

Capítulo

6

Função modular

Como foi possível observar nas últimas edições dos jogos olímpicos, as mulheres vêm conquistando cada vez mais espaço nas competições. A primeira participação feminina ocorreu em 1900, nas Olimpíadas de Paris, que teve um total de 997 atletas, dos quais apenas 22 eram mulheres. Nas Olimpíadas de Pequim, em 2008, dos 277 atletas brasileiros, 133 eram mulheres – quase a metade.

Nessas olimpíadas, a atleta brasileira Maurren Maggi conquistou o 1º lugar na prova de salto em distância, o que representou um verdadeiro marco para as mulheres atletas.

O conceito de distância entre dois pontos é essencial em estudos que envolvem grandezas e suas medidas. Neste capítulo, introduzimos o estudo de distâncias através da função modular em uma variável, que considera apenas distâncias entre pontos do eixo real.

6.1 Módulo de um número real

O módulo de um número real indica uma distância no eixo real.

6.2 A função modular

Para o estudo de distâncias envolvendo grandezas variáveis, definimos a função modular.

6.3 Equações modulares

As equações que relacionam funções modulares podem ser resolvidas pela definição de módulo de um número real, auxiliada por suas propriedades.

6.4 Inequações modulares

Do mesmo modo que nas equações, aplicamos a definição de módulo e suas propriedades na resolução de inequações modulares.

Para pensar

Em um treino, uma atleta de salto em distância atingiu em seu primeiro salto a marca de 6,5 metros. Em seu segundo salto, atingiu uma distância de x metros. Qual é a expressão que representa a distância entre os dois pontos alcançados nos saltos?

Módulo de um número real

Objetivos

- **Entender** o conceito de módulo.
- **Calcular** o módulo de um número.

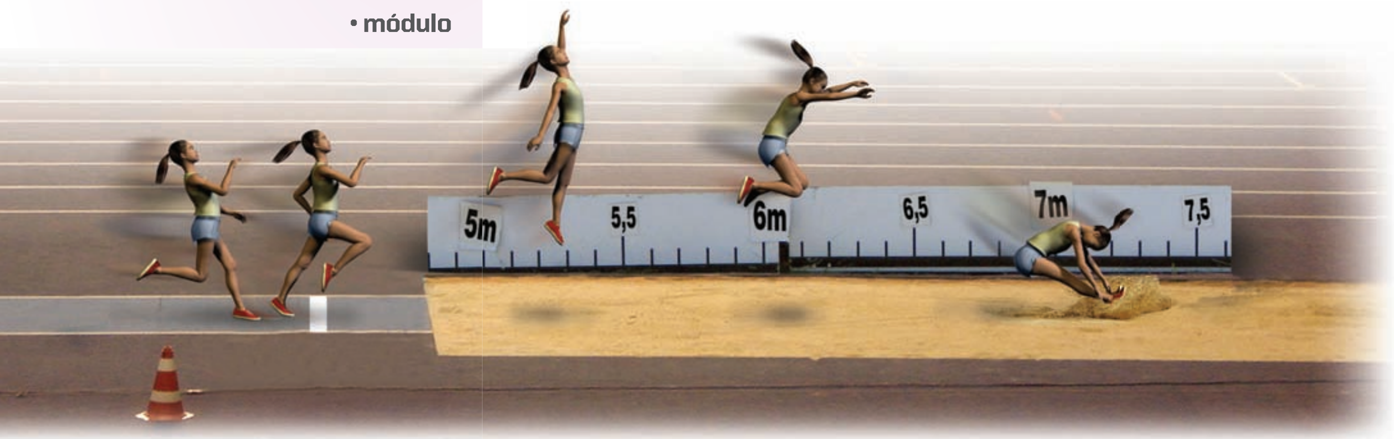
Termo e conceito

- **módulo**

Introdução

Na situação da abertura, a primeira marca da atleta foi 6,5 metros e a segunda marca foi x metros. Para representar a distância entre essas marcas, devemos analisar dois casos:

1º caso: o segundo salto alcançou ou ultrapassou o primeiro, ou seja, $x \geqslant 6{,}5$.



Nesse caso, a distância entre os saltos é dada por: $x - 6{,}5$.

2º caso: o segundo salto não alcançou a mesma distância do primeiro, ou seja, $x < 6{,}5$.

Nesse caso, a distância entre os saltos é dada por: $6{,}5 - x$.

Podemos resumir esses dois casos, escrevendo a distância d entre os saltos do seguinte modo:

$$d = \begin{cases} x - 6{,}5, \text{ se } x \geqslant 6{,}5 \\ 6{,}5 - x, \text{ se } x < 6{,}5 \end{cases}$$

Neste capítulo, veremos que as sentenças que descrevem a distância d entre os dois pontos alcançados nos saltos podem ser sintetizadas em uma única sentença:

$$d = |x - 6{,}5|$$

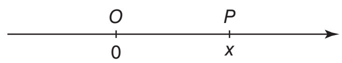
Lemos: "d é igual ao módulo de $x - 6{,}5$".

O módulo de $x - 6{,}5$ deve ser entendido como a distância entre os pontos de abscissas x e 6,5 no eixo real, que também pode ser indicada por $|6{,}5 - x|$.

A seguir, veremos o conceito de módulo de um número real.

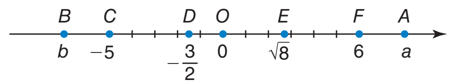
Definição

Vamos considerar, no eixo real de origem *O*, um ponto *P* de abscissa *x*.



Chama-se **módulo** (ou valor absoluto) de *x*, que indicamos por $|x|$, a distância entre os pontos *P* e *O*.

Exemplos



- $|6| = 6$, pois a distância do ponto *F* até a origem é 6.
- $|-5| = 5$, pois a distância do ponto *C* até a origem é 5.
- $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$, pois a distância do ponto *D* até a origem é $\frac{3}{2}$.
- $|0| = 0$, pois a distância do ponto *O* até a origem é nula.
- $|\sqrt{8}| = \sqrt{8}$, pois a distância do ponto *E* até a origem é $\sqrt{8}$.
- $|a| = a$, pois, como *a* é positivo (veja a figura), a distância do ponto *A* até a origem é *a*.
- $|b| = -b$, pois a distância de *B* até a origem é $-b$. (Atenção: o número $-b$ é positivo, pois, como se vê na figura, *b* é negativo.)

Note que, como o módulo é uma distância, ele será sempre positivo ou nulo. Observe também que o módulo de um número positivo é o próprio número, e o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

Para qualquer número real *x*, temos:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Indique o valor de $|\sqrt{7} - 2|$ e $|\sqrt{7} - 5|$.

Resolução

- Sabemos que $\sqrt{7}$ é maior que 2, então $(\sqrt{7} - 2)$ é positivo. Como o módulo de um número positivo é o próprio número, temos:

$$|\sqrt{7} - 2| = \sqrt{7} - 2$$

- Sabemos que $\sqrt{7}$ é menor que 5, então $(\sqrt{7} - 5)$ é negativo. Como o módulo de um número negativo é o oposto desse número, temos:

$$|\sqrt{7} - 5| = -\sqrt{7} + 5 = 5 - \sqrt{7}$$

2 Se *x* é um número real qualquer, com $4 \leqslant x \leqslant 6$, a expressão $|x - 3| + |x - 8|$ é igual a:

a) $2x - 11$
b) $2x + 11$
c) $2x + 5$
d) 5
e) 11

Resolução

- Para qualquer *x*, com $4 \leqslant x \leqslant 6$, tem-se $x > 3$, ou seja, $x - 3 > 0$. Logo, $|x - 3| = x - 3$, pois o módulo de um número positivo é o próprio número.
- Para qualquer *x*, com $4 \leqslant x \leqslant 6$, tem-se $x < 8$, ou seja, $x - 8 < 0$. Logo, $|x - 8| = -x + 8$, pois o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

Assim, concluímos que:

$$|x - 3| + |x - 8| = x - 3 + (-x + 8) = 5$$

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

3 Demonstre as seguintes propriedades dos módulos para quaisquer números reais *x* e *y*:

a) $\sqrt{x^2} = |x|$

b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

c) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$

Resolução

a) A raiz quadrada do número real não negativo x^2 é o número real não negativo cujo quadrado é igual a x^2. Logo:

- $\sqrt{x^2} = x$, se $x \geqslant 0$
- $\sqrt{x^2} = -x$, se $x < 0$

Assim, concluímos que: $\sqrt{x^2} = |x|$, para qualquer número real x.

b) Aplicando a propriedade demonstrada no item **a**, temos:

$$|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$$

(*Nota*: Essa propriedade pode ser enunciada do seguinte modo: "O módulo do produto é igual ao produto dos módulos".)

c) Aplicando a propriedade demonstrada no item **a**, temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

(*Nota*: Essa propriedade pode ser enunciada do seguinte modo: "O módulo do quociente é igual ao produto dos módulos".)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Indique o valor de cada sentença:

a) $|7|$
b) $|0|$
c) $|-3|$
d) $\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$
e) $|\sqrt{3} - 2|$
f) $|2 - \sqrt{3}|$
g) $|-3 - \sqrt{7}|$
h) $|\pi - 3|$
i) $|\pi - 3{,}14|$
j) $|-3| + |5|$
k) $|\sqrt{10} - \sqrt{11}| + \sqrt{10}$
l) $|\sqrt{7} - \sqrt{5}| - |\sqrt{5} - \sqrt{7}|$

2 Se $x \in [2, 10]$, represente a expressão $|x - 1| + |x - 20|$ por outra equivalente que não contenha os símbolos de módulo.

3 Aplicando uma das propriedades demonstradas no exercício resolvido 3 e a definição de módulo, pode-se concluir que $|x|^2 = x^2$, para qualquer número real x. Justifique essa afirmação.

4 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) as afirmações a seguir.

a) $|x| = x$, para todo x, com $x \in \mathbb{R}$
b) $|x| = |-x|$, para todo x, com $x \in \mathbb{R}$
c) $|x^3| = x^3$, para todo x, com $x \in \mathbb{R}$
d) $|x^4| = x^4$, para todo x, com $x \in \mathbb{R}$
e) $|x - 3| = |3 - x|$, para todo x, com $x \in \mathbb{R}$
f) $|a + b| = |a| + |b|$, para quaisquer a e b, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$
g) $|x| > 0$, para todo x, com $x \in \mathbb{R}$
h) $5 \cdot |x| = |5x|$, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$
i) $-5 \cdot |x| = |-5x|$, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$
j) $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$
k) $\frac{7}{|x|} = \left|\frac{7}{x}\right|$, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}^*$

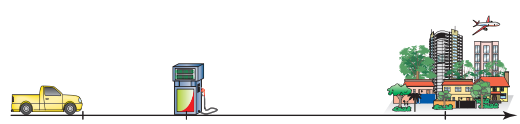
5 Em uma prova de Matemática, as notas de cinco alunos foram: 5,5; 6,8; 7,2; 8 e 9,5.
A nota média desses alunos é a média aritmética m dessas cinco notas, que é calculada por:

$$m = \frac{5{,}5 + 6{,}8 + 7{,}2 + 8 + 9{,}5}{5} = 7{,}4$$

a) Chama-se **desvio absoluto** de uma nota x em relação à nota média m o número obtido por $|x - m|$.
Calcule o desvio absoluto de cada uma das cinco notas desses alunos.
(*Nota*: O desvio absoluto de cada nota mede, em valor absoluto, o afastamento da nota em relação à nota média.)

b) Chama-se **desvio absoluto médio** dessas cinco notas a média aritmética entre os desvios absolutos das cinco notas.
Calcule o desvio absoluto médio das notas desses cinco alunos.
(*Nota*: O desvio absoluto médio mede, em valor absoluto, o afastamento médio das notas em relação à nota média.)

6 (UFRN) Um posto de gasolina está localizado no km 100 de uma estrada retilínea. Um automóvel parte do km 0, no sentido indicado na figura abaixo, dirigindo-se a uma cidade a 250 km do ponto de partida.



Num dado instante, x denota a distância (em quilômetro) do automóvel ao km 0. Nesse instante, a distância (em quilômetro) do veículo ao posto de gasolina é:

a) $|100 + x|$
b) $x - 100$
c) $100 - x$
d) $|x - 100|$

Resolva os exercícios complementares 1 a 5.

A função modular

Objetivos

- **Identificar** uma função modular.
- **Esboçar** o gráfico de uma função modular.
- **Resolver** problemas que envolvem função modular.

Termo e conceito

- **função modular**

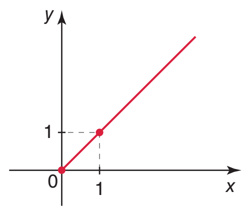
Vimos que cada número real x tem um único módulo. Logo, podemos definir uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao seu módulo, isto é, $f(x) = |x|$. Essa função, chamada de **função modular**, pode ser apresentada desta forma:

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico da função f, estudamos cada uma de suas sentenças separadamente.

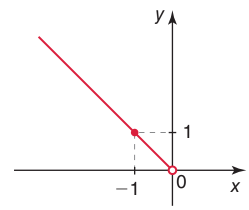
I. $f(x) = x$ para $x \geqslant 0$

x	$f(x)$
0	0
1	1

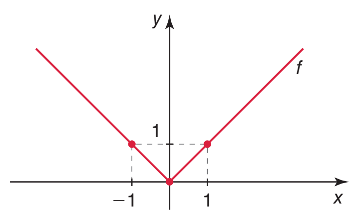


II. $f(x) = -x$ para $x < 0$

x	$f(x)$
0	0
-1	1



A reunião dos gráficos obtidos em I e II é o gráfico da função modular $f(x) = |x|$.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4 Esboçar o gráfico e indicar o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = |x - 2|$.

Resolução

Para construir o gráfico da função f, convém representá-la por duas sentenças. Para isso, aplicamos a definição de módulo de um número real:

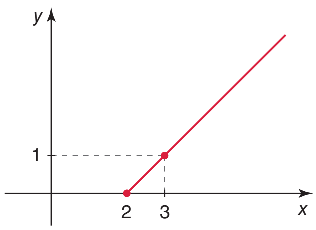
$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x - 2 \geqslant 0 \\ -(x - 2), \text{ se } x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -x + 2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

Assim, a função f pode ser representada por: $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -x + 2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$

Estudamos separadamente as sentenças de f:

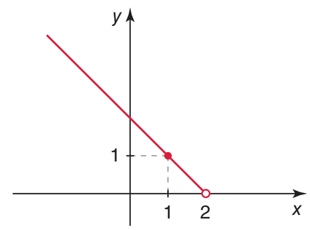
I. $f(x) = x - 2$ para $x \geqslant 2$

x	$f(x)$
2	0
3	1

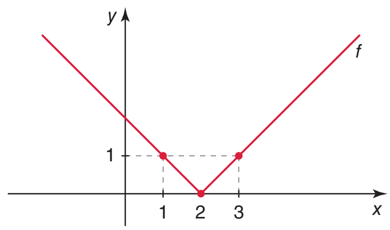


II. $f(x) = -x + 2$ para $x < 2$

x	$f(x)$
2	0
1	1



A reunião dos gráficos obtidos em I e II é o gráfico da função $f(x) = |x - 2|$.

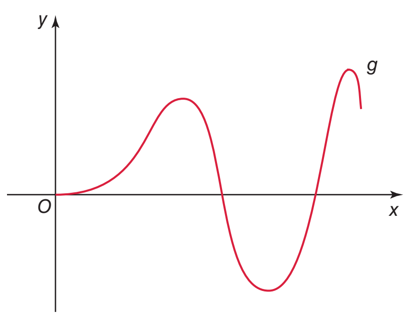


O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

Outros recursos para a construção de gráficos

Reflexão

Seja g uma função que possui o seguinte gráfico:



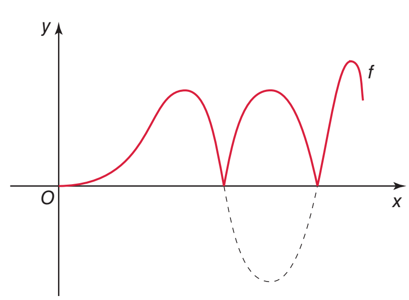
Para construir o gráfico da função $f(x) = |g(x)|$, podemos representar f da seguinte forma:

$$f(x) = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ se } g(x) \geqslant 0 \\ -g(x), \text{ se } g(x) < 0 \end{cases}$$

Observe que, da equivalência acima, concluímos:

- quando $g(x) \geqslant 0$, o gráfico de $|g(x)|$ é o próprio gráfico de $g(x)$;
- quando $g(x) < 0$, o gráfico de $|g(x)|$ é o gráfico de $-g(x)$, que é o gráfico de $g(x)$ refletido em relação ao eixo Ox.

Assim, conservando os pontos de ordenadas não negativas do gráfico de g e refletindo os pontos de ordenadas negativas em relação ao eixo Ox, obtemos o gráfico da função f.



Nota:

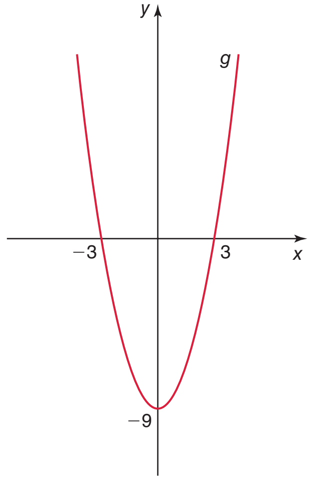
Ao refletir um ponto em relação ao eixo Ox, obtemos o seu **simétrico** em relação ao eixo Ox.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

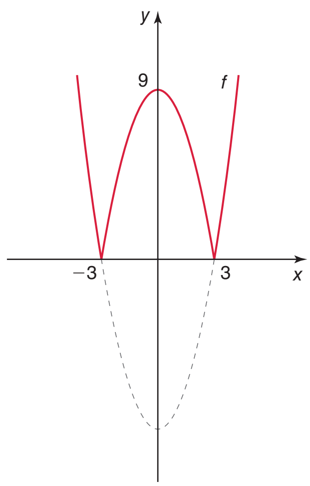
5 Construir o gráfico e determinar o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = |x^2 - 9|$.

Resolução

Inicialmente, construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 - 9$.



A seguir, no gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de f.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

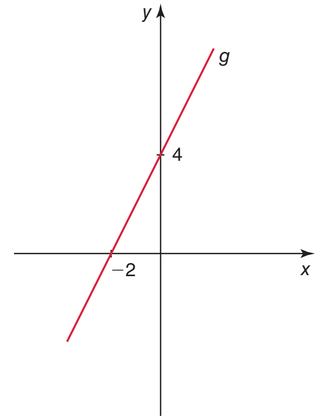
6 Construir o gráfico e determinar o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = -|2x + 4|$.

Resolução

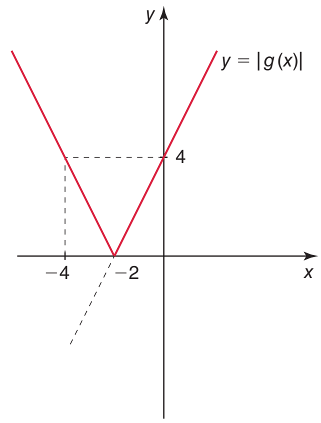
Executamos os seguintes passos:

- Construímos o gráfico da função $g(x) = 2x + 4$.

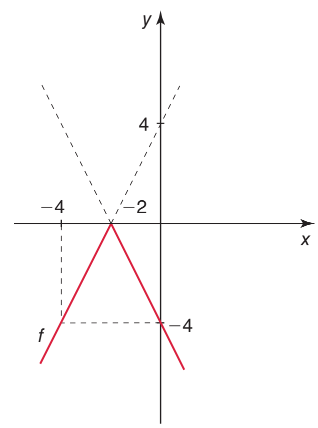
x	$f(x)$
0	4
−2	0



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |g(x)| = |2x + 4|$, representado a seguir.



- Finalmente, para obter o gráfico da função $f(x) = -|2x + 4|$, transformamos todos os pontos do gráfico anterior em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_-$.

Translação

Para construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = k + |g(x)|$ ou $f(x) = -k + |g(x)|$, em que k é uma constante real positiva, transladamos verticalmente, em k unidades, o gráfico da função $y = |g(x)|$:

- para cima, no caso da função $f(x) = k + |g(x)|$; ou,
- para baixo, no caso da função $f(x) = -k + |g(x)|$.

Para construir o gráfico de uma função do tipo $f(x) = |g(x + k)|$ ou $f(x) = |g(x - k)|$, em que k é uma constante real positiva, transladamos horizontalmente, em k unidades, o gráfico da função $y = |g(x)|$:

- para a esquerda, no caso da função $f(x) = |g(x + k)|$; ou,
- para a direita, no caso da função $f(x) = |g(x - k)|$.

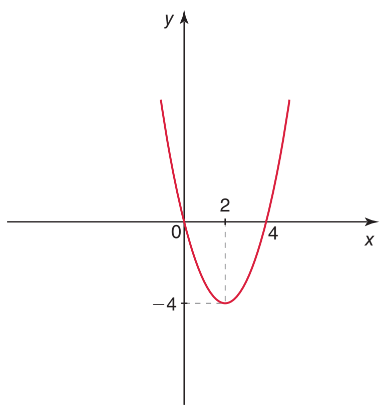
EXERCÍCIO RESOLVIDO

7 Construir o gráfico e indicar o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = |x^2 - 4x| + 3$.

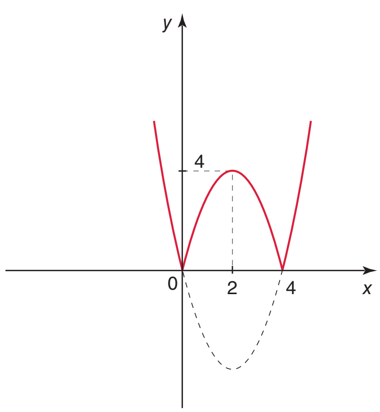
Resolução

Executamos os seguintes passos:

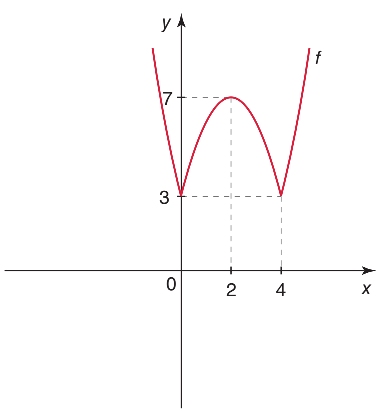
- Construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x$.



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |x^2 - 4x|$.



- Transladamos verticalmente, em 3 unidades para cima, o gráfico anterior, obtendo o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x| + 3$.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [3, +\infty[$.

Estudo do sinal

Uma técnica ágil para a construção do gráfico de uma função do tipo

$$f(x) = |g_1(x)| \pm |g_2(x)| \pm |g_3(x)| \pm \ldots \pm |g_n(x)| \pm h(x)$$

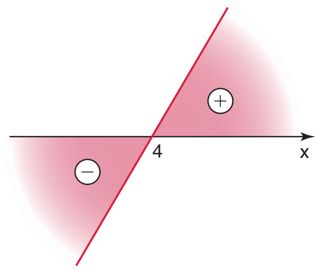
consiste em eliminar os módulos por meio do estudo da variação de sinal das funções g_1, g_2, g_3, ... e g_n. Assim, a função f é representada por mais de uma sentença, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Construir o gráfico e indicar o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = |x - 4| + 2x - 6$.

Resolução

Inicialmente, por meio do esquema ao lado, estudamos a variação de sinal da função $g(x) = x - 4$.
Como a função g é negativa à esquerda de 4, temos:
$|x - 4| = -x + 4$ para $x < 4$
Como a função g é positiva à direita de 4 e se anula em 4, temos:
$|x - 4| = x - 4$ para $x \geqslant 4$



Representando os valores de $|g(x)| = |x - 4|$ por um esquema, obtemos:

	$x < 4$	$x \geqslant 4$
$\|x - 4\|$ →	$-x + 4$	$x - 4$

Adicionando $2x - 6$ a cada expressão desse quadro, temos a função f representada por duas sentenças:

	$x < 4$	$x \geqslant 4$
$\|x - 4\|$ →	$-x + 4$	$x - 4$
+ $2x - 6$ →	$2x - 6$	$2x - 6$
= $\|x - 4\| + 2x - 6$ →	$x - 2$	$3x - 10$

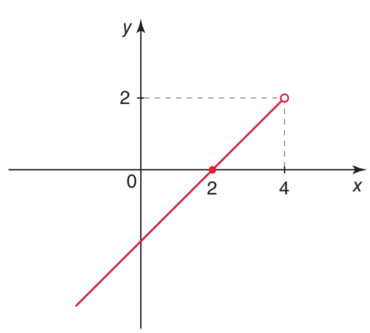
Logo:

$$f(x) = |x - 4| + 2x - 6 \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x < 4 \\ 3x - 10, \text{ se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

Analisando cada sentença de f, temos:

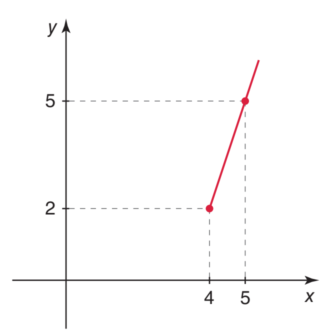
I. $f(x) = x - 2$ para $x < 4$

x	$y = x - 2$
4	2
2	0

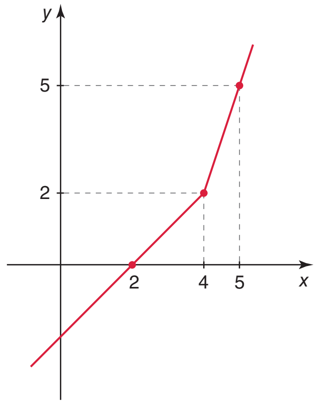


II. $f(x) = 3x - 10$ para $x \geqslant 4$

x	$y = 3x - 10$
4	2
5	5



A reunião dos gráficos obtidos em I e II é o gráfico da função $f(x) = |x - 4| + 2x - 6$, abaixo.
O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.



(*Nota*: A definição de módulo de um número real x foi apresentada do seguinte modo:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Observe que $|0| = 0 = -0$, portanto, podemos acrescentar a relação de igualdade à segunda sentença:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Do mesmo modo, observe a função f:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x < 4 \\ 3x - 10, \text{ se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

Temos $4 - 2 = 3 \cdot 4 - 10$, portanto, podemos acrescentar a igualdade ao extremo do intervalo da primeira sentença:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x \leqslant 4 \\ 3x - 10, \text{ se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

Sempre que for conveniente, daqui por diante, agiremos dessa forma.)

9 Construir o gráfico e determinar o domínio e o conjunto imagem da função $h(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 2x$.

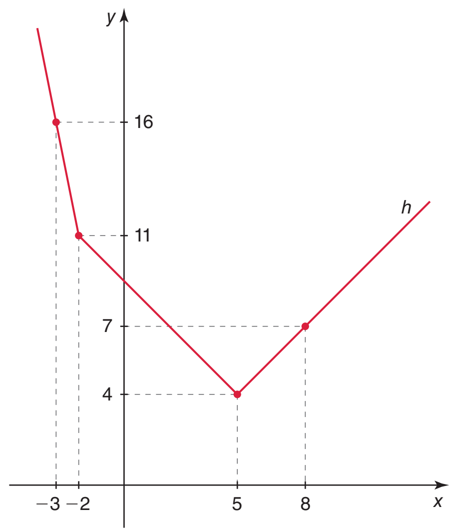
Resolução
Eliminamos os módulos da função $h(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 2x$:

	$x < -2$	$-2 < x < 5$	$x > 5$
$\vert 2x + 4\vert$	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$
$\vert x - 5\vert$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$2x$	$2x$	$2x$	$2x$
$\vert 2x + 4\vert + \vert x - 5\vert - 2x$	$\mathbf{-5x + 1}$	$\mathbf{-x + 9}$	$\mathbf{x - 1}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -5x + 1, \text{ se } x \leqslant -2 \\ -x + 9, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 1, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico, o domínio e o conjunto imagem de h são dados por:



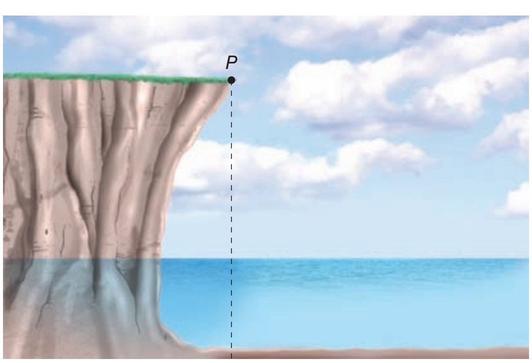
$D(h) = \mathbb{R}$
$Im(h) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 4\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7 Construa o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem de cada função:

a) $f(x) = |4x - 8|$
b) $g(x) = |-5x + 6|$
c) $h(x) = |2x^2 - 6x|$
d) $f(x) = |-x^2 + x + 6|$
e) $f(x) = -|x^2 + 3x|$
f) $g(x) = |3x + 9| - 4$
g) $h(x) = |x^2 - 2x - 8| + 2$
h) $f(x) = 2 - |2x - 4|$

8 De um ponto P, a 20 m de altura em relação à superfície de um lago com 10 m de profundidade, cai uma pedra que atinge o fundo do lago. Considerando toda a trajetória da pedra, seja x a distância, em metro, da pedra ao ponto P até atingir o fundo do lago:



a) Obtenha uma equação que expresse, em função de x, a distância d entre a pedra e a superfície do lago.
b) Construa o gráfico da função d obtida no item **a**.

9 Considere a função $f(x) = |2x - 6| + 3$.
a) Construa o gráfico de f.
b) Determine os pontos do gráfico de f que têm ordenada 5.
c) Determine as abscissas dos pontos do gráfico de f que têm ordenada menor que 5.

10 Construa o gráfico e indique o domínio e o conjunto imagem de cada função.
a) $f(x) = |2x - 6| + 3x$
b) $g(x) = |4x + 2| + 4x - 1$
c) $f(x) = |4x - 1| + |2x + 7|$
d) $g(x) = |2x - 1| - |x - 5| + 3$

11 Ao moldar chapas circulares de aço, uma máquina produz um erro igual a $\left|\frac{d^2 - d}{100}\right|$, para mais ou para menos, do valor d do diâmetro projetado, com $0 < d < 1{,}2$ em metro.
a) Esboce o gráfico da função

$$f(d) = \left|\frac{d^2 - d}{100}\right|, \text{ com } 0 < d < 1{,}2$$

b) Para qual valor de d, com $0 < d < 1{,}2$, o erro produzido pela máquina é máximo?
c) Qual o erro máximo, em metro, produzido pela máquina para $0 < d < 1{,}2$?

12 (Uerj) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:

$$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|, \text{ com } t \in \mathbb{R}_+$$

Nela, V é o volume medido em metro cúbico após t horas, contadas a partir das 8 h de uma manhã. Determine os horários (inicial e final) dessa manhã em que o volume V permaneceu constante.

Resolva os exercícios complementares 6 a 12 e 37.

Seção 6.3

Objetivos

- **Resolver** equações modulares.
- **Usar** equações modulares na resolução de problemas.

Equações modulares

Uma indústria de azeite embala seus produtos em recipientes de capacidades diferentes. Para aprovar ou reprovar um lote fabricado, o departamento de controle de qualidade dessa indústria mede o conteúdo de cada recipiente de uma amostra de cada lote, admitindo um erro máximo de 0,4%, para mais ou para menos, no conteúdo indicado no rótulo da embalagem. Se em uma amostra de recipientes de azeite, cujos rótulos indicavam 500 mL, todos apresentaram erro máximo, as possíveis medidas x obtidas pelo controle de qualidade, para cada recipiente, podem ser indicadas pela equação:

$$|500 - x| = 2$$

Assim, concluímos que cada recipiente desse lote contém 502 mL ou 498 mL.

Equações como essa, que apresentam o módulo de pelo menos uma expressão que tenha a incógnita, são chamadas de **equações modulares**.

Exemplos

- $|31 - x| = 65$
- $3x^2 + 5|x| - 1 = 0$
- $|4x - 12| = |x^2 - 9|$
- $\frac{1}{2} + x = |x - 1|$

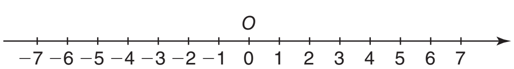
Para resolver essas equações, aplicamos algumas propriedades dos módulos, apresentadas a seguir.

Propriedades

Como o módulo é uma distância, temos:

P1. $|x| \geqslant 0$, para qualquer número real x

Agora, considere a reta numérica abaixo.



Observe que:

- o único ponto que dista zero unidade da origem é a própria origem, ou seja, o ponto O;
- existem dois pontos que distam 6 unidades da origem: os pontos de abscissas 6 e −6;
- se dois números têm o mesmo módulo, então esses números são iguais ou são opostos.

Essas observações nos ajudam a entender as seguintes propriedades:

P2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

P3. Sendo d um número real positivo: $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$

P4. Sendo x e y números reais: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

Acrescentamos a essa lista de propriedades aquelas demonstradas no exercício resolvido 3, enumerando-as, conforme segue, para facilitar sua identificação:

P5. $\sqrt{x^2} = |x|$

P6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

P7. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$

Nota:

Uma consequência da propriedade P6 é que: $|x|^2 = x^2$, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$

Observe:

$|x|^2 = |x| \cdot |x| = |x \cdot x| = |x^2| = x^2$, pois $x^2 \geqslant 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10 Resolver em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x - 4| = -7$

b) $|x^2 - 9| = 0$

c) $|2x - 8| = 6$

d) $|3x - 4| = |2x + 6|$

e) $|3x - 2| = 2x + 4$

Resolução

a) Pela propriedade P1, temos $|x - 4| \geqslant 0$; logo, a equação $|x - 4| = -7$ não tem raízes, portanto, seu conjunto solução S é vazio: $S = \varnothing$

b) Pela propriedade P2, temos:

$|x^2 - 9| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$

$\therefore x = \pm 3$

Logo, $S = \{3, -3\}$.

c) Pela propriedade P3, temos:

$|2x - 8| = 6 \Leftrightarrow 2x - 8 = 6$ ou $2x - 8 = -6$

$\therefore x = 7$ ou $x = 1$

Assim, $S = \{7, 1\}$.

d) Pela propriedade P4, temos:

$|3x - 4| = |2x + 6| \Leftrightarrow 3x - 4 = 2x + 6$ ou $3x - 4 = -2x - 6$

$\therefore x = 10$ ou $x = -\dfrac{2}{5}$

Logo, $S = \left\{10, -\dfrac{2}{5}\right\}$

e) Pela propriedade P1, devemos considerar a condição de existência do módulo:

$2x + 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2$

Pela propriedade P3, temos:

$|3x - 2| = 2x + 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 2x + 4$ ou $3x - 2 = -2x - 4$

$\therefore x = 6$ ou $x = -\dfrac{2}{5}$

Como as duas soluções satisfazem a condição de existência, então $S = \left\{6, -\dfrac{2}{5}\right\}$.

11 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 3|x| - 4 = 0$.

Resolução

Sabemos que $x^2 = |x|^2$. Logo, a equação pode ser escrita na forma:

$|x|^2 - 3|x| - 4 = 0$

Fazendo $|x| = t$, temos:

$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ ou $t = -1$

Assim: $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$; ou $|x| = -1 \Rightarrow \nexists x$

Logo: $S = \{4, -4\}$

12 Três corredores, I, II e III, disputaram uma prova de 100 metros rasos, partindo simultaneamente de um mesmo ponto e correndo em um mesmo sentido sobre uma pista retilínea.
Após a largada, a distância de cada corredor ao ponto de partida, em metro, é descrita, respectivamente, pelas funções $S_I = 5t$, $S_{II} = 4t$ e $S_{III} = t^2 + 2t$, em que o tempo t é medido em segundo. Sabendo que a prova durou mais de 4 s, podemos concluir que, após a largada, o número de vezes que a distância entre os corredores I e II foi igual à distância entre os corredores II e III é:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Resolução

Em qualquer instante da prova, a distância entre os corredores I e II é $|5t - 4t|$ e a distância entre II e III é $|t^2 + 2t - 4t|$. Assim, devemos ter:

$|5t - 4t| = |t^2 + 2t - 4t| \Rightarrow |t| = |t^2 - 2t|$

$\therefore t = t^2 - 2t$ ou $t = -t^2 + 2t$

$\therefore t^2 - 3t = 0$ ou $t^2 - t = 0$

$\therefore t = 0$ ou $t = 3$ ou $t = 1$

Como devemos considerar os instantes após a largada, não nos interessa o instante $t = 0$. Assim, a distância entre os corredores I e II foi igual à distância entre II e III nos instantes 1 s e 3 s após a largada.

Logo, a alternativa **b** é a correta.

13 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|3x - 5| + |2 - x| = 5$.

Resolução

- Transformamos a equação dada na equação equivalente:

$$|3x - 5| + |2 - x| - 5 = 0$$

- Eliminamos os módulos da função $h(x) = |3x - 5| + |2 - x| - 5$:

	$x < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < x < 2$	$x > 2$
$\lvert 3x - 5\rvert$	$-3x + 5$	$3x - 5$	$3x - 5$
$+$ $\lvert 2 - x\rvert$	$2 - x$	$2 - x$	$-2 + x$
$-$ 5	5	5	5
$=$ $\lvert 3x - 5\rvert + \lvert 2 - x\rvert - 5$	$\mathbf{-4x + 2}$	$\mathbf{2x - 8}$	$\mathbf{4x - 12}$

Assim: $h(x) = \begin{cases} -4x + 2, \text{ se } x \leqslant \frac{5}{3} \\ 2x - 8, \text{ se } \frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 2 \\ 4x - 12, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$

Para resolver a equação $h(x) = 0$, igualamos a zero cada sentença da função h:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2 = 0, \text{ se } x \leqslant \frac{5}{3} \\ 2x - 8 = 0, \text{ se } \frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 2 \\ 4x - 12 = 0, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \text{ se } x \leqslant \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x = 4, \text{ se } \frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow \text{não existe } x, \text{ pois } x = 4 \text{ não pertence ao intervalo } \frac{5}{3} \leqslant x < 2. \\ x = 3, \text{ se } x \geqslant 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$.

(*Nota*: Podemos usar o símbolo $\nexists$ para indicar "não existe".)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x - 8| = 3$

b) $|2x - 1| = 0$

c) $|3x - 1| = -4$

d) $|k^2 - 5k| = 6$

e) $|9x - 5| = |6x + 10|$

f) $|t| \cdot |t - 2| = 1$

g) $x^2 + 2|x| = 15$

h) $p^2 - |5p| + 4 = 0$

i) $(x - 1)^2 + 4|x - 1| + 3 = 0$

14 Considerando $\mathbb{R}$ como conjunto universo, determine o conjunto solução de cada uma das equações:

a) $|2x + 3| = 3x - 6$

b) $|7x + 2| = 3x - 1$

c) $|x^2 - 5x| = 9 - 5x$

15 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$|2x + 4| + |x - 5| = 2x$

16 Dois móveis, A e B, percorrem um trecho reto, com velocidades constantes, sendo a velocidade de B o dobro da velocidade de A. Para o estudo do movimento desses móveis fixou-se um eixo real na trajetória, adotando-se o quilômetro como unidade. Em dado instante, o móvel A estava no ponto de abscissa -13, e B estava no ponto de abscissa 7. Sabendo que oito minutos depois os dois móveis estavam à mesma distância da origem O do eixo real, determine a abscissa do ponto em que estava cada móvel.
(*Nota*: O sinal da velocidade escalar do móvel indica apenas o sentido do movimento: se o sentido do movimento coincidir com o sentido adotado do eixo real, então a velocidade é positiva; se o sentido do movimento for contrário ao sentido do eixo real, então a velocidade é negativa. Como o enunciado desse problema afirma que a velocidade de B é o dobro da velocidade de A, conclui-se que elas têm o mesmo sinal e, portanto, os móveis se movimentam em um mesmo sentido.)

17 Em uma competição, a cada x flechas consecutivas atiradas em um alvo por uma atleta, a distância, em milímetro, entre a mosca (centro do alvo) e o ponto de impacto da última dessas flechas no alvo foi $|x^2 - 44x + 480|$.

a) Quantas vezes a mosca foi atingida nos 25 primeiros lançamentos?

b) Quantas flechas foram lançadas para que a mosca fosse atingida pela primeira vez?

c) Depois de ter acertado a mosca pela primeira vez, qual foi a maior distância entre a mosca e o ponto de impacto de uma das flechas no alvo, considerando apenas os 25 primeiros lançamentos?

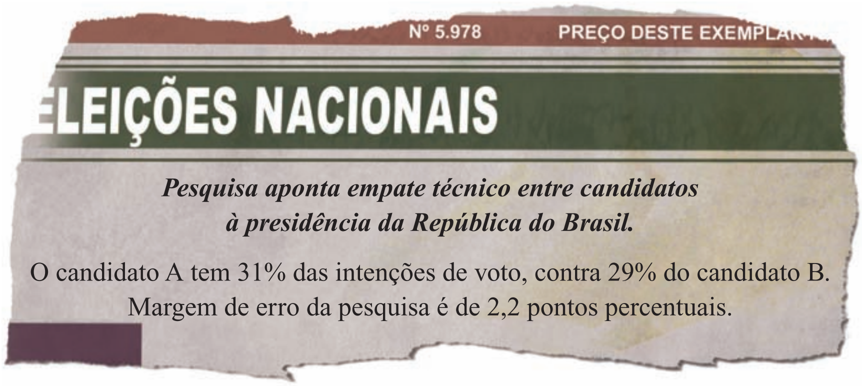
Resolva os exercícios complementares 13 a 23 e 38.

Seção 6.4

Inequações modulares

Objetivos

- **Resolver** inequações modulares.
- **Usar** inequações modulares na resolução de problemas.



Nº 5.978

PREÇO DESTE EXEMPLA

ELEIÇÕES NACIONAIS

Pesquisa aponta empate técnico entre candidatos à presidência da República do Brasil.

O candidato A tem 31% das intenções de voto, contra 29% do candidato B. Margem de erro da pesquisa é de 2,2 pontos percentuais.

O que é **empate técnico**? Como dois candidatos podem estar tecnicamente empatados em uma pesquisa de opinião?

Toda pesquisa de intenção de voto apresenta uma margem de erro, que determina o intervalo provável em que está o efetivo percentual de votos do candidato na época da pesquisa.

Na pesquisa acima, a margem de erro é de 2,2 pontos percentuais, para mais ou para menos, o que significa que os efetivos percentuais de votos que provavelmente teriam os candidatos na época da pesquisa estão nos intervalos descritos pela tabela:

Candidato	Percentual apontado pela pesquisa	Intervalos com a margem de erro
A	31%	28,8% a 33,2%
B	29%	26,8% a 31,2%

Como a intersecção dos intervalos em que se considera a margem de erro é não vazia, concluímos que ocorre empate técnico entre os candidatos A e B.

Sendo x e y os efetivos percentuais de votos que teriam os candidatos A e B na época da pesquisa, respectivamente, podemos afirmar que:

$$|x - 31| \leqslant 2{,}2 \text{ e } |y - 29| \leqslant 2{,}2$$

Inequações como essas, que apresentam o módulo de pelo menos uma expressão que tem a incógnita, são chamadas de **inequações modulares**.

Exemplos

- $|-x + 17| < 10$
- $\dfrac{3}{10} + x \geqslant \left|2x - \dfrac{1}{2}\right|$
- $|2x^2 + \sqrt{2}| > |x|$

Para resolver essas inequações, aplicamos algumas propriedades dos módulos, que veremos a seguir.

O voto na urna eletrônica foi implantado a partir das eleições municipais de 1996, mas apenas em alguns municípios. Só em 2000 as eleições foram informatizadas em todo o território nacional.

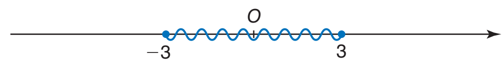
Propriedades

Antes de enunciar as próximas propriedades, vamos responder a duas perguntas utilizando apenas o conceito de módulo.

- Quais são os valores reais de x para os quais $|x| \leqslant 3$?

Ou seja, quais são as abscissas dos pontos do eixo real que distam 3 unidades ou menos da origem?

Observando a reta numérica abaixo, é fácil visualizar a resposta:



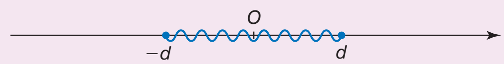
Os pontos que distam 3 unidades ou menos da origem são os pontos de abscissas no intervalo $[-3, 3]$, ou seja:

$$|x| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant x \leqslant 3$$

A propriedade a seguir generaliza esse resultado.

P8. Para qualquer número d real positivo:

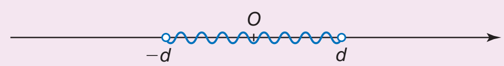
$$|x| \leqslant d \iff -d \leqslant x \leqslant d$$



Raciocinando de maneira análoga, obtemos a propriedade:

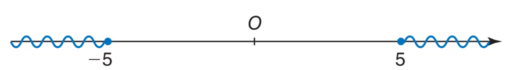
P9. Para qualquer número real positivo d:

$$|x| < d \iff -d < x < d$$



- Quais são os valores reais de x para os quais $|x| \geqslant 5$?

Ou seja, quais são as abscissas dos pontos do eixo real que distam 5 unidades ou mais da origem?



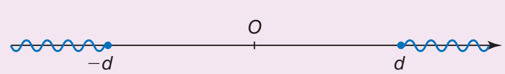
Os pontos que distam 5 unidades ou mais da origem são os pontos de abscissas menores ou iguais a -5 e os pontos de abscissas maiores ou iguais a 5. Ou seja:

$$|x| \geqslant 5 \iff x \leqslant -5 \text{ ou } x \geqslant 5$$

Generalizando essa conclusão, temos:

P10. Para qualquer número d real positivo:

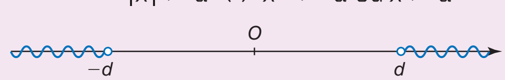
$$|x| \geqslant d \iff x \leqslant -d \text{ ou } x \geqslant d$$



Analogamente, concluímos também a propriedade:

P11. Para qualquer número real positivo d:

$$|x| > d \iff x < -d \text{ ou } x > d$$



14 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|4x - 3| \leqslant 13$

b) $|5x + 1| > 21$

c) $|3x - 6| \leqslant x + 2$

Resolução

a) Pela propriedade P8, temos:

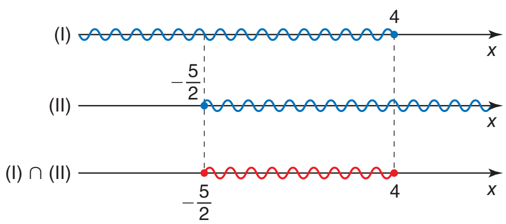
$|4x - 3| \leqslant 13 \Leftrightarrow -13 \leqslant 4x - 3 \leqslant 13$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$$4x - 3 \leqslant 13 \text{ e } 4x - 3 \geqslant -13$$

$$\therefore x \leqslant 4 \text{ (I) e } x \geqslant -\frac{5}{2} \text{ (II)}$$

O conectivo "e" indica a intersecção dos conjuntos solução dessas últimas inequações, ou seja:



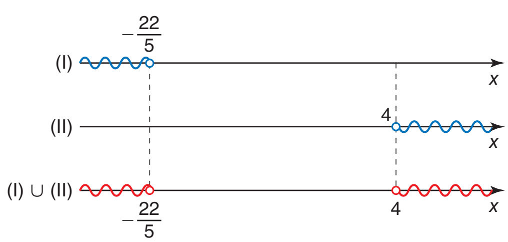
Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4\right\}$

b) Pela propriedade P11, temos:

$|5x + 1| > 21 \Leftrightarrow 5x + 1 < -21 \text{ ou } 5x + 1 > 21$

$\therefore x < -\frac{22}{5} \text{ (I) ou } x > 4 \text{ (II)}$

O conectivo "ou" indica a união dos conjuntos solução dessas últimas inequações, ou seja:



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{22}{5} \text{ ou } x > 4\right\}$

c) Nesse caso, inicialmente devemos considerar a condição de existência, pois o módulo é sempre nulo ou positivo (propriedade P1):

$$x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2$$

Resolvendo a inequação pela propriedade P8, temos:

$|3x - 6| \leqslant x + 2 \Rightarrow -x - 2 \leqslant 3x - 6 \leqslant x + 2$

Ou seja:

$-x - 2 \leqslant 3x - 6 \text{ (I) e } 3x - 6 \leqslant x + 2 \text{ (II)}$

Resolvendo a inequação (I):

$$-x - 2 \leqslant 3x - 6 \Rightarrow -4x \leqslant -4$$

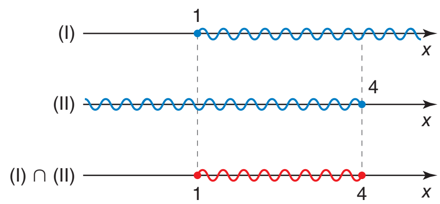
$$\therefore x \geqslant 1$$

Resolvendo a inequação (II):

$$3x - 6 \leqslant x + 2 \Rightarrow 2x \leqslant 8$$

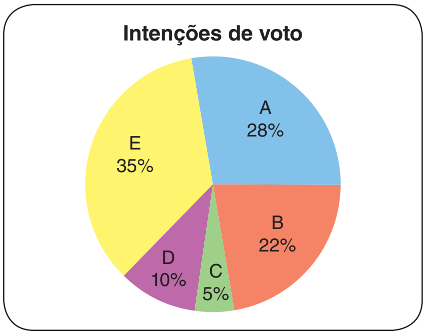
$$\therefore x \leqslant 4$$

Efetuando a intersecção dos intervalos obtidos nas inequações (I) e (II), temos:



Como todos os números do intervalo (I) ∩ (II) satisfazem a condição de existência, concluímos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 4\}$, ou, ainda, $S = [1, 4]$

15 Em um período de eleições, uma pesquisa revelou que o candidato *A* tinha 28% das intenções de voto.



Se a margem de erro da pesquisa era de 3 pontos percentuais, para mais ou para menos, e *x* é o percentual de votos que esse candidato efetivamente teria na época da pesquisa, podemos afirmar que:

a) $x - 28\% = 3\%$

b) $x - 28\% \leqslant 3\%$

c) $|x - 28\%| = 3\%$

d) $|x - 28\%| < 3\%$

e) $|x - 28\%| \leqslant 3\%$

Resolução

Como a margem de erro da pesquisa é de 3 pontos percentuais para mais ou para menos, o percentual *x* de votos do candidato pode variar de 28% − 3% a 28% + 3%, ou seja, $25\% \leqslant x \leqslant 31\%$. Subtraindo 28% de cada membro dessa desigualdade, obtemos:

$25\% - 28\% \leqslant x - 28\% \leqslant 31\% - 28\% \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\% \leqslant x - 28\% \leqslant 3\%$

$\therefore |x - 28\%| \leqslant 3\%$

Logo, a alternativa **e** é a correta.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Resolução gráfica de equações e inequações modulares.*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|5x + 7| > 13$
b) $|3x - 4| \leqslant 8$
c) $|1 - 4x| \geqslant 5$
d) $|3 - x| < 8$
e) $|x - 8| \leqslant -3$
f) $\left|\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{5}$
g) $|2x - 6| < x$
h) $|5 - x| \geqslant x + 1$

19 Se $x \in [-3, 3]$, podemos afirmar que:

a) $|x| < 3$
b) $|x| \leqslant 3$
c) $|x - 3| \leqslant 3$
d) $|x + 3| \leqslant 3$
e) $|x| \geqslant 3$

20 Se $x \in]-4, 8[$, podemos afirmar que:

a) $|x| < 4$
b) $|x| < 8$
c) $|x - 5| < 2$
d) $|x - 5| > 2$
e) $|x - 6| < 8$

21 Um metalúrgico precisa fabricar um eixo de aço cujo diâmetro deve ter 5 cm. O torno pode provocar um pequeno erro x em centímetro nessa medida, com $|x| \leqslant 0{,}008$. Qual a maior medida que se pode esperar para o diâmetro dessa peça depois de pronta? E a menor?

22 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação:
$|2x + 4| + |x - 5| > 7$

Resolva os exercícios complementares 24 a 36 e 39 a 44.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Calcule o valor de cada expressão a seguir, deixando indicados os resultados que contenham radicais.

a) $\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 2|$
b) $\sqrt{2} + |\sqrt{2} - 5|$
c) $|\sqrt[3]{26} - \pi| + \sqrt[3]{26}$
d) $|\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15|$
e) $|\sqrt[4]{82} - \sqrt{10}| + \sqrt[4]{82}$
f) $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}|$

2 (UFRJ) O valor de $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ é:

a) 1, se $x > 0$ ou -1, se $x < 0$
b) 1, se $x \geqslant 0$ ou -1, se $x < 0$
c) 1, se $x \neq 0$
d) 1, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$
e) 0

3 Se x e y são números reais quaisquer, classifique cada afirmação como verdadeira (V) ou falsa (F).

a) Se $x > y$, então $|x| > |y|$.
b) Se $x^2 = y^2$, então $x = y$.
c) Se $x^2 = y^2$, então $|x| = |y|$.
d) $\sqrt{x^2 \cdot y^2} = |xy|$
e) $|x| = |-x|$
f) $|-x| = x$

4 Quais são o maior e o menor valor que a expressão $\frac{1}{|x| + 2}$ pode assumir, se x assume todos os valores reais do intervalo $[-7, 4]$.

5 (Fuvest-SP) Qual é o conjunto dos valores assumidos pela expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ quando a, b e c variam no conjunto dos números reais não nulos?

a) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
b) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$
c) $\{-4, 0, 4\}$
d) $\{4\}$
e) $\mathbb{R}$

6 Construa o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $f(x) = |-x^2 + x - 2|$
b) $g(x) = |2x^2 + 2x + 1|$
c) $r(x) = -|3x - 6|$
d) $f(x) = |2x - 4| + 3$
e) $g(x) = 4 - |x^2 - 9|$

7 (UFT-TO) Sejam f e g funções reais de uma variável real definidas por:

$$f(x) = |x - 1| \text{ e } g(x) = 5$$

A área da região limitada pelos gráficos dessas funções é:

a) 10 unidades de área.
b) 30 unidades de área.
c) 50 unidades de área.
d) 25 unidades de área.

8 (UFC-CE) Dadas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = |1 - x^2|$ e $g(x) = |x|$, o número de pontos na intersecção do gráfico de f com o gráfico de g é igual a:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

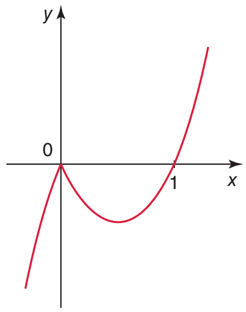
9 (UFG-GO) Sendo a função $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$:

a) esboce o seu gráfico;

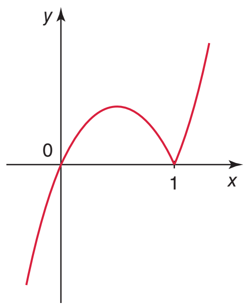
b) determine o seu conjunto imagem.

10 (UFMG) Considere a função $f(x) = x|1 - x|$.
Assinale a alternativa em que o gráfico dessa função está correto.

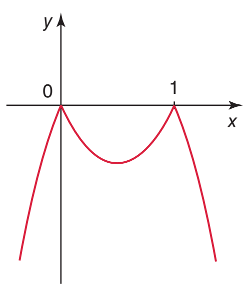
a)



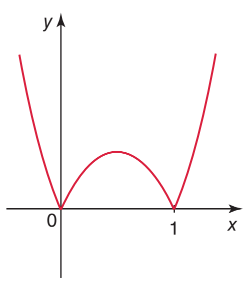
b)



c)



d)



11 (Faap-SP) Construa o gráfico da função:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

12 Construa o gráfico e indique o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$

b) $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$

c) $f(x) = |x^2 - 5x + 1| + x^2 + 2x - 3$

d) $h(x) = |x^2 + 3x| + |x^2 - 2|$

e) $f(x) = x^2 + |x| + |x^2 - 1| + |x - 1|$

13 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $|5x - 7| = 1$

b) $|x^2 - 5x| = 6$

c) $|x^2 + x| = 2x - 4$

d) $n^2 - 2 \cdot |n| - 8 = 0$

e) $k^2 - |5k| + 4 = 0$

14 (Fuvest-SP) Determine as raízes das seguintes equações:

a) $|2x - 3| = 5$

b) $|2x^2 - 1| + x = 0$

15 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|3x + 6| + |2x + 6| = x$

b) $|3x - 4| + |6 - x| = x + 10$

c) $|x^2 - x| - |2x - 4| = x$

d) $|x^2 - 2x| + |x + 3| = x^2$

16 (Fuvest-SP) Seja $f(x) = |x| - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e considere também a função composta $g(x) = f(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Esboce o gráfico da função f, indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.

b) Esboce o gráfico da função g, indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.

c) Determine os valores de x para os quais $g(x) = 5$

17 (UFSCar-SP) Sejam f e g funções modulares reais definidas por $f(x) = |x + 2|$ e $g(x) = 2|x - 2|$.

a) Resolva a equação $f(x) = g(x)$.

b) Construa o gráfico da função real h, definida por $h(x) = |x + 2| - 2|x - 2|$.

18 (Acafe-SC) A equação modular $\left|\frac{2 - x}{4}\right| = x - 1$ admite, como solução, somente:

a) uma raiz positiva e uma negativa.

b) duas raízes negativas.

c) duas raízes positivas.

d) uma raiz positiva.

e) uma raiz negativa.

19 Determine as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = |2x - 6| + 2$ e $g(x) = x^2 + 5$.

20 (Mackenzie-SP) Relativamente à função $f: [0, 2] \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1 - |x - 1|$, considere as afirmações:

I. A área limitada pelo seu gráfico e o eixo das abscissas é 1.

II. Trata-se de uma função sobrejetora.

III. A soma das raízes da equação $f(x) = 0{,}5$ é 2.

Então:

a) Somente I e II são verdadeiras.

b) Somente II e III são verdadeiras.

c) Somente I e III são verdadeiras.

d) Todas são verdadeiras.

e) Somente III é verdadeira.

21 (UFSC) Sejam as funções $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = x^2 + 4x - 4$.

a) Determine as raízes da equação $f(g(x)) = 0$.

b) Esboce o gráfico da função $y = f(g(x))$, indicando as coordenadas dos pontos em que o gráfico intercepta os eixos cartesianos.

22 (ITA-SP) Sobre a equação na variável real x, $||x - 1| - 3| - 2| = 0$, é correto afirmar que:

a) ela não admite solução real;

b) a soma de todas as suas soluções é 6;

c) ela admite apenas soluções positivas;

d) a soma de todas as soluções é 4;

e) ela admite apenas duas soluções reais.

23 O ponto $A(1, 4)$ é comum aos gráficos das funções $f(x) = |x^2 + k| + x$ e $g(x) = x^2 - k - 1$, em que k é uma constante real. Determine as coordenadas dos outros pontos comuns aos gráficos de f e g.

24 (FEI-SP) Se $|2x - 1| \geqslant 3$, então:

a) $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$

b) $x \geqslant 3$

c) $x \leqslant \frac{1}{2}$

d) $-1 \leqslant x \leqslant 2$

e) $-2 \leqslant x \leqslant 1$

25 (Mackenzie-SP) O conjunto solução de $1 < |x - 3| < 4$ é o conjunto dos números x tais que:

a) $4 < x < 7$ ou $-1 < x < 2$

b) $-1 < x < 7$ ou $-3 < x < -1$

c) $-1 < x < 7$ ou $2 < x < 4$

d) $0 < x < 4$

e) $-1 < x < 4$ ou $2 < x < 7$

26 (Ufac) Qualquer solução da inequação $|x + 1| < 3$ está associada a um ponto do eixo real cuja distância ao ponto:

a) A, de abscissa 1, é maior que 3.

b) B, de abscissa -1, é maior que 3.

c) B, de abscissa -1, é menor que 3.

d) A, de abscissa 1, é menor que 3.

e) C, de abscissa 3, é menor que 1.

27 (Unitau-SP) Se x é uma solução de $|2x - 1| < 5 - x$, então:

a) $5 < x < 7$

b) $2 < x < 7$

c) $-5 < x < 7$

d) $-4 < x < 7$

e) $-4 < x < 2$

28 Se $x \in (]3, 6] \cup]5, 9[)$, pode-se afirmar que:

a) $|x - 2| < 4$

b) $|x| < 2$

c) $|x - 6| < 2$

d) $|x - 6| < 3$

e) $|x| > 3$

29 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|x - 1| + |6x + 3| > x$

b) $|8x - 16| + |5x + 15| < 10$

30 (UEB-BA) O conjunto solução da inequação $|6 - 3x| < 3 \cdot |x - 1|$ é:

a) $\varnothing$

b) $]-\infty, 1]$

c) $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

d) $]0, +\infty[$

e) $\mathbb{R}$

31 Dadas as funções $f(x) = |2x - 3| + 2$ e $g(x) = x + 3$:

a) construa os gráficos de f e g no mesmo plano cartesiano e determine as coordenadas dos pontos comuns a eles;

b) pelo gráfico do item **a**, obtenha os valores de x para os quais $f(x) > g(x)$.

32 (Fuvest-SP)

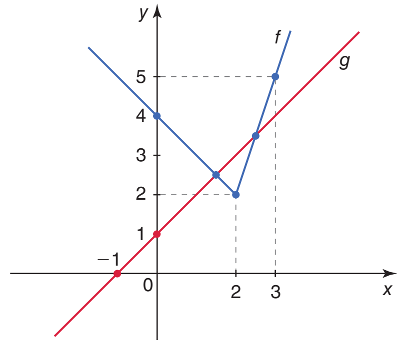
a) Represente no plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = |4 - x^2|$ e $g(x) = \frac{x + 7}{2}$.

b) Resolva a inequação $|4 - x^2| \leqslant \frac{x + 7}{2}$.

33 Os gráficos abaixo representam as funções f e g, sendo $f(x) = |2x - 4| + x$.

a) Determine as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos.

b) Calcule os valores de x para os quais $g(x) \leqslant f(x)$.



34 (Fuvest-SP)

a) Esboce, para x real, o gráfico da função:
$f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$

b) Para que valores reais de x tem-se $f(x) > 2x + 2$?

35 Determine x sabendo que, para qualquer valor real positivo assumido pela variável k, temos $|x - 3| < k$.

36 Sejam a e b números reais, com $a < b$.
Se $\left|x - \frac{a + b}{2}\right| < \frac{b - a}{2}$, pode-se concluir que:

a) $x \in]a + 1, b[$

b) $x \in]a, b + 1[$

c) $x \in]a + 2, b[$

d) $x \in]a, b + 2[$

e) $x \in]a, b[$

Exercícios contextualizados

37 Em um pleito para a eleição da diretoria de um clube, os componentes da chapa Renovação estimam que terão x votos. A margem de erro dessa estimativa, em número de votos, é $\left|\frac{3x - 6.000}{1.000}\right| + 200$, para mais ou para menos, com $1.000 \leqslant x \leqslant 5.000$.

a) Esboce o gráfico da função
$f(x) = \left|\frac{3x - 6.000}{1.000}\right| + 200$ para $1.000 \leqslant x \leqslant 5.000$.

b) Admitindo que a estimativa esteja correta, qual o número máximo de votos que pode receber a chapa Renovação, para $1.000 \leqslant x \leqslant 5.000$?

c) Admitindo que a estimativa esteja correta, qual o número mínimo de votos que a chapa Renovação pode receber, para $1.000 \leqslant x \leqslant 5.000$?

38 Dois objetos, A e B, foram abandonados ao mesmo tempo em queda livre, aproximadamente em uma mesma vertical, a partir de dois pontos, O e O', respectivamente, de alturas diferentes em relação ao solo. A partir do início da queda, as distâncias dos objetos A e B ao solo, em metro, diminuíram em função do tempo t, em segundo, de acordo com as funções $f(t) = 80 - 5t^2$ e $g(t) = 60 - 6t^2$, respectivamente.

a) Quanto tempo depois de iniciada a queda a distância entre os objetos era de 24 m?

b) Quanto tempo depois de iniciada a queda a distância entre os objetos era igual à distância do objeto A ao solo?
(*Nota*: Para calcular a distância entre os objetos, considere-os em uma mesma vertical.)

39 O lago artificial de um parque florestal tem a forma de um círculo com 120 m de raio. Um paraquedista aterrissou em um ponto *P* cuja distância, em metro, ao centro do lago é $|150 - x|$.

a) Determine os possíveis valores de x para que *P* seja um ponto da margem do lago.

b) Determine os possíveis valores de x para que *P* não esteja nem dentro do lago nem na margem.

40 Para medir os possíveis desvios causados pelo vento em um corpo em queda livre, em determinado local, uma esfera de raio 5 cm foi abandonada em queda livre a 30 cm de distância de uma reta vertical *r*. A experiência mostrou que a esfera pode atingir o solo a qualquer distância x da reta *r*, em centímetro, tal que $|x - 30| \leqslant 12$.

a) Qual é a máxima distância que se pode esperar entre a reta *r* e a esfera no momento em que atinge o solo? E a mínima?

b) Qual é o máximo desvio sofrido pela esfera? E o mínimo?

41 Uma pesquisa realizada nos supermercados de uma cidade revelou que a variação de preço da caixa de canetas hidrográficas da marca *A* é de até 3 reais de um estabelecimento para outro. Supondo que essa conclusão seja verdadeira, se em um supermercado o preço dessa caixa de canetas é x reais e em outro é y reais, pode-se afirmar que:

a) $x - y = 3$

b) $0 \leqslant x - y \leqslant 3$

c) $|x - y| = 3$

d) $|x - y| < 3$

e) $|x - y| \leqslant 3$

42 (Faap-SP) A produção diária x estimada por uma refinaria é dada por $|x - 200.000| \leqslant 125.000$, em que x é medida em barris de petróleo. Os níveis de produção x são tais que:

a) $175.000 \leqslant x \leqslant 225.000$

b) $75.000 \leqslant x \leqslant 125.000$

c) $75.000 \leqslant x \leqslant 325.000$

d) $125.000 \leqslant x \leqslant 200.000$

e) $x \leqslant 125.000$ ou $x \geqslant 200.000$

43 Em um trecho reto de uma estrada, dois automóveis, *A* e *B*, partiram ao mesmo tempo de um ponto *O*, movimentando-se em um mesmo sentido. As distâncias, em metro, dos automóveis *A* e *B* ao ponto *O* variaram em função do tempo *t*, em minuto, de acordo com as funções $f(t) = 4t^2 + t$ e $g(t) = t^2 + 9t$, respectivamente. Em que intervalo de tempo a distância entre *A* e *B* foi menor do que a distância de *B* ao ponto *O*, considerando que a distância *AB* chegou a ser maior que a distância *OB*?

44 (UFV-MG) Durante um tratamento médico verificou-se que a concentração C, em miligrama por litro, de um certo medicamento na corrente sanguínea satisfaz a desigualdade

$$(3 - C) \cdot |C| - 2|C - 3| \geqslant 0$$

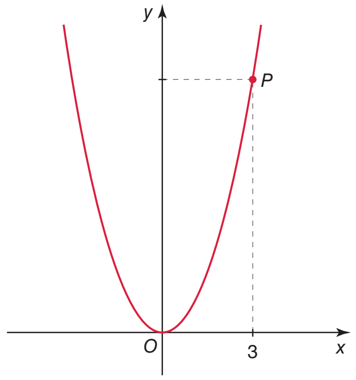
a) Verifique se a concentração do medicamento na corrente sanguínea pode ser igual a 0,5 miligramas por litro. Justifique, mostrando seus cálculos.

b) Determine o menor valor da concentração deste medicamento na corrente sanguínea. Justifique, mostrando seus cálculos.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

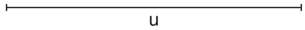
Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = x^2$. Sendo *P* um ponto de abscissa 3 desse gráfico, calcule a distância entre *P* e a origem *O* do sistema de coordenadas.



2 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{x^2 - 4}{x - 1} \geqslant 0$.

3 Adotando como unidade o segmento u, abaixo, construa com régua e compasso um segmento de medida $\dfrac{3}{5}$ na unidade u.



Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

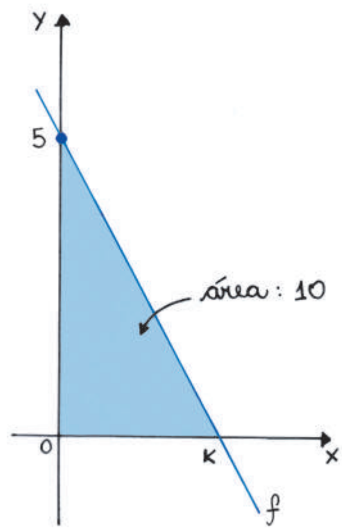
Obtenha a lei da função cujo gráfico é a reta que passa pelo ponto (0, 5) e determina, com os eixos coordenados, um triângulo com 10 unidades de área.

Resolução

Como a área do triângulo é 10:

$$\frac{k \cdot 5}{2} = 10 \Rightarrow 5k = 20$$

$$\therefore k = 4$$



Como o gráfico é uma reta, a função é da forma $y = ax + b$.

- Para $x = 0$ e $y = 5$:

$$5 = a \cdot 0 + b \Rightarrow 5 = 0 + b$$

$$\therefore b = 5 \quad (\text{I})$$

- Para $x = 4$ e $y = 0$:

$$0 = a \cdot 4 + b \Rightarrow 4a + b = 0 \quad (\text{II})$$

Substituindo (I) em (II):

$$4a + 5 = 0 \Rightarrow 4a = -5$$

$$\therefore a = -\frac{5}{4}$$

Logo, a função é dada por: $y = -\frac{5x}{4} + 5$ Incompleto!

Comentário

O aluno cometeu um erro ao admitir apenas o caso em que o gráfico intercepta o eixo Ox à direita da origem, pois o gráfico também poderia interceptar o eixo Ox à esquerda da origem, passando pelo ponto (0, 5) e formando um triângulo de área 10 unidades, limitado pelos eixos coordenados e pelo gráfico. Para evitar esse erro, a resolução pode ser iniciada admitindo-se que k é a abscissa do ponto comum ao eixo das abscissas e ao gráfico da função, com o que se obtém:

$$\frac{|k| \cdot 5}{2} = 10$$

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

7

Matemática financeira

Compreender os termos usados no mercado financeiro e as notícias sobre economia é fundamental para tomar decisões em situações do cotidiano, especialmente as que envolvem transações comerciais e aplicações financeiras. Neste capítulo, estudaremos os significados desses termos.

7.1 Porcentagem e aplicações

Podemos comparar dois números por meio da razão entre eles. É usual expressar essa razão em termos percentuais.

7.2 Juro simples

No regime de juro simples, a taxa de juro incide apenas sobre a quantia inicial.

7.3 Juro composto

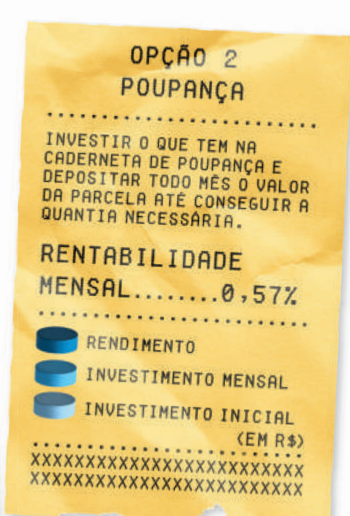
No regime de juro composto, o montante acumulado em cada unidade de tempo é o capital sobre o qual incidirá a taxa de juro na próxima unidade de tempo.

Comprar ou economizar?

Você já pensou sobre o que é mais vantajoso quando quer comprar um produto, mas só tem parte do dinheiro? Parcelar a dívida e arcar com o juro mensal ou investir o que tem e esperar render o suficiente para adquirir à vista o produto desejado?

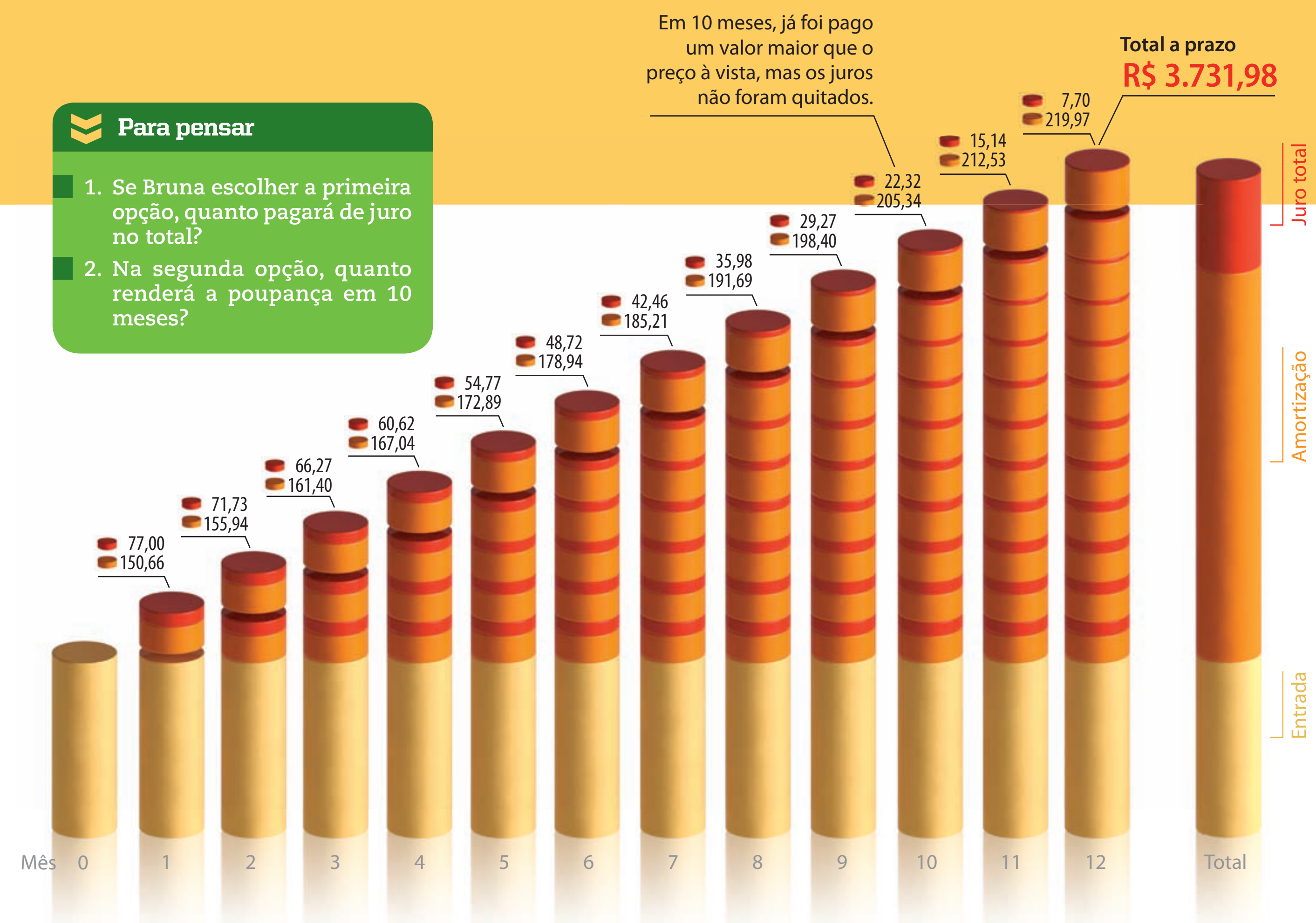
Duas opções

Bruna tem R$ 1.000,00 e quer comprar um computador que custa R$ 3.200,00 à vista. Ela está em dúvida entre duas opções.



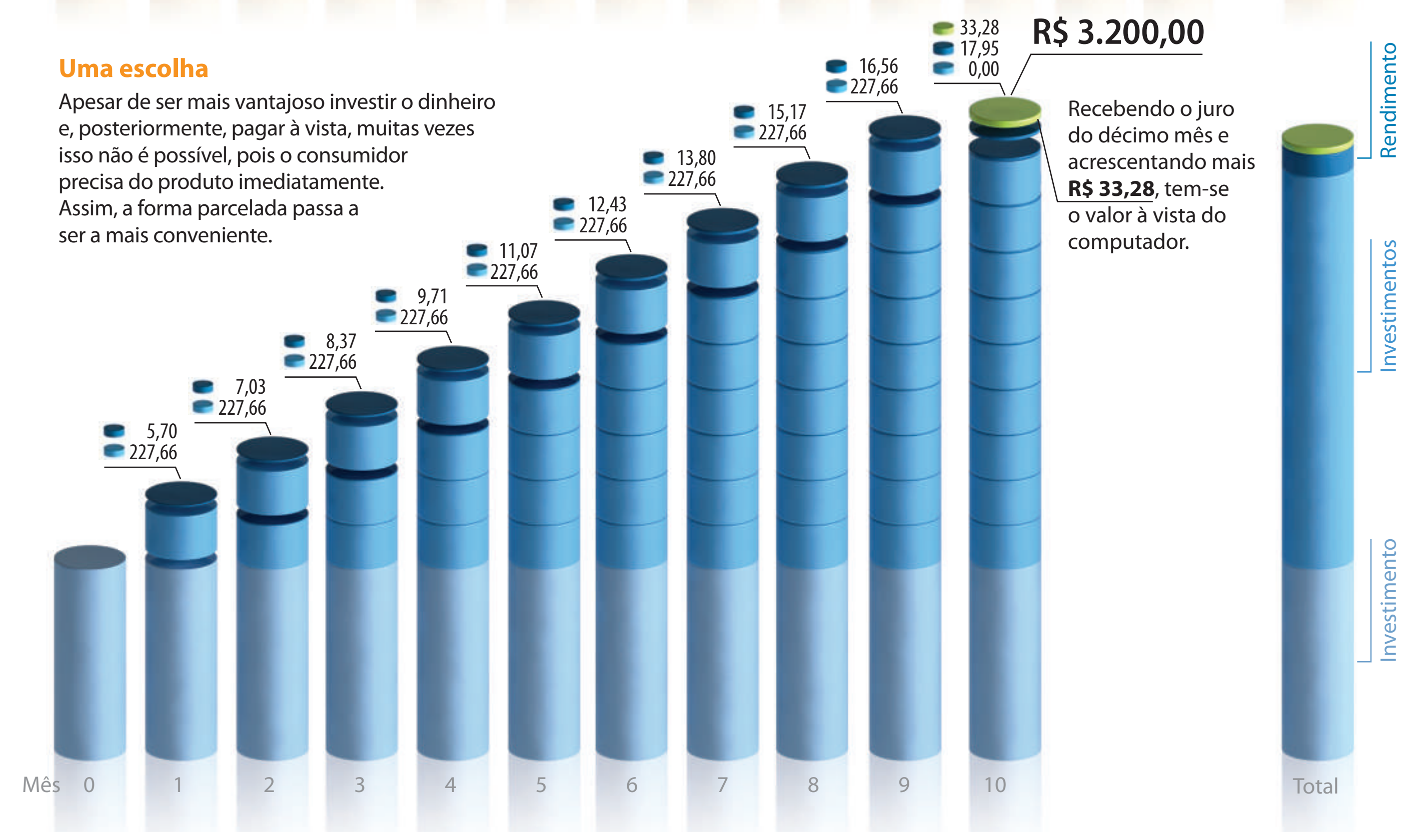
Para pensar

1. Se Bruna escolher a primeira opção, quanto pagará de juro no total?
2. Na segunda opção, quanto renderá a poupança em 10 meses?



Uma escolha

Apesar de ser mais vantajoso investir o dinheiro e, posteriormente, pagar à vista, muitas vezes isso não é possível, pois o consumidor precisa do produto imediatamente. Assim, a forma parcelada passa a ser a mais conveniente.



Seção 7.1

Porcentagem e aplicações

Objetivos

- **Calcular** porcentagens.
- **Determinar** o lucro ou o prejuízo de uma operação comercial.
- **Calcular** descontos.
- **Compreender** o que é receita.
- **Converter** moedas de acordo com a taxa de câmbio.

Termos e conceitos

- taxa percentual
- lucro
- prejuízo
- desconto
- receita
- câmbio

Muitas vezes, para compreender as notícias veiculadas em jornais, revistas, telejornais ou em *sites* especializados, precisamos de um conhecimento específico do assunto tratado. Um exemplo disso são as notícias relacionadas ao mercado financeiro.

Entender como funciona o mercado financeiro e as notícias sobre esse setor depende de alguns conceitos relativos à Matemática Financeira, como: porcentagem, capital inicial, juro, taxa de juro e montante, que serão estudados neste capítulo.

Porcentagem

Nos restaurantes brasileiros é comum a cobrança de uma tarifa referente ao serviço, ou seja, ao trabalho do garçom. Essa tarifa, chamada **taxa de serviço,** equivale a 10% (dez por cento) do valor do que é consumido pelo cliente. Isto é, a cada R$ 100,00 de consumo, o cliente paga mais R$ 10,00 de taxa de serviço. Assim, se o consumo for R$ 50,00, a taxa de serviço será R$ 5,00; se o consumo for R$ 60,00, a taxa de serviço será R$ 6,00 etc., ou seja, o valor pago pelo cliente é o produto do valor consumido por 1,1.

A expressão x%, que lemos "x por cento", é chamada de **taxa percentual** e representa a fração $\frac{x}{100}$, isto é, $x\% = \frac{x}{100}$, em x é um número real qualquer.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Representar, na forma de fração irredutível, cada taxa percentual:

a) 30% b) 140% c) 0,8%

Resolução

a) $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

b) $140\% = \frac{140}{100} = \frac{7}{5}$

c) $0{,}8\% = \frac{0{,}8}{100} = \frac{8}{1.000} = \frac{1}{125}$

2 Representar, na forma de número decimal, cada uma das taxas percentuais:

a) 42% b) 5% c) 250% d) 0,4%

Resolução

a) $42\% = \frac{42}{100} = 0{,}42$

b) $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$

c) $250\% = \frac{250}{100} = 2{,}5$

d) $0{,}4\% = \frac{0{,}4}{100} = 0{,}004$

3 Representar, na forma de taxa percentual, cada um dos números decimais:

a) 0,75 b) 0,5 c) 1,24 d) 0,058

Resolução

a) $0{,}75 = \frac{75}{100} = 75\%$

b) $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$

c) $1{,}24 = \frac{124}{100} = 124\%$

d) $0{,}058 = \frac{58}{1.000} = \frac{5{,}8}{100} = 5{,}8\%$

Veja outra maneira de transformar um número decimal em taxa percentual:

$0{,}058 = 0{,}058 \cdot \frac{100}{100} = \frac{(0{,}058 \cdot 100)}{100} = \frac{5{,}8}{100} = 5{,}8\%$

4 Representar, na forma de taxa percentual, cada uma das frações:

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{14}{16}$

Resolução

Uma maneira de transformar uma fração em taxa percentual é dividir o numerador pelo denominador, obtendo, assim, o número decimal que representa a fração, e, a seguir, aplicar a técnica do exercício anterior, transformando o número decimal em taxa percentual.

a) $\frac{5}{4} = 1{,}25 = \frac{1{,}25 \cdot 100}{100} = \frac{125}{100} = 125\%$

(*Nota*: Poderíamos, também, multiplicar por 25 o numerador e o denominador de $\frac{5}{4}$, obtendo, assim: $\frac{125}{100} = 1{,}25$.)

b) $\frac{3}{8} = 0{,}375 = \frac{0{,}375 \cdot 100}{100} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$

c) $\frac{14}{16} = 0{,}875 = \frac{0{,}875 \cdot 100}{100} = \frac{87{,}5}{100} = 87{,}5\%$

5 A seção de controle de qualidade de uma indústria reprovou 4% dos 800 ferros elétricos fabricados em um determinado dia. Quantos ferros elétricos foram reprovados nesse dia?

Resolução

Devemos calcular 4% de 800. Como nesse contexto a preposição **de** indica multiplicação, temos:

$4\% \cdot 800 = 0{,}04 \cdot 800 = 32$

Logo, foram reprovados 32 ferros elétricos nesse dia.

6 Dentre os 240.000 eleitores que votaram em uma candidata, 64% são mulheres. Dentre essas mulheres, 42% são casadas. Quantas mulheres casadas votaram nessa candidata?

Resolução

Devemos calcular 42% **de** 64% **de** 240.000, ou seja,

$42\% \cdot 64\% \cdot 240.000 = 0{,}42 \cdot 0{,}64 \cdot 240.000 = 64.512$

Assim, 64.512 mulheres casadas votaram na candidata.

7 De acordo com a especificação da Agência Nacional de Petróleo (ANP), a mistura de gasolina e álcool, vendida em postos de combustíveis, pode ter, no máximo, 25% de álcool. Em uma visita a um posto, um fiscal retirou uma amostra de 625 mL dessa mistura, constatando que havia nela 150 mL de álcool. Essa mistura está de acordo com a especificação da ANP?

Resolução

Na amostra há 150 mL de álcool em um total de 625 mL da mistura, isto é: $\frac{150}{625}$

Transformando essa fração em taxa percentual, temos: $\frac{150}{625} = 0{,}24 = \frac{0{,}24 \cdot 100}{100} = \frac{24}{100} = 24\%$

Logo, a mistura está de acordo com a especificação da ANP.

8 No vestibular de medicina do ano passado de uma universidade pública, foram aprovados 270 candidatos. Calcular o número total de candidatos que prestaram esse exame sabendo que o número de aprovados corresponde a 6% desse total.

Resolução

Sendo n o número total de candidatos que participaram desse vestibular, temos:

$0{,}06 \cdot n = 270 \Rightarrow n = \dfrac{270}{0{,}06} = 4.500$

Portanto, 4.500 candidatos prestaram esse vestibular.

9 Após um reajuste de 8%, um livro passou a custar R$ 48,60. Qual era o preço desse livro antes do reajuste?

Resolução

Sendo p o preço antes do reajuste, temos:

$p + 0{,}08p = 48{,}60 \Rightarrow 1{,}08p = 48{,}60$

$\therefore p = \dfrac{48{,}60}{1{,}08} = 45$

Assim, o livro custava R$ 45,00 antes do reajuste.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Represente, na forma de fração irredutível, cada taxa percentual a seguir:
a) 45%
b) 240%
c) 0,5%

2 Represente, na forma de número decimal, cada uma das taxas percentuais:
a) 24%
b) 12%
c) 124%
d) 0,8%

3 Represente, na forma de taxa percentual, cada um dos números decimais:
a) 0,25
b) 0,4
c) 2,5
d) 0,004

4 Represente, na forma de taxa percentual, cada uma das frações:
a) $\dfrac{1}{8}$
b) $\dfrac{4}{25}$
c) $\dfrac{7}{5}$

5 Calcule 32% de 40%.

6 Uma pesquisa realizada às vésperas de uma eleição revelou que 28% dos 1.200 entrevistados votariam em um candidato A. Quantos dos entrevistados votariam no candidato A?

7 (Covest-PE) Uma proposta para ajudar a combater a fome no mundo é taxar as transações financeiras internacionais em 0,01%. Estas transações movimentam 1,2 trilhão de dólares ao dia útil. Qual seria o total arrecadado em um ano? (Considere que o ano consiste de 52 semanas e cada semana contém 5 dias úteis).
a) 3,12 milhões de dólares
b) 31,2 milhões de dólares
c) 3,12 bilhões de dólares
d) 31,2 bilhões de dólares
e) 3,12 trilhões de dólares

8 (Ufac) Um consumidor faz uma pesquisa no mercado e constata que o preço do carro da marca A, quando acrescido de 25% do seu valor, é precisamente o preço do carro da marca B. Com relação aos preços dos carros das marcas A e B, pode-se afirmar que:
a) o preço do carro da marca B é 75% do preço do carro da marca A.
b) o preço do carro da marca A é 80% do preço do carro da marca B.
c) o preço do carro da marca B é 25% do preço do carro da marca A.
d) se o preço do carro da marca A é R$ 15.000,00, então o preço do carro da marca B é R$ 20.000,00.
e) se o preço do carro da marca B é R$ 25.000,00, então o preço do carro da marca A é R$ 16.000,00.

9 Em uma assembleia com 315 participantes, 25% do número de mulheres é igual a 20% do número de homens. O número de mulheres que participam dessa assembleia é:
a) 140 b) 120 c) 180 d) 175 e) 190

10 (Enem) Nas últimas eleições presidenciais de um determinado país, onde 9% dos eleitores votaram em branco e 11% anularam o voto, o vencedor obteve 51% dos votos válidos. Não são considerados válidos os votos em branco e nulos. Pode-se afirmar que o vencedor, de fato, obteve de todos os eleitores participantes dessa eleição um percentual de votos da ordem de:
a) 38% b) 41% c) 44% d) 47% e) 50%

11 A balança comercial de um país, em um determinado período, é a diferença entre o valor total das exportações e o das importações, nessa ordem.
a) Na tabela abaixo, determine os valores x e y da balança comercial de certo país, em 2009 e 2010, respectivamente.

	Exportações (em bilhões de dólares)	Importações (em bilhões de dólares)	Balança comercial (em bilhões de dólares)
2009	135,4	91,2	x
2010	152,28	94,82	y

b) Qual foi taxa percentual de crescimento da balança comercial desse país de 2009 para 2010?

12 (UFMT) Num exame vestibular, 30% dos candidatos inscritos eram da área de Ciências Sociais. Destes, 30% optaram pelo curso de Administração. O percentual dos que optaram por Administração em relação ao total de inscritos é:

a) 9% b) 10% c) 8% d) 30% e) 60%

13 (UFC-CE) Numa sala há 100 pessoas, das quais 97 são homens. Para que os homens representem 96% das pessoas contidas na sala, deverá sair que número de homens?

a) 2 b) 5 c) 10 d) 15 e) 25

14 Uma escultura foi moldada com a fusão de cobre, zinco e estanho. Calcule a massa total da escultura, em kg, sabendo que a massa de cobre que a compõe é de 37,7 kg e equivale a 58% da massa total.

15 (UFC-CE) Um operário gastava mensalmente 10% do seu salário com transporte. Depois de um aumento no preço das passagens, ele passou a gastar R$ 5,00 a mais, por mês, comprometendo a partir daí 12,5% do seu salário com transporte. Calcule o valor do salário desse operário.

Resolva os exercícios complementares 1 a 33.

Aplicações do conceito de porcentagem no comércio

A porcentagem é uma ferramenta essencial nas transações comerciais. A seguir, apresentamos conceitos relacionados a porcentagem e algumas aplicações.

Lucro e prejuízo

Em uma operação comercial de compra e venda, o **preço de custo *C*** (ou **preço de compra**) do objeto comercializado é o valor monetário pago pelo comerciante ao fornecedor, e o **preço de venda *V*** é aquele pelo qual o objeto é vendido. Essa transação pode gerar ganho ou perda financeira ao comerciante e é calculada da seguinte maneira:

$$\boxed{V - C}$$

- se $V > C$, então a diferença $V - C$ é positiva e é chamada de **lucro**, porque a transação gerou ganho;
- se $V < C$, então a diferença $V - C$ é negativa e $|V - C|$ é chamado de **prejuízo**, porque a transação gerou perda.

Nota:

O lucro assim definido é o lucro bruto, pois para calcular o lucro líquido devem ser descontados alguns encargos como impostos, aluguéis, transporte, salários de funcionários etc.

Cálculo do percentual de lucro ou prejuízo

O percentual de lucro ou prejuízo pode ser calculado em relação ao preço de venda V ou ao preço de compra C.

Se $V > C$, temos:

- $\dfrac{V - C}{C}$ (percentual de lucro sobre o preço de compra)
- $\dfrac{V - C}{V}$ (percentual de lucro sobre o preço de venda)

Se $V < C$, temos:

- $\left|\dfrac{V - C}{C}\right|$ (percentual de prejuízo sobre o preço de compra)
- $\left|\dfrac{V - C}{V}\right|$ (percentual de prejuízo sobre o preço de venda)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10 Um comerciante comprou um produto por R$ 84,00 e o vendeu por R$ 105,00.

a) Calcular o percentual de lucro sobre o preço de custo.

b) Calcular o percentual de lucro sobre o preço de venda.

Resolução

a) O percentual de lucro sobre o preço de custo é dado por:

$$\frac{V - C}{C} = \frac{105 - 84}{84} = \frac{21}{84} = 0{,}25 = 25\%$$

Logo, o comerciante teve um lucro de 25% sobre o preço de custo.

b) O percentual de lucro sobre o preço de venda é dado por:

$$\frac{V - C}{V} = \frac{105 - 84}{105} = \frac{21}{105} = 0{,}2 = 20\%$$

Logo, o comerciante teve um lucro de 20% sobre o preço de venda.

11 Quando restava no estoque apenas uma camisa de certo modelo, o gerente de uma loja resolveu vendê-la abaixo do preço de custo, que era de R$ 64,00.
Sabendo que a camisa foi vendida por R$ 40,00, calcular:

a) o percentual de prejuízo sobre o preço de custo;

b) o percentual de prejuízo sobre o preço de venda.

Resolução

a) O percentual de prejuízo sobre o preço de custo é dado por:

$$\left|\frac{V - C}{C}\right| = \left|\frac{40 - 64}{64}\right| = \left|\frac{-24}{64}\right| = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Logo, o comerciante teve um prejuízo de 37,5% sobre o preço de custo.

b) O percentual de prejuízo sobre o preço de venda é dado por:

$$\left|\frac{V - C}{V}\right| = \left|\frac{40 - 64}{40}\right| = \left|\frac{-24}{40}\right| = 0{,}6 = 60\%$$

Logo, o comerciante teve um prejuízo de 60% sobre o preço de venda.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Uma pequena fábrica de cintos tem um custo fixo mensal de R$ 6.000,00 e um custo de R$ 2,00 por cinto fabricado. Portanto, o custo mensal C, em real, é dado por $C = 6.000 + 2x$, em que x é o número de cintos produzidos por mês.

Cada cinto é vendido por R$ 3,50 e toda a produção é vendida. Mantendo o custo fixo, a empresa tem condições de dobrar o lucro mensal, que atualmente é de R$ 9.000,00, sem aumentar o preço unitário de venda. Para isso, deve vender toda a produção, precisando aumentá-la em:

a) 80%
b) 40%
c) 95%
d) 60%
e) 100%

17 Um comerciante compra uma calculadora eletrônica por R$ 75,00 e a revende por R$ 120,00. Nessa transação:

a) qual o percentual de lucro sobre o preço de custo?

b) qual o percentual de lucro sobre o preço de venda?

18 Um lojista vendeu uma toalha de mesa por R$ 89,60 com um lucro de 40% sobre o preço de custo. Qual foi o preço de custo dessa toalha?

Resolva os exercícios complementares 34 a 39.

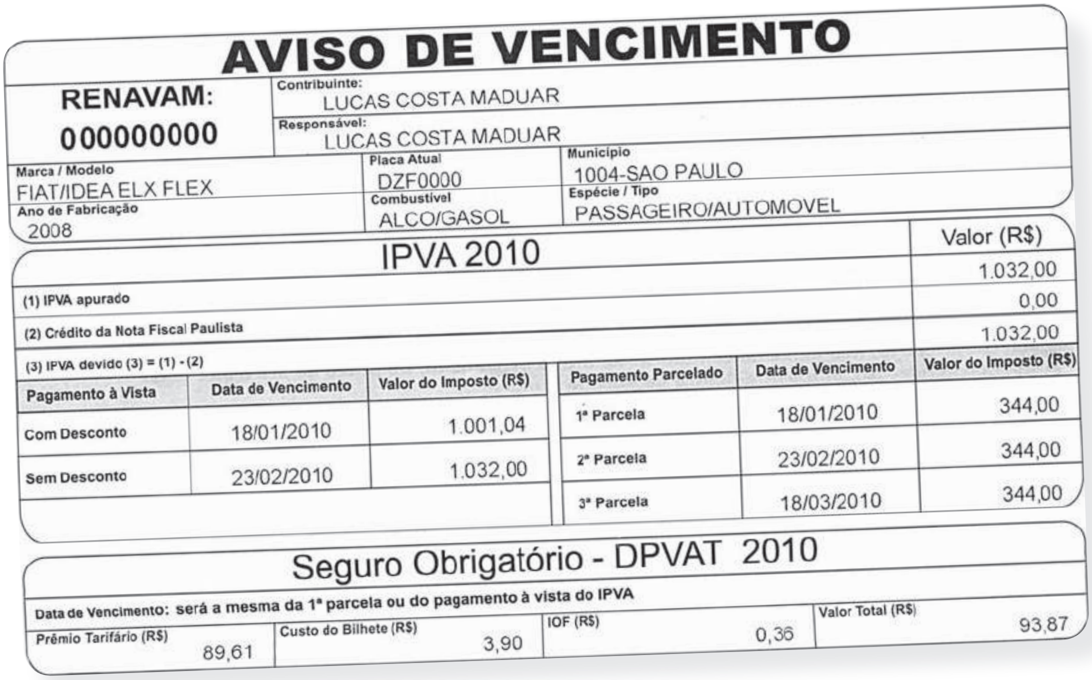
Desconto

A cada fim de estação, as lojas de roupas promovem grandes liquidações. Os preços são reduzidos visando à rápida venda das peças restantes. Essa redução dos preços é chamada de **desconto**.

Desconto é uma redução em determinada quantia e **taxa de desconto** é a razão entre o desconto e a quantia sobre a qual foi concedido o desconto.

Exemplo

Em 2010, o proprietário de um automóvel recebeu a seguinte guia do IPVA (Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores):



AVISO DE VENCIMENTO

RENAVAM: 000000000

Contribuinte: LUCAS COSTA MADUAR

Responsável: LUCAS COSTA MADUAR

Marca / Modelo	Placa Atual	Município
FIAT/IDEA ELX FLEX	DZF0000	1004-SAO PAULO
Ano de Fabricação	**Combustível**	**Espécie / Tipo**
2008	ALCO/GASOL	PASSAGEIRO/AUTOMOVEL

IPVA 2010	Valor (R$)
	1.032,00
(1) IPVA apurado	0,00
(2) Crédito da Nota Fiscal Paulista	1.032,00
(3) IPVA devido (3) = (1) - (2)	

Pagamento à Vista	Data de Vencimento	Valor do Imposto (R$)
Com Desconto	18/01/2010	1.001,04
Sem Desconto	23/02/2010	1.032,00

Pagamento Parcelado	Data de Vencimento	Valor do Imposto (R$)
1ª Parcela	18/01/2010	344,00
2ª Parcela	23/02/2010	344,00
3ª Parcela	18/03/2010	344,00

Seguro Obrigatório - DPVAT 2010

Data de Vencimento: será a mesma da 1ª parcela ou do pagamento à vista do IPVA

Prêmio Tarifário (R$)	Custo do Bilhete (R$)	IOF (R$)	Valor Total (R$)
89,61	3,90	0,36	93,87

Com base nos valores apresentados nesse documento, é possível calcular a taxa i de desconto:

$$i = \frac{1.032{,}00 - 1.001{,}04}{1.032{,}00} = \frac{30{,}96}{1.032{,}00} = 0{,}03 = 3\%$$

Receita

Na linguagem comercial, em vez de dizer que um fabricante recebeu R$ 3.680,00 com a venda de certo produto, dizemos que a **receita** apurada com a venda do produto foi R$ 3.680,00.

Exemplo

Em 2010, ano do centenário do Corinthians, o diretor de marketing do clube previu uma receita recorde no futebol brasileiro com o valor de 200 milhões de reais entrando nos cofres corintianos.

Nota:

No Brasil, é comum usar o termo "faturamento" com o mesmo significado de "receita".

12 Na compra de um par de sapatos tive um desconto de 24% sobre o preço registrado na etiqueta, que era de R$ 85,00. Quanto paguei pelo par de sapatos?

Resolução

Sendo p o preço pago, temos:

$p = 85 - 0{,}24 \cdot 85 \Rightarrow p = 64{,}6$

Logo, o valor pago pelo par de sapatos foi R$ 64,60.

13 Pela manhã, um atacadista vendia a caixa de tomates por R$ 25,00. À tarde, oferecia a caixa de tomates com um desconto de 10% sobre o preço anterior, e, à noite, com 8% de desconto sobre o preço praticado à tarde.

a) Qual era o preço da caixa de tomates à noite?

b) Qual foi o percentual de desconto acumulado à noite, em relação ao preço praticado de manhã?

Resolução

a) O preço à tarde era 90% do preço praticado de manhã, e o preço à noite era 92% do preço praticado à tarde. Assim, temos:

Preço de manhã (em R$)	Preço à tarde (em R$)	Preço à noite (em R$)
25	$0{,}90 \cdot 25$	$0{,}92 \cdot 0{,}90 \cdot 25$

Logo, o preço da caixa de tomates, praticado à noite, era de R$ 20,70.

b) O percentual de desconto acumulado pode ser calculado por:

$$\frac{25 - 20{,}70}{25} = \frac{4{,}30}{25} = 0{,}172 = 17{,}2\%$$

Note que esse percentual pode ser calculado, também, por:

$1 - 0{,}92 \cdot 0{,}90 = 0{,}172 = 17{,}2\%$

14 O preço de uma passagem de ônibus intermunicipal sofreu um aumento de 5%, passando a custar R$ 29,40.
Qual era o preço dessa passagem antes do reajuste?

Resolução

Sendo p o preço antes do reajuste, temos:

$p + 0{,}05 \cdot p = 29{,}40 \Rightarrow 1{,}05 \cdot p = 29{,}40$

$$\therefore p = \frac{29{,}40}{1{,}05} = 28$$

Logo, antes do aumento a passagem custava R$ 28,00.

15 No início de janeiro, o preço do litro de leite sofreu um aumento de 20%, e no início de fevereiro o aumento foi de 10%.
Qual foi o percentual de aumento acumulado nesses dois meses?

Resolução

Sendo x o preço do litro de leite antes do primeiro aumento, temos:

Preço antes do primeiro aumento (em R$)	Preço praticado em janeiro (em R$)	Preço praticado em fevereiro (em R$)
x	$1{,}2x$	$1{,}1 \cdot 1{,}2 \cdot x$

Assim, o preço em fevereiro era $1{,}32x$ reais; portanto, a taxa percentual do reajuste é:

$$\frac{1{,}32x - x}{x} = \frac{0{,}32x}{x} = 0{,}32 = 32\%$$

Note que essa taxa pode ser calculada, também, por:

$1{,}1 \cdot 1{,}2 - 1 = 0{,}32 = 32\%$

16 A receita apurada com a venda de 108 rolamentos iguais foi de R$ 4.600,80. A terça parte desses rolamentos foi vendida a preço de catálogo, e o restante foi vendido com 8% de desconto. Qual é o preço de catálogo de cada rolamento?

Resolução

Sendo p o preço unitário de catálogo, temos 36 rolamentos que foram vendidos ao preço p e 72, ao preço $0{,}92 \cdot p$. Assim, concluímos:

$36 \cdot p + 72 \cdot 0{,}92 \cdot p = 4.600{,}80 \Rightarrow 102{,}24 \cdot p = 4.600{,}80$

$$\therefore p = \frac{4.600{,}80}{102{,}24} = 45$$

Logo, o preço de catálogo de cada rolamento é R$ 45,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19 (PUC-RJ) Um vendedor oferece sua mercadoria da seguinte maneira: "Um custa R$ 200,00 e três custam R$ 450,00". O freguês que levasse três unidades da mercadoria estaria recebendo um desconto de:

a) 50%
b) 25%
c) 10%
d) 30%
e) 40%

20 (PUC-RJ) O valor v a ser pago, após um desconto de 4,5% sobre o valor x de uma mercadoria, é:

a) $v = x - 4,5$
b) $v = -4,5x$
c) $v = 1,45x$
d) $v = 10x - 4,5$
e) $v = 0,955x$

21 Um cliente teve um desconto de 18% sobre o preço de etiqueta de uma cadeira giratória. Sabendo que o preço pago pelo cliente foi R$ 180,40, calcule o preço de etiqueta da cadeira.

22 (UFPB) Uma determinada mercadoria, sofrendo um aumento de 30%, passa a custar R$ 195,00. Um ganancioso comerciante, achando que o seu lucro seria muito pequeno, resolveu então que o aumento deveria ser de 40%. Neste caso, o comerciante venderá sua mercadoria por:

a) R$ 214,50
b) R$ 210,00
c) R$ 191,10
d) R$ 273,00
e) R$ 201,50

23 Em uma determinada semana, houve um aumento de 5% no preço do litro da gasolina. Na semana seguinte, houve um novo aumento de 2%. Qual o percentual de aumento nessas duas semanas?

24 A inflação é um desequilíbrio na economia caracterizado por uma alta geral de preços. Se em determinado trimestre a inflação de um país for 20% ao mês, qual será o percentual de inflação no fim do trimestre?

25 Na primeira semana de uma liquidação, um comerciante concedeu um desconto de 20% sobre o preço de qualquer mercadoria. Na semana seguinte, o comerciante concedeu 15% de desconto sobre os preços praticados na semana anterior. Qual foi o percentual de desconto acumulado nessas duas semanas?

26 (UEL-PR) Em uma loja, o preço anunciado de um artigo é de R$ 125,00. Sobre esse preço foram dados dois descontos sucessivos: um de 16% e outro de p%. Se o preço desse artigo reduziu-se a R$ 81,90, então p é igual a:

a) 18 b) 20 c) 22 d) 24 e) 26

27 O sindicato das padarias divulgou que a quantidade de pão, em kg, vendida na cidade A em 2010 foi 8% maior que a vendida em 2009, enquanto o preço de venda do kg de pão em 2010 foi 3% maior que o de 2009.

Conclui-se que a receita arrecadada com a venda de pão na cidade A em 2010 foi:

a) 10,4% maior que a receita de 2009.
b) 11,24% maior que a receita de 2009.
c) 12% maior que a receita de 2009.
d) 13,8% maior que a receita de 2009.
e) 9,2% maior que a receita de 2009.

Resolva os exercícios complementares 40 a 51.

Câmbio

Em viagens internacionais, em transações comerciais que envolvem importação ou exportação, em remessas de dinheiro ao exterior e em outras situações, é preciso fazer a troca de moedas de um país para outro. Para isso, deve-se conhecer a relação entre os valores dessas moedas. A operação financeira que envolve a troca da moeda de um país pela de outro é chamada de **câmbio**.

A **taxa de câmbio** é a relação entre os valores de duas moedas.

Exemplo

Segundo o Banco Central, em 8/3/2010, cada dólar dos Estados Unidos valia 1,7826 reais. Dizemos que a taxa de câmbio do dólar, em relação ao real, nessa data, era de 1 para 1,7826. Podemos dizer, também, que a cotação do dólar em real, nesse dia, era de R$ 1,7826.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

17 Uma pessoa, em viagem aos Estados Unidos, trocou R$ 2.340,00 por dólares americanos.
Quantos dólares ela recebeu em troca, se a taxa de câmbio nesse dia era de 1 dólar para 1,95 reais?

Resolução

Para calcular o valor recebido x, em dólar, basta resolver a proporção:

$$\frac{1}{1{,}95} = \frac{x}{2.340} \Rightarrow x = \frac{2.340}{1{,}95} = 1.200$$

Logo, a pessoa recebeu 1.200 dólares.

18 Há algum tempo, troquei 2.000 pesos argentinos por euros. No dia da troca, 1 peso argentino valia R$ 0,61 e 1 euro valia R$ 2,63.
Quantos euros recebi em troca?

Resolução

Inicialmente, determinamos o valor x, em reais, equivalente a 2.000 pesos. A seguir, determinamos o valor y, em euros, equivalente a x reais:

$$\frac{1}{0{,}61} = \frac{2.000}{x} \Rightarrow x = 1.220$$

$$\frac{1}{2{,}63} = \frac{y}{1.220} \Rightarrow y \approx 463{,}88$$

Logo, o valor recebido, em euros, foi 463,88, aproximadamente.

19 Em um determinado dia, 1 dólar americano valia R$ 2,00. Um mês depois, 1 dólar americano valia R$ 1,95.

a) Qual o percentual de desvalorização do dólar, em relação ao real, nesse mês?

b) Qual o percentual de valorização do real, em relação ao dólar, nesse mês?

Resolução

a) Dividindo o valor final do dólar (em real) pelo valor inicial, temos:

$$\frac{1{,}95}{2} = 0{,}975 = 97{,}5\%$$

Assim, na segunda cotação o dólar valia 97,5% do valor inicial; logo, sua desvalorização foi de 2,5%.

Podemos resolver esse problema de outra maneira:

O dólar desvalorizou R$ 0,05 em R$ 2,00; logo, o percentual de desvalorização foi:

$$\frac{0{,}05}{2{,}00} = 0{,}025 = 2{,}5\%$$

b) Na primeira cotação considerada, 1 real valia $\frac{1}{2}$ dólar e na segunda valia $\frac{1}{1{,}95}$ do dólar. Dividindo o valor final do real (em dólar) pelo inicial, temos:

$$\frac{\frac{1}{1{,}95}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1{,}95} \approx 1{,}0256 = 102{,}56\%$$

Assim, na segunda cotação, o real valia, aproximadamente, 102,56% do valor inicial; logo, sua valorização foi de 2,56%, aproximadamente.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 Um empresário brasileiro importou uma máquina no valor de 32.000 euros. Quantos reais desembolsou esse empresário nessa transação, se a taxa de câmbio no dia do pagamento era de 1 euro para 2,5 reais?

29 Em determinado dia, cada iene (moeda japonesa) valia 0,0162 real, e cada dólar americano valia 1,9116 real. Calcule a cotação do dólar em iene, nesse dia.

30 Em certa data, um rublo (moeda russa) valia 0,074 real e uma rúpia (moeda indiana) valia 0,047 real. Nessa data, 2.400 rublos equivaliam a quantas rúpias?

31 Em 1º/8/2006, cada real valia 1,4 peso argentino. Um ano depois, em 1º/8/2007, cada real valia 1,6 peso argentino.

a) Qual foi o percentual de valorização do real, em relação ao peso, nesse período?

b) Qual foi o percentual de desvalorização do peso, em relação ao real, nesse período?

Resolva os exercícios complementares 52 a 55.

Seção 7.2

Juro simples

Objetivos

- **Compreender** os termos que compõem uma transação no regime de juro simples.
- **Efetuar** operações financeiras no regime de juro simples.

Termos e conceitos

- capital inicial
- montante
- taxa de juro
- juro simples

Ao tomar um empréstimo em dinheiro ou comprar um bem financiado, pagamos uma quantia ao credor, além do valor emprestado ou financiado. Essa quantia é chamada de **juro**.

Exemplo

Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 1.800,00 que será pago em 10 parcelas mensais, incluindo 5% de juro ao mês sobre o total emprestado.

O pagamento pelo empréstimo é chamado de **juro** (J); a quantia emprestada é chamada de **capital inicial** (C); a soma do capital inicial com o juro é chamada de **montante** (M); a razão entre o juro e o capital inicial, nessa ordem, num determinado período, é chamada de **taxa de juro** (i) nesse período.

Assim, nessa transação, temos:

$$C = \text{R\$ } 1.800{,}00$$

$$J = 10 \cdot (0{,}05 \cdot \text{R\$ } 1.800{,}00) = \text{R\$ } 900{,}00$$

$$M = \text{R\$ } 1.800{,}00 + \text{R\$ } 900{,}00 = \text{R\$ } 2.700{,}00$$

$$i = \frac{90}{1.800} = 0{,}05 = 5\% \text{ (taxa mensal)}$$

O juro calculado nessa situação recebe o nome de **juro simples**, porque a taxa de juro incide apenas sobre a quantia emprestada.

Generalizando:

Quando um capital C é aplicado durante t unidades de tempo, e a taxa i de juro, por unidade de tempo, incide apenas sobre o capital inicial, o juro J é chamado de juro simples. Esse juro, no final da aplicação, é calculado por:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot t}$$

O montante M é calculado por:

$$\boxed{M = C + J}$$

Nota:

A menos que se adotem outros parâmetros, nos problemas sobre juro serão considerados o **ano comercial**, que tem 360 dias, e o **mês comercial**, que tem 30 dias.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

20 Um capital de R$ 2.400,00 foi aplicado durante 5 meses à taxa de juro simples de 2% ao mês.

a) Qual foi o juro simples produzido nesse período?

b) Qual foi o montante acumulado nesse período?

Resolução

a) Pelo enunciado, temos:

C = R$ 2.400,00 $t = 5$ (meses)

$J = ?$ $i = 2\% = 0{,}02$ (taxa mensal)

A fórmula $J = C \cdot i \cdot t$ pode ser aplicada quando a taxa i e o tempo t estiverem relacionados à mesma unidade de tempo. Assim, temos:

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 2.400 \cdot 0{,}02 \cdot 5 = 240$

Logo, o juro produzido no período foi de R$ 240,00.

b) O montante M é a soma do capital inicial C com o juro J produzido:

$M = C + j \Rightarrow M =$ R$ 2.400,00 + R$ 240,00 =

= R$ 2.640,00

Logo, o montante acumulado no período foi de R$ 2.640,00.

21 Durante quanto tempo um capital de R$ 600,00 aplicado à taxa de 1,8% ao mês produz juro simples de R$ 54,00?

Resolução

Esquematizando:

C = R$ 600,00 J = R$ 54,00 $t = ?$

$i = 1{,}8\% = 0{,}018$ (taxa mensal)

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 54 = 600 \cdot 0{,}018 \cdot t$

$\therefore 54 = 10{,}8 \cdot t$

$\therefore t = \dfrac{54}{10{,}8} = 5$

Como a fórmula $J = C \cdot i \cdot t$ relaciona o tempo e a taxa na mesma unidade de tempo, concluímos que $t = 5$ meses.

22 Calcular o montante acumulado por uma aplicação de R$ 1.500,00, em regime de juro simples, à taxa de 17% ao ano, durante 8 meses. (Considerar o ano e o mês comerciais.)

Resolução

Inicialmente, devemos calcular a taxa ao mês ou o tempo em ano.

Para calcular o tempo em ano, fazemos: $\dfrac{9}{12} = 0{,}75$

Portanto, 9 meses equivalem a 0,75 ano.

Esquematizando:

C = R$ 1.500,00 $t = 0{,}75$ (ano)

$J = ?$ $i = 17\% = 0{,}17$ (taxa anual)

$M = ?$

Assim, temos:

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 1.500 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}75 = 191{,}25$

Concluímos, então, que o juro foi de R$ 191,25; portanto, o montante foi de:

$M = C + J =$ R$ 1.691,25

Taxas equivalentes

Quando duas taxas percentuais i_1 e i_2, em unidades de tempo diferentes, são aplicadas ao mesmo capital inicial durante um mesmo período, e produzem juros iguais, dizemos que essas taxas são equivalentes.

Vejamos a relação entre i_1 e i_2 em regime de juro simples.

Sejam:

- J_1 o juro simples produzido pela aplicação de um capital C durante t meses, à taxa mensal i_1;
- J_2 o juro simples produzido pela aplicação de um capital C durante t meses, à taxa anual i_2.

Lembrando que na fórmula $J = C \cdot i \cdot t$, a taxa e o tempo devem estar relacionados à mesma unidade de tempo, temos: $J_1 = C \cdot i_1 \cdot t$ e $J_2 = C \cdot i_2 \cdot \dfrac{t}{12}$

Para que j_1 seja igual a J_2, devemos ter:

$$C \cdot i_1 \cdot t = C \cdot i_2 \cdot \frac{t}{12} \Rightarrow i_2 = 12i_1 \text{ ou } i_1 = \frac{i_2}{12}$$

Ou seja, em regime de juro simples:

- uma taxa i ao mês equivale à taxa $12i$ ao ano;
- uma taxa i ao ano equivale à taxa $\dfrac{i}{12}$ ao mês.

Raciocinando do mesmo modo, podemos concluir que, em regime de juro simples:

- uma taxa i ao dia equivale à taxa $30i$ ao mês;
- uma taxa i ao mês equivale à taxa $\frac{i}{30}$ ao dia.

Podemos generalizar afirmando que, no regime de juro simples, a proporcionalidade entre as taxas equivalentes é válida para quaisquer unidades de tempo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

23 Qual foi o juro simples produzido por um capital de R$ 1.000,00 aplicado durante 8 meses à taxa de 18% ao ano?

Resolução

Inicialmente, devemos calcular a taxa ao mês ou o tempo em ano.

Para calcular a taxa ao mês, efetuamos: $\frac{18\%}{12} = 1{,}5\%$

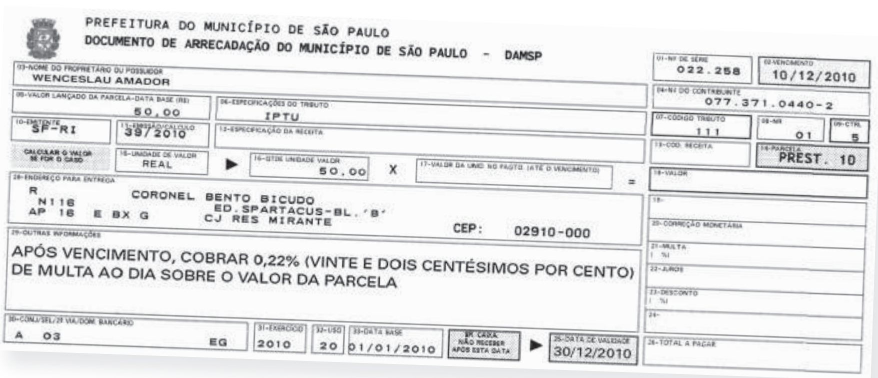
Portanto, 18% ao ano equivale a 1,5% ao mês.
Esquematizando:
C = R$ 1.000,00
$J = ?$
$t = 8$ (meses)
$i = 1{,}5\% = 0{,}015$ (taxa mensal)
Assim, temos:
$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 1.000 \cdot 0{,}015 \cdot 8 = 120$
Concluímos, então, que o juro foi de R$ 120,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

32 Um capital de R$ 1.800,00 foi aplicado em regime de juro simples à taxa de 1,6% ao mês, durante 10 meses.
a) Qual foi o juro simples produzido nesse período?
b) Qual foi o montante acumulado nesse período?

33 Um capital de R$ 4.000,00 aplicado à taxa de 2,5% ao mês produziu juro simples de R$ 1.500,00. Durante quanto tempo esse capital ficou aplicado?

34 Ao lado, temos a reprodução de um documento de arrecadação de impostos do município de São Paulo, correspondente ao pagamento do mês de dezembro de 2010.
Se o contribuinte efetuou o pagamento desse imposto no dia 18 de dezembro de 2010, qual foi o valor pago?


PREFEITURA DO MUNICÍPIO DE SÃO PAULO
DOCUMENTO DE ARRECADAÇÃO DO MUNICÍPIO DE SÃO PAULO - DAMSP

01-Nº DE SÉRIE: 022.258
02-VENCIMENTO: 10/12/2010
03-NOME DO PROPRIETÁRIO OU POSSUIDOR: WENCESLAU AMADOR
04-Nº DO CONTRIBUINTE: 077.371.0440-2
05-VALOR LANÇADO DA PARCELA-DATA BASE (R$): 50,00
06-ESPECIFICAÇÕES DO TRIBUTO: IPTU
07-CÓDIGO TRIBUTO: 111
08-NR: 01
09-CTRL: 5
10-EMITENTE: SF-RI
11-EMISSÃO/CÁLCULO: 39/2010
12-ESPECIFICAÇÃO DA RECEITA
13-CÓD. RECEITA
14-PARCELA: PREST. 10
CALCULAR O VALOR SE FOR O CASO
15-UNIDADE DE VALOR: REAL
16-QTDE UNIDADE VALOR: 50,00 X 17-VALOR DA UNID. NO PAGTO. (ATÉ O VENCIMENTO) =
18-VALOR
28-ENDEREÇO PARA ENTREGA: R CORONEL BENTO BICUDO N116 ED. SPARTACUS-BL. 'B' AP 16 E BX G CJ RES MIRANTE CEP: 02910-000
29-OUTRAS INFORMAÇÕES: APÓS VENCIMENTO, COBRAR 0,22% (VINTE E DOIS CENTÉSIMOS POR CENTO) DE MULTA AO DIA SOBRE O VALOR DA PARCELA
20-CORREÇÃO MONETÁRIA
21-MULTA (%)
22-JUROS
23-DESCONTO (%)
30-CONJ/SEL/2ª VIA/DOM. BANCÁRIO: A 03 EG
31-EXERCÍCIO: 2010
32-USO: 20
33-DATA BASE: 01/01/2010
SR. CAIXA NÃO RECEBER APÓS ESTA DATA
25-DATA DE VALIDADE: 30/12/2010
26-TOTAL A PAGAR

35 Qual foi o juro simples produzido por um capital de R$ 2.500,00 aplicado durante um ano e meio à taxa de 2% ao mês?

36 Qual o tempo necessário para se dobrar um capital em uma aplicação à taxa de juro simples de 5% ao mês?

37 (Uespi) Um investidor aplicou 30% do seu capital a juro simples de 1,5% ao mês, durante um ano. O restante foi aplicado a juro simples, durante um ano, à taxa de 2% ao mês. Se o total de juros recebidos foi de R$ 1.776,00, qual era o capital do investidor?
a) R$ 5.000,00 **b)** R$ 6.000,00 **c)** R$ 7.000,00 **d)** R$ 8.000,00 **e)** R$ 9.000,00

Resolva os exercícios complementares 56 a 62.

Seção 7.3

Juro composto

Objetivos

- **Compreender** os termos que compõem uma transação no regime de juro composto.
- **Efetuar** operações financeiras no regime de juro composto.

Termo e conceito

- juro composto

As aplicações financeiras como Caderneta de Poupança, Fundos de Renda Fixa, Certificados de Depósitos Bancários (CDB), Fundo de Ações etc. remuneram diariamente o capital aplicado pelo sistema de "juros sobre juros", isto é:

- no primeiro dia de aplicação, a taxa de juro incide sobre o capital inicial aplicado;
- no segundo dia de aplicação, a taxa de juro incide sobre o montante acumulado (capital + juro) no dia anterior;
- no terceiro dia de aplicação, a taxa de juro incide sobre o montante acumulado no dia anterior e assim por diante.

Exemplo

Considerando o mês como unidade de tempo, vamos imaginar que as taxas mensais de juro de uma aplicação financeira tenham sido 2%, 3% e 1,5% nos meses de janeiro, fevereiro e março, respectivamente. No primeiro dia de janeiro uma pessoa que quer comprar uma casa investiu R$ 100.000,00 nessa aplicação, e não fez retirada durante os três meses. A tabela a seguir mostra a evolução dos juros nesse período.

Mês	Capital	Taxa mensal	Juro	Montante
Janeiro	R$ 100.000,00	2%	R$ 2.000,00	R$ 102.000,00
Fevereiro	R$ 102.000,00	3%	R$ 3.060,00	R$ 105.060,00
Março	R$ 105.060,00	1,5%	R$ 1.575,00	R$ 106.635,90

Assim, o juro produzido nesses três meses foi de R$ 6.635,90, e, portanto, o montante foi de R$ 106.635,90. Esse tipo de juro é chamado de **juro composto**.

Observe que, em cada mês, a taxa de juro incide sobre o montante do mês anterior. Esse fato é que diferencia o juro composto do simples, pois no juro simples a taxa incide sobre o capital inicial.

De maneira geral, o cálculo do juro composto é efetuado do seguinte modo:

- Ao final da primeira unidade de tempo considerada na aplicação, a taxa de juro incide sobre o capital inicial.
- A partir da segunda unidade de tempo, a taxa de juro incide sobre o montante acumulado na unidade de tempo anterior.

Para obter uma fórmula para o cálculo de juro composto, vamos considerar um capital inicial C aplicado em regime de juro composto, durante t unidades de tempo (dia, mês, ano etc.) à taxa constante i por unidade de tempo. A tabela abaixo mostra a evolução do montante M durante o período de aplicação.

Unidades de tempo	Capital	Juro	Montante
1	C	iC	$C + iC = C(1 + i)$
2	$C(1 + i)$	$iC(1 + i)$	$C(1 + i) + iC(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	$iC(1 + i)^2$	$C(1 + i)^2 + iC(1 + i)^2 = C(1 + i)^3$
4	$C(1 + i)^3$	$iC(1 + i)^3$	$C(1 + i)^3 + iC(1 + i)^3 = C(1 + i)^4$
⋮	⋮	⋮	⋮

A última coluna da tabela nos conduz à hipótese de que, em t unidades de tempo, o montante seja dado por: $M = C(1 + i)^t$

De fato, demonstra-se que:

Se um capital inicial C é aplicado em regime de juro composto, durante t unidades de tempo, à taxa constante i por unidade de tempo, então o montante M acumulado nesse período é:

$$M = C(1 + i)^t$$

Notas:

1. Para aplicar a fórmula $M = C(1 + i)^t$, deve-se ter t e i relacionados com a mesma unidade de tempo.

2. Com a fórmula $M = C(1 + i)^t$, calculamos o montante com juro composto e taxa constante (considerando sempre a mesma em cada unidade de tempo). Se as taxas variam nas unidades de tempo, isto é, i_1 na primeira unidade; i_2 na segunda unidade; i_3 na terceira unidade; ... ; i_t na unidade t, então o montante M será:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_t)$$

3. Para o cálculo do montante M após t reduções sucessivas (desconto ou prejuízo) de um capital C, a uma taxa constante, aplica-se a fórmula $M = C(1 + i)^t$ com **taxa negativa**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

24 Um capital inicial de R$ 5.000,00 foi aplicado a juro composto, durante 7 meses, à taxa de 2% ao mês. Dado $(1{,}02)^7 \approx 1{,}15$, calcular:

a) o montante acumulado ao fim dos 7 meses de aplicação.

b) o juro produzido durante o período que durou a aplicação.

Resolução

a) Esquematizando os dados do enunciado, temos:

C = R$ 5.000,00

$i = 2\% = 0{,}02$ (taxa mensal)

$t = 7$ meses

$M = ?$

E aplicando a fórmula do montante para taxa constante, $M = C(1 + i)^t$:

$M = 5.000 \cdot (1 + 0{,}02)^7 =$

$= 5.000 \cdot (1{,}02)^7 \approx 5.000 \cdot 1{,}15$

$\therefore M \approx 5.750$

Logo, o montante foi de cerca de R$ 5.750,00. Note que esse valor é aproximado, pois foi usado um valor aproximado para a potência $(1{,}02)^7$.

b) O montante M é a soma do capital inicial C com o juro produzido J. Assim, temos:

$M = C + J \Rightarrow 5.750 = 5.000 + J$

$\therefore J = 750$

Logo, o juro produzido durante o período da aplicação foi de R$ 750,00.

25 Um automóvel novo que foi comprado por R$ 40.000,00 sofreu, em cada ano, desvalorização de 10%. Calcular seu valor, em real, depois de 3 anos de uso.

Resolução

Esquematizando os dados do enunciado, temos:

$C = 40.000$

$i = -10\% = -0,1$ (taxa anual)

$t = 3$ anos

$M = ?$

E aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$:

$M = 40.000 \cdot (1 - 0,1)^3 = 40.000 \cdot (0,9)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 40.000 \cdot 0,729$

$\therefore M = 29.160$

Logo, após 3 anos de uso, o valor do automóvel é R$ 29.160,00.

26 Houve época em que a taxa de inflação no Brasil era de 25% ao mês. Qual era a taxa de inflação anual no Brasil naquela época? Dado $(1,25)^{12} = 14,55$.

Resolução

Para calcular a inflação naquela época, vamos obter o juro composto produzido por um capital C aplicado durante 12 meses à taxa de 25% ao mês.

$M = C(1 + 0,25)^{12} = C(1,25)^{12} \Rightarrow M = 14,55C$

Assim, o juro J produzido no período de 12 meses é:

$J = 14,55C - C = 13,55C$

A razão $\frac{J}{C}$ é a taxa de juro nesse período de 12 meses:

$\frac{J}{C} = \frac{13,55C}{C} = 13,55 = 1.355\%$

Logo, a taxa anual de inflação no Brasil, naquela época, era de 1.355%.

27 Apliquei R$ 2.000,00 em um fundo de ações durante 3 anos e não fiz nenhuma retirada nesse período. No primeiro ano, o rendimento foi de 20%; no segundo, 4%; e no terceiro, 10%. Qual foi o montante acumulado no final da aplicação?

Resolução

Como a taxa é variável (não é a mesma todo mês), devemos aplicar a fórmula:

$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_t)$

Assim:

$M = 2.000(1 + 0,2)(1 + 0,04)(1 + 0,1) =$

$= 2.000 \cdot 1,2 \cdot 1,04 \cdot 1,1$

$\therefore M = 2.745,6$

Logo, o montante acumulado foi de R$ 2.745,60.

28 Uma motocicleta zero km foi comprada por R$ 10.000,00. No primeiro ano de uso, a moto desvalorizou 20%; no segundo ano, desvalorizou 10% em relação ao valor do ano anterior; e no terceiro ano, desvalorizou 5% em relação ao valor do ano anterior. Qual era o valor da moto no final de três anos de uso?

Resolução

Esse é um problema de prejuízos sucessivos com taxa variável. Portanto, devemos aplicar a fórmula:

$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_t)$

em que i_1, i_2 e i_3, ..., i_t são taxas negativas.

Assim:

$M = 10.000(1 - 0,2)(1 - 0,1)(1 - 0,05) =$

$= 10.000 \cdot 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,95$

$\therefore M = 6.840$

Logo, o valor da motocicleta após três anos de uso era R$ 6.840,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

38 Um capital de R$ 5.000,00 foi aplicado durante 6 meses à taxa de juro composto de 2% ao mês. Adotando a aproximação $(1,02)^6 = 1,13$, calcule:

a) o montante acumulado no final da aplicação;

b) o juro produzido por essa aplicação.

39 Um capital inicial de R$ 3.000,00 foi aplicado durante 2 anos em regime de capitalização composta, rendendo juro de R$ 1.320,00. Qual foi a taxa anual de juro dessa aplicação?

(*Nota*: Nesse contexto, capitalizar significa adicionar os juros ao capital aplicado. A capitalização é composta quando o montante é acumulado por juro composto.)

40 (UFMT) Uma financiadora oferece empréstimos, por um período de 4 meses, sob as seguintes condições:

1ª) taxa de 11,4% ao mês, a juro simples;

2ª) taxa de 10% ao mês, a juro composto.

Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 10.000,00, optando pela 1ª condição. Em quantos reais os juros cobrados pela 1ª condição serão menores do que os cobrados pela 2ª?

41 Devido a melhorias no bairro, prevê-se que, durante os próximos três anos, um imóvel terá uma valorização de 20% ao ano. Se hoje o valor do imóvel é R$ 100.000,00, qual será seu valor daqui a três anos?

42 De acordo com a tabela, assinale a alternativa que apresenta a estimativa mais próxima do tempo necessário para que seja duplicado um capital aplicado à taxa de juro composto de 50% ao ano.

a) 2 anos
b) 1 ano, 7 meses e 26 dias
c) 1 ano, 8 meses e 19 dias
d) 1 ano, 8 meses e 15 dias
e) 1 ano, 8 meses e 8 dias

t	$(1,5)^t$
1,45	1,80
1,50	1,83
1,65	1,95
1,72	2,00
1,80	2,07
1,95	2,20
2,00	2,25

43 (FGV) Se um automóvel custa hoje R$ 45.000,00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 4%, o seu valor em reais, daqui a dez anos, pode ser estimado em:

a) $45 \cdot 10^3 \cdot (1{,}04)^{10}$
b) $45 \cdot 10^3 \cdot (1{,}04)^{-10}$
c) $45 \cdot 10^3 \cdot (0{,}96)^{-10}$
d) $45 \cdot 10^3 \cdot (0{,}96)^{10}$
e) $45 \cdot 10^{-7}$

44 Um terreno comprado por R$ 10.000,00 valorizou 20% no primeiro ano após a compra; 10% no segundo ano e 5% no terceiro ano. Qual o valor do terreno após os três anos?

45 Um comerciante, para acabar com o estoque de certo produto, deu 12% de desconto sobre o preço p desse produto, que passou a custar p_1. Por falta de compradores, o comerciante descontou 5% sobre o preço p_1, e o novo preço passou a ser p_2. Finalmente, deu um desconto de 3% sobre o preço p_2.

a) Após esses três descontos, qual foi o preço final do produto, em função de p?
b) Qual foi o percentual de desconto sobre o preço inicial p, após os três descontos sucessivos?

Resolva os exercícios complementares 63 a 67.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercício técnico

1 (ESPM-SP) Observe as proposições abaixo:

I. $(50\%)^2 = 25\%$
II. $\sqrt{9\%} = 3\%$
III. $3\% + 5\% = 8\%$
IV. $3\% \cdot 5\% = 15\%$

Estão corretas:

a) apenas I e II.
b) apenas II e III.
c) apenas I e III.
d) apenas II, III e IV.
e) nenhuma delas.

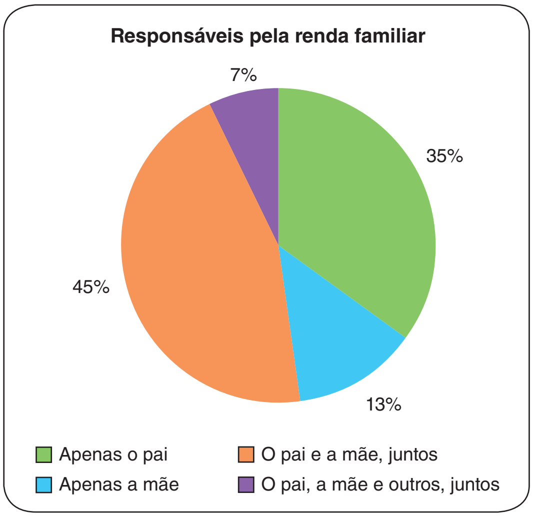
Exercícios contextualizados

2 Dentre os 5.400 alunos de um colégio, 32% prestaram o exame do Enem do ano passado. Quantos alunos não prestaram essa prova no ano passado?

3 (UEG-GO) A prefeitura de uma cidade concede benefícios fiscais às indústrias que lá se instalam. Para obter os benefícios, o número de empregados que residem na cidade deve ser, no mínimo, o dobro mais 5% do número de empregados que não residem nela. Uma indústria que contratou 80 funcionários que residem fora da cidade deve contratar, entre os moradores da cidade, um número mínimo de:

a) 160 funcionários.
b) 166 funcionários.
c) 176 funcionários.
d) 164 funcionários.
e) 178 funcionários.

4 (UFMG) Este gráfico representa o resultado de uma pesquisa realizada com 1.000 famílias com filhos em idade escolar:



Considere estas afirmativas referentes às famílias pesquisadas:

I. O pai participa da renda familiar em menos de 850 dessas famílias.
II. O pai e a mãe participam, juntos, da renda familiar em mais de 500 dessas famílias.

Então, é correto afirmar que

a) nenhuma das afirmativas é verdadeira.
b) apenas a afirmativa I é verdadeira.
c) apenas a afirmativa II é verdadeira.
d) ambas as afirmativas são verdadeiras.

5 Um terreno de 60.000 m^2 será dividido em lotes de 300 m^2 e de 500 m^2, além das ruas que ocuparão 10% do terreno. A área destinada aos lotes de 300 m^2 é igual à área destinada aos lotes de 500 m^2. O total de lotes em que será dividido o terreno é:

a) 120
b) 144
c) 90
d) 54
e) 136

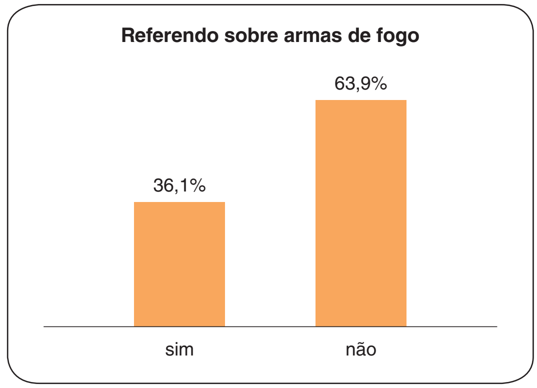
6 (Vunesp) Neste ano, uma empresa pretende reduzir em 5% a produção de CO_2 com a queima de combustível de sua frota de carros, diminuindo a quantidade de quilômetros a serem rodados no ano. O total de quilômetros rodados pelos carros dessa empresa no ano passado foi de 199.200 km. Cada carro faz em média 12 km por litro de gasolina, e a queima de cada 415 litros desse combustível pelos carros da empresa produz aproximadamente uma tonelada de CO_2. Mantidas as mesmas condições para os carros, em termos de consumo e queima de combustível, determine quantas toneladas a menos de CO_2 os carros da empresa deixariam de emitir neste ano, relativamente ao ano passado.

7 Em uma pesquisa, constatou-se que 48% dos habitantes de uma cidade são do sexo feminino e 60% dos habitantes têm mais de 40 anos. Em relação ao total de habitantes dessa cidade, qual a porcentagem de mulheres com mais de 40 anos?

8 (Uerj) A reciclagem de latas de alumínio permite uma considerável economia de energia elétrica: a produção de cada lata reciclada gasta apenas 5% da energia que seria necessária para produzir uma lata não reciclada. Considere que, de cada três latas produzidas, uma não é obtida por reciclagem, e que a produção de cada lata reciclada consome 1 unidade de energia. De acordo com essa proporção, o número de unidades de energia necessário para a produção de 24 latas é igual a:

a) 24
b) 42
c) 150
d) 176

9 Referendo é uma forma de consulta popular sobre um assunto de grande relevância. Por meio desse instituto, o cidadão aceita ou rejeita uma lei proposta ou já aprovada. No dia 23 de outubro de 2005, houve um referendo para que o povo brasileiro votasse sim ou não à seguinte pergunta:
O comércio de armas de fogo e munição deve ser proibido no Brasil?
Do total de eleitores que compareceram às urnas, 3,07% anularam o voto ou votaram em branco. O gráfico a seguir mostra o resultado dos votos válidos, isto é, daqueles votos que não foram nulos ou brancos.



Do total de eleitores que compareceram às urnas, responderam **não** um percentual:

a) menor que 60%.
b) entre 60% e 61,5%.
c) entre 61,5% e 62%.
d) entre 62% e 63%.
e) maior que 63%.

10 (Covest-PE) Uma pesquisa sobre o número de moradores nas residências de um bairro concluiu que, em 70% das residências, moram duas ou mais pessoas; 80% das demais residências são habitadas por um único homem. Qual o percentual do total de residências do bairro ocupadas por uma única mulher?

a) 30%
b) 20%
c) 10%
d) 6%
e) 5%

11 Um empreiteiro construiu 40% de uma obra, abandonando o trabalho por falta de pagamento. Outro empreiteiro construiu 40% do que faltava construir, também abandonando o trabalho. O percentual da obra que ainda falta construir é:

a) 20%
b) 24%
c) 36%
d) 26%
e) 16%

12 Das 45.800 toneladas de alimentos produzidos em uma região agrícola, no ano passado, 68% correspondem a grãos, dos quais 75% correspondem a soja. Quantas toneladas de soja foram produzidas nessa região no ano passado?

13 (Ufac) Uma pesquisa foi realizada com estudantes do ensino médio para saber em qual área eles pretendem estudar na universidade. Os resultados foram os seguintes:

- 40% pretendem estudar na área de humanas;
- 30% querem estudar na área de tecnologia;
- 20% optaram por exatas; e
- 10% não pretendem prosseguir estudando.

Relativamente aos resultados da pesquisa, os que têm intenção de estudar na área de exatas representam, aproximadamente, quanto por cento do universo dos que pretendem prosseguir estudando?

a) 22,2% **c)** 20,5% **e)** 10%
b) 20% **d)** 25%

14 (UnB-DF) A massa crua com que é fabricado um certo tipo de pão é composta de 40% de água, 58% de farinha e 2% de sal e fermento. Enquanto é assada, 67% da água contida na massa crua evapora, sendo esta a única substância perdida nesse processo. Nessas condições, calcule, em gramas, a massa crua de pão necessária para obter-se um pão assado de 35 g.

15 (Enem) Uma cooperativa de radiotáxis tem como meta atender, em no máximo 15 minutos, a pelo menos 95% das chamadas que recebe. O controle dessa meta é feito ininterruptamente por um funcionário que utiliza um equipamento de rádio para monitoramento. A cada 100 chamadas, ele registra o número acumulado de chamadas que não foram atendidas em 15 minutos. Ao final de um dia, a cooperativa apresentou o seguinte desempenho:

Total acumulado de chamadas	100	200	300	400	482
Número acumulado de chamadas não atendidas em 15 minutos	6	11	17	21	24

Esse desempenho mostra que, nesse dia, a meta estabelecida foi atingida:

a) nas primeiras 100 chamadas.
b) nas primeiras 200 chamadas.
c) nas primeiras 300 chamadas.
d) nas primeiras 400 chamadas.
e) ao final do dia.

16 Ao observar as imagens da Terra, em fotografias tiradas de longa distância, entendemos por que muitos a chamam de Planeta Água.

Estima-se que a superfície do planeta tenha $5{,}1 \cdot 10^8$ km^2, dos quais $3{,}61 \cdot 10^8$ km^2 sejam cobertos por água. Assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo do percentual da superfície terrestre coberto por água.

a) 76,2% **d)** 73,4%
b) 74,6% **e)** 70,8%
c) 75,6%

17 A produção diária total de uma metalúrgica é de 400 torneiras idênticas e 200 chuveiros idênticos, sendo o custo de produção de cada chuveiro o triplo do custo de produção de cada torneira.

O custo diário com a produção de chuveiros representa que percentual do custo de toda a produção diária dessa metalúrgica?

a) 40% **d)** 20%
b) 60% **e)** 30%
c) 56%

18 (Enem) Para se obter 1,5 kg do dióxido de urânio puro, matéria-prima para a produção de combustível nuclear, é necessário extrair-se e tratar-se 1,0 tonelada de minério. Assim, o rendimento (em %) do tratamento do minério até chegar ao dióxido de urânio puro é de:

a) 0,10% **d)** 1,5%
b) 0,15% **e)** 2,0%
c) 0,20%

19 (UFMS) Tem-se 160 gramas de uma solução de hidróxido de sódio a 25%, isto é, a massa do hidróxido corresponde a 25% da massa da solução. Quantos gramas de água devem ser adicionados a essa solução para se obter uma solução a 10%?

a) 220 **d)** 250
b) 200 **e)** 180
c) 240

20 (UFPB) Em um edifício de 15 apartamentos, as despesas de condomínio somaram, neste mês, R$ 7.500,00, que deverão ser rateados igualmente entre os apartamentos. Se três condôminos resolvem deixar o edifício sem efetuar o pagamento da taxa de condomínio, o percentual de aumento que essa taxa sofrerá, quando o rateio for feito igualmente entre os doze apartamentos restantes, será de:

a) 10% **d)** 30%
b) 20% **e)** 50%
c) 25%

21 Em uma mistura de 30 litros de água e suco concentrado de laranja há 20% de suco. Quanto de suco deve ser acrescentado para que a mistura final tenha 25% de suco?

22 Uma companhia telefônica cobrava R$ 4,00 a cada 6 minutos de ligação. Após um reajuste, passou a cobrar R$ 4,00 a cada 5 minutos de ligação. O aumento da tarifa foi de:

a) 23%
b) 15%
c) 10%
d) 17%
e) 20%

23 O Produto Nacional Bruto (PNB) de um país cresceu 20% em 2010, em relação a 2009, enquanto a população cresceu 5%. Assinale a alternativa que apresenta o percentual mais próximo do crescimento do PNB *per capita*, nesse período.

a) 16%
b) 14,3%
c) 13,8%
d) 16,4%
e) 4%

(*Nota*: A expressão *per capita* vem do latim e significa "por cabeça". O PNB *per capita* de um país, em determinado período, é o resultado da divisão do PNB pelo número de habitantes do país. Esse resultado é chamado de **renda *per capita*** do país.)

24 No Brasil, define-se a População Economicamente Ativa (PEA) de uma região como o número de indivíduos com idade igual ou superior a dez anos, enquadrados numa das situações: *empregado* ou *desempregado*. A *taxa de desemprego total* é então definida como a razão (expressa em termos percentuais) entre o número de *desempregados* e a PEA, nessa ordem. Um jornal apresentou a seguinte manchete sobre a taxa de desemprego em uma cidade:

Jornal Econômico

Ano 122 * nº 65 — São Paulo * Domingo, 11 de Julho de 2011 — SEGUNDA EDIÇÃO

A1

A taxa de desemprego total na cidade, no mês de maio, foi de 30%.

Mais indústrias vão fechar, prevê Nostradamus. O anúncio do fechamento de fábricas da empresa Reich em 11 municípios gaúchos não deve ser a única má notícia do setor calçadista. Outras grandes indústrias devem seguir o mesmo caminho e jogar a toalha porconta do câmbio desfavorável, afirma Heitor de Biebe, diretor-executivo da Doicalçados

A Reich, cuja produção é destinada à exportação, vai encerrar sua produção em julho (leia aqui). Empresários e sindicalistas estimam que possa haver até 4.000 demissões. Para Kley, outros 4.000 empregos indiretos podem desaparecer.

Comparar real só a dólar é "vício", diz economista. O ministro da Fazenda aproveita todos os contatos com a imprensa para afirmar que as novas quedas do dólar não são preocupantes. Mas empresários do setor industrial reclamam da perda de competitividade no mercado de externo e da invasão de produtos importados. Nos jornais, cada economista dá um palpite diferente sobre os benefícios e prejuízos da valorização do real.

O cenário descrito acima poderia ser o da semana passada, mas é exatamente o que ocorria em maio de 2020, quando o dólar

"Desde janeiro de 2010 os críticos do câmbio prevêem uma crise três meses à frente, e ocorrea o contrário", desabafou, na época, o então ministro da Fazenda, Porkencio Filho.

O FMIXE misturou alhos com bugalhos ao divulgar, ontem, o relatório Panorama Econômico Mundial. Os dados sobre a renda dos brasileiros estão errados - foram " passados para baixo" por conta de uma falha metodológica, apontada por Terra Magazine e reconhecida ontem mesmo pelo Fundo Monetário Internacional. "Vamos revisar nossos procedimentos em futuras edições do Panorama

Com base nessas informações, calcule o número de desempregados nessa cidade, sabendo que a PEA foi estimada em 1.600.000 indivíduos no mês de maio, considerado na manchete do jornal.
(*Nota*: No Brasil, a PEA computa pessoas a partir de 10 anos de idade, porque a realidade econômica do país é bem diferente do que estabelece a lei.)

25 (Fuvest-SP) Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:

a) 20%
b) 22%
c) 24%
d) 26%
e) 28%

26 (PUC-RJ) Percorridos 85% de um certo percurso, ficam faltando 180 km para completá-lo. O percurso total é de:

a) 1.020 km.
b) 1.200 km.
c) 1.120 km.
d) 1.210 km.
e) 2.100 km.

27 A seguir, destaca-se um trecho de uma notícia veiculada em um jornal.
"*As reservas brasileiras de petróleo mais do que duplicaram nos últimos dez anos. Segundo dados da Agência Nacional do Petróleo (ANP) e da Petrobras, o volume de petróleo descoberto no subsolo brasileiro passou de 4,98 bilhões de barris no início da última década para 10,61 bilhões de barris no final da década.*"

De acordo com esse texto, o crescimento percentual na produção de petróleo no Brasil, na década mencionada, foi de:

a) 213%
b) 113%
c) 111%
d) 105%
e) 103%

28 A matriz energética de um país é o conjunto de fontes geradoras de energia. A tabela a seguir descreve a composição da matriz energética de um país nos anos de 2009 e 2010.

Matriz energética	2009	2010
Hidroelétrica	84%	67%
Termelétrica	9%	17%
Nuclear	3%	2%
Fontes alternativas	3%	7%
Importação	1%	7%

Se em 2009 o total de energia fornecida por essa matriz era de 80.000 megawatt (MW) e a quantidade, em MW, de energia nuclear foi a mesma em 2009 e 2010, calcule o crescimento, em MW, da energia em termelétricas de 2009 para 2010.

29 O crescente aquecimento do nosso planeta deve-se a um acúmulo de certos gases na atmosfera impedindo a irradiação, para o vácuo espacial, de parte do calor recebido pelo Sol. A Terra acumula, anualmente, $1{,}6 \cdot 10^{22}$ joules de energia, o que equivale a 0,3% de toda a energia recebida do Sol anualmente. Calcule o total de energia, em joule, recebida anualmente pela Terra, proveniente do Sol.

30 (Fuvest-SP) Alguns problemas de saúde, como bócio endêmico e retardo mental, são causados pela ingestão de quantidades insuficientes de iodo. Uma maneira simples de suprir o organismo desse elemento químico é consumir o sal de cozinha que contenha de 20 a 60 mg de iodo por quilograma do produto. No entanto, em algumas regiões do País, o problema persiste, pois o sal utilizado ou não foi produzido para consumo humano, ou não apresenta a quantidade mínima de iodo recomendada. A fonte de iodo utilizada na indústria do sal é o iodato de potássio, KIO_3, cujo custo é de R$ 20,00 por kg. Considerando que o iodo representa aproximadamente 60% da massa de KIO_3 e que 1 kg do sal de cozinha é comercializado ao preço médio de R$ 1,00, a presença da quantidade máxima de iodo permitida por lei (60 miligramas de iodo por quilograma de sal) representa, no preço, a porcentagem de:

a) 0,10%
b) 0,20%
c) 1,20%
d) 2,0%
e) 12%

31 (UFV-MG) Consultando um mapa rodoviário, um motorista decide por um itinerário 17% mais longo do que aquele que faz habitualmente. Como o tráfego de veículos nesse novo trajeto é menor, sua velocidade média aumentará em 30%. Diante dessas condições, o tempo de viagem diminuirá em:

a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 20%
e) 25%

32 (UFMS) O tanque de um carro tem 40 litros de uma mistura de álcool e gasolina, e o álcool representa 25% dessa mistura. A fim de que essa mistura apresente uma porcentagem de 60% de álcool, deve-se substituir x litros da mistura original por x litros de álcool. Assim, o valor de x é de:

a) $\frac{25}{3}$ L
b) $\frac{38}{3}$ L
c) $\frac{55}{3}$ L
d) $\frac{44}{3}$ L
e) $\frac{56}{3}$ L

33 Num país, 10% da população é portadora de um vírus. Um teste para detectar ou não a presença do vírus dá 90% de acerto quando aplicado a portadores e dá 80% de acerto quando aplicado a não portadores. Qual o percentual de pessoas realmente portadoras do vírus, dentre aquelas que o teste classificou como portadoras?

a) 27%
b) 10%
c) 18%
d) 9%
e) 33%

34 Um comerciante compra um produto por R$ 140,00 e o revende com um lucro de 30% sobre o preço de venda. Qual é o preço de venda desse produto?

35 (Fuvest-SP) Um vendedor ambulante vende seus produtos com um lucro de 50% sobre o preço de venda. Então, o percentual de lucro sobre o preço de custo é de:

a) 10%
b) 25%
c) 33,333%
d) 100%
e) 120%

36 (Ibmec) O percentual de lucro de 25% sobre o preço de compra de uma mercadoria é equivalente a que porcentagem sobre o preço de venda dessa mercadoria?

a) 25%
b) 20%
c) 15%
d) 10%
e) 5%

37 Um comerciante comprou algumas caixas de tabletes de manteiga por R$ 2,00 cada tablete. Percebendo que havia comprado mais do que conseguiria vender antes do vencimento do prazo de validade, resolveu vender cada unidade do produto a R$ 1,60 para acelerar as vendas. Nessa transação, calcule o percentual de prejuízo:

a) Sobre o preço de compra.
b) Sobre o preço de venda.

38 (UFMS) Em certa ocasião em que o preço do petróleo teve um aumento de 60%, um país pretendeu manter inalterado o total de seus gastos com a importação do produto. Para tanto, deve ter reduzido o volume de sua importação com petróleo em:

a) 37,5%
b) 40%
c) 50%
d) 60%
e) 62,5%

39 (UFPE) O custo da cesta básica aumentou 1,03% em determinada semana. O aumento foi atribuído exclusivamente à variação do preço dos alimentos que subiram 1,41%. Qual o percentual de participação dos alimentos no cálculo da cesta básica (indique o valor mais próximo)?

a) 73%
b) 74%
c) 75%
d) 76%
e) 77%

40 Uma concessionária oferece 12% de desconto sobre o preço de tabela de uma motocicleta. Por quanto é vendida essa moto, se o preço de tabela é R$ 11.800,00?

41 (UFT-TO) Uma certa mercadoria, cujo preço era R$ 80,00, passou a custar R$ 90,00. Então, é correto afirmar que o preço dessa mercadoria sofreu um reajuste:

a) de 10%.
b) maior que 12%.
c) maior que 20%.
d) menor que 10%.

42 (Ufop-MG) O preço de uma mercadoria sofreu dois aumentos sucessivos: um de 10% e o outro de 20%. De quantos por cento foi o aumento total dessa mercadoria?

a) 30%
b) 32%
c) 25%
d) 22%
e) 22,5%

43 (Mackenzie-SP) Um produto, que foi colocado à venda pelo mesmo preço nas lojas A e B, sofreu, durante três meses, as seguintes variações acumulativas de preço:

Loja	1º mês	2º mês	3º mês
A	Aumento de 20%	Aumento de 10%	Desconto de 25%
B	Desconto de 15%	Aumento de 20%	Sem reajuste

Dessa forma, após três meses, o preço do produto:

a) é maior na loja A.
b) é maior na loja B.
c) aumentou exatamente 5% nas duas lojas.
d) aumentou exatamente 2% nas duas lojas.
e) diminuiu exatamente 1% nas duas lojas.

44 (Uerj) No dia 5 de dezembro, uma loja aumenta os preços de seus produtos em 60%. Na liquidação após o Ano Novo, os mesmos produtos sofrem um desconto de 27,5%, em relação aos preços reajustados em 5 de dezembro. Após esta liquidação, podemos constatar que os preços dos produtos, em relação aos preços do dia 4 de dezembro, sofreram uma variação percentual de:

a) 16,0%
b) 29,0%
c) 32,5%
d) 44,0

45 Um cliente de uma loja comprou uma camisa, uma calça, uma blusa e um cinto. Pelo preço das etiquetas, o custo desses artigos corresponderia a 20%, 28%, 40% e 12% do custo total, respectivamente. Porém, o vendedor concedeu um desconto de 10% no preço da camisa e de 20% no preço da calça. Dessa forma, o desconto sobre o valor total marcado nas etiquetas foi de:

a) 7,6%
b) 8,2%
c) 9%
d) 12,5%
e) 14%

46 (UFRJ) A fim de atrair a clientela, uma loja anunciou um desconto de 20% na compra à vista de qualquer mercadoria. No entanto, para não ter redução na margem de lucro, a loja reajustou previamente seus preços de forma que, com o desconto, os preços voltassem aos seus valores iniciais. Determine a porcentagem do reajuste feito antes do desconto anunciado.

47 Um comerciante concedeu um desconto de 20% sobre o preço de um produto. Dessa forma, teve 20% de lucro sobre o preço de custo desse produto. Se não tivesse concedido o desconto, o percentual de lucro sobre o preço de custo seria de:

a) 30%
b) 32%
c) 38%
d) 40%
e) 50%

48 (Ibmec) Uma concessionária de automóveis deve recolher um imposto de 20% sobre o preço de venda de cada unidade. Em cada venda, a concessionária quer descontar o imposto e ainda ter um lucro de 28% sobre o preço de compra de cada unidade. Desta forma, o preço de venda de cada automóvel deve conter um acréscimo sobre o preço de compra de:

a) 60%
b) 50%
c) 40%
d) 30%
e) 20%

49 (UFPE) Quando o preço da unidade de certo produto diminui 10%, o consumo desse produto aumenta 20%, durante certo período. Nesse período, que percentual aumenta o faturamento com a venda desse produto?

a) 8%
b) 10%
c) 12%
d) 15%
e) 30%

50 (UFG-GO) Uma empresa gastava 15% de sua receita com o pagamento de conta telefônica e de energia elétrica. Para reduzir despesas, determinou-se um corte de 50% na conta telefônica. Essa iniciativa produziu uma economia de R$ 1.000,00, o que corresponde a 5% de sua receita. Tendo em vista essas condições, calcule o gasto dessa empresa com energia elétrica.

51 Do ano de 2005 para o ano de 2009, uma operadora registrou um crescimento de 30% no número de ligações telefônicas locais e 20% de aumento no tempo médio de cada ligação. Sabendo que nesse período o preço cobrado por minuto de ligação aumentou 50%, conclui-se que a receita dessa operadora com ligações locais, de 2005 para 2009, cresceu:

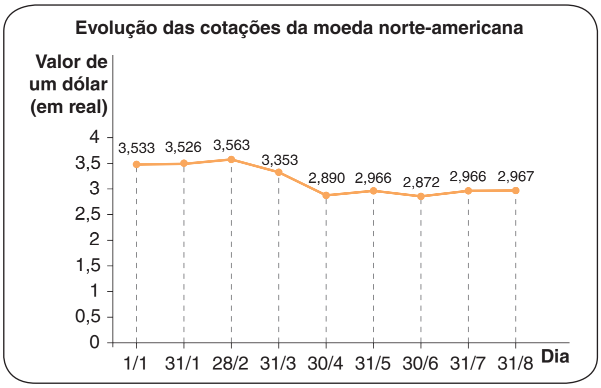
a) 34%
b) 134%
c) 234%
d) 128%

52 Na exportação de carne para os Estados Unidos da América, um frigorífico vendeu o equivalente a 28.000 dólares. Quanto esse frigorífico recebeu, em reais, se a cotação no dia do pagamento era de 1 dólar para 2,20 reais?

53 (PUC-RJ) Se um dólar valia 106 ienes em junho de um determinado ano e 124 ienes em junho do ano seguinte, então ocorreu:

a) uma desvalorização do dólar em relação ao iene da ordem de, aproximadamente, 17%.
b) uma valorização do iene em relação ao dólar da ordem de, aproximadamente, 17%.
c) uma valorização do dólar em relação ao iene da ordem de, aproximadamente, 17%.
d) uma valorização do dólar em relação ao iene da ordem de, aproximadamente, 24%.
e) uma desvalorização do dólar em relação ao iene da ordem de, aproximadamente, 24%.

54 (UFRGS) O gráfico abaixo representa o valor de um dólar em real em diferentes datas do ano de 2003.



A partir desses dados, pode-se afirmar que, no primeiro semestre de 2003, o real, em relação ao dólar:

a) desvalorizou 0,661.
b) desvalorizou mais de 10%.
c) manteve seu valor.
d) valorizou menos de 10%.
e) valorizou mais de 20%.

55 (UFMS) Em um determinado mês, o dólar estava sendo cotado a R\$ 3,50 no mercado de câmbio, ou seja, U\$ 1,00 = R\$ 3,50. Se houver uma valorização de 25% do real em relação ao dólar, então pode-se afirmar que:

a) o dólar sofrerá uma desvalorização de 25%.
b) o dólar sofrerá uma desvalorização de 20%.
c) o dólar sofrerá uma desvalorização de 30%.
d) a cotação do dólar passou a ser de R\$ 2,62.
e) a cotação do dólar passou a ser de R\$ 3,00.

56 (UFMT) Admita que o valor da conta de água de um consumidor, em determinado mês, até o vencimento, é R\$ 21,00; que a multa cobrada para pagamento após o vencimento é 2% sobre o valor da conta; e que os juros cobrados são 0,05% ao dia sobre o valor da conta. Considerando que a fatura foi paga com x dias de atraso e que o valor pago foi R\$ 21,63, é correto afirmar que x é igual a:

a) 22 dias.
b) 21 dias.
c) 23 dias.
d) 20 dias.
e) 19 dias.

57 Um capital de R\$ 3.600,00 foi aplicado a juro simples durante 13 dias à taxa de 15% ao mês.

a) Qual foi o juro simples produzido nesse período?
b) Qual foi o montante acumulado nesse período?

58 (UFC-CE) José emprestou R\$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juro simples, a uma taxa de juro fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R\$ 600,00, então a taxa fixa mensal aplicada foi de:

a) 0,2%
b) 0,4%
c) 2%
d) 4%
e) 6%

59 (UEG-GO) Aplicados $\frac{2}{3}$ de um capital a uma taxa de 24% ao ano e o restante a 30% ao ano, ambos a juro simples, obtém-se, em 8 meses, um rendimento de R\$ 130,00. O capital aplicado é de:

a) R\$ 700,00.
b) R\$ 720,00.
c) R\$ 740,00.
d) R\$ 750,00.
e) R\$ 760,00.

60 (UFMG) Um capital de R\$ 30.000,00 foi dividido em duas aplicações: a primeira pagou uma taxa de 8% de juros anuais; a outra aplicação, de risco, pagou uma taxa de 12% de juros anuais. Ao término de um ano, observou-se que os lucros obtidos em ambas as aplicações foram iguais. Assim sendo, a diferença dos capitais aplicados foi de:

a) R\$ 8.000,00.
b) R\$ 4.000,00.
c) R\$ 6.000,00.
d) R\$ 10.000,00.

61 Um fogão é vendido à vista por R\$ 384,00 ou a prazo em dois pagamentos de R\$ 200,00 cada um, sendo o primeiro no ato da compra e o segundo um mês depois.

A taxa mensal de juro do financiamento desse fogão é de, aproximadamente:

a) 7,2%.
b) 7,5%.
c) 8,7%.
d) 4,6%.
e) 4,9%.

62 (ESPM-SP) O Sr. José possui o dinheiro necessário e suficiente para comprar uma mercadoria à vista, com 15% de desconto sobre o preço de tabela. Ele está pensando em fazer uma aplicação desse dinheiro à taxa de 5% ao mês e pagar essa mercadoria após 30 dias, com um desconto de 10% sobre o preço de tabela. Se escolher esta opção, ele:

a) terá um lucro de 0,25% sobre o preço de tabela.
b) terá um lucro de 1,25% sobre o preço de tabela.
c) terá um prejuízo de 0,75% sobre o preço de tabela.
d) terá um prejuízo de 1,25% sobre o preço de tabela.
e) não terá lucro nem prejuízo.

63 O montante acumulado durante 2 anos de aplicação de um capital de R$ 12.000,00, em regime de juro composto, à taxa de 3% ao mês será:

a) $12.000(1,3)^2$
b) $12.000(1,03)^2$
c) $12.000(1,3)^{24}$
d) $12.000(1,03)^{24}$
e) $12.000(1,003)^2$

64 (Vunesp) Mário tomou um empréstimo de R$ 8.000,00 a juro composto de 5% ao mês. Dois meses depois, Mário pagou R$ 5.000,00 do empréstimo e, um mês após esse pagamento, liquidou todo o seu débito. O valor do último pagamento foi de:

a) R$ 3.015,00.
b) R$ 3.820,00.
c) R$ 4.011,00.
d) R$ 5.011,00.
e) R$ 5.250,00.

65 (ESPM-SP) Certo capital foi aplicado a juro composto durante 2 anos, à taxa de 20% ao ano. Se esse capital tivesse sido aplicado a juro simples, para obter o mesmo rendimento a taxa mensal deveria ser de aproximadamente:

a) 2%
b) 1,98%
c) 1,94%
d) 1,87%
e) 1,83%

66 Uma máquina industrial foi comprada nova por R$ 10.000,00 e, quatro anos depois, foi vendida. Sabendo que nesse período a máquina sofreu uma desvalorização de 5% ao ano, por quanto ela foi vendida? (Use uma calculadora para efetuar os cálculos.)

67 O preço p de um produto sofreu dois aumentos sucessivos: o primeiro de 5% e o segundo de 3%. Depois, o preço do produto sofreu um desconto de 4%. Após esse desconto, o preço do produto é:

a) $p \cdot 1,5 \cdot 1,3 \cdot 0,06$
b) $p \cdot 1,5 \cdot 1,3 \cdot 0,96$
c) $p \cdot 1,05 \cdot 1,03 \cdot 0,96$
d) $p \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4$
e) $p \cdot 0,05 \cdot 0,03 \cdot 0,04$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(1) = 5$ e $f(x + 1) = (x + 1)f(x)$, para qualquer x real. Calcule $f(3)$.

2 Estudos geológicos mostram que a cada 30 m de profundidade no interior da crosta terrestre a temperatura aumenta 1 °C em relação à temperatura na superfície. Se em determinada região a temperatura na superfície da Terra é 32 °C:

a) dê uma equação que expresse a temperatura y, em grau Celsius, em função da profundidade x, em metro, na crosta terrestre dessa região.
b) qual é a temperatura para a profundidade de 100 m na crosta terrestre dessa região?
c) a que profundidade na crosta terrestre dessa região a temperatura atinge 54 °C?

3 Um biólogo estimou em 0,014 mm o comprimento de uma bactéria, afirmando que essa estimativa poderia ter um erro máximo de 5% para mais ou menos. Qual das afirmações abaixo é verdadeira, em que x é o comprimento real da bactéria em milímetro?

a) $x - 0,014 \leqslant 0,0007$
b) $0,014 - x \leqslant 0,0007$
c) $|x - 0,014| \leqslant 0,0007$
d) $x - 0,014 \leqslant 0,05$
e) $|x - 0,014| \leqslant 0,05$

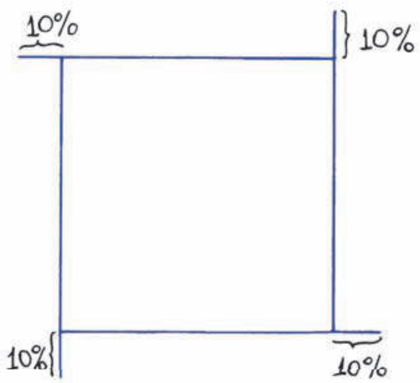
ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Aumentando em 10% a medida de cada lado de um quadrado, qual é o percentual de aumento no perímetro desse quadrado?

Resolução



ERRADO!

Para o aumento percentual no perímetro, fazemos:

$$10\% + 10\% + 10\% + 10\%$$

O percentual de aumento no perímetro do quadrado é de 40%.

Comentário

O aluno cometeu um erro comum, pois calculou o percentual em relação à medida de um lado e não em relação ao perímetro do quadrado.

Para entender melhor o raciocínio de resolução desse exercício, pense no problema a seguir:

Em uma loja, cada caneta é vendida com 10% de desconto. Comprando 10 dessas canetas:

a) qual será o percentual de desconto sobre o preço de uma caneta?
b) qual será o percentual de desconto sobre o preço total?

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

8

Função exponencial

Muitas grandezas crescem ou decrescem em função de outra, através do produto por uma taxa constante. Por exemplo, o crescimento de um capital aplicado em regime de juro composto é uma grandeza que varia em função do tempo. Estudar a função exponencial ajuda a entender essas variações.

Evolução tecnológica

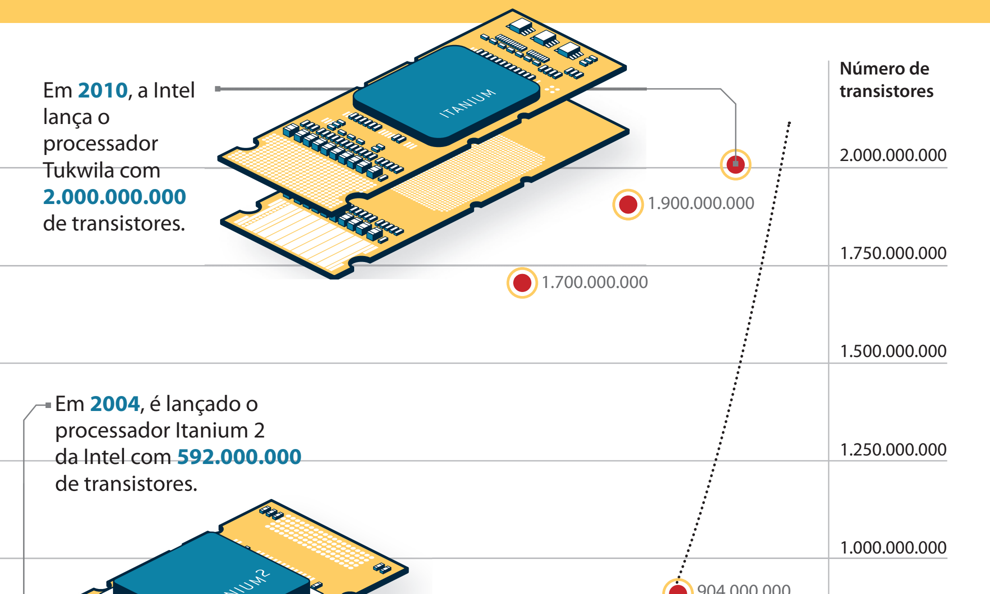
Desde a invenção dos primeiros computadores diversas previsões e especulações foram feitas sobre o desenvolvimento da informática, procurando antecipar a evolução da capacidade de armazenamento de dados e o aumento da velocidade de processamento das informações e do número de transistores nos microprocessadores.

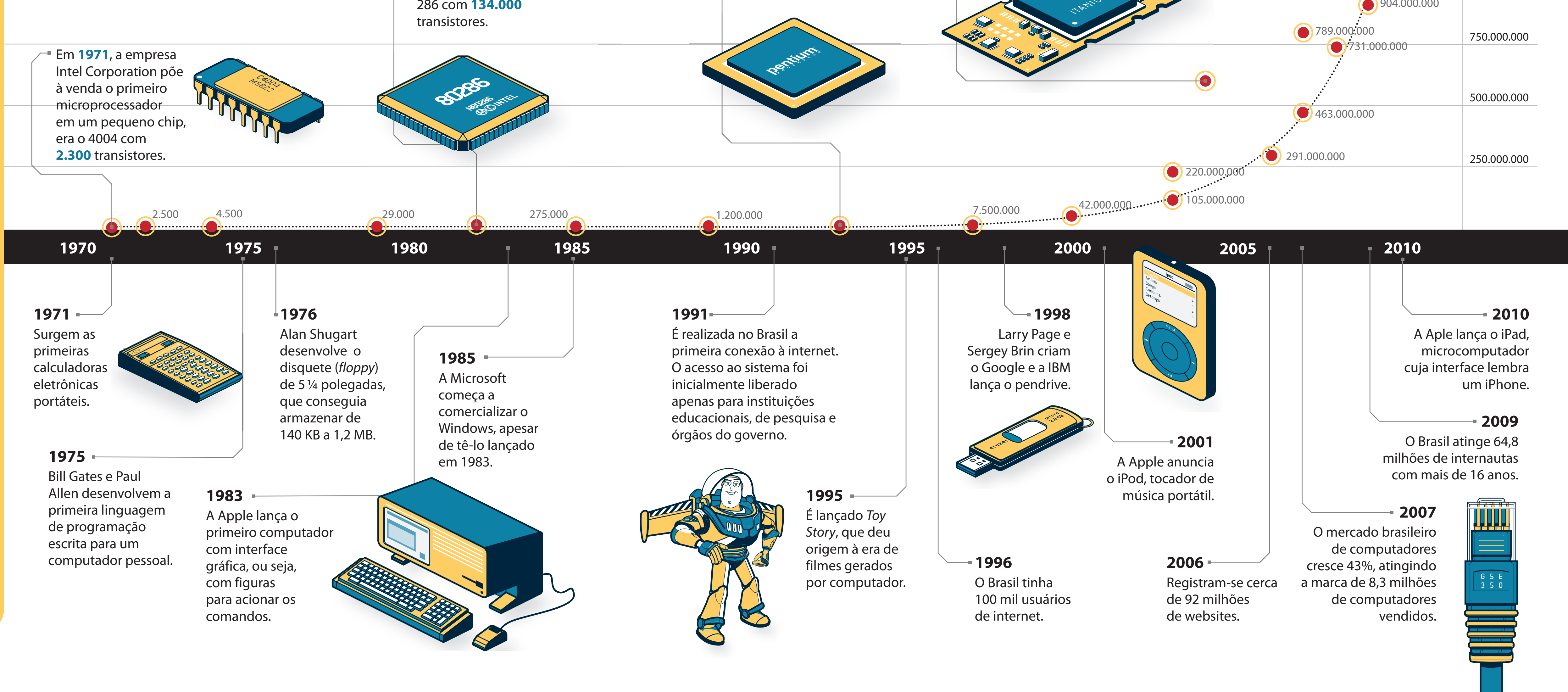
Lei de Moore

Quanto maior o número de transistores em um chip, maior será sua capacidade de processamento. Em 1965, Gordon Moore previu que o número de transistores integrados em um chip dobraria a cada dois anos, acarretando mais desempenho por menos custo. Hoje, podemos constatar se sua previsão estava correta.

Para pensar

1. Em 1971, um processador tinha 2.300 transistores. De acordo com a lei de Moore, quantos transistores teria um processador em 2011?
2. Você acha que a previsão de Moore representa uma aproximação aceitável do que vem acontecendo ao longo dos anos? Por quê?





Introdução ao estudo da função exponencial

Objetivos

- **Resolver** expressões envolvendo potências.
- **Representar** números sob a notação científica.

Termos e conceitos

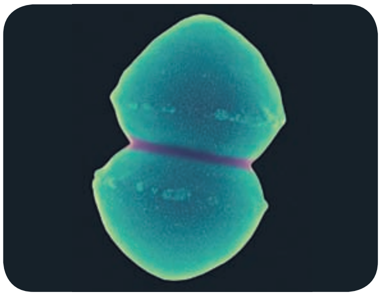
- potência de expoente inteiro
- notação científica

Várias situações do cotidiano, como a depreciação de um bem, o cálculo da taxa de juro em aplicações financeiras ou em empréstimos bancários, e do universo científico, como o cálculo de crescimento populacional, a medição dos níveis de radioatividade de um elemento atômico, entre outras, podem ser estudadas com o auxílio das **funções exponenciais**.

Para apresentar a função exponencial, vamos partir de uma situação que mostra a relação entre essa função e uma forma de crescimento de grandezas.

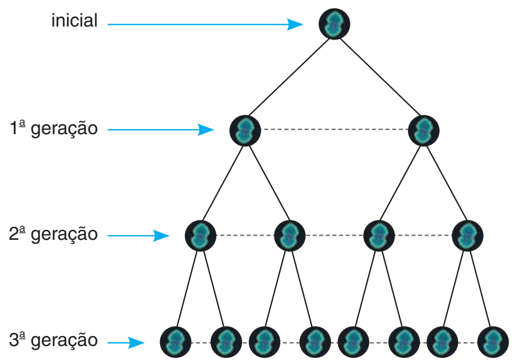
A maioria das bactérias reproduz-se por bipartição, isto é, cada uma delas se divide em duas ao atingir determinado tamanho.

Em uma cultura de laboratório, vamos considerar determinada bactéria que se dividirá em duas, dando origem à primeira geração; cada bactéria da primeira geração sofrerá bipartição, dando origem à segunda geração, e assim por diante. A tabela abaixo mostra o crescimento do número de bactérias, a partir de uma bactéria, admitindo-se que todas sobrevivam a cada geração.



Bactéria em processo de bipartição.

	Número de bactérias
Inicial	$1 = 2^0$
1ª geração	$2 = 2^1$
2ª geração	$4 = 2^2$
3ª geração	$8 = 2^3$
4ª geração	$16 = 2^4$
⋮	⋮



Note que a coluna onde se registra o número de bactérias apresenta as potências $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ Assim, o número y de indivíduos gerados por uma bactéria será, na geração x, expresso pela função:

$$y = 2^x$$

Se essas bactérias conseguissem se bipartir a cada 20 minutos, após 1 hora, teríamos três gerações; e, em apenas um dia, teríamos 72 gerações. Para se ter ideia, o número de bactérias somente na 72ª geração seria: $2^{72} = 4.722.366.482.869.645.213.696$

E o total de bactérias em apenas um dia seria:

9.444.732.965.739.290.427.391

Essa situação mostra o crescimento assustador da função $f(x) = 2^x$.

Igualmente espantoso é o decrescimento de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Funções como essas, chamadas de **funções exponenciais**, serão estudadas neste capítulo. Os pré-requisitos para esse estudo são os conceitos e as propriedades envolvidas na potenciação e na radiciação no conjunto dos reais em $\mathbb{R}$, que revisaremos a seguir.

Potência de expoente inteiro

Sendo a um número real e n um número inteiro, definimos:

$$a^0 = 1, \text{ se } a \neq 0$$
$$a^1 = a$$
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ se } n > 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ se } a \neq 0$$

Na potência a^n, o número a é chamado de **base** da potência e o número n é chamado de **expoente**.

Nota:

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0^0; por isso, excluímos essa possibilidade na definição $a^0 = 1$.

Exemplos

a) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

b) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

c) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{8}$

d) $8^1 = 8$

e) $7^0 = 1$

f) $(-5)^0 = 1$

g) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

h) $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{9}} = \frac{9}{49}$

Para agilizar o cálculo de $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$, podemos inverter a base e trocar o sinal do expoente, isto é:

$\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$

Propriedades das potências de expoente inteiro

Dados os números reais a e b e os números inteiros m e n e obedecidas as condições para que existam as potências, temos:

P1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (conserva-se a base e adicionam-se os expoentes)

P2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)

P3. $(a^m)^n = a^{mn}$ (conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)

P4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (distributiva da potenciação em relação à multiplicação)

P5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (distributiva da potenciação em relação à divisão)

Exemplos

a) $7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$

b) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

c) $3^4 : 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$

d) $(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$

e) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

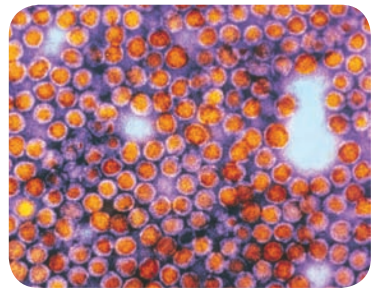
f) $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25}$

Notação científica

Os números que fazem parte do dia a dia expressam grandezas como o preço de um produto, o tempo de duração de um filme, o custo de um carro etc. Esses números, por serem representados com poucos algarismos, não apresentam grande dificuldade de entendimento. Porém, no universo científico, há números "gigantescos" ou "minúsculos" em relação aos que estamos habituados. Por exemplo:

- Parte da água do planeta Terra concentra-se na atmosfera e corresponde a aproximadamente:

$$13.000.000.000.000.000 \text{ L}$$



- O vírus da poliomielite, que é o menor vírus que infecta o ser humano, mede cerca de:

$$0,00000002 \text{ m}$$

A dificuldade em trabalhar com esses números levou os cientistas a estabelecer uma notação simplificada para representá-los: a **notação científica**. Para entender essa notação, observe que o número 13.000.000.000.000.000 é o produto:

$$1,3 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{16 fatores}}$$

Assim, o volume de água concentrada na atmosfera terrestre expresso em notação científica é $1,3 \cdot 10^{16}$ L.

Analogamente, observando que

$$0,00000002 = \frac{2}{100.000.000} = \frac{2}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{2}{10^8}$$

podemos representar o comprimento do vírus da poliomielite, em notação científica, por $2 \cdot 10^{-8}$ m.

De maneira geral, temos:

> Todo número real não nulo, com expressão decimal finita, pode ser representado sob a forma:
>
> $$k \cdot 10^m$$
>
> em que m é um número inteiro e k é um número real tal que $1 \leqslant |k| < 10$.
>
> Essa forma de representação é denominada **notação científica**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Sabendo que a massa de cada átomo de Mg (magnésio) é estimada em $4,0 \cdot 10^{-23}$ g, conclui-se que o número de átomos que compõe 48 g de Mg é:

a) $1,2 \cdot 10^{22}$ **c)** $1,2 \cdot 10^{24}$ **e)** $4,8 \cdot 10^{23}$
b) $1,2 \cdot 10^{23}$ **d)** $4,8 \cdot 10^{22}$

Resolução

O número n de átomos que compõe 48 g de Mg é dado por:

$$n = \frac{48}{4,0 \cdot 10^{-23}} = \frac{4,8 \cdot 10}{4,0 \cdot 10^{-23}} = \frac{4,8}{4,0} \cdot \frac{10}{10^{-23}} = 1,2 \cdot 10^{1-(-23)}$$

$\therefore n = 1,2 \cdot 10^{24}$

Logo, a alternativa **c** é a correta.

O magnésio é encontrado em cereais integrais, leguminosas (feijões, lentilhas etc.), hortaliças de folha verde (espinafre, brócolis etc.), frutos oleaginosos (avelã, amêndoa etc.), sementes (girassol, abóbora etc.) e frutas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Podemos justificar o procedimento de conservar a base e adicionar os expoentes no cálculo $7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3}$ do seguinte modo:

$$\underbrace{7^2} \cdot \overbrace{7^3} = \underbrace{7 \cdot 7}_{\text{dois fatores}} \cdot \overbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}^{\text{três fatores}} = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{cinco fatores}} = 7^{2+3}$$

Analogamente, podemos justificar o procedimento de conservar a base e subtrair os expoentes no cálculo $2^5 : 2^3 = 2^{5-3}$ do seguinte modo:

$$2^5 : 2^3 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{5-3}$$

Justifique os procedimentos nos cálculos:

a) $(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3}$ b) $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3$ c) $\left(\dfrac{7}{5}\right)^2 = \dfrac{7^2}{5^2}$

2 Calcule o valor das potências:

a) 5^2 d) $(-2)^3$ g) $(-9)^0$ j) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$ m) 1^{43} p) 5^{-2} s) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$

b) $(-5)^2$ e) -2^3 h) -9^0 k) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4$ n) $(-1)^{12}$ q) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-2}$ t) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$

c) -5^2 f) 9^0 i) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ l) 0^{17} o) $(-1)^{13}$ r) $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-2}$ u) $(-2)^{-3}$

3 Efetue, admitindo que sejam obedecidas as condições de existência:

a) $(5x)^3$ c) $(3x^3)^2$ e) $(-4x^2y^3)^2$ g) $\left(\dfrac{ab^3}{3c^2}\right)^3$ i) $\left(-\dfrac{3t^3}{2u^2}\right)^{-4}$

b) $(x^2)^4$ d) $(2ab^3)^4$ f) $\left(\dfrac{2}{b^5}\right)^3$ h) $\left(\dfrac{2x^3}{5yz^2}\right)^{-2}$ j) $\left(\dfrac{ab^2}{c^5}\right)^{-3}$

4 Obedecidas as condições de existência, efetue:

a) $x^5 \cdot x^3$ c) $(3a^4b)^2 \cdot (2a^3b^2)^3$ e) $\left(\dfrac{3a^2b^3}{cd}\right)^3 : \left(\dfrac{3ab^4}{c^2d^3}\right)^2$

b) $y^6 : y^2$ d) $\left(\dfrac{2xy^5}{z^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{xz^3}{y}\right)^4$ f) $\left(\dfrac{2pq^2}{u^2v}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{4p^2q}{uv^2}\right)^{-2}$

5 Uma unidade de comprimento muito utilizada em Astronomia é o **ano-luz**.
Essa unidade equivale à distância percorrida pela luz no vácuo em um ano, e corresponde a cerca de 9.460.000.000.000 km. Represente essa distância em notação científica.

6 A distância da Terra ao Sol é de aproximadamente $149{,}6 \cdot 10^6$ km. Represente essa distância na linguagem da notação científica.

7 O vírus da varíola mede cerca de 0,0003 mm. Represente essa medida em notação científica.

8 Qualquer quantidade de gás é formada por um vasto número de moléculas que se movimentam em alta velocidade.
Naturalmente, ocorrem colisões moleculares em grande número a cada instante.
Estima-se que na atmosfera, ao nível do mar, cada molécula de ar colida com outra cerca de 3.000 milhões de vezes por segundo, o que é equivalente a:

a) $1{,}8 \cdot 10^{11}$ colisões por hora c) $1{,}4 \cdot 10^{12}$ colisões por hora e) $1{,}08 \cdot 10^{13}$ colisões por hora
b) $6{,}48 \cdot 10^{13}$ colisões por hora d) $2{,}48 \cdot 10^{13}$ colisões por hora

9 A área da superfície do planeta Terra é 500.000.000 km^2, aproximadamente.
a) Represente, em notação científica e em quilômetro quadrado, a área da superfície da Terra.
b) Represente, em notação científica e em metro quadrado, a área da superfície da Terra.

Resolva os exercícios complementares 1 a 5 e 36 a 43.

Seção 8.2

Radiciação em $\mathbb{R}$

Objetivos

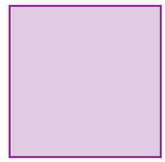
- **Calcular** raízes exatas.
- **Simplificar** radicais.
- **Resolver** expressões envolvendo radicais.
- **Racionalizar** denominadores.

Termos e conceitos

- **raiz *n*-ésima de um número real**
- **racionalização de denominadores**

Acompanhe os procedimentos a seguir.

(1) Conhecendo a medida 5 do lado de um quadrado, sabemos que a área desse quadrado é a potência 5^2.



$$A = 5^2 = 25$$

(2) Conhecendo a área 25 de um quadrado, sabemos que a medida do lado desse quadrado é a base positiva da potência x^2 tal que $x^2 = 25$. Logo, $x = 5$.

Nesses procedimentos, são realizadas **operações inversas**: em (1), é conhecida a base da potência 5^2 e calcula-se o valor dessa potência; em (2), é conhecido o valor da potência x^2 e calcula-se a base x da potência. A operação efetuada em (2), que é a inversa da potenciação, é chamada de **radiciação**.

Vamos separar o estudo de radiciação em dois casos.

1º caso: Sendo n um número natural não nulo, dizemos que a **raiz *n*-ésima de um número real** não negativo a é o número real não negativo b se, e somente se, $b^n = a$.

Em símbolos, temos:

> Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+$, definimos:
>
> $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, com $b \in \mathbb{R}_+$

No radical $\sqrt[n]{a}$, o número n é chamado de **índice do radical** e o número a é chamado de **radicando**.

Nota:

Em um radical de índice 2, o índice não precisa ser escrito, pois fica subentendido. Por exemplo, o símbolo $\sqrt{9}$ deve ser entendido como $\sqrt[2]{9}$.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$ e $2 \in \mathbb{R}_+$

b) $\sqrt{16} = \sqrt[2]{16} = 4$, pois $4^2 = 16$ e $4 \in \mathbb{R}_+$

c) $\sqrt[1]{5} = 5$, pois $5^1 = 5$ e $5 \in \mathbb{R}_+$

d) $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$ e $0 \in \mathbb{R}_+$

Notas:

1. Se n é um número natural par não nulo, existem dois números opostos, b e $-b$, com $b > 0$, tais que $b^n = a$ e $(-b)^n = a$. Por convenção, adota-se apenas o número positivo b como valor de $\sqrt[n]{a}$. Por exemplo, embora $4^2 = 16$ e $(-4)^2 = 16$, apenas o número positivo 4 é a raiz quadrada de 16. Assim, $\sqrt{16} = 4$.
2. De acordo com a nota 1, para qualquer x real temos $\sqrt{x^2} = |x|$, pois a sentença $\sqrt{x^2} = x$ é falsa se x for negativo.
3. Os símbolos $\sqrt[1]{\ }, \sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, \sqrt[5]{\ }, ..., \sqrt[n]{\ }$ devem ser lidos, respectivamente, como: raiz primeira, raiz quadrada (ou segunda), raiz cúbica (ou terceira), raiz quarta, raiz quinta, ..., raiz n-ésima (ou enésima).

2º caso: Se n é um número natural ímpar, dizemos que a **raiz n-ésima de um número real** negativo a é o número real negativo b se, e somente se, $b^n = a$.

Em símbolos, temos:

> Sendo $n \in \mathbb{N}$ com n ímpar, e $a \in \mathbb{R}^*_-$, definimos:
> $$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Nessa definição, b é obrigatoriamente negativo.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

b) $\sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1)^5 = -1$

Observe que não existe, em $\mathbb{R}$, radicais de índice par com radicando negativo. Por exemplo, $\sqrt{-9}$ seria o número real cujo quadrado é -9, o que é absurdo, pois o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo.

Também é importante observar que:

> Sendo a um número real qualquer e n um número natural ímpar, temos:
> $$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Exemplo

$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

Propriedades dos radicais com radicandos não negativos

Sendo $\{n, k, p\} \subset \mathbb{N}^*$ e $\{a, b\}, \subset \mathbb{R}_+$, temos:

P1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ (distributiva da radiciação em relação à multiplicação)

P2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, com $b \neq 0$ (distributiva da radiciação em relação à divisão)

P3. $\sqrt[nk]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p}$ (dividem-se por um fator comum o índice do radical e o expoente do radicando)

P4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^q = \sqrt[n]{a^q}$, com $q \in \mathbb{R}$

P5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{7 \cdot 2} = \sqrt[3]{14}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{15}{3}} = \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[15]{5^6} = \sqrt[5]{5^2}$ (dividiram-se por 3 o índice 15 e o expoente 6)

d) $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$ (multiplicaram-se os índices 3 e 2)

Enfatizamos que as propriedades de P1 a P5 dos radicais valem **exclusivamente** para radicais com radicandos não negativos. A aplicação dessas propriedades em expressões com radicandos negativos pode levar a absurdos, como mostra o exemplo:

$$2 = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \underbrace{\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[1]{-2}}_{\text{propriedade P3}} = -2 \Rightarrow 2 = -2 \quad \text{(O que é absurdo!)}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+$, demonstrar que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Resolução

Sendo x e y os valores de $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$, respectivamente, temos:

$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$ e $x \geqslant 0$

$\sqrt[n]{b} = y \Leftrightarrow y^n = b$ e $y \geqslant 0$

Multiplicamos x^n por y^n, obtendo: $x^n \cdot y^n = a \cdot b$

Pela propriedade distributiva da potenciação em relação à multiplicação e pela hipótese de que $ab \geqslant 0$, temos:

$(xy)^n = ab$, com $ab \geqslant 0$

Por definição de raiz n-ésima:

$(xy)^n = ab$, com $ab \geqslant 0 \Leftrightarrow xy = \sqrt[n]{ab}$

Substituindo, na última igualdade, x por $\sqrt[n]{a}$ e y por $\sqrt[n]{b}$, concluímos: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

3 Sendo $\{n, p, k\} \subset \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$, demonstrar que $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Resolução

Seja x o valor de $\sqrt[np]{a^{kp}}$:

$\sqrt[np]{a^{kp}} = x \Leftrightarrow x^{np} = a^{kp}$ e $x \geqslant 0$

Ou ainda:

$\sqrt[np]{a^{kp}} = x \Leftrightarrow (x^n)^p = (a^k)^p$ e $x \geqslant 0$

Como $x \geqslant 0$ e $a \geqslant 0$, temos:

$(x^n)^p = (a^k)^p \Leftrightarrow x^n = a^k$

O número a^k não é negativo, pois, por hipótese, $a \geqslant 0$; logo, pela definição de raiz n-ésima:

$x^n = a^k$ e $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a^k}$

Substituindo, na última igualdade, x por $\sqrt[np]{a^{kp}}$, concluímos:

$\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10 Apenas uma das alternativas abaixo apresenta uma proposição falsa. Qual é essa alternativa?

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{20}$

b) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt[5]{81} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^4$

d) $\sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt[4]{25}$

e) $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2}$

11 Aplicando a propriedade P3, podemos reduzir radicais ao mesmo índice. Por exemplo, para obter dois radicais de mesmo índice, respectivamente equivalentes a $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{5}$, podemos agir do seguinte modo.

- No primeiro radical, multiplicamos o índice 3 e o expoente 1 do radicando por 4, obtendo:

  $\sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{2^4}$

- No segundo radical, multiplicamos o índice 4 e o expoente 1 do radicando por 3, obtendo:

  $\sqrt[4]{5^1} = \sqrt[4 \cdot 3]{5^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{5^3}$

Note, portanto, que os radicais assim obtidos têm o mesmo índice 12.

Aplicando essa ideia, efetue as seguintes operações de radicais de índices diferentes:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}}$

12 Para o cálculo de $\sqrt{5}$ em uma calculadora, digitam-se as teclas: $\boxed{5}$, $\boxed{\sqrt{\ }}$ e $\boxed{=}$, nessa ordem. Analogamente, obtém-se, nessa calculadora, a raiz quadrada de qualquer número real não negativo x. Usando apenas as teclas numéricas e as teclas $\boxed{\sqrt{\ }}$ e $\boxed{=}$, descreva um processo para o cálculo de:

a) $\sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[8]{5}$

Simplificação de radicais

Para facilitar o trabalho com radicais, é conveniente transformá-los, por meio das propriedades estudadas, na forma mais simples possível.

Exemplos

a) Para simplificar o radical $\sqrt[3]{16}$, decompomos o radicando em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 16 = 2^4$$

Assim, temos: $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) Para simplificar o radical $\sqrt{160}$, decompomos o radicando em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 160 = 2^5 \cdot 5$$

Logo: $\sqrt{160} = \sqrt{2^5 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2 \cdot 5} = 2^2 \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{10}$

Operações com radicais

Para operar com radicais, aplicamos suas propriedades e as propriedades operatórias da adição e da multiplicação de números reais.

Exemplos

a) $4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{fator comum em evidência}}(4 + 6 - 3) = 7\sqrt{2}$

b) $4\sqrt{12} + 6\sqrt{75} = 4 \cdot 2\sqrt{3} + 6 \cdot 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 38\sqrt{3}$

c) $6\sqrt[5]{3} \cdot 4\sqrt[5]{2} = (6 \cdot 4) \cdot \left(\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{2}\right) = 24\sqrt[5]{6}$

d) $12\sqrt[3]{10} : 4\sqrt[3]{5} = \dfrac{12\sqrt[3]{10}}{4\sqrt[3]{5}} = \dfrac{12}{4} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{10}{5}} = 3\sqrt[3]{2}$

Racionalização de denominadores

Os denominadores das frações $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\frac{5}{4\sqrt{2}}$, $\frac{2}{\sqrt[5]{3}}$ e $\frac{4}{\sqrt{7}+2}$ são números irracionais. É possível obter frações equivalentes a essas, mas com denominadores racionais, por meio do procedimento conhecido como **racionalização de denominadores**. Acompanhe os desenvolvimentos a seguir.

- Multiplicando o numerador e o denominador de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por um mesmo número k, não nulo, obtemos uma fração equivalente. Escolhendo $k = \sqrt{3}$, temos:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

  Assim, chegamos a uma fração com denominador racional equivalente a $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

- Analogamente, multiplicamos por $\sqrt{2}$ o numerador e o denominador de $\frac{5}{4\sqrt{2}}$ para obter uma fração equivalente com denominador racional:

$$\frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

- No caso da racionalização do denominador de $\frac{2}{\sqrt[5]{3}}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[5]{3^4}$:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4}} = \frac{2\sqrt[5]{81}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{81}}{3}$$

- Para a racionalização do denominador de $\frac{4}{\sqrt{7}+2}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt{7} - 2$:

$$\frac{4}{\sqrt{7}+2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}+2) \cdot (\sqrt{7}-2)} = \frac{4(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \frac{4(\sqrt{7}-2)}{7-4} = \frac{4\sqrt{7}-8}{3}$$

  De maneira geral:

Para racionalizar o denominador de uma fração do tipo:

- $\frac{t}{u\sqrt[n]{a^p}}$, em que u e a são números racionais, basta multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$;
- $\frac{t}{u\sqrt{a} + v\sqrt{b}}$, em que u, a, v e b são números racionais, basta multiplicar o numerador e o denominador por $u\sqrt{a} - v\sqrt{b}$.

Nota:

Trabalhar com denominadores racionais simplifica muitos procedimentos, além de auxiliar na aproximação de resultados numéricos.

Por exemplo, se tivermos de obter uma aproximação decimal da expressão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, em que $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$, é mais simples efetuar o cálculo na expressão $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que na expressão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pois $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{,}4142}{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}4142}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 Calcule:

a) $\sqrt[3]{125}$
b) $\sqrt[4]{81}$
c) $\sqrt{49}$
d) $\sqrt[3]{1}$
e) $\sqrt[7]{0}$
f) $\sqrt[1]{12}$
g) $\sqrt[3]{-125}$
h) $\sqrt[5]{-32}$
i) $\sqrt[9]{-1}$

14 Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{12}$
b) $\sqrt{18}$
c) $\sqrt[3]{24}$
d) $\sqrt[4]{32}$
e) $\sqrt{40}$
f) $\sqrt[5]{96}$
g) $\sqrt{\dfrac{48}{25}}$
h) $\sqrt[3]{\dfrac{81}{8}}$
i) $\sqrt{\dfrac{75}{64}}$

15 Efetue:

a) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{50} + \sqrt{125} - 6\sqrt{5}$
c) $4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$
d) $4\sqrt[5]{3} \cdot 2\sqrt[5]{4}$
e) $6\sqrt{10} : 2\sqrt{5}$
f) $12\sqrt[3]{16} : 6\sqrt[3]{2}$
g) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 + 2\sqrt[3]{5}$

16 A expressão $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ é igual a:

a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt[4]{4}$
c) $2\sqrt[8]{8}$
d) $\sqrt[8]{128}$
e) $2\sqrt[6]{2}$

17 Racionalize o denominador de cada fração:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$
b) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$
c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}}$

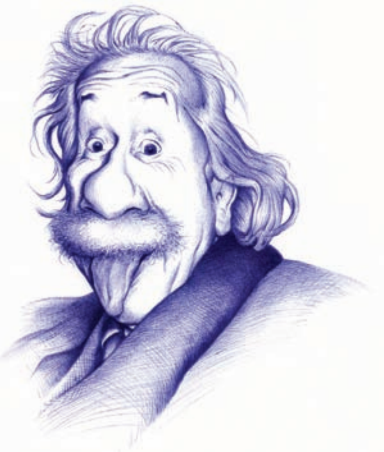
18 Obtenha uma fração com denominador racional equivalente a:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5} + 1}$
b) $\dfrac{23}{4\sqrt{2} + 3}$
c) $\dfrac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

19 (UEL-PR) Einstein propôs uma nova interpretação do espaço e do tempo, indicando que não são grandezas independentes, absolutas e iguais para quaisquer observadores, mas relativas: dependem do estado de movimento entre observador e observado. Um dos resultados dessa nova visão é conhecido como *dilatação temporal*, a qual afirma que um observador em repouso em relação a um fenômeno, ao medir sua duração, atribuir-lhe-á um intervalo Δt, ao passo que um observador que fizer medidas do fenômeno em movimento, com velocidade v, irá atribuir uma duração $\Delta t'$, sendo que

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

em que c é a velocidade da luz. Considere que dois irmãos gêmeos sejam separados ao nascerem e que um deles seja colocado em uma nave espacial que se desloca com velocidade v pelo espaço durante 20 anos, enquanto o outro permanece em repouso na Terra. Com base na equação anterior, para que o irmão que ficou na Terra tenha 60 anos no momento do reencontro entre eles, a velocidade da nave deverá ser de:



a) $\dfrac{2c\sqrt{2}}{3}$
b) $\dfrac{c}{2}$
c) $\dfrac{8c}{9}$
d) c
e) $2c$

Resolva os exercícios complementares 6 a 12.

Potência de expoente real

Objetivos

- **Definir** potência para qualquer expoente real.
- **Representar** potências de expoente racional sob a forma de radical.
- **Calcular** valores aproximados de potências com expoente irracional.

Termos e conceitos

- potência de expoente racional
- potência de expoente irracional

Até aqui, estudamos as potências de expoente inteiro. Neste item, vamos ampliar o conceito de potenciação, definindo potência de expoente real, ou seja, expoente racional ou irracional.

Potência de expoente racional

A propriedade P3 dos radicais afirma que, para $\{n, k, p\} \subset \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$, temos:

$$\sqrt[nk]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Vamos estender essa propriedade admitindo a existência de potência com qualquer expoente racional. Por exemplo, dividindo por 5 o índice do radical e o expoente do radicando de $\sqrt[5]{3^2}$ obtemos:

$$\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[1]{3^{\frac{2}{5}}}$$

Como a raiz primeira de qualquer número real é esse próprio número, concluímos:

$$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$

Esse procedimento sugere que uma potência de expoente racional seja definida como um radical, do seguinte modo:

Sendo a um número real positivo e os números inteiros k e n, com $n \geqslant 1$, definimos:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Se os números inteiros k e n forem ambos positivos, define-se: $0^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{0^k} = 0$

Exemplos

a) $3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7}$

b) $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

c) $16^{-0,25} = 16^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

Propriedades das potências de expoente racional

As propriedades P1 a P5 das potências para expoentes inteiros, enunciadas na página 255, continuam válidas para expoentes racionais.

Exemplos

a) $7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = 7^{\frac{7}{4}}$

b) $3^{0,9} : 3^{0,4} = 3^{0,9 - 0,4} = 3^{0,5}$

c) $(5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 5^1$

d) $(2x)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4 Calcular o valor da expressão:

$E = 81^{0,5} + 125^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$

Resolução

Podemos resolver essa questão de dois modos diferentes.

1º modo

A expressão é equivalente a:

$E = (3^4)^{0,5} + (5^3)^{\frac{1}{3}} + (2^4)^{0,25}$

Aplicando as propriedades das potências de expoente racional, temos:

- $(3^4)^{0,5} = 3^{4 \cdot 0,5} = 3^2 = 9$
- $(5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 5^1 = 5$
- $(2^4)^{0,25} = 2^{4 \cdot 0,25} = 2^1 = 2$

Logo, $E = 9 + 5 + 2 = 16$.

2º modo

Podemos calcular o valor da expressão E aplicando a definição de potência de expoente racional, isto é:

- $81^{0,5} = 81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$
- $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$
- $16^{0,25} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Logo, $E = 9 + 5 + 2 = 16$

5 Sabendo que $a^{\frac{3x}{2}} = 8$, calcular o valor de a^x.

Resolução

Elevamos a $\frac{2}{3}$ ambos os membros da igualdade $a^{\frac{3x}{2}} = 8$:

$\left(a^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a^{\frac{3x}{2} \cdot \frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}}$

$\therefore a^x = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} \Rightarrow a^x = 4$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20 Represente as potências sob a forma de radical.

a) $9^{\frac{2}{5}}$

b) $6^{\frac{1}{2}}$

c) $7^{0,5}$

d) $3^{0,75}$

21 Represente os radicais sob a forma de potência.

a) $\sqrt[5]{2}$

b) $\sqrt[3]{a^2}$ (com $a \geqslant 0$)

c) $\sqrt[4]{2^3}$

22 Resolva a expressão: $E = 36^{\frac{1}{2}} + 64^{\frac{2}{3}} + 625^{\frac{1}{4}}$

23 Se $a^3 = b$, com $a \geqslant 0$, então $\left(\sqrt[5]{a}\right)^4$ é igual a:

a) $b^{\frac{1}{3}}$

b) $b^{\frac{3}{4}}$

c) $b^{\frac{5}{12}}$

d) $b^{\frac{3}{2}}$

e) $b^{\frac{4}{15}}$

24 (Ufac) Se $3^x = 2$ para algum x real, então o valor de $3^{-\frac{x}{2}}$ é:

a) $\sqrt{2}$

b) 3

c) 2

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

Resolva os exercícios complementares 13 a 21.

Potência de expoente irracional

Como poderíamos definir a potência $3^{\sqrt{2}}$?

Sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$. Assim, definimos $3^{\sqrt{2}}$ como o número para o qual convergem os valores nas duas colunas da tabela a seguir, em que, na primeira coluna, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por falta, e crescem indefinidamente; e, na segunda, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por excesso, e decrescem indefinidamente.

Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por falta)	Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por excesso)
$3^{1,4} = 4{,}655536722$	$3^{1,5} = 5{,}196152423$
$3^{1,41} = 4{,}706965002$	$3^{1,42} = 4{,}758961394$
$3^{1,414} = 4{,}727695035$	$3^{1,415} = 4{,}732891793$
$3^{1,4142} = 4{,}72873393$	$3^{1,4143} = 4{,}729253463$
$\vdots$	$\vdots$

Observe que, pelos cálculos realizados nas duas colunas, podemos garantir que:

$$4{,}72873393 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}729253463$$

De maneira análoga, define-se qualquer potência de expoente irracional e base a, com $a \in \mathbb{R}_+^*$. Para a base 0 (zero) e o expoente t irracional positivo, define-se: $0^t = 0$. Por exemplo, $0^{\sqrt{3}} = 0$.

Propriedades das potências de expoente irracional

Demonstra-se que as propriedades de P1 a P5 das potências para expoentes inteiros, enunciadas na página 255, continuam válidas para expoentes irracionais.

Exemplos

a) $4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{5\sqrt{3}} = 4^{\sqrt{3}+5\sqrt{3}} = 4^{6\sqrt{3}}$

b) $7^{3\pi} : 7^{\pi} = 7^{3\pi - \pi} = 7^{2\pi}$

c) $\left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = 2^5 = 32$

d) $(6x)^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}} \cdot x^{\sqrt{2}}$

e) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\sqrt{7}} = \dfrac{4^{\sqrt{7}}}{5^{\sqrt{7}}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

25 Calcule o valor de:

a) $\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$ b) $\left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ c) $\left(3^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}}$ d) $1^{\sqrt{5}} + 0^{\pi}$

26 A expressão $\dfrac{16^{\sqrt{2}}}{2^{3\sqrt{2}}}$ é igual a:

a) $2^{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $4^{\sqrt{2}}$

27 O valor da expressão $\left(2^{\sqrt{3}} + 1\right)^2 - 4^{\sqrt{3}} + 2^{1+\sqrt{3}} - 1$ é:

a) $2^{2+\sqrt{3}}$ b) 1 c) $2^{1+\sqrt{3}}$ d) 2 e) $4^{\sqrt{3}}$

Resolva os exercícios complementares 22 a 24.

Seção 8.4

A função exponencial

Objetivos

- **Identificar** uma função exponencial.
- **Aplicar** o conceito da função exponencial na resolução de problemas.

Termo e conceito

- função exponencial

As aplicações financeiras em instituições bancárias têm rendimento diário e operam em regime de juro composto, isto é, no final de cada dia, o juro é acrescido ao montante do dia anterior. Se um capital de R$ 2.000,00 for investido em uma dessas aplicações financeiras, cuja taxa diária de juro seja de 0,04%, qual será o montante acumulado em t dias?

Como vimos no capítulo de Matemática Financeira, se um capital inicial C é aplicado em regime de juro composto à taxa constante i por unidade de tempo (dia, mês, ano etc.), então o montante M acumulado em t unidades de tempo é dado por:

$$M = C\,(1 + i)^t$$

Assim, o montante acumulado em t dias pela aplicação de R$ 2.000,00 à taxa diária de juro composto de 0,04% é dado pela função:

$$M = 2.000(1 + 0{,}0004)^t\text{, ou seja, } M = 2.000(1{,}0004)^t$$

Essa função, por apresentar a variável t como expoente de uma constante positiva e diferente de 1, é chamada de **função exponencial**. Embora, nesse caso, a variável t só possa assumir valores em $\mathbb{N}$, pois o juro é acrescido ao montante anterior ao final de cada dia, podemos conceituar esse tipo de função com domínio $\mathbb{R}$, conforme a definição a seguir.

> Chama-se **função exponencial** toda função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ tal que $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^*_+$ e $a \neq 1$.

Exemplos

a) $f(x) = 2^x$

b) $g(x) = 5^x$

c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

Gráfico da função exponencial

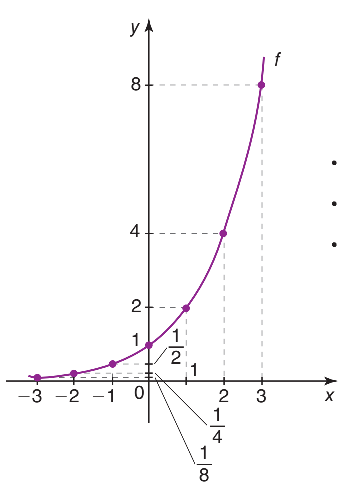
Vamos esboçar o gráfico de funções exponenciais a partir de alguns pontos obtidos por meio de uma tabela, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplos

a) $f(x) = 2^x$

Atribuindo a x os infinitos valores reais, obtemos o gráfico:

x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

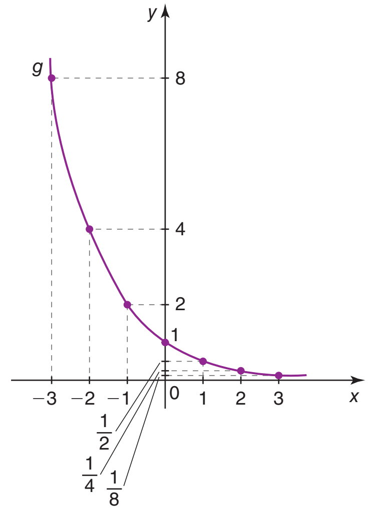


- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$
- f é crescente em todo o seu domínio.

b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Atribuindo a x os infinitos valores reais, obtemos o gráfico:



- $D(g) = \mathbb{R}$
- $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$
- g é decrescente em todo o seu domínio.

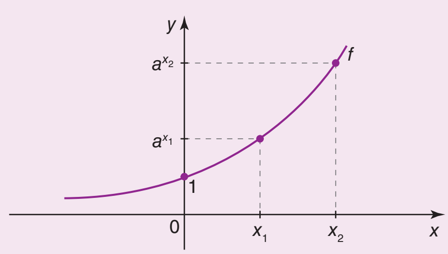
Propriedades da função exponencial

P1. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é injetora. Isso significa que, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$, ou seja:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

P2. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$, com $a > 1$, é crescente. Isso significa que, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência: $f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow x_2 > x_1$, ou seja:

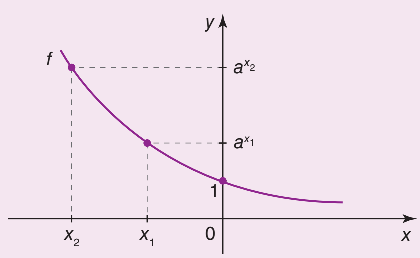
$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$$



$f(x) = a^x$ (com $a > 1$)

P3. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, é decrescente. Isso significa que, para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, temos a equivalência: $f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow x_2 < x_1$, ou seja:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1$$



$f(x) = a^x$ (com $0 < a < 1$)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6 Uma amostra de 4 kg de uma substância radioativa se desintegra à razão de 0,25% ao ano.

a) Qual é a equação que expressa a massa M dessa amostra, em quilograma, em função do tempo t, em ano?

b) Com o auxílio de uma calculadora científica, calcular a massa dessa amostra daqui a trinta anos.

Resolução

a) Raciocinando como no caso do cálculo do montante a juro composto, temos que o valor M de uma grandeza qualquer a partir de seu valor inicial C, do tempo t e da taxa constante i de variação pode ser calculado pela fórmula:

$$M = C(1 + i)^t,$$

em que t e i se referem à mesma unidade de tempo.

Assim, a amostra de 4 kg que se desintegra à razão de 0,25% ao ano terá daqui a t anos a massa M, em quilograma, dada por:

$M = 4(1 - 0{,}0025)^t$, ou seja, $M = 4(0{,}9975)^t$

Note que adotamos a taxa negativa, pois ela representa uma taxa de decrescimento.

b) Para calcular a massa da amostra, em quilograma, daqui a trinta anos, basta substituir por 30 a variável t da função obtida no item **a**:

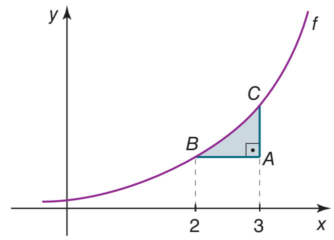
$$M = 4(0{,}9975)^{30}$$

Usando uma calculadora científica, obtemos: $(0{,}9975)^{30} \approx 0{,}93$ e, portanto:

$$M \approx 4 \cdot 0{,}93 \Rightarrow M \approx 3{,}72$$

Assim, daqui a trinta anos a amostra terá 3,72 kg, aproximadamente.

7 A figura a seguir apresenta o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2^x}{5}$ e um triângulo ABC cujos vértices B e C pertencem ao gráfico de f. Calcular a área desse triângulo.



Resolução

Temos:

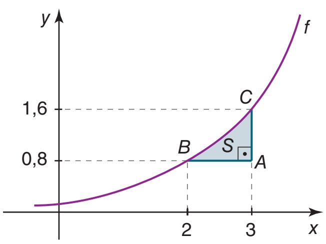
- a ordenada do ponto B é $f(2)$, que é obtida atribuindo-se o valor 2 à variável x da função f:

$$f(2) = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

- a ordenada do ponto C é $f(3)$, que é obtida atribuindo-se o valor 3 à variável x da função f:

$$f(3) = \frac{2^3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

Assim, podemos calcular as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$:



$$AB = 3 - 2 = 1$$
$$AC = 1{,}6 - 0{,}8 = 0{,}8$$

Concluímos, então, que a área S do triângulo é dada por:

$$S = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow S = \frac{1 \cdot 0{,}8}{2} = 0{,}4$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 Construa o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $f(x) = \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$ b) $g(x) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$

29 (Mackenzie-SP) O menor valor assumido pela função $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2 - x^2}$ é:

a) 8 b) 4 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{1}{8}$

30 Um corretor de uma bolsa de valores previu que, durante certo dia, o preço de cada ação de uma empresa poderia ser determinado pela função $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, em que y é o preço, em real, e x é o tempo, em hora, decorrido a partir da abertura do pregão.

a) Esboce o gráfico da função $y = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, considerando que o pregão teve exatamente 5 horas de duração.

b) Observando o gráfico que você construiu, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

I. $f(4) > f(3)$

II. $f(2) < f(1)$

III. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio de f, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$.

IV. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio de f, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$.

V. Se x_1 e x_2 são elementos do domínio de f, com $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Resolva os exercícios complementares 25 a 27 e 44 a 51.

Equação e inequação exponencial

Objetivo

- **Resolver** problemas por meio de equações e inequações exponenciais.

Equação exponencial

Acompanhe o problema a seguir.

Por quanto tempo deve permanecer aplicado um capital de R$ 10.000,00, à taxa de juro composto de 10% ao ano, para que o montante atinja R$ 14.641,00?

Indicando por t o tempo, em ano, aplicamos a fórmula $M = C(1 + i)^t$, obtendo:

$$14.641 = 10.000(1 + 0{,}1)^t \Rightarrow 14.641 = 10.000(1{,}1)^t$$
$$\therefore (1{,}1)^t = 1{,}4641$$

Note que essa resolução conduziu a uma equação cuja incógnita está no expoente de uma potência de base positiva e diferente de 1. Esse tipo de equação é chamado de **equação exponencial**.

Os métodos de resolução desse tipo de equação, que estudaremos a seguir, permitem determinar o valor de t nesse exemplo, que é 4. Assim, o capital deve permanecer aplicado por quatro anos.

Generalizando, definimos:

Equação exponencial é toda equação que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1.

Exemplos

a) $5^x = 25$

b) $9^x - 3^x = 6$

c) $2^{x+1} = 0{,}5$

Resolução de uma equação exponencial

A resolução de uma equação exponencial baseia-se na propriedade P1 das funções exponenciais, isto é, sendo a um número real qualquer, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Exemplo

Vamos resolver em $\mathbb{R}$ a equação $3^x = 9$.

O número 9 pode ser representado por 3^2. Assim, a equação proposta é equivalente a $3^x = 3^2$.

Pela propriedade P1 das funções exponenciais, temos:

$$3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, o conjunto solução da equação é: $S = \{2\}$.

Além dessa propriedade, muitas vezes é necessário aplicar outros recursos para resolver equações exponenciais, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $64^x = 32$.

Resolução

Decompondo em fatores primos os números 64 e 32, obtemos uma igualdade de potências de mesma base positiva e diferente de 1.

$$\begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \Rightarrow 64 = 2^6 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \Rightarrow 32 = 2^5 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Assim: $64^x = 32 \Rightarrow (2^6)^x = 2^5$

$\therefore 2^{6x} = 2^5$

Pela propriedade P1 das funções exponenciais, temos:

$$2^{6x} = 2^5 \Rightarrow 6x = 5$$

$$\therefore x = \frac{5}{6}$$

Logo, o conjunto solução da equação é: $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$.

9 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $7^x = 5^x$.

Resolução

Dividindo por 5^x ambos os membros da equação, temos:

$$\frac{7^x}{5^x} = \frac{5^x}{5^x} \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x = 1$$

O número 1 pode ser representado por $\left(\frac{7}{5}\right)^0$.

Assim: $\left(\frac{7}{5}\right)^x = \left(\frac{7}{5}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, o conjunto solução da equação é: $S = \{0\}$.

10 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $3^{x+2} + 3^{x-1} = 84$.

Resolução

$3^{x+2} + 3^{x-1} = 84 \Rightarrow 3^x \cdot 3^2 + 3^x : 3^1 = 84$

ou seja: $9 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} = 84$

Fazendo a mudança de variável $3^x = k$, temos:

$9k + \frac{k}{3} = 84 \Rightarrow 27k + k = 252$

$\therefore 28k = 252$

$\therefore k = 9$

Retornando à variável original x, substituímos k por 3^x e obtemos: $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$

$\therefore x = 2$

Logo, $S = \{2\}$.

11 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $9^x - 3^x = 6$.

Resolução

Como $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$, a equação proposta é equivalente a $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$.

Fazendo a mudança de variável $3^x = k$, temos:

$k^2 - k - 6 = 0$

Resolvemos essa equação do 2º grau na incógnita k:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$

$$k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow k = 3 \text{ ou } k = -2$$

Retornando à variável original x, temos:

$3^x = 3$ ou $3^x = -2$

- Para $3^x = 3$, temos $x = 1$.
- Para $3^x = -2$, não existe x, pois toda potência de base positiva é um número positivo.

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{1\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

31 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações.

a) $64^x = 256$

b) $25^{x+2} = 125^{x+5}$

c) $\left(\frac{8}{125}\right)^{2x-1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2x}$

d) $5^{2x-1} = 1$

e) $7^x = 8^x$

f) $\sqrt[3]{25^x} = \sqrt{5}$

32 Nas proximidades da superfície terrestre, a pressão atmosférica P, em atmosfera (atm), é dada em função da altitude h, em quilômetro, aproximadamente por $P(h) = (0{,}9)^h$.

Se, no topo de uma montanha, a pressão é 0,729 atm, conclui-se que a altitude desse topo é:

a) 6 km
b) 5,2 km
c) 5 km
d) 4 km
e) 3 km

33 Determine o conjunto dos valores reais de x que satisfazem cada uma das equações.

a) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$
b) $3^{x+1} - 3^{x+2} = -54$

34 Considerando o universo $\mathbb{R}$, obtenha o conjunto solução das equações:

a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
b) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$
c) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$
d) $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x = 1$

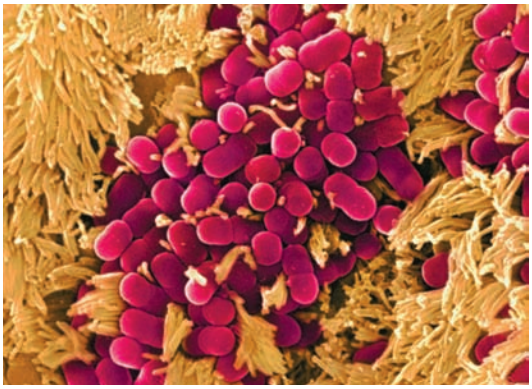
35 (FGV) Uma instituição financeira oferece um tipo de aplicação tal que, após t meses, o montante M, relativo ao capital C aplicado, é dado por $M = C \cdot 2^{0{,}04t}$, em que $C > 0$.

O menor tempo possível para quadruplicar uma certa quantia investida nesse tipo de aplicação é de:

a) 5 meses
b) 2 anos e 6 meses
c) 4 anos e 2 meses
d) 6 anos e 4 meses
e) 8 anos e 5 meses

36 (UFMG) A população de uma colônia da bactéria *E. coli* dobra a cada 20 minutos.
Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1.000 bactérias por mililitro.
No final do experimento, obteve-se um total de $4{,}096 \cdot 10^6$ bactérias por mililitro.
Assim, o tempo do experimento foi de:

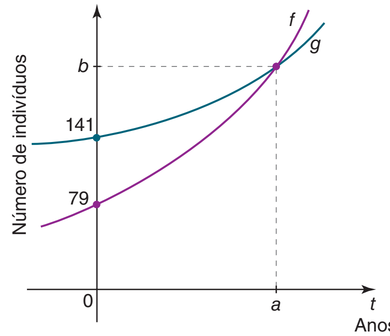
a) 3 horas e 40 minutos
b) 3 horas
c) 3 horas e 20 minutos
d) 4 horas



A *E. coli*, responsável pela maioria das infecções alimentares, é uma das bactérias presentes no intestino.

37 Suponha que as populações de dois vilarejos, *A* e *B*, variam de acordo com as funções $f(t) = 2^{t+2} + 75$ e $g(t) = 2^{t+1} + 139$, em que *t* é o tempo, em ano, e as expressões $f(t)$ e $g(t)$ representam, respectivamente, o número de indivíduos desses vilarejos.

a) Considerando o instante atual como instante zero, os gráficos de $f(t)$ e $g(t)$ são formados por pontos das curvas indicadas, a seguir, por *f* e *g*, respectivamente (essas curvas não são os próprios gráficos das funções, porque $f(t)$ e $g(t)$ só podem assumir valores naturais). Determine *a* e *b* na figura, coordenadas do ponto comum a *f* e *g*.



b) Daqui a quantos anos os dois vilarejos terão o mesmo número de indivíduos?
c) Daqui a sete anos, qual será o número de indivíduos do vilarejo *A*?
d) Calcule a taxa média de variação de cada uma das funções *f* e *g*, quando *t* varia de dois a quatro anos.

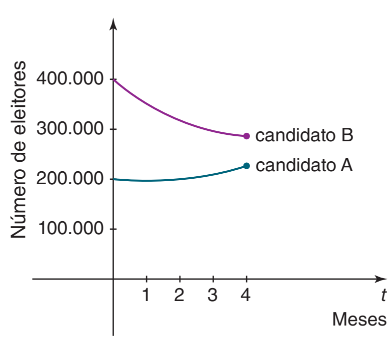
38 O consumo de água de uma cidade cresce 0,2% ao ano. Sabendo que atualmente o consumo anual é estimado em 4,5 bilhões de litros, daqui a quanto tempo o consumo será de 4,57245 bilhões de litros, supondo que, nesse tempo, essa taxa de crescimento continue constante?
Considere a tabela abaixo, em que cada número da segunda coluna é o valor da respectiva potência representada na mesma linha.

$(1{,}002)^2$	1,0040
$(1{,}002)^3$	1,0060
$(1{,}002)^4$	1,0080
$(1{,}002)^5$	1,0100
$(1{,}002)^6$	1,0121
$(1{,}002)^7$	1,0141
$(1{,}002)^8$	1,0161
$(1{,}002)^9$	1,0181
$(1{,}002)^{10}$	1,0202

Resolva os exercícios complementares 28 a 32, 52 e 53.

Inequação exponencial

Um partido político, avaliando as possibilidades de seu candidato A vencer as eleições, realizou uma pesquisa e concluiu que o número de eleitores do candidato A e de seu adversário B variam em função do tempo, em mês, a partir de um mesmo instante, de acordo com os gráficos representados ao lado.



Por meio de uma análise, percebeu-se que os gráficos do número de eleitores dos candidatos A e B podiam ser aproximados, respectivamente, pelos gráficos das funções $A(t) = 2 \cdot 10^5 \cdot (1{,}6)^{\frac{t}{12}}$ e $B(t) = 4 \cdot 10^5 \cdot (0{,}4)^{\frac{t}{12}}$, em que *t* representa o tempo, em mês.

Notamos que, se a tendência descrita nos gráficos se mantiver, o candidato A vai ultrapassar o candidato B em número de votos.

Para determinar por quanto tempo o candidato A estará em desvantagem em relação ao candidato B, basta resolver a inequação:

$$2 \cdot 10^5 \cdot (1{,}6)^{\frac{t}{12}} < 4 \cdot 10^5 \cdot (0{,}4)^{\frac{t}{12}}$$

Esse tipo de inequação, por apresentar a variável no expoente de potências de base positiva e diferente de 1, é chamada de **inequação exponencial**. Os métodos de resolução desse tipo de inequação, que estudaremos a seguir, permitem concluir que $t < 6$, isto é, o candidato A estará em desvantagem em relação ao candidato B durante seis meses.

Generalizando, definimos:

> **Inequação exponencial** é toda inequação que apresenta a variável no expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1.

Exemplos

a) $2^x \geqslant 8$ **b)** $5^x + 5^{x-2} \leqslant 26$ **c)** $27^{x+2} > 9^{x+5}$ **d)** $(0{,}5)^{4x+3} \leqslant (0{,}25)^{x+5}$

Resolução de uma inequação exponencial

A resolução de uma inequação exponencial baseia-se nas propriedades P2 e P3 das funções exponenciais, que enunciamos novamente a seguir.

> **P2.** $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1, \forall a$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$
> **P3.** $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1, \forall a$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $27^{x+2} > 9^{x+5}$.

Resolução

$27^{x+2} > 9^{x+5} \Rightarrow (3^3)^{x+2} > (3^2)^{x+5}$

$\therefore 3^{3x+6} > 3^{2x+10}$

Como a base (3) das potências é maior que 1, pela propriedade P2, sabemos que o "sentido" da desigualdade (>) se mantém para os expoentes, isto é:

$3^{3x+6} > 3^{2x+10} \Rightarrow 3x + 6 > 2x + 10$

$\therefore x > 4$

Logo, o conjunto solução da inequação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

13 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(0{,}5)^{4x+3} \leqslant (0{,}25)^{x+5}$.

Resolução

$(0{,}5)^{4x+3} \leqslant (0{,}25)^{x+5} \Rightarrow (0{,}5)^{4x+3} \leqslant [(0{,}5)^2]^{x+5}$

$\therefore (0{,}5)^{4x+3} \leqslant (0{,}5)^{2x+10}$

Como a base (0,5) das potências é um número entre 0 e 1, pela propriedade P3, sabemos que o "sentido" da desigualdade (⩽) é invertido para os expoentes, isto é:

$(0{,}5)^{4x+3} \leqslant (0{,}5)^{2x+10} \Rightarrow 4x + 3 \geqslant 2x + 10$

$\therefore 2x \geqslant 7 \Rightarrow x \geqslant \frac{7}{2}$

Logo, o conjunto solução da inequação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{7}{2}\right\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

39 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $32^{2x-1} < 4^{2x+1}$

b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+3} \geqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{x+4}$

c) $5^x > 1$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} \leqslant 1$

e) $2^x < -1$

f) $7^x > 0$

g) $3^x > 7^x$

40 Considerando o conjunto universo $\mathbb{R}$, determine o conjunto solução das inequações:

a) $5^x + 5^{x-2} \leqslant 26$

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-1} \geqslant 11$

c) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

41 Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado à taxa de juro composto de 10% ao ano.
a) Escreva uma equação que expresse o montante acumulado em função do tempo t, em ano.
b) Durante quanto tempo o montante acumulado será inferior a R$ 1.331,00?

42 Uma substância perde 60% de sua massa a cada mês. Considerando que, nesse momento, a massa dessa substância seja de 1.000 g:
a) determine uma equação que expresse a massa m dessa substância, em grama, em função do tempo t, em mês;
b) para que valores de t, da função do item **a**, a massa m da substância será menor que 64 g?

Resolva os exercícios complementares 33 a 35 e 54 a 56.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 (Fuvest-SP) O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é:
a) 37
b) 36
c) 35
d) 34
e) 33

2 (UFMT) Sobre o número natural $n = 2^{40} - 1$, considere as seguintes alternativas:
I. n é um múltiplo de 31.
II. n é um múltiplo de 5.
III. n é um número primo.
IV. n é um número par.
Estão corretas as afirmativas:
a) III e IV.
b) II e III.
c) II e IV.
d) I e III.
e) I e II.

3 Seja a um número real com representação decimal finita e $a = k \cdot 10^m$. Quais as condições sobre os números k e m para que a representação $k \cdot 10^m$ seja a notação científica do número a?

4 Represente em notação científica os seguintes números:
a) 3.000.000.000
b) 15.000.000
c) 250.000.000
d) 10.000
e) 0,0000005
f) 0,0000000025
g) 0,0000032
h) 0,438

5 Dados os números $M = 2{,}45 \times 10^{18}$ e $N = 4{,}7 \times 10^{16}$, pode-se afirmar que $M + N$ é igual a:
a) $4{,}76 \times 10^{17}$
b) $2{,}497 \times 10^{18}$
c) $2{,}38 \times 10^{16}$
d) $4{,}96 \times 10^{18}$
e) $5{,}02 \times 10^{18}$

6 Efetue:
a) $5\sqrt{24} + 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$
b) $10\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}$

7 Efetue:
a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$
b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}$
c) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4}$
d) $\sqrt[25]{3^{18}} \cdot \sqrt[25]{3^7}$
e) $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$
f) $2\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4}$

8 Qual deve ser o expoente x para que o resultado da expressão $\sqrt[7]{3^5} \cdot \sqrt[7]{3^x}$ seja igual a 3?

9 Sendo n um número natural não nulo, qual deve ser o expoente x para que o resultado da expressão $\sqrt[n]{3^p} \cdot \sqrt[n]{3^x}$ seja igual a 3?

10 O produto da soma pela diferença de dois números, a e b, é dado por: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Aplicando esse produto notável, efetue:
a) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$
b) $(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)$
c) $(2\sqrt{7} + \sqrt{3})(2\sqrt{7} - \sqrt{3})$

11 Racionalize o denominador das frações:
a) $\dfrac{1}{3\sqrt[6]{2}}$
b) $\dfrac{2}{3\sqrt{a}}$, sendo a um número racional positivo.
c) $\dfrac{a}{b\sqrt[5]{c^2}}$, sendo b e c números racionais positivos.

12 Obtenha uma fração com denominador racional equivalente a:
a) $\dfrac{6}{2\sqrt{5} - \sqrt{7}}$
b) $\dfrac{20}{5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$
c) $\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

13 Represente as potências sob a forma de radical:
a) $5^{\frac{4}{3}}$
b) $9^{0{,}3}$
c) $8^{1{,}2}$

14 Represente os radicais na forma de potência:
a) $\sqrt{7}$
b) $\sqrt[5]{x^{10}}$ (com $x \geqslant 0$)
c) $\sqrt[6]{a^3}$ (com $a \geqslant 0$)

15 Calcule o valor da expressão: $E = 16^{0{,}75} + 8^{\frac{1}{3}} - 25^{-0{,}5}$

16 (Unimar-SP) Simplificando a expressão:
$\left\{[(n + 2)^4]^{\frac{1}{2}} - 4(n + 1)\right\}^{\frac{1}{2}}$, com $n \geqslant 0$, obtém-se:
a) 1
b) $n + 1$
c) n^2
d) $n - 1$
e) n

17 (UFMT) Calcule o valor da expressão:
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} : \dfrac{1}{4} \times \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{32}\right)^0$

18 Determine o valor de: $(0{,}09)^{0{,}5} + (0{,}0016)^{0{,}25}$

19 Dado que $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 5$, calcule $a + a^{-1}$.

20 Usando uma calculadora científica, obtenha um valor aproximado do expoente ao qual se deve elevar o número 10 para se obter o resultado 2.
(*Sugestão*: Encontre esse número por tentativa.)

21 Com uma calculadora científica, sem usar as teclas que apresentam símbolo de radical, obtenha uma aproximação com quatro casas decimais para cada um dos radicais a seguir:
a) $\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[4]{7}$ **c)** $\sqrt[5]{9}$

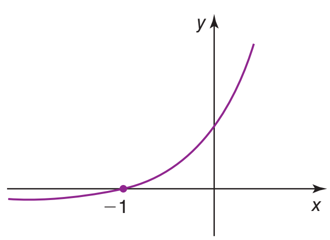
22 As potências $5^{\sqrt{2}}$ e $2^{2\sqrt{2}}$ têm valores aproximados 9,7 e 7,1, respectivamente. Com esses dados, calcule um valor aproximado para $20^{\sqrt{2}}$.

23 Usando uma calculadora científica, obtenha uma aproximação para cada uma das potências:
a) 2^{π} **b)** $5^{\sqrt{2}}$ **c)** $2^{\sqrt[3]{5}}$

24 Se $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} = x$, então $x^{\sqrt{2}}$ é igual a:
a) $\sqrt{3}$ **c)** 3 **e)** $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{3}$ **d)** 2

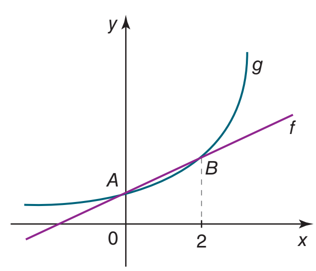
25 (Uece) Sobre a função real dada por $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, é possível afirmar, corretamente, que para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}$:
a) $f(p + q) = f(p) + f(q)$
b) $f(p + q) = f(p) \cdot f(q)$
c) $f(p + q) = f(p \cdot q)$
d) $f(p + q) = p \cdot f(q) + q \cdot f(p)$

26 O gráfico a seguir representa a função $f(x) = 2^{x - k} - 1$.



O número k é:
a) inteiro par
b) inteiro ímpar
c) racional não inteiro e maior que 1
d) racional não inteiro e menor que 1
e) irracional

27 (Fatec-SP) Na figura abaixo, os pontos A e B são as intersecções dos gráficos das funções f e g.

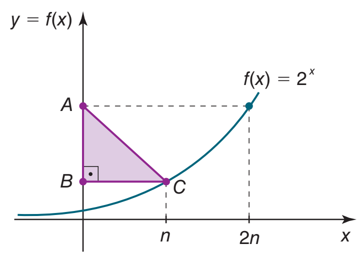


Se $g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$ e f é uma função afim, então $f(10)$ é igual a
a) 3 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 7 **e)** 9

28 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:
a) $121^{2x} = 11^{x + 3}$
b) $3^x + 3^{x + 2} + 3^{x - 1} = \dfrac{31}{3}$
c) $5^{x + 1} + 25^{x + 2} = 26$
d) $5 \cdot 2^{x + 1} - 8 \cdot 4^{x - 1} = 8$

29 Considerando o universo $\mathbb{R}$, obtenha o conjunto solução das equações:
a) $16^x - 4^x - 2 = 0$
b) $81^x - 9^x - 6 = 0$
c) $2^{x + 3} = (2^x + 2)^2$
d) $4^x - \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot 2^x + 2\sqrt{2} = 0$

30 (UFSCar-SP) Se a área do triângulo retângulo ABC, indicado na figura, é igual a $3n$, conclui-se que $f(n)$ é igual a:
a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) 3
d) $3\sqrt{2}$
e) 4



31 (UEMS) Sejam as funções reais $f(x) = 3^{x + 1} - 25$ e $g(x) = 18 \cdot 3^{-x}$. Pode-se afirmar que f e g se interceptam no ponto de coordenadas:
a) $(-1, 54)$
b) $(0, 0)$
c) $(1, 6)$
d) $(2, 2)$
e) $(3, 56)$

32 (Uece) Sejam p e q raízes da equação
$3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x}} + 3 = 0$. Então o valor de $16(p + q)$ é:
a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

33 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:
a) $(0{,}2)^{2x + 1} > (0{,}04)^{3x + 6}$
b) $81^x \leqslant 243^{x + 2}$
c) $\left(\sqrt{2}\right)^{2x + 1} < \left(\sqrt{2}\right)^{4x + 2}$
d) $\left(\sqrt{0{,}5}\right)^{2x + 1} \leqslant \left(\sqrt{0{,}5}\right)^{x + 4}$

34 Considerando o conjunto universo $\mathbb{R}$, determine o conjunto solução das inequações:
a) $2^{x + 1} - 3 \cdot 2^x < 2^{x - 2} - 5$
b) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$
c) $2 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 1 \leqslant 0$

35 Determine os números inteiros que satisfazem a inequação:
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3x - 4} \leqslant 2^{x + 1} \leqslant 16^{x + 3}$

Exercícios contextualizados

36 Para realizar uma pesagem utilizando uma balança de dois pratos, coloca-se em um dos pratos o objeto que se deseja pesar e no outro, uma ou mais peças, chamadas pesos, de modo que os pratos atinjam o equilíbrio (fiquem no mesmo plano horizontal). Assim, a massa do objeto será igual à soma das massas dos pesos, conhecendo-se a massa de cada um.

Podemos também colocar o objeto e um peso em um dos pratos e pesos no outro prato até obter o equilíbrio; assim, a massa do objeto será a diferença entre a soma das massas dos pesos colocados no outro prato e a massa do peso colocado junto com o objeto.
Demonstra-se que, para pesar um objeto cuja massa, em certa unidade u, é um valor inteiro n, são necessários e suficientes pesos de massas $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^k$, na unidade u, tal que 3^k é a maior potência inteira de 3, menor que n.
Usando pesos cujas massas, em grama, sejam valores inteiros, a menor quantidade possível desses pesos que permite realizar todas as pesagens de resultados inteiros em grama, desde 1 g a 1.000 g, é:
a) 8 **b)** 7 **c)** 6 **d)** 5 **e)** 4

37 A massa do Sol é estimada em $2.000.000 \cdot 10^{24}$ kg. Represente essa massa em notação científica.

38 A maior bactéria conhecida mede cerca de 0,000045 m. Expresse essa medida em notação científica.

39 Estima-se que o número de moléculas que compõem 1 cm³ de ar atmosférico seja algo em torno de 27.000.000.000.000.000.000.
a) Represente esse número em notação científica.
b) Expresse em notação científica o número de moléculas que compõem 1 dm³ de ar atmosférico.

40 Sabendo que 1 mm³ de sangue tem cerca de 5.000.000 de glóbulos vermelhos:
a) represente em notação científica o número de glóbulos vermelhos de 1 mm³ de sangue.
b) represente em notação científica o número de glóbulos vermelhos de 1 mL de sangue.

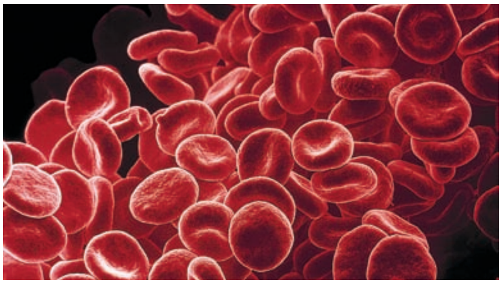
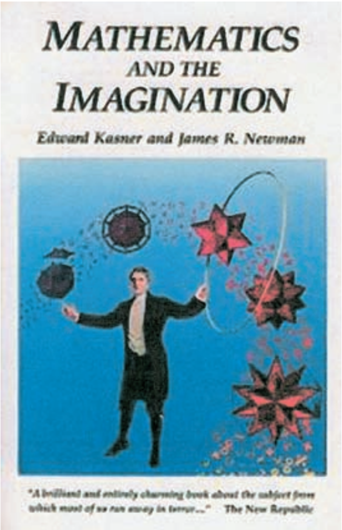


Imagem ampliada de glóbulos vermelhos humanos.

41 Nas primeiras décadas do século XX, Edward Kasner (1878-1955), doutor da Columbia University (EUA), pensou em estabelecer um número n de modo que qualquer quantidade no universo pudesse ser representada por um número menor que n. Esse número, que Kasner estimou em 10^{100}, foi batizado de ***googol*** por um sobrinho dele de 9 anos de idade.



Em 1938, o matemático Edward Kasner publicou suas ideias sobre o *googol* no livro *Mathematics and the imagination*.

Represente em notação científica:
a) metade de 1 *googol*.
b) 75% de 1 *googol*.
c) O triplo da milésima parte de um *googol*.
d) O quádruplo do inverso de 1 *googol*.

42 (Enem)

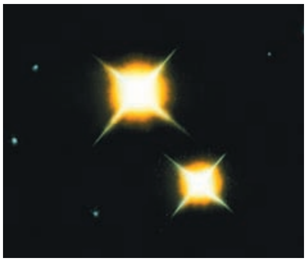
Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani

O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total 1.200.000 quilômetros quadrados, dos quais 840.000 quilômetros estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.
Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

Disponível em: <http://noticias. terra.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da Sabesp, a capacidade do aquífero Guarani é:
a) $1,5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.
b) $1,5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.
c) $1,5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.
d) $1,5 \times 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.
e) $1,5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

43 A estrela Alfa da constelação do Centauro C, ou *Proxima Centaurii*, está à distância de $4{,}057 \times 10^{13}$ km do nosso planeta. O ***ano-luz*** é uma unidade astronômica de distância definida como a distância percorrida pela luz no vácuo durante um ano. Sabendo que a velocidade da luz é $3 \cdot 10^8$ m/s, determine a distância, em ano-luz, da Terra à estrela Alfa do Centauro C. Expresse essa distância em notação científica.



A Alfa do Centauro C é a menor das três estrelas que formam a constelação do Centauro, que é vista da Terra como se estivesse próxima ao Cruzeiro do Sul.

44 Uma planta aquática cobre, atualmente, uma área de 580 m^2 de um lago. Se a área coberta pela planta cresce à taxa de 5% ao dia, qual será a área coberta do lago daqui a dez dias? (Dado: $1{,}05^{10} \approx 1{,}629$).

45 (UFG-GO) Um pai combinou que pagaria a mesada de seu filho no dia 10 de cada mês, começando no dia 10 de janeiro de determinado ano, com R$ 100,00, sendo que o valor seria corrigido mensalmente em 1%. Em 10 de janeiro do ano seguinte, o valor pago pelo pai, em real, foi:

a) $(1{,}10)^{11} \cdot 100$
b) $(1{,}01)^{11} \cdot 100$
c) $(1{,}10)^{12} \cdot 100$
d) $(1{,}01)^{12} \cdot 100$
e) $(1{,}01)^{13} \cdot 100$

46 (PUC-RS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, a expressão que fornece esse capital C, ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem, é:

a) $C = Q_0(1{,}1)^t$
b) $C = C(1{,}1)^t$
c) $C = Q_0(0{,}1)^t$
d) $C = C(0{,}1)^t$
e) $C = Q_0(10)^t$

47 (UEL-PR) Um automóvel zero quilômetro é comprado por R$ 32.000,00. Ao final de cada ano, seu valor diminui 10% em função da depreciação do bem. O valor aproximado do automóvel, após seis anos, é:

a) R$ 15.006,00.
b) R$ 19.006,00.
c) R$ 16.006,00.
d) R$ 12.800,00.
e) R$ 17.006,00.

48 Do início do ano 1701 ao final de 1900, a população mundial cresceu exponencialmente, passando de 600 milhões para 910 milhões. Calcule a taxa anual constante de crescimento. (Use uma calculadora científica.)

49 (Vunesp) Duas funções, $f(t)$ e $g(t)$, fornecem o número de ratos e o número de habitantes de uma certa cidade em função do tempo t (em anos), respectivamente, num período de 0 a 5 anos. Suponha que no tempo inicial ($t = 0$) existiam nessa cidade 100.000 ratos e 70.000 habitantes, que o número de ratos dobra a cada ano e que a população humana cresce 2.000 habitantes por ano.

Encontre:

a) as expressões matemáticas das funções $f(t)$ e $g(t)$;
b) o número de ratos que haverá por habitante, após cinco anos.

50 (Enem) Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0{,}03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0{,}3} = 1{,}35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre:

a) 490 e 510 milhões.
b) 550 e 620 milhões.
c) 780 e 800 milhões.
d) 810 e 860 milhões.
e) 870 e 910 milhões.

(*Nota*: Embora não seja necessário para a resolução desse problema, informamos que a letra e representa um número irracional que vale, aproximadamente, 2,718.)

51 Um biólogo constatou que, à temperatura de -1 °C, a população de uma cultura de fungos era estimada em 4.000 indivíduos e que, a cada grau Celsius de aumento na temperatura, morriam 75% dos indivíduos.

a) Indicando por $f(x)$ a população remanescente, em milhar de indivíduos, à temperatura de x grau Celsius, escreva a equação que relaciona $f(x)$ e x.
b) Esboce o gráfico da função exponencial que contém os pares ordenados $(x, f(x))$.

52 Em um experimento foram colocados, em um mesmo recipiente, dois tipos de bactérias, A e B, sendo que as do tipo A são predadoras das do tipo B. Fazendo a contagem dos indivíduos em vários estágios do experimento, observou-se que as quantidades de bactérias do tipo A e do tipo B, em centenas, podiam ser expressas em função do tempo, em horas, respectivamente, pelas funções $f(t) = 3^{t+1}$ e $g(t) = 9^{1-t}$, em que $t = 0$ representa o instante inicial do experimento.

a) Calcule o número de bactérias de cada um dos dois tipos no início do experimento.
b) Quantos minutos, após o início do experimento, o número de bactérias do tipo A se igualou ao do tipo B?

53 (UFPB) O valor de certo imóvel, em real, daqui a t anos é dado pela função $V(t) = 1.000(0,8)^t$. Daqui a dois anos, esse imóvel sofrerá, em relação ao valor atual, uma desvalorização de:

a) R$ 800,00.
b) R$ 640,00.
c) R$ 512,00.
d) R$ 360,00.
e) R$ 200,00.

54 (UEL-PR) A relação a seguir descreve o crescimento de uma população de microrganismos, sendo P o número de microrganismos, t dias após o instante zero $P = 64.000 \cdot (1 - 2^{-0,1t})$. O valor de P é superior a 63.000 se, e somente se, t satisfazer à condição:

a) $2 < t < 16$
b) $t > 16$
c) $t < 30$
d) $t > 60$
e) $32 < t < 64$

55 A partir do instante zero ($t = 0$), um biólogo começou a estudar o crescimento de duas populações, A e B, de cupins. Após o estudo, o cientista concluiu que, em t meses, os números $f(t)$ e $g(t)$ de indivíduos de A e B, respectivamente, eram dados por $f(t) = 300 \cdot 2^{t-1} + 900$ e $g(t) = 70 \cdot 2^{t+2} - 140$.

a) Qual era o número de indivíduos de cada população no início do estudo?

b) Durante quanto tempo o número de indivíduos da população A permaneceu maior ou igual ao número de indivíduos da população B?

56 (UFPR) Em estudos realizados numa área de proteção ambiental, biólogos constataram que o número N de indivíduos de certa espécie primata está crescendo em função do tempo t (dado em anos), segundo a expressão

$$N(t) = \frac{600}{5 + 3 \times 2^{-0,1t}}$$

Supondo que o instante $t = 0$ corresponde ao início desse estudo e que essa expressão continue sendo válida com o passar dos anos, considere as seguintes afirmativas:

1. O número de primatas dessa espécie presentes na reserva no início do estudo era de 75 indivíduos.
2. Vinte anos após o início desse estudo, o número de primatas dessa espécie será superior a 110 indivíduos.
3. A população dessa espécie nunca ultrapassará 120 indivíduos.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

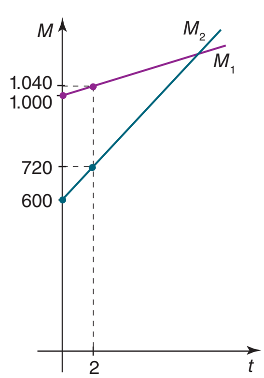
EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

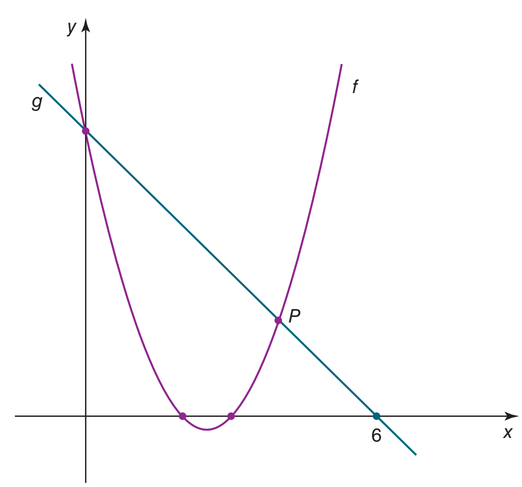
1 Qual das alternativas abaixo apresenta uma expressão cujo resultado é um número racional?

a) $2\sqrt{3}$
b) $3 + \sqrt{2}$
c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$
d) $(\sqrt[3]{2})^2$
e) $5^{\frac{1}{3}}$

2 Os gráficos abaixo representam funções afins que descrevem os montantes M_1 e M_2, em real, em função do tempo, em mês, de duas aplicações financeiras que se iniciaram no mesmo instante. Depois de quantos meses do início das aplicações os montantes acumulados nas duas aplicações tornaram-se iguais?



3 Os gráficos abaixo representam a função quadrática $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e uma função afim g. Determine as coordenadas do ponto P.



4 Qual dos dois números é maior: $2\sqrt{5} + 3$ ou $3\sqrt{5} + 0,76$?

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Determine os valores reais de m para que a equação $4^x + (m - 3) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$, na incógnita x, não admita raiz real.

Resolução

$4^x + (m-3) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + (m-3) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$

Substituindo 2^x por y:

$y^2 + (m-3)y + \frac{1}{4} = 0$

$\Delta = (m-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}$

$\Delta = m^2 - 6m + 8$

Para não ter raiz real, o Δ deve ser negativo:

$m^2 - 6m + 8 < 0$

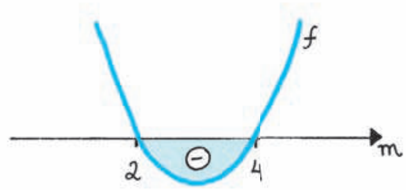
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$

$\Delta = 36 - 32$

$\Delta = 4$

$m = \frac{+6 \pm \sqrt{4}}{2} \begin{cases} m' = 4 \\ m'' = 2 \end{cases}$

Gráfico da função $f(m) = m^2 - 6m + 8$:



A equação $4^x + (m-3) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ não tem raiz real se $2 < m < 4$.

Incompleto!

Comentário

A resolução desse aluno está incompleta. De fato, se a equação polinomial $y^2 + (m - 3) \cdot y + \frac{1}{4} = 0$ não tiver raiz real, então a equação exponencial $4^x + (m - 3) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ também não terá raiz real. Porém, há mais um caso a ser estudado, que foi esquecido pelo aluno: se as raízes da equação polinomial forem negativas, a equação não terá raiz real, pois a igualdade $2^x = y$ só é possível para $y > 0$.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo 9

Função logarítmica

As necessidades de cada época estimulam a criação de teorias e de ferramentas para solucionar problemas. Assim aconteceu com os logaritmos, que foram criados quando os cálculos numéricos passaram a ser um obstáculo na evolução das ciências.
Neste capítulo, estudaremos a ideia de logaritmo, suas propriedades e aplicações práticas e teóricas.

9.1 Logaritmo

Atualmente, a aplicação dos logaritmos ultrapassou a fronteira dos cálculos, passando a ser um dos conceitos matemáticos mais utilizados nas ciências.

9.2 Número de Neper e logaritmo neperiano

Para a construção dos logaritmos, John Neper utilizou um número irracional conhecido atualmente como número de Neper.

9.3 Função logarítmica

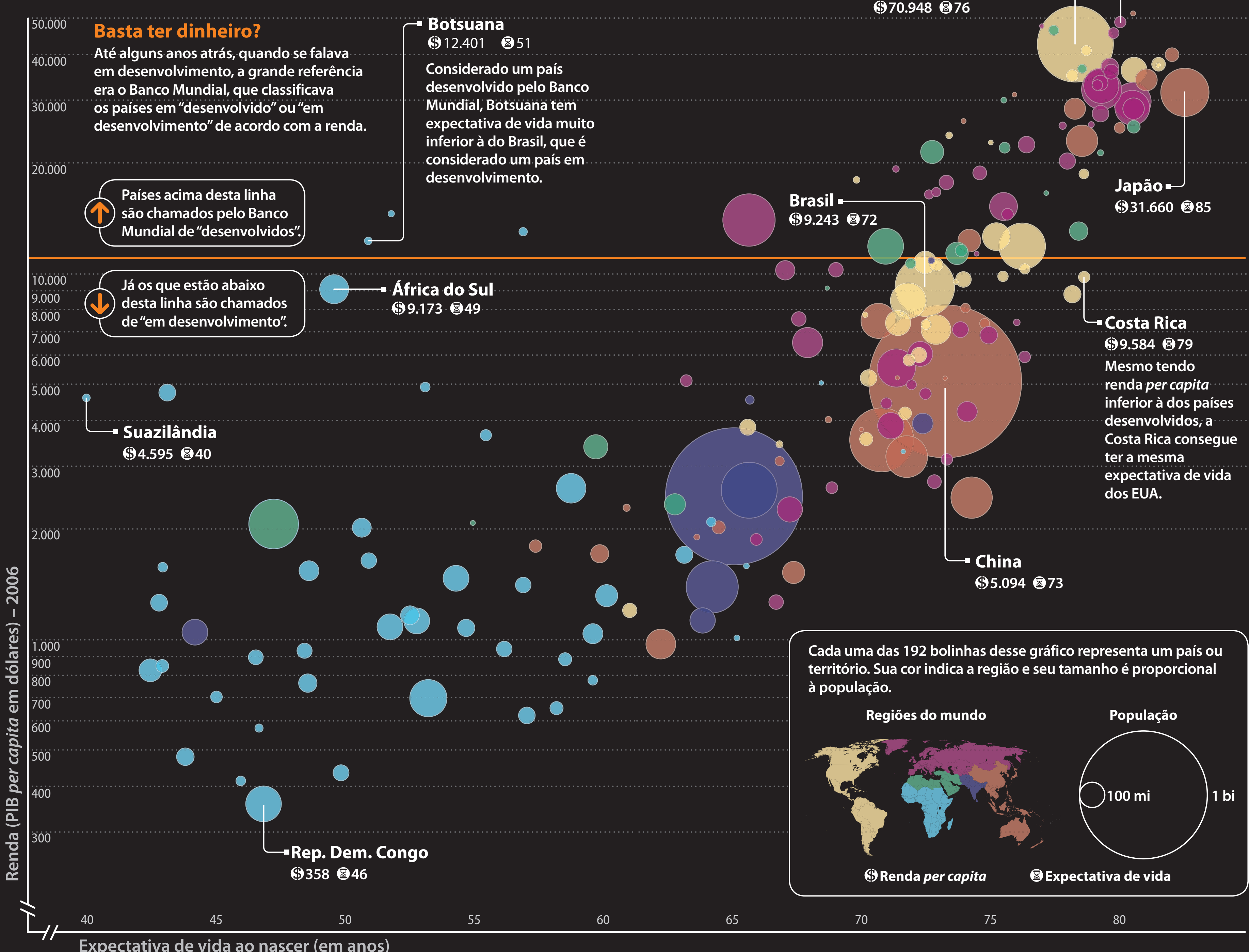
A função logarítmica é uma ferramenta indispensável na modelagem de fenômenos que envolvem crescimento e decrescimento exponencial de grandezas.

9.4 Equação e inequação logarítmica

As equações e inequações logarítmicas são necessárias à determinação de valores desconhecidos em situações que envolvem crescimento e decrescimento exponencial de grandezas.

Uma medida para o bem-estar

Trabalho, ou seja, suporte financeiro, saúde e educação são os ingredientes básicos para o desenvolvimento humano.

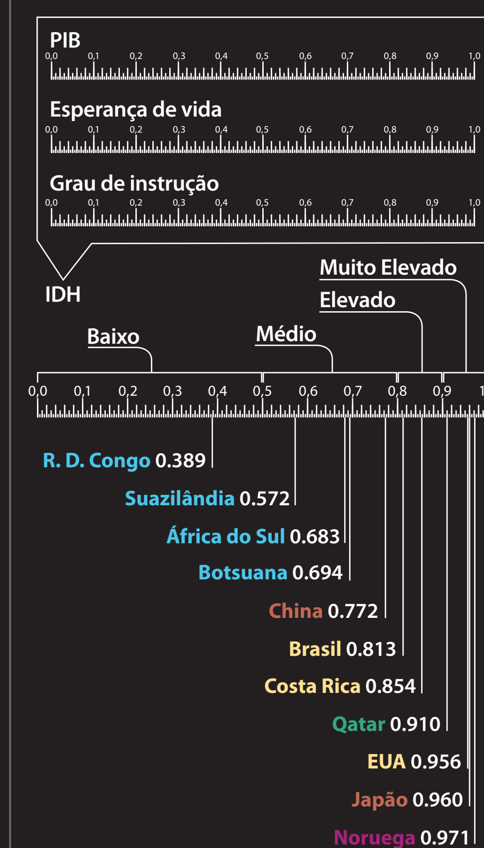


A gente não quer só dinheiro

Para combater a ideia de que desenvolvimento é só uma questão de dinheiro, o Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD) criou o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH).

IDH - 2007

O IDH é a média de três índices: esperança de vida, grau de instrução e Produto Interno Bruto (PIB) – calculados em uma escala de zero a um.



Para pensar

1. O que representa o eixo horizontal? E o vertical?
2. Os eixos apresentam escalas diferentes. Observe que o eixo horizontal varia de 5 em 5 anos. Como varia o eixo vertical?
3. Em qual continente está localizada a maioria dos países com menor expectativa de vida?

Logaritmo

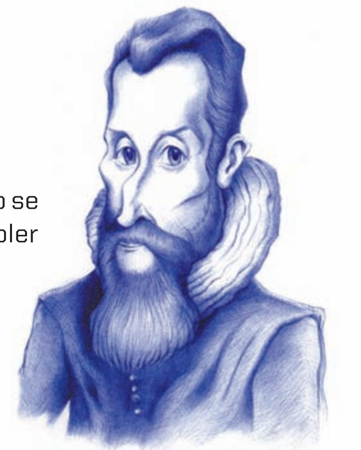
Objetivos

- **Calcular** logaritmos a partir da definição.
- **Calcular** logaritmos aplicando propriedades.
- **Aplicar** o conceito de logaritmo na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- logaritmo
- logaritmo decimal

Os fundamentos da teoria dos logaritmos



John Napier, criador dos logaritmos.

Como estaria hoje o conhecimento astronômico se o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) tivesse à sua disposição uma dessas modernas calculadoras eletrônicas, tão comuns no nosso dia a dia?

Essa questão provoca algumas reflexões interessantes, por exemplo: o tempo despendido por Kepler em cálculos desgastantes, como 3,25694 · 1,78090 ou 3,25694 : 1,78090, tão frequentes em estudos astronômicos, poderia ter sido empregado em pesquisas e, talvez, tivéssemos hoje uma *quarta lei de Kepler*.

Até o século XVII, porém, cálculos envolvendo multiplicações ou divisões eram bastante trabalhosos, não só na Astronomia mas em todas as ciências que tratassem de medidas. O escocês John Napier (1550-1617), também conhecido como Neper, preocupou-se seriamente em simplificar esses cálculos e, após vinte anos de pesquisas, publicou, em 1614, o resultado de seus estudos, apresentando a **teoria dos logaritmos**. O princípio básico dos logaritmos é: transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração, pois adicionar ou subtrair números é normalmente mais rápido que multiplicá-los ou dividi-los.

A ideia de Neper é relativamente simples: representam-se os números positivos como potências de um mesmo número. Por exemplo, cada coluna da tabela abaixo apresenta um número e a respectiva representação como potência de base 10. Assim, na primeira coluna, temos $1{,}78090 = 10^{0{,}25064}$.

Número	1,78090	1,82881	3,25694	5,80029
Potência de base 10	$10^{0{,}25064}$	$10^{0{,}26217}$	$10^{0{,}51281}$	$10^{0{,}76345}$

Com essa tabela, podem-se calcular:

1ª coluna da tabela

4ª coluna da tabela

a) $3{,}25694 \cdot 1{,}78090 = \underbrace{10^{0{,}51281}}_{\text{3ª coluna da tabela}} \cdot 10^{0{,}25064} = \underbrace{10^{0{,}51281 + 0{,}25064}}_{\text{conserva-se a base 10 e adicionam-se os expoentes}} = 10^{0{,}76345} = 5{,}80029$

Observe que o **produto** foi calculado pela **soma** dos expoentes das potências de dez.

b) $3{,}25694 : 1{,}78090 = 10^{0{,}51281} : 10^{0{,}25064} = 10^{0{,}51281 - 0{,}25064} = 10^{0{,}26217} = 1{,}82881$

Observe que o **quociente** foi calculado pela **diferença** dos expoentes das potências de dez.

Notas:

1. A base dez foi sugerida a Neper pelo matemático Henry Briggs (1561-1630), que publicou em 1617 a primeira tabela de logaritmos.
2. O vocábulo *logarithmus* foi criado por Neper pela junção das palavras gregas: *logos*, que significa "razão" ou "cálculo", e *arithmós*, que significa "número".

O conceito de logaritmo

Para desmistificar desde já a palavra **logaritmo**, saiba que esse nome foi criado por Neper para substituir a palavra "expoente", conforme explicamos a seguir.

Considere uma potência qualquer de base positiva e diferente de 1, por exemplo:

$$3^4 = 81$$

Ao **expoente** dessa potência damos o nome de **logaritmo**. Dizemos que 4 é o logaritmo de 81 na base 3. Em símbolos, escrevemos:

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

Exemplos

a) $2^4 = 16 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$ **b)** $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$ **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125} = 3$

Definimos:

> Sendo a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se **logaritmo** de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$.
>
> $$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Na sentença $\log_b a = x$:

- a é o **logaritmando**;
- b é a **base do logaritmo**;
- x é o **logaritmo de *a* na base *b***.

Exemplos

a) $\log_5 25$ é o expoente x da potência de base 5 tal que $5^x = 25$.

Então:

$$5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2$$
$$\therefore x = 2$$

Assim, $\log_5 25 = 2$.

b) $\log_2 \frac{1}{32}$ é o expoente x da potência de base 2 tal que $2^x = \frac{1}{32}$.

Então:

$$2^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-5}$$
$$\therefore x = -5$$

Assim, $\log_2 \frac{1}{32} = -5$.

c) $\log_3 1$ é o expoente x da potência de base 3 tal que $3^x = 1$.

Então:

$$3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0$$
$$\therefore x = 0$$

Assim, $\log_3 1 = 0$.

d) $\log_7 \sqrt[5]{7^2}$ é o expoente x da potência de base 7 tal que $7^x = \sqrt[5]{7^2}$.

Então:

$$7^x = \sqrt[5]{7^2} \Leftrightarrow 7^x = 7^{\frac{2}{5}}$$
$$\therefore x = \frac{2}{5}$$

Assim, $\log_7 \sqrt[5]{7^2} = \frac{2}{5}$.

Notas:

1. A existência e unicidade de $\log_b a$ é garantida pelas condições: $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Ou seja, se alguma dessas restrições não for obedecida, não estará garantida a existência ou a unicidade do logaritmo. Por exemplo, de acordo com a definição:
   - $\log_2 (-4)$ deveria ser um único número x tal que $2^x = -4$, o que é impossível, pois qualquer potência de base positiva é positiva.
   - $\log_1 2$ deveria ser um único número x tal que $1^x = 2$, o que é impossível, pois qualquer potência de base 1 é igual a 1.
   - $\log_1 1$ deveria ser um único número x tal que $1^x = 1$, porém existem infinitos valores de x que satisfazem essa igualdade.
2. É importante observar a estreita ligação entre o logaritmo e a função exponencial. Por exemplo, o cálculo de um logaritmo recai na resolução de uma equação exponencial. Mais adiante, no estudo da função logarítmica, vamos detalhar melhor essa relação.

Logaritmo decimal

Suponha que um pequeno dado seja solto sobre a superfície terrestre: o impacto da sua queda liberará energia e fará a superfície vibrar levemente. Se o dado for substituído por um tijolo, a energia liberada fará vibrar mais intensamente essa superfície. Imagine, agora, que um cubo maciço de granito com 2 km de aresta seja solto de uma altura de 280 km: a energia liberada será equivalente a 200 trilhões de quilowatt-hora (kWh). Essa foi a medida da energia liberada pelo terremoto ocorrido em São Francisco, Califórnia, em 1906. Mais violento ainda foi o terremoto que arrasou Lisboa em 1755, liberando energia equivalente a 350 trilhões de kWh.

Vista da cidade de São Francisco, no estado da Califórnia, após o terremoto de 1906.

A intensidade de um terremoto pode ser medida pela escala Richter, criada pelo sismólogo norte-americano Charles Francis Richter (1900-1985). Nessa escala, a intensidade I de um terremoto em função da energia E liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora, é dada por:

$$I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

em que $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e o **logaritmo é decimal**, isto é, tem **base 10**.

Chama-se **logaritmo decimal** aquele cuja base é 10.

Indica-se o logaritmo decimal de um número a simplesmente por $\log a$ (a base 10 fica subentendida).

Exemplo

$\log 100$ é o expoente x da potência de base 10 tal que $10^x = 100$.

Temos:

$10^x = 100 \Leftrightarrow 10^x = 10^2$

$\therefore x = 2$

Assim: $\log 100 = 2$

Propriedades dos logaritmos

Aplicando as propriedades estudadas na função exponencial, obtemos as seguintes propriedades dos logaritmos, para quaisquer números reais positivos a e b, com $b \neq 1$:

P1. $\log_b b = 1$

De fato, indicando $\log_b b$ por x, temos:

$\log_b b = x \Leftrightarrow b^x = b$

$\therefore x = 1$

Assim, $\log_b b = 1$.

P2. $\log_b 1 = 0$

De fato, indicando $\log_b 1$ por x, temos:

$\log_b 1 = x \Leftrightarrow b^x = 1$

$\therefore b^x = b^0 \Rightarrow x = 0$

Assim, $\log_b 1 = 0$.

P3. $\log_b a^y = y \cdot \log_b a$ ($\forall y$, com $y \in \mathbb{R}$)

De fato, indicando $\log_b a$ por x, temos:

$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Elevando ao expoente y ambos os membros da última igualdade, temos:

$(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{yx} = a^y$

E pela definição de logaritmo:

$b^{xy} = a^y \Leftrightarrow yx = \log_b a^y$

Como x representa o $\log_b a$, concluímos:

$y \cdot \log_b a = \log_b a^y$

P4. $\log_b b^x = x$ ($\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$)

De fato, pelas propriedades P3 e P1, temos:

$\log_b b^x = x \cdot \log_b b = x \cdot 1 = x$

Assim, $\log_b b^x = x$.

P5. $b^{\log_b a} = a$

De fato, indicando $\log_b a$ por x, temos:

$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Como x representa o $\log_b a$, concluímos:

$b^{\log_b a} = a$

9 Uma caixa-d'água com 5.000 L de capacidade tem, internamente, a forma de um cubo.
Adotando o valor log 5 = 0,69 e os valores da tabela ao lado, calcular a medida, em metro, de cada aresta do cubo.

x	10^x
0,20	1,58
0,21	1,62
0,22	1,66
0,23	1,70
0,24	1,74
0,25	1,78

Resolução

Como 1 L = 1 dm^3, então: 5.000 L = 5.000 dm^3 = 5 m^3
Assim, indicando por a a medida, em metro, da aresta do cubo, obtemos:

$$a^3 = 5 \Rightarrow 3 = \log_a 5$$

Pela propriedade da mudança de base (P8), transformamos o logaritmo para a base 10:

$$3 = \log_a 5 \Rightarrow 3 = \frac{\log 5}{\log a}$$

$$\therefore \log a = \frac{\log 5}{3} = \frac{0{,}69}{3} = 0{,}23 \Rightarrow a = 10^{0{,}23}$$

Observando a tabela, concluímos que a = 1,70.
Logo, cada aresta do cubo mede 1,70 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 Sabendo que $\log_6 11 = 1{,}34$ e $\log_6 2 = 0{,}37$, calcule:
a) $\log_6 22$
b) $\log_6 \frac{2}{11}$
c) $\log_6 5{,}5$
d) $\log_2 11$
e) $\log_{11} 2$
f) $\log_6 16$

13 Sabendo que log 5 = 0,69 e log 3 = 0,48, calcule log 6.

14 Determine x tal que $x = \log_7 25 \cdot \log_5 7$.

15 Dado que $5^a = 3$, tem-se que $\log_3 75$ é igual a:
a) $\frac{2 + a}{a}$
b) $\frac{a^2 - 1}{a}$
c) $\frac{a}{1 + a}$
d) $\frac{2a}{1 + a}$
e) $\frac{1 + 2a}{a}$

16 (Vunesp) A expectativa de vida, em ano em uma região, de uma pessoa que nasceu a partir de 1900 no ano x ($x \geqslant 1900$), é dada por $L(x) = 12(199 \log x - 651)$. Considerando log 2 = 0,3, uma pessoa dessa região que nasceu no ano 2000 tem expectativa de viver:
a) 48,7 anos
b) 54,6 anos
c) 64,5 anos
d) 68,4 anos
e) 72,3 anos

17 Estudos sobre a desertificação de uma região mostraram que a área desértica, que hoje é de 50 km^2, aumenta 2,4% ao ano. Em quanto tempo a área desse deserto dobrará? (Adote log 2 = 0,301.)

18 Uma cultura de microrganismos, que cresce 20% por hora, apresentava 100.000 indivíduos no início de um estudo. Adotando log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, calcule o tempo necessário, a partir do início desse estudo, para que a cultura atinja 300.000 indivíduos.

19 Ao perceber uma mancha de óleo no mar, o capitão de um navio petroleiro comunicou imediatamente à Capitania dos Portos que havia um vazamento em seu navio.

Algum tempo depois, os técnicos da Defesa Ambiental constataram que a mancha de óleo cobria 12 km^2 da superfície do mar e crescia 2% por hora; concluíram também que, no momento do comunicado à Capitania dos Portos, a área da mancha de óleo era 10 km^2. Supondo que a taxa de crescimento tenha sido constante até o momento da medição, quanto tempo decorreu desde o momento do comunicado à Capitania dos Portos até a conclusão da medição da área da mancha de óleo? (Use os valores da tabela abaixo.)

x	$\log x$
2	0,30
3	0,48
17	1,23

Resolva os exercícios complementares 8 a 18 e 61 a 70.

Número de Neper e logaritmo neperiano

Objetivos

- **Compreender** como se obtém o número de Neper.
- **Aplicar** o conceito de logaritmo neperiano na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- número de Neper
- logaritmo neperiano

O número de Neper (e)

No século XVII, o matemático suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) propôs o seguinte problema:

"Qual é a lei segundo a qual cresce um capital aplicado a juro composto quando o juro é acrescido ao capital instantaneamente?"

Bernoulli talvez não imaginasse a importância da lei geral a que chegaria. Conhecida atualmente como **lei do crescimento orgânico**, o resultado desse estudo é aplicado em diversas áreas além da Matemática, como Biologia, Física, Química, Economia e Geografia.

O problema de Bernoulli propõe que se calcule o juro composto, não ano a ano, ou mês a mês, ou dia a dia, mas instantaneamente a partir do momento da aplicação. Para concretizar essa ideia, vamos supor que R$ 1,00 seja aplicado a juro composto à taxa de $\frac{100\%}{n} = \frac{1}{n}$ a cada uma das n partes iguais em que se dividiu um período de tempo qualquer. Aplicando a fórmula do montante acumulado a juro composto, $M = C(1 + i)^t$, para $C = 1$, $i = \frac{1}{n}$ e $t = n$, obtemos o montante M acumulado ao fim das n partes: $M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Observe o valor dessa expressão para alguns valores de n:

$$n = 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$$

$$n = 3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}37037037$$

$$n = 4 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}44140625$$

$$\vdots$$

$$n = 10 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59374246$$

$$\vdots$$

$$n = 100 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704813829$$

$$\vdots$$

$$n = 1.000 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{1.000}\right)^{1.000} = 2{,}716923932$$

$$\vdots$$

$$n = 1.000.000 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000} = 2{,}718280469$$

$$\vdots$$

Demonstra-se que, para n tendendo ao infinito, os valores dessa expressão tenderão ao número irracional 2,718281828..., chamado **número de Neper**, e que indicaremos pela letra e:

$$e = 2{,}718281828...$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular os logaritmos.

a) $\log_{32} 64$ c) $\log \sqrt[3]{10.000}$ e) $\log_{0,1} 0,0001$

b) $\log_{25} \frac{1}{125}$ d) $\log_{\frac{7}{3}} \frac{9}{49}$

Resolução

a) $\log_{32} 64 = x \Leftrightarrow 32^x = 64$

Decompomos em fatores primos as bases 32 e 64:

$(2^5)^x = 2^6 \Rightarrow 2^{5x} = 2^6$

$\therefore 5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$

Assim: $\log_{32} 64 = \frac{6}{5}$

b) $\log_{25} \frac{1}{125} = x \Leftrightarrow 25^x = \frac{1}{125}$

$\therefore 5^{2x} = 5^{-3} \Rightarrow 2x = -3$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$

Assim: $\log_{25} \frac{1}{125} = -\frac{3}{2}$

c) $\log \sqrt[3]{10.000} = x \Leftrightarrow 10^x = \sqrt[3]{10.000}$

$\therefore 10^x = \sqrt[3]{10^4} \Rightarrow 10^x = 10^{\frac{4}{3}}$

$\therefore x = \frac{4}{3}$

Assim: $\log \sqrt[3]{10.000} = \frac{4}{3}$

d) $\log_{\frac{7}{3}} \frac{9}{49} = x \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^x = \frac{9}{49}$

$\therefore \left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$

$\therefore x = -2$

Assim: $\log_{\frac{7}{3}} \frac{9}{49} = -2$

e) $\log_{0,1} 0,0001 = x \Leftrightarrow 0,1^x = 0,0001$

$\therefore \left(\frac{1}{10}\right)^x = \frac{1}{10^4} \Rightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = \left(\frac{1}{10}\right)^4$

$\therefore x = 4$

Assim: $\log_{0,1} 0,0001 = 4$

2 Dado $\log_2 5 = 2,32$, calcular $\log_2 125$.

Resolução

$$\log_2 125 = \underbrace{\log_2 5^3 = 3 \cdot \log_2 5}_{\text{propriedade P3}} = 3 \cdot 2,32 = 6,96$$

(*Nota*: O valor 2,32 é um valor aproximado do $\log_2 5$. Com o intuito de simplificar os enunciados e as resoluções, em outras questões também adotaremos valores aproximados como se fossem valores exatos de logaritmos.)

3 Determinar o valor da expressão:

$E = 7^{\log_7 6} - \log_4 4 + \log_3 1$

Resolução

Pela propriedade P5: $7^{\log_7 6} = 6$

Por P1: $\log_4 4 = 1$

Por P2: $\log_3 1 = 0$

Assim:

$E = 6 - 1 + 0 = 5$

4 Determinar o valor da expressão: $E = 3^{5\log_3 2}$

Resolução

Por P3: $5\log_3 2 = \log_3 2^5 = \log_3 32$.

Portanto:

$$E = 3^{5\log_3 2} = \underbrace{3^{\log_3 32} = 32}_{\text{propriedade P5}}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Calcule os logaritmos.

a) $\log_2 256$ c) $\log_{\frac{5}{2}} \frac{125}{8}$ e) $\log 10.000$ g) $\log_{\frac{8}{27}} \frac{16}{81}$ i) $\log_{0,5} 0,125$

b) $\log_7 \frac{1}{49}$ d) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{16}{81}$ f) $\log_{256} 128$ h) $\log \sqrt[5]{100}$

2 Usando a tabela quando necessário, determine o valor da incógnita em cada um dos itens a seguir.

x	2^x	3^x	10^x
1	2	3	10
1,6	3,0314	5,7995	39,8107
2,3214	4,9981	12,8111	209,6042
8	256	6.561	100.000.000
10	1.024	59.049	10.000.000.000

a) $\log_2 k = 8$

b) $\log_3 m = 8$

c) $\log_2 y = 2,3214$

d) $\log_3 t = 2,3214$

e) $\log u = 2,3214$

f) $\log_2 2 = v$

g) $\log_3 3 = p$

h) $\log 10 = q$

i) $\log_3 59,049 = r$

j) $\log 39,8107 = s$

3 Calcule os logaritmos a seguir sabendo que $\log_3 2 = 0{,}63$.

a) $\log_3 8$

b) $\log_3 \frac{1}{16}$

c) $\log_3 \sqrt[3]{4}$

4 Determine o valor das incógnitas a, b e c em:

a) $\log_2 a = 2$

b) $\log_{25} 5^b = b + 1$

c) $c \cdot \log_9 3 = 2c + 1$

5 Calcule o valor de $\sqrt[5]{7}$ usando os valores apresentados na tabela:

x	$\log x$
7,00	0,85
1,48	0,17

6 (Mackenzie-SP) Se $x = \log_3 2$, então $9^{2x} + 81^{\frac{x}{2}}$ é igual a:

a) 12

b) 20

c) 18

d) 36

e) 48

7 Chama-se **cologaritmo** de a na base b, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$, o número $-\log_b a$, isto é, $\text{colog}_b\, a = -\log_b a$. Calcule os cologaritmos:

a) $\text{colog}_3\, 9$

b) $\text{colog}_{25}\, 125$

c) $\text{colog}_{16} \frac{1}{8}$

8 (Unisinos-RS) As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionadas pela fórmula $R_1 - R_2 = \log N$, em que N mede a razão entre as energias liberadas pelos dois terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Supondo que houve um terremoto correspondente a $R_1 = 8$ e outro correspondente a $R_2 = 5$, então N é igual a:

a) $\log \frac{8}{5}$

b) $\frac{8}{5}$

c) $\log_3 10$

d) 3

e) 10^3

9 (Unirio-RJ) Um médico, após estudar o crescimento médio das crianças de determinada cidade, com idades que variam de 1 a 12 anos, obteve a fórmula $h = \log\left(10^{0{,}7} \cdot \sqrt{i}\right)$, em que h é a altura, em metro, e i é a idade, em ano. Pela fórmula, uma criança de 10 anos dessa cidade terá a altura de:

a) 120 cm.

b) 123 cm.

c) 125 cm.

d) 128 cm.

e) 130 cm.

10 O tempo n, em ano, para que um capital de R$ 1.000,00, aplicado à taxa de juro composto de 10% ao ano, produza o montante de R$ 1.430,00, é:

a) $n = \log_{1{,}43} 1{,}1$

b) $n = \log_{1{,}1} 1{,}43$

c) $n = \log_{1{,}43} 1$

d) $n = \log_{1{,}1} 1{,}1$

e) $n = \log_{1{,}1} (1{,}43)^2$

11 Como vimos no capítulo anterior, todo número real não nulo pode ser representado na forma $k \cdot 10^m$, em que k é um número real, com $1 \leq |k| < 10$, e m é um número inteiro. Essa forma de representação é conhecida como notação científica. Por exemplo:

$$32.920.000 = 3{,}292 \cdot 10^7$$
$$0{,}00458 = 4{,}58 \cdot 10^{-3}$$

Represente em notação científica o número 8^{105}, sabendo que $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3{,}2 = 0{,}5$.

Resolva os exercícios complementares 1 a 7 e 53 a 60.

Outras propriedades dos logaritmos

Sendo a, b e c números reais positivos, com $b \neq 1$, temos:

P6. $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$

De fato, sendo $(\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a)$ e $(\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c)$, podemos afirmar que $b^x \cdot b^y = a \cdot c$, o que equivale a $b^{x+y} = ac$.

Pela definição de logaritmo, temos:

$$b^{x+y} = ac \Leftrightarrow x + y = \log_b ac$$

Portanto: $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$

Exemplos

a) $\log_3 (9 \cdot 3) = \log_3 9 + \log_3 3$

b) $\log_2 (32 \cdot 4) = \log_2 32 + \log_2 4$

$$\boxed{\textbf{P7.}\ \log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c}$$

De fato, sendo ($\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$) e ($\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$), podemos afirmar que $\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c}$, o que é equivalente a $b^{x-y} = \frac{a}{c}$.

Pela definição de logaritmo, temos:

$$b^{x-y} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow x - y = \log_b \frac{a}{c}$$

Portanto: $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$

Exemplos

a) $\log_5 \frac{25}{5} = \log_5 25 - \log_5 5$

b) $\log_2 \frac{64}{4} = \log_2 64 - \log_2 4$

$$\boxed{\textbf{P8.}\ \text{Mudança de base: } \log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}\ (\forall k, \text{ com } k \in \mathbb{R}_+^* \text{ e } k \neq 1)}$$

De fato, sendo ($\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$), ($\log_k a = y \Leftrightarrow k^y = a$) e ($\log_k b = z \Leftrightarrow k^z = b$), podemos afirmar que: $b^x = a = k^y \Rightarrow b^x = k^y$

Como $b = k^z$, temos:

$$b^x = k^y \Rightarrow (k^z)^x = k^y$$
$$\therefore k^{zx} = k^y \Rightarrow zx = y$$
$$\therefore x = \frac{y}{z}$$

Portanto: $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$

Exemplos

a) $\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27}$

b) $\log_{32} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 32}$

Nota:

O principal objetivo de Neper, criador dos logaritmos, foi atingido com as propriedades P6 e P7, pois, por meio delas, as multiplicações e divisões são transformadas em adições e subtrações, respectivamente. Com isso, a partir da publicação dos logaritmos, em 1614, os cientistas tiveram seu trabalho com cálculos significativamente atenuado. O surgimento das calculadoras eletrônicas eliminou definitivamente as dificuldades de cálculos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Dados $\log_5 7 = 1{,}21$ e $\log_5 2 = 0{,}43$, calcular:

a) $\log_5 14$ **b)** $\log_5 3{,}5$ **c)** $\log_2 7$ **d)** $\log_5 28$ **e)** $\log_5 0{,}7$ **f)** $\log_{14} \sqrt{7}$

Resolução

a) $\log_5 14 = \log_5 (7 \cdot 2) \overset{\text{propriedade P6}}{=} \underbrace{\log_5 7 + \log_5 2}_{} = 1{,}21 + 0{,}43 = 1{,}64$

b) $\log_5 3{,}5 = \log_5 \frac{7}{2} \overset{\text{propriedade P7}}{=} \underbrace{\log_5 7 - \log_5 2}_{} = 1{,}21 - 0{,}43 = 0{,}78$

c) $\log_2 7 = \dfrac{\log_5 7}{\log_5 2} = \dfrac{1{,}21}{0{,}43} \approx 2{,}81$

propriedade P8

d) $\log_5 28 = \log_5 (2^2 \cdot 7) = \log_5 2^2 + \log_5 7 = 2\log_5 2 + \log_5 7 = 2 \cdot 0{,}43 + 1{,}21 = 2{,}07$

e) $\log_5 0{,}7 = \log_5 \dfrac{7}{10} = \log_5 7 - \log_5 10 = \log_5 7 - \log_5 (2 \cdot 5) = \log_5 7 - (\log_5 2 + \log_5 5) =$

$= 1{,}21 - (0{,}43 + 1) = -0{,}22$

f) $\log_{14} \sqrt{7} = \dfrac{\log_5 \sqrt{7}}{\log_5 14} = \dfrac{\log_5 7^{\frac{1}{2}}}{\log_5 (2 \cdot 7)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \log_5 7}{\log_5 2 + \log_5 7} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 1{,}21}{0{,}43 + 1{,}21} = \dfrac{0{,}605}{1{,}64} \approx 0{,}37$

propriedade P8 propriedades P3 e P6

6 Sabendo que $\log_{15} 9 = a$, calcular $\log_{15} 5$ em função de a.

Resolução

$\log_{15} 9 = a \Leftrightarrow \log_{15} 3^2 = a$

Pela propriedade P3, podemos escrever:

$2 \cdot \log_{15} 3 = a$, ou seja, $\log_{15} 3 = \dfrac{a}{2}$

Então:

$$\log_{15} 5 = \log_{15} \frac{15}{3} = \overbrace{\log_{15} 15 - \log_{15} 3}^{\text{propriedade P7}} = 1 - \frac{a}{2} = \frac{2 - a}{2}$$

7 (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $\text{pH} = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30 para log 2 e de 0,48 para log 3. Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

a) 7,26 b) 7,32 c) 7,58 d) 7,74

Resolução

$\text{pH} = -\log (5{,}4 \cdot 10^{-8}) = -\log (54 \cdot 10^{-9}) = -\log (3^3 \cdot 2 \cdot 10^{-9})$

$\therefore \text{pH} = -(\log 3^3 + \log 2 + \log 10^{-9}) = -(3 \log 3 + \log 2 - 9 \log 10)$

$\therefore \text{pH} = -(3 \cdot 0{,}48 + 0{,}30 - 9 \cdot 1) = 7{,}26$

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

8 Um empresário que pratica o corte de árvores fora das áreas legalizadas foi punido pelo Ibama com uma multa de R$ 3.000,00 com vencimento no último dia do ano. Caso o pagamento não fosse efetivado até 31 de dezembro, o valor seria reajustado à taxa de juro composto de 0,05% ao dia. Sabendo que o empresário pagou R$ 3.019,50 por essa multa, em que dia e mês foi efetuado o pagamento? (Adotar: log 10.065 = 4,0028; log 10.005 = 4,0002.)

Resolução

Indicando por C, M, i e t o valor nominal da multa, o valor pago pela multa, a taxa ao dia e o tempo, em dia, respectivamente, esquematizamos:

$C = 3.000$ $\quad i = 0{,}05\% = 0{,}0005$

$M = 3.019{,}50$ $\quad t = ?$

Aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$, obtemos:

$3.019{,}50 = 3.000(1 + 0{,}0005)^t \Rightarrow (1{,}0005)^t = 1{,}0065$

$\therefore t = \log_{1{,}0005} 1{,}0065$

Pela propriedade da mudança de base (P8), transformamos o logaritmo para a base 10:

$$t = \log_{1{,}0005} 1{,}0065 = \frac{\log 1{,}0065}{\log 1{,}0005} = \frac{\log \frac{10.065}{10.000}}{\log \frac{10.005}{10.000}} =$$

$$= \frac{\log 10.065 - \log 10^4}{\log 10.005 - \log 10^4}$$

$$\therefore t = \frac{4{,}0028 - 4}{4{,}0002 - 4} = \frac{0{,}0028}{0{,}0002} = 14$$

Portanto, a multa foi paga com 14 dias de atraso, no dia 14 de janeiro.

O número neperiano está presente em todas as situações em que se deseja calcular a variação instantânea de uma grandeza que cresce ou decresce através do produto por uma taxa constante. É importante observar que, quarenta anos antes do nascimento de Jacques Bernoulli, John Neper já aplicava uma aproximação do número e^{-1} na teoria dos logaritmos; por esse motivo, credita-se a Neper a descoberta do número e.

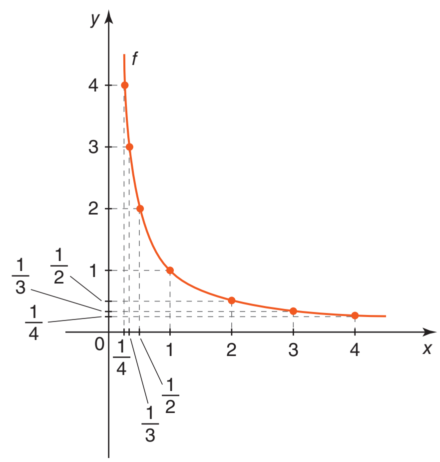
Nota:

Dizer que uma grandeza "cresce ou decresce através do produto por uma taxa constante" equivale a dizer que, a cada unidade de tempo previamente estabelecida (mês, semana, dia etc.), o valor da grandeza é multiplicado por uma taxa que não varia, resultando no valor da grandeza na próxima unidade de tempo. Por exemplo, se a temperatura em uma região é 10 °C e aumenta 1% por hora durante certo período, multiplicando-se a temperatura, em cada instante desse período, pela taxa constante 1,01, obtém-se a temperatura na região uma hora depois.

Logaritmo neperiano

Considere a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x): = \frac{1}{x}$. Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos de f e, a partir deles, esboçar o gráfico:

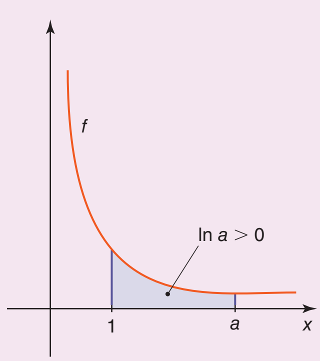
x	y
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

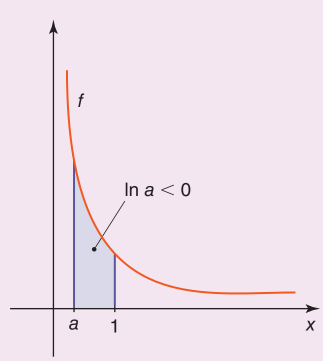


Vamos considerar o número real positivo a e o número real S cujo módulo é a área da figura limitada pelo eixo das abscissas e o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $1 \leqslant x \leqslant a$ se $a \geqslant 1$ ou $a \leqslant x \leqslant 1$ se $a < 1$.

Convencionando que S é positivo para $a > 1$ e negativo para $a < 1$, definimos o **logaritmo natural** do número a (ou **logaritmo neperiano** do número a), que indicamos por **ln a**, como igual a S:

$$\ln a = S$$





Note que se $a = 1$, a área $|S|$ é nula, portanto, $\ln 1 = 0$.

Demonstra-se que o número S, citado na definição, é igual ao $\log_e a$, isto é:

$$\boxed{\ln a = \log_e a}$$

Como $\ln a = \log_e a$, então todas as propriedades dos logaritmos valem para os logaritmos naturais.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Técnica para o cálculo aproximado de um logaritmo neperiano.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10 Sabendo que $\ln 5 = 1{,}61$, calcular $\ln 125$.

Resolução

$\ln 125 = \log_e 125 = \log_e 5^3 = 3\log_e 5 =$
$= 3 \cdot 1{,}61 = 4{,}83$

11 (Ulbra-RS) Segundo a lei de resfriamento de Newton, a taxa de resfriamento de um corpo é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre esse objeto e o meio ambiente. Assim, a temperatura de um objeto preaquecido, após colocado por t minutos em um ambiente a 20 °C, é dada por $T(t) = 20 + ke^{ct}$. Considerando que o objeto foi aquecido à temperatura de 200 °C e em 10 minutos estava a 110 °C, as constantes k e c devem ser:

a) $k = 180$ e $c = \frac{-\ln 2}{10}$

b) $k = 180$ e $c = 90 \ln 2$

c) $k = 10$ e $c = \frac{-\ln 2}{10}$

d) $k = 10$ e $c = \frac{\ln 9}{10}$

e) $k = 180$ e $c = \frac{\ln 2}{10}$

Resolução

Atribuindo os valores 0 e 10 para t, temos:

$$\begin{cases} T(0) = 200 \\ T(10) = 110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 + ke^{0 \cdot c} = 200 \quad \text{(I)} \\ 20 - ke^{10c} = 110 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$20 + k \cdot 1 = 200 \Rightarrow k = 180$

Substituindo k por 180 em (II), concluímos:

$$20 + 180 \cdot e^{10c} = 110 \Rightarrow e^{10c} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 10c = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow 10c = \ln 2^{-1}$$

$$\therefore 10c = -1 \cdot \ln 2 \Rightarrow c = \frac{-\ln 2}{10}$$

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20 Calcule:

a) $\ln e$ **b)** $\ln e^4$ **c)** $\ln \frac{1}{e}$

21 Adotando as aproximações $\ln 2 = 0{,}6$ e $\ln 3 = 1{,}1$, calcule:

a) $\ln 6$

b) $\ln 1{,}5$

c) $\ln \sqrt{12}$

d) $\log_6 e$

22 (UPF-RS) A desintegração nuclear é regida pela equação exponencial $N = N_0e^{-\lambda t}$, em que λ é uma constante, N_0 é a quantidade inicial e N é a quantidade após um tempo t. A equação que fornece o tempo, em qualquer instante, é:

a) $t = -\lambda(N - N_0) \ln e$

b) $t = \left(\frac{N}{N_0e}\right)^{-\lambda}$

c) $t = \sqrt{\frac{N}{N_0e}}$

d) $t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{N}{N_0}$

23 (UFPE) Se a água de um reservatório evapora-se à taxa de 15% ao mês, em quantos meses ficará reduzida à terça parte?

$\left(\text{Dados: } \ln \frac{1}{3} = -1{,}10; \ln (0{,}85) = -0{,}16\right)$

Resolva os exercícios complementares 19 a 21 e 71 a 75.

Seção 9.3

Função logarítmica

Objetivos

- **Construir** o gráfico de uma função logarítmica e classificá-la como crescente ou decrescente.
- **Determinar** o domínio de uma função logarítmica.
- **Aplicar** o conceito de função logarítmica na resolução de problemas.
- **Obter** a inversa de uma função logarítmica.

Termos e conceitos

- função logarítmica
- inversa da função logarítmica

Vimos, neste capítulo e no anterior, que vários problemas do cotidiano ou do universo científico relacionam grandezas que crescem ou decrescem através do produto por taxas constantes: juros em aplicações financeiras, crescimento populacional, nível de radioatividade de um elemento atômico, depreciação de um bem etc. O estudo desses problemas exige o conhecimento das funções exponencial e logarítmica, com as quais economistas fazem projeções, geógrafos estudam populações, biólogos avaliam o crescimento de culturas bacteriológicas ou químicos estimam o tempo de duração de substâncias radioativas.

Para exemplificar, vamos considerar uma amostra de 1 kg de plutônio, elemento químico que perde 0,4% de sua massa a cada século.

Aplicando a fórmula do montante, com taxa negativa, obtemos a função que descreve o tempo t, em século, em função da massa remanescente M dessa amostra, em quilograma:

$$M = 1(1 - 0{,}004)^t \Rightarrow M = (0{,}996)^t$$

$$\therefore t = \log_{0{,}996} M$$

Neste capítulo, estudaremos funções desse tipo, chamadas de **funções logarítmicas**.

> Chama-se **função logarítmica** toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, onde b é um número real, positivo e diferente de 1.

Exemplos

- $f(x) = \log_2 x$
- $g(x) = \log_5 x$
- $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

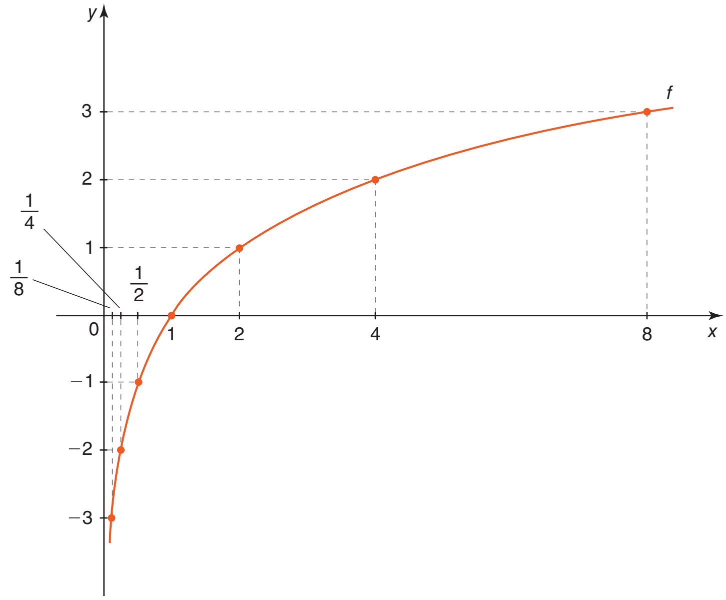
Gráfico da função logarítmica

Vamos esboçar o gráfico de funções logarítmicas a partir de alguns pontos obtidos por meio de uma tabela, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplos

a) $f(x) = \log_2 x$ é uma função logarítmica. Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f:

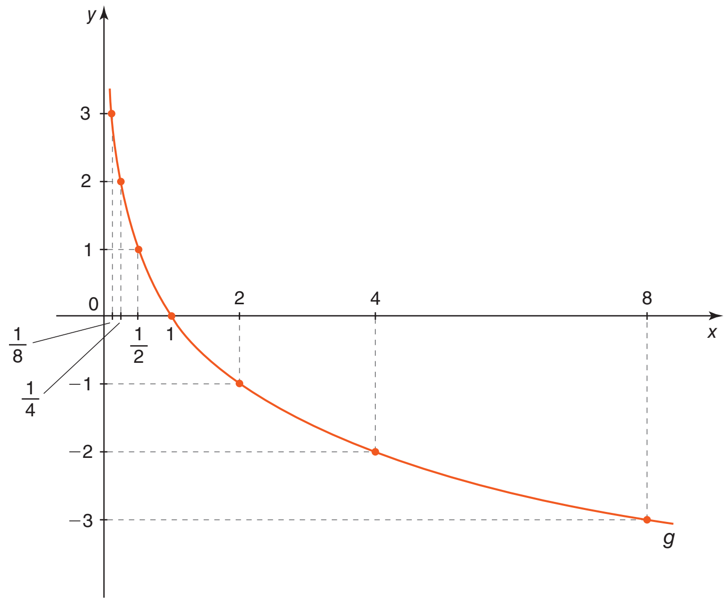
x	$\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Observe que: $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente em todo o seu domínio.

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função logarítmica. Esboçando o gráfico, temos:

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

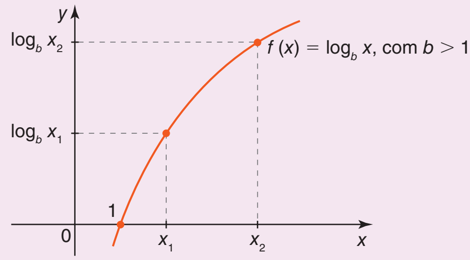


Observe que: $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(g) = \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função decrescente em todo o seu domínio.

Propriedades da função logarítmica

P1. $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$, para quaisquer números reais positivos x, y e b, com $b \neq 1$

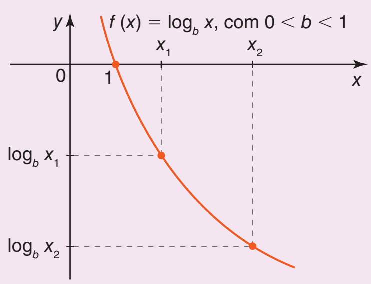
P2. A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $b > 1$.



Tem-se, então:

$\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com $b > 1$.

P3. A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$.



Tem-se, então:

$\log_b x_2 < \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com $0 < b < 1$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 Determinar o domínio da função:
$f(x) = \log_4 (2x - 12)$

Resolução

A condição de existência de qualquer $\log_b a$ é $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.
Como na função f a base (4) do logaritmo é positiva e diferente de 1, basta impor a condição sobre o logaritmando, isto é:

$$2x - 12 > 0 \Rightarrow x > 6$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$.

13 Determinar o domínio da função:
$f(x) = \log_{x-5} (x^2 - 4x)$

Resolução

Condições de existência: $\begin{cases} x^2 - 4x > 0 & \text{(I)} \\ x - 5 > 0 & \text{(II)} \\ x - 5 \neq 1 & \text{(III)} \end{cases}$

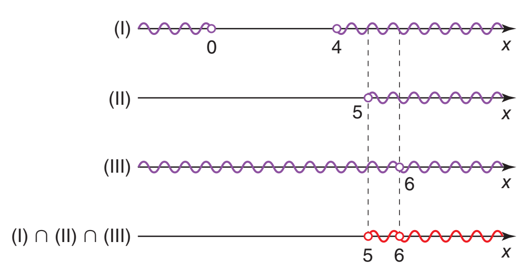
Resolvendo as inequações:

(I) $x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x < 0$ e $x > 4$

(II) $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

(III) $x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 6$

O domínio de f é a intersecção dos conjuntos solução de (I), (II) e (III):



Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$

24 Construa o gráfico de cada função.

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

25 Classifique como crescente ou decrescente cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_9 x$

b) $g(x) = \log_{0,4} x$

c) $h(x) = \log_{\frac{\pi}{3}} x$

d) $t(x) = \log_{\frac{\pi}{4}} x$

26 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) as afirmações seguintes, sendo $\{a, b\} \subset \mathbb{R}^*_+$.

a) $\log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

b) $\log_3 a > \log_3 b \Leftrightarrow a > b$

c) $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b$

d) $\log_{0,7} a < \log_{0,7} b \Leftrightarrow a > b$

e) $\log_{\sqrt{1,5}} a \geqslant \log_{\sqrt{1,5}} b \Leftrightarrow a \geqslant b$

27 Descreva as condições de existência da função $f(x) = \log_{x-5} (x^2 - 4x)$. Em seguida, determine o domínio dessa função.

28 Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \log_7 (5x - 6)$

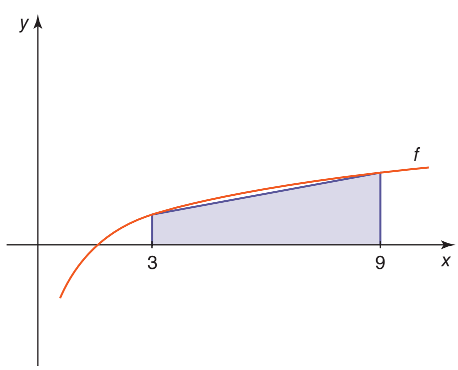
b) $g(x) = \log (x^2 - 5x + 6)$

c) $u(x) = \log_{2x-2} (4 - x^2)$

d) $t(x) = \log_5 \dfrac{2x - 6}{x - 2}$

e) $h(x) = \log_3 (9 - x^2) + \log_6 (3 - x)$

29 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = \log_3 x$. Calcule a área do trapézio sombreado.



30 A construção de uma represa é a causa da inundação de uma região. A área alagada, que hoje é de 1 alqueire, dobra a cada mês.

a) Na tabela a seguir, determine os valores a, b, c e d, que correspondem à área alagada ao final de cada mês, a partir do momento atual, indicado na tabela pelo tempo zero.

Tempo (mês)	Área (alqueire)
0	1
1	a
2	b
3	c
4	d
⋮	⋮

b) Indicando por x a área alagada daqui a y meses, escreva uma lei que expresse y em função de x.

c) O gráfico da função do item **b** é parte do gráfico de uma função logarítmica f. Construa o gráfico da função f e explique por que o gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f.

31 A superfície de um lago, que tem 1 km^2 de área, foi totalmente invadida por uma planta aquática nociva a peixes e répteis.
Misturou-se à água um inibidor de crescimento, que reduziu a área ocupada pela planta em 50% ao mês.

a) Na tabela abaixo, determine os valores a, b, c e d, que correspondem à área ocupada pela planta ao final de cada mês, a partir do momento atual, registrado pelo tempo zero.

Tempo (mês)	Área (km^2)
0	1
1	a
2	b
3	c
4	d
⋮	⋮

b) Indicando por x a área ocupada pela planta daqui a y meses, elabore uma lei que expresse y em função de x.

c) O gráfico da função do item **b** é parte do gráfico de uma função logarítmica f. Construa o gráfico da função f e explique por que o gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f.

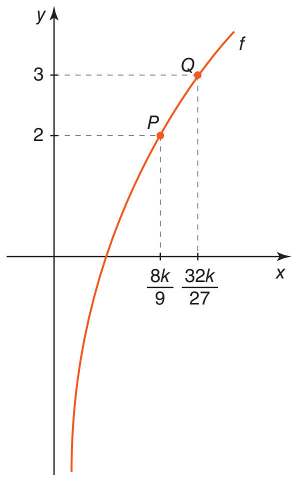
32 Em certo país, cuja unidade monetária é o denário (D$), a inflação é de 100% ao ano, ou seja, os preços médios dos produtos aumentam 100% ao ano.

a) Calcule os preços médios (em D$) de um produto correspondente aos anos: 0, 1, 2, 3, y, sabendo que o preço médio atual (tempo zero) é D$ 1,00. Em seguida, construa uma tabela para registrar o tempo (em ano) e o preço médio (em D$) obtidos.

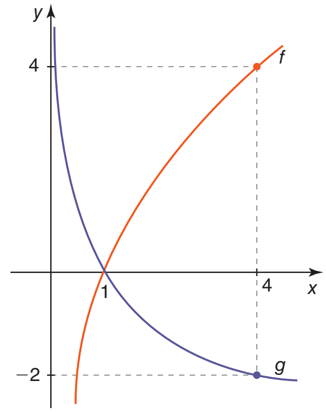
b) Indicando por x o preço, em denário, desse produto daqui a y anos, obtenha uma equação que expresse y em função de x.

c) Construa o gráfico da função do item **b**.

33 O gráfico abaixo mostra os pontos P e Q do gráfico da função $f(x) = \log_b x$, em que b é um número real positivo e diferente de 1. Determine os números reais b e k.



34 Os gráficos f e g, abaixo, representam, respectivamente, as funções $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$, em que a e b são números reais positivos e diferentes de 1.



Classifique como crescente ou decrescente cada uma das funções:

a) $h(x) = \log_{ab} x$ **b)** $p(x) = \log_{(2a - b)} x$

Resolva os exercícios complementares 22 a 29 e 76 a 79.

A inversa da função logarítmica

Sendo b um número real qualquer, positivo e diferente de 1, existe, para todo número real y, um **único** número real positivo x tal que $y = \log_b x$. Isso significa que a função $y = \log_b x$ é bijetora e, portanto, admite inversa. A inversa da função $y = \log_b x$ é determinada pelo seguinte modo:

- substitui-se x por y e y por x, obtendo: $x = \log_b y$
- isola-se a variável y, obtendo: $x = \log_b y \Leftrightarrow y = b^x$

Concluímos que:

A inversa da função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é a função exponencial $f^{-1}(x) = b^x$.

Exemplo

A figura 1, abaixo, apresenta os gráficos das funções inversas $f(x) = \log_2 x$ e $f^{-1}(x) = 2^x$; e a figura 2, os gráficos das funções inversas $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Note, em cada figura, a simetria dos gráficos em relação à reta r, bissetriz dos quadrantes ímpares.

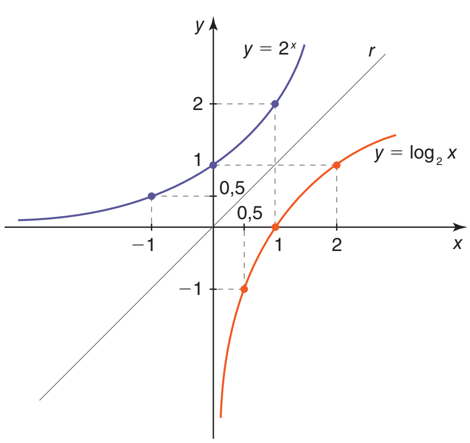


Figura 1

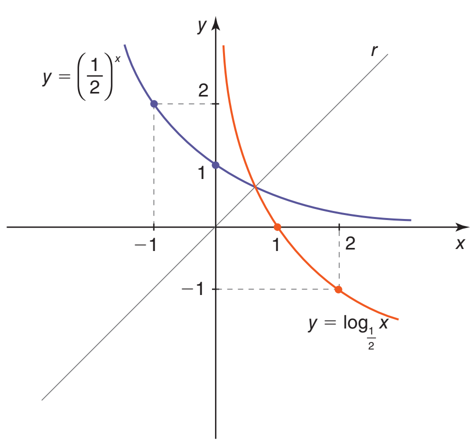


Figura 2

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Obter a inversa da função: $y = \log_2 (2x + 1)$

Resolução

- Substitui-se x por y e y por x:
  $x = \log_2 (2y + 1)$
- Isola-se a variável y:
  $x = \log_2 (2y + 1) \Rightarrow 2^x = 2y + 1$, ou seja, $y = \dfrac{2^x - 1}{2}$

Logo, a inversa de $y = \log_2 (2x + 1)$ é: $y = \dfrac{2^x - 1}{2}$

15 Determinar a inversa da função: $y = 2 + 5^{x+1}$

Resolução

- Substitui-se x por y e y por x:
  $x = 2 + 5^{y+1}$
- Isola-se a variável y:
  $x - 2 = 5^{y+1} \Rightarrow y + 1 = \log_5 (x - 2)$, ou seja,
  $y = -1 + \log_5 (x - 2)$

Logo, a inversa de $y = 2 + 5^{x+1}$ é:
$y = -1 + \log_5 (x - 2)$

16 Obter a inversa da função: $y = -1 + \ln(x - 1)$

Resolução

Como $\ln(x - 1) = \log_e (x - 1)$, podemos escrever:
$y = -1 + \log_e (x - 1)$

- Substitui-se x por y e y por x:
  $x = -1 + \log_e (y - 1)$
- Isola-se a variável y:
  $x + 1 = \log_e (y - 1) \Rightarrow e^{x+1} = y - 1$, ou seja,
  $y = 1 + e^{x+1}$

Logo, a inversa de $y = -1 + \ln(x - 1)$ é: $y = 1 + e^{x+1}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

35 (Ufac) A inversa da função $f(x) = \log_3 2 + \log_3 (x + 6)$ é:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3^x - 2}{6}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{12^{x-3}}{6}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{3^x}{2} - 6$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{6^x - 3}{2}$

e) $f^{-1}(x) = 3^x - 12$

36 Sendo e o número de Neper e A um subconjunto de $\mathbb{R}$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow A$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$, é bijetora. A inversa de f é:

a) $y = \ln (x - 1)$

b) $y = \ln (2x - 2)$

c) $y = 2 \ln (x + 1)$

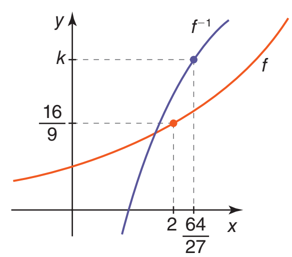
d) $y = \ln \sqrt{x - 1}$

e) $y = \ln \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$

37 Determine o conjunto imagem da inversa da função $f(x) = \log_3 (3x - 9) + \log_7 (18 - 2x)$.

38 O gráfico ao lado representa a função $f(x) = a \cdot 2^x + b$, em que a e b são constantes reais. Determine a lei de associação da função f^{-1}.

39 Os gráficos a seguir representam as funções f e f^{-1}, em que $f(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$. Determine os números reais b e k.



40 Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado em regime de juro composto à taxa de 20% ao ano.

a) Escreva a lei que expressa o montante $f(x)$ em função do tempo x de aplicação.

b) Indique a lei que expressa o tempo $g(x)$ em função do montante x acumulado pela aplicação.

c) Qual é a inversa da função $f(x)$ obtida no item **a**?

41 No final de junho de 2009, estudos do IBGE estimavam a população brasileira em 191,5 milhões de habitantes e em 1,1% a taxa de crescimento dessa população até o ano 2025.

a) Dado que $(1{,}011)^{16} \approx 1{,}19$, obtenha um valor aproximado da população brasileira ao final de junho de 2025.

b) No período considerado, adote como instante 0 (zero) o momento em que a população era 191,5 milhões de habitantes e obtenha uma equação que expresse a população brasileira y, em milhões de habitantes, em função do tempo x em ano.

c) A partir da equação obtida no item **b**, obtenha uma equação que expresse o tempo, em ano, em função da população brasileira, em milhão de habitantes.

d) Qual é a inversa da função obtida no item **b**?

Resolva os exercícios complementares 30 a 35.

Seção 9.4

Equação e inequação logarítmica

Objetivos

- **Aplicar** as propriedades de logaritmos na resolução de equações e inequações logarítmicas.
- **Resolver** problemas por meio de equações e inequações logarítmica.

Equações logarítmicas

A medida N do nível sonoro, em decibel (dB), em função da potência I de som, em watt (W) por centímetro quadrado, é dada por $N = \log\left(\dfrac{I}{10^{-16}}\right)^{10}$.

Show da banda ACDC, realizado no estádio do Morumbi em São Paulo, 2009.

Em certo show de rock, constatou-se que a medida do nível sonoro (em dB) correspondia a uma vez e meia a medida do nível sonoro obtida no centro da cidade de São Paulo na hora de trânsito intenso, em que a potência era 10^{-8} W/cm^2. Para determinar a potência I do som, no momento da medição do nível sonoro nesse show de rock, devemos resolver a equação:

$$\log\left(\frac{I}{10^{-16}}\right)^{10} = 1{,}5 \cdot \log\left(\frac{10^{-8}}{10^{-16}}\right)^{10}$$

Equações como essa, que têm a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo, são chamadas de **equações logarítmicas**. Os métodos de resolução desse tipo de equação, que estudaremos a seguir, permitem determinar o valor de I, que é 10^{-4}. Assim, a potência do som naquele show de rock era 10^{-4} W/cm^2.

Definimos:

Equação logarítmica é toda equação que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplos

a) $\log_6 (3x - 1) = \log_6 (x + 7)$

b) $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$

c) $\log_x (x - 1) + \log_x 9 - \log_x 2 = 2$

A resolução de uma equação logarítmica baseia-se na propriedade P1 das funções logarítmicas, ou seja:

P1. $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$, para quaisquer números reais positivos x, y e b, com $b \neq 1$.

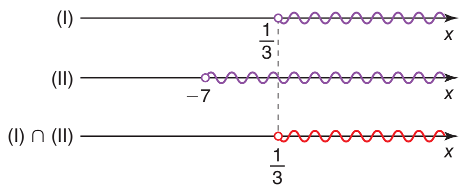
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

17 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:
$\log_6 (3x - 1) = \log_6 (x + 7)$

Resolução

- Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{3} & \text{(I)} \\ x > -7 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > \dfrac{1}{3}$.

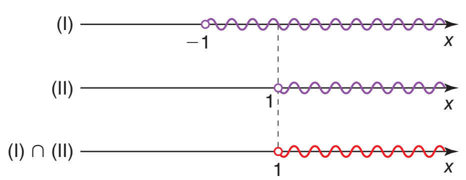
- Resolução da equação:
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas, temos:
$\log_6 (3x - 1) = \log_6 (x + 7) \Leftrightarrow 3x - 1 = x + 7$
$\therefore x = 4$
Observando que $x = 4$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{4\}$.

18 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:
$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$

Resolução

- Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência é $x > 1$.

- Preparação da equação:
Transformamos os dois membros da igualdade em logaritmos de mesma base. O número 3 pode ser representado como logaritmo de base 2, do seguinte modo:

$$3 = \underbrace{3 \cdot \log_2 2}_{\text{propriedade P3}} = \log_2 2^3$$

Assim: $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 2^3$
$\therefore \log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 8$
Aplicamos a propriedade P6 dos logaritmos, obtendo:
$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (x + 1)(x - 1) = \log_2 8$
$\therefore \log_2 (x^2 - 1) = \log_2 8$

- Resolução da equação:
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas, temos:
$\log_2 (x^2 - 1) = \log_2 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8$
$\therefore x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$
Observando que apenas $x = 3$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{3\}$.

[*Nota*: Poderíamos ter aplicado a definição de logaritmo na resolução da equação:
$\log_2 (x + 1)(x - 1) = 3 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) = 2^3$]

19 (Unicamp-SP) As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \log_2 (4t + 4)$, em que a variável t representa o tempo em ano.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

b) Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determinar esse instante t e especificar a cidade cuja população é maior após esse instante.

Resolução

a) $A(1) = \log_8 (1 + 1)^6 = \log_8 2^6 = \log_8 (2^3)^2 =$
$= \log_8 8^2 = 2\log_8 8 = 2 \cdot 1 = 2$
$A(7) = \log_8 (1 + 7)^6 = \log_8 8^6 = 6\log_8 8 = 6 \cdot 1 = 6$
Logo, nos instantes $t = 1$ e $t = 7$, a população da cidade A era, respectivamente, 2 mil e 6 mil habitantes.
$B(1) = \log_2 (4 \cdot 1 + 4) = \log_2 8 = \log_2 2^3 =$
$= 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$
$B(7) = \log_2 (4 \cdot 7 + 4) = \log_2 32 = \log_2 2^5 =$
$= 5 \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$
Logo, nos instantes $t = 1$ e $t = 7$, a população da cidade B era, respectivamente, 3 mil e 5 mil habitantes.

b) Nas funções que representam as populações de A e B, as bases dos logaritmos são maiores que 1 e, portanto, ambas são funções crescentes. No item **a**, obtivemos $A(1) < B(1)$ e $A(7) > B(7)$; isso significa que, para certo instante t entre 1 e 7, $B(t) = A(t)$, e, a partir desse instante, a população da cidade A será sempre maior que a da cidade B. Para determinar o instante t, basta resolver a equação abaixo, para $t > 0$:

$$\log_8 (1 + t)^6 = \log_2 (4t + 4)$$

Pela propriedade da mudança de base, transformamos o logaritmo do primeiro membro para a base 2:

$$\frac{\log_2 (1 + t)^6}{\log_2 8} = \log_2 (4t + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 (1 + t)^6}{3} = \log_2 (4t + 4)$$

$\therefore \log_2 (1 + t)^6 = 3 \log_2 (4t + 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 (1 + t)^6 = \log_2 (4t + 4)^3$
$\therefore (1 + t)^6 = (4t + 4)^3 \Rightarrow (1 + t)^6 = 4^3 \cdot (1 + t)^3$

Como $1 + t \neq 0$, pois $t > 0$, podemos dividir ambos os membros dessa igualdade por $(1 + t)^3$:

$$(1 + t)^3 = 4^3 \Rightarrow t = 3$$

Concluímos que, no instante $t = 3$ anos, as populações das duas cidades eram iguais e, a partir desse instante, a população de A foi sempre maior que a população de B.

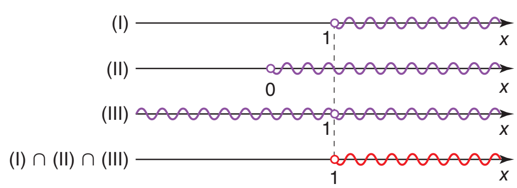
20 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:

$\log_x (x - 1) + \log_x 9 - \log_x 2 = 2$

Resolução

- Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \\ x \neq 1 & \text{(III)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência é $x > 1$.

- Preparação da equação:

$\log_x (x - 1) + \log_x 9 - \log_x 2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x (x - 1) + \log_x 9 - \log_x 2 = \log_x x^2$

Aplicamos as propriedades P6 e P7 dos logaritmos, obtendo:

$$\log_x \frac{9(x - 1)}{2} = \log_x x^2$$

- Resolução da equação:

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas, temos:

$$\log_x \frac{9(x - 1)}{2} = \log_x x^2 \Rightarrow \frac{9(x - 1)}{2} = x^2,$$

ou seja:

$2x^2 - 9x + 9 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 9$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{3}{2}$$

Observando que $x = 3$ e $x = \frac{3}{2}$ satisfazem a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \left\{3, \frac{3}{2}\right\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\log_3 (5x - 6) = 2$

b) $\log_7 (9x - 1) = \log_7 (4 - 2x)$

c) $\log_2 (2x) + \log_2 (3x + 4) = 6$

d) $\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 1) = 2$

e) $\log_{1,5} (x - 0,5) + \log_{1,5} (x + 0,25) = \log_{1,5} (x^2 - 1,75) + 1$

f) $\ln (x - 1) + \ln (x + 2) = \ln 4$

43 Considerando o universo dos números reais, resolva as equações:

a) $\log_2 (x - 2) = \log_4 (2x + 4)$

b) $\log_2 (x - 2) + 2 \log_4 x = 3 \log_8 (2x)$

44 Determine no universo $\mathbb{R}$ o conjunto solução da equação a seguir.

$$\log_x (3x) + \log_x (x - 2) = \log_x (x + 6)$$

45 (Fuvest-SP) Se x é um número real, $x > 2$ e $\log_2 (x - 2) - \log_4 x = 1$, então o valor de x é:

a) $4 - 2\sqrt{3}$

b) $4 - \sqrt{3}$

c) $2 + 2\sqrt{3}$

d) $4 + 2\sqrt{3}$

e) $2 + 4\sqrt{3}$

46 (Vunesp) Numa plantação de certa espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:

- altura: $H(t) = 1 + (0,8) \cdot \log_2 (t + 1)$
- diâmetro do tronco: $D(t) = (0,1) \cdot 2^{\frac{t}{7}}$ com $H(t)$ e $D(t)$ em metro e t em ano.

a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metro, e do diâmetro do tronco, em centímetro, das árvores no momento em que são plantadas.

b) A altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetro.

47 Um investidor aplicou, durante o mesmo período, 32 mil reais em um fundo A e 16 mil reais em um fundo B. As taxas mensais de juro composto dos fundos A e B foram 1% e 2%, respectivamente. Sabendo que $\log_{1,01} 1,02 = 2$, conclui-se que os montantes M_A e M_B acumulados pelas aplicações A e B, respectivamente, são:

a) $M_A = 6M_B$

b) $M_A = 4M_B$

c) $M_A = 6 \cdot \sqrt[4]{M_B}$

d) $M_A = 8 \cdot \sqrt{M_B}$

e) $M_A = 4 \cdot \sqrt[3]{M_B}$

Resolva os exercícios complementares 36 a 46 e 80 a 82.

Inequações logarítmicas

Um incêndio em uma floresta já devastou 2.000 ha (hectares) de mata e, pela ação dos ventos, a área destruída cresce à taxa de 10% ao dia.

Essas informações permitem estabelecer uma equação que expresse a área devastada y, em hectare, em função do tempo t, em dia:

$$y = 2.000(1 + 0{,}1)^t \Rightarrow y = 2.000(1{,}1)^t$$

Podemos, assim, obter t em função de y:

$$t = \log_{1{,}1} \frac{y}{2.000}$$

Com essa expressão matemática, é possível prever o que acontecerá com a área devastada se o fogo não for contido em determinado tempo. Por exemplo, se os bombeiros demorarem mais de 5 dias para controlar o incêndio, a área devastada y será tal que:

$$\log_{1{,}1} \frac{y}{2.000} > 5$$

Inequações como essa, que têm a variável no logaritmando ou na base de um logaritmo, são chamadas de **inequações logarítmicas**. Os métodos de resolução desse tipo de inequação, que estudaremos a seguir, permitem determinar, na questão apresentada, que $y > 3.221{,}02$. Assim, se o tempo para conter o incêndio for superior a 5 dias, a área devastada será maior que 3.221,02 ha.

Inequação logarítmica é toda inequação que apresenta a variável no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplos

a) $\log_2 (3x - 6) > 4$

b) $\log_{0{,}7} (2x - 1) \leqslant \log_{0{,}7} (x + 9)$

c) $\log_3 (x - 8) + \log_3 x \leqslant 2$

d) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 3$

A resolução de uma inequação logarítmica baseia-se em, pelo menos, uma das propriedades, P2 ou P3, das funções logarítmicas, que relembramos aqui.

Sejam x_1, x_2 e b números reais positivos, com $b \neq 1$.

P2. Se $b > 1$, temos: $\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$

P3. Se $0 < b < 1$, temos: $\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 < x_1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\log_2 (3x - 6) > 4$.

Resolução

- Condição de existência:

$$3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$$

- Preparação da inequação:

  Representamos o número 4 como logaritmo de base 2, isto é:

  $4 = 4 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^4 = \log_2 16$

  Assim, a inequação proposta é equivalente a:

  $\log_2 (3x - 6) > \log_2 16$

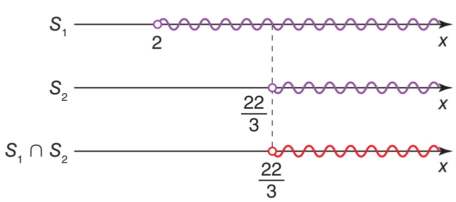
- Resolução da inequação:

  Como a base (2) dos logaritmos é maior que 1, o sentido da desigualdade (>) mantém-se para os logaritmandos, conforme a propriedade P2 das funções logarítmicas, ou seja:

  $\log_2 (3x - 6) > \log_2 16 \Rightarrow 3x - 6 > 16$

  $\therefore x > \frac{22}{3}$

  O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1, dos reais x tais que $x > 2$ (condição de existência), com o conjunto S_2 dos reais x tais que $x > \frac{22}{3}$:



  Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{22}{3}\right\}$

22 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação:
$\log_{0,7} (2x - 1) \leqslant \log_{0,7} (x + 9)$

Resolução

- Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x + 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ x > -9 & \text{(II)} \end{cases}$$

  A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > \frac{1}{2}$

- Resolução da inequação:

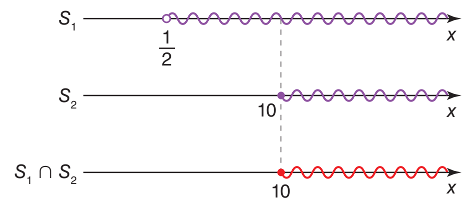
  Como a base (0,7) dos logaritmos está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade ($\leqslant$) é invertido para os logaritmandos, conforme a propriedade P3 das funções logarítmicas, ou seja:

  $\log_{0,7} (2x - 1) \leqslant \log_{0,7} (x + 9) \Rightarrow$

  $\Rightarrow 2x - 1 \geqslant x + 9$

  $\therefore x \geqslant 10$

  O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1, dos reais x tais que $x > \frac{1}{2}$ (condição de existência), com o conjunto S_2 dos reais x tais que $x \geqslant 10$:



  Portanto: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 10\}$

23 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\log_3 (x - 8) + \log_3 x \leqslant 2$.

Resolução

- Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 8 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

  A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 8$

- Preparação da inequação:

  Representamos o número 2 como logaritmo de base 3, isto é:

  $2 = 2 \cdot \log_3 3 = \log_3 3^2 = \log_3 9$

  Assim, a inequação proposta é equivalente a:

  $\log_3 (x - 8) + \log_3 x \leqslant \log_3 9$

  Pela propriedade P6 dos logaritmos, temos:

  $\log_3 (x - 8) + \log_3 x \leqslant \log_3 9 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \log_3 [(x - 8) \cdot x] \leqslant \log_3 9$

  $\therefore \log_3 (x^2 - 8x) \leqslant \log_3 9$

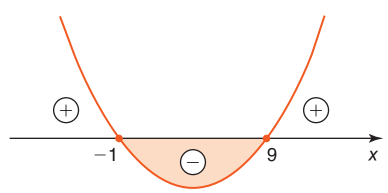
- Resolução da inequação:

  Como a base (3) dos logaritmos é maior que 1, o sentido da desigualdade ($\leqslant$) mantém-se para os logaritmandos, conforme a propriedade P2 das funções logarítmicas, ou seja:

  $\log_3 (x^2 - 8x) \leqslant \log_3 9 \Rightarrow x^2 - 8x \leqslant 9$

  $\therefore x^2 - 8x - 9 \leqslant 0$

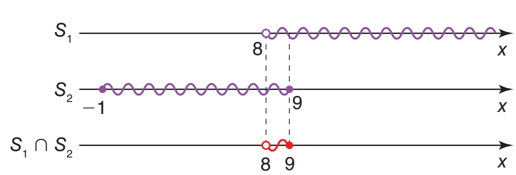
  Estudando o sinal da função $f(x) = x^2 - 8x - 9$, temos:



  Logo:

  $x^2 - 8x - 9 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 9$

  O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1, dos reais x tais que $x > 8$ (condição de existência), com o conjunto S_2 dos reais x tais que $-1 \leqslant x \leqslant 9$:



  Concluindo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x \leqslant 9\}$

24 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação:
$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 3$

Resolução

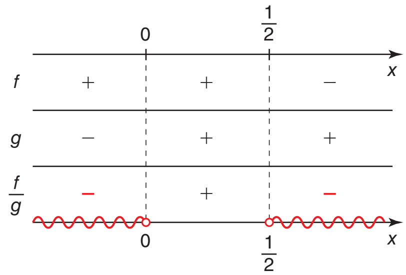
- Condição de existência:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 & \text{(I)} \\ x>0 & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 0$

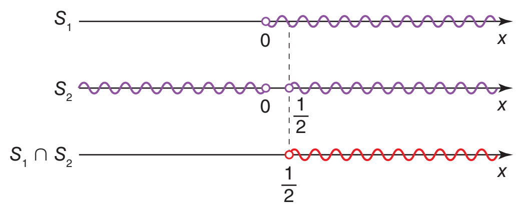
- Preparação da inequação:
Pela propriedade P7 dos logaritmos, temos:
$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+1}{x} > \log_{\frac{1}{2}} 3$

- Resolução da inequação:
Como a base $\left(\frac{1}{2}\right)$ dos logaritmos está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade (>) é invertido para os logaritmandos, conforme a propriedade P3 das funções logarítmicas, ou seja:
$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+1}{x} > \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x} < 3$ ou
$\dfrac{x+1}{x} - 3 < 0 \Rightarrow \dfrac{1-2x}{x} < 0$
Estudando o sinal das funções $f(x) = 1 - 2x$ e $g(x) = x$, temos:



Logo: $x < 0$ ou $x > \frac{1}{2}$

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1, dos reais x tais que $x > 0$ (condição de existência), com o conjunto S_2 dos reais x tais que $x < 0$ ou $x > \frac{1}{2}$:



Concluindo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

48 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:
a) $\log_3 (3x-1) > 2$
b) $\log_{0,8} (5-2x) \leqslant \log_{0,8} (x-1)$
c) $\log_4 (x-1) + \log_4 (3x-1) \geqslant 2$
d) $\log_{\frac{1}{2}} (x+1) - \log_{\frac{1}{2}} (x-1) > \log_{\frac{1}{2}} 3$
e) $\ln (2x - e) + \ln x > 2$, em que e é o número de Neper.

49 Determine o conjunto solução da inequação $1 + \log_2 x < \log_4 (x+1)^2$ no universo $\mathbb{R}$.

50 (Fuvest-SP) O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação $\log_2 (2x+5) - \log_2 (3x-1) > 1$ é o intervalo:

a) $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$ **b)** $\left]\frac{7}{4}, +\infty\right[$ **c)** $\left]-\frac{5}{2}, 0\right[$ **d)** $\left]\frac{1}{3}, \frac{7}{4}\right[$ **e)** $\left]0, \frac{1}{3}\right[$

51 Quando o PIB (Produto Interno Bruto) de um país era de 300 bilhões de dólares, um economista estimou que, depois de n anos, esse PIB alcançaria o valor de $300 \cdot (1{,}04)^n$ bilhões de dólares. Se a previsão estiver correta, esse PIB ultrapassará 600 bilhões de dólares para todo n tal que:

a) $n < \log_{1,04} 2$
b) $n > \dfrac{\log 2}{-2 + \log 104}$
c) $n > \log_2 1{,}04$
d) $\log 1{,}04 < n < \log 2$
e) $n > \dfrac{\log 1{,}04}{1 + \log 2}$

Resolva os exercícios complementares 47 a 52 e 83 a 86.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *Tabela dos logaritmos decimais.*

Exercícios técnicos

1 Usando uma calculadora científica, determine uma aproximação do valor do expoente:

a) ao qual se deve elevar a base 2 para se obter 3.

b) ao qual se deve elevar a base 10 para se obter 5.

(Os valores devem ser os mais próximos possíveis, por falta, com duas casas decimais, e devem ser obtidos por tentativa.)

2 Consultando a tabela, calcule o valor de cada uma das expressões a seguir.

x	10^x
0,05103	1,12468
0,15714	1,43595
0,26325	1,83337
0,31428	2,06196
0,57753	3,78033
1,25712	18,07674

a) $1{,}83337 \cdot 2{,}06196$

b) $3{,}78033 : 2{,}06196$

c) $(2{,}06196)^4$

d) $\sqrt{2{,}06196}$

3 Calcule os logaritmos:

a) $\log_{216} 36$

b) $\log_{100} 10.000$

c) $\log_{\frac{25}{81}} \dfrac{729}{125}$

d) $\log_6 6$

e) $\log_7 1$

f) $\log_7 7^{10}$

g) $\log_{\sqrt[5]{2}} \sqrt{2}$

h) $\log_{0,04} 0{,}008$

i) $\log_{\sqrt[3]{128}} \left(2\sqrt[5]{2}\right)$

4 Calcule o valor de $\sqrt[4]{5}$ usando os valores apresentados na tabela abaixo.

x	$\log_2 x$
5,00	2,32
1,50	0,58

5 (UEMS) As funções reais $f(x) = 3^{\log_5 (x + 1)}$ e $g(x) = 9$ são iguais para:

a) $x = 8$

b) $x = 10$

c) $x = 16$

d) $x = 24$

e) $x = 32$

6 (Ufac) Os números reais positivos a e b, ambos diferentes de 1, soluções do sistema de equações $\begin{cases} a^b = \dfrac{1}{16} \\ \log_{\frac{1}{2}} a = b \end{cases}$, quando multiplicados, têm como produto o número:

a) 2

b) 4

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) 8

7 (UFJF-MG) Seja $n = 8^{2 \log_2 15 - \log_2 45}$. Então, o valor de n é:

a) 5^2

b) 8^3

c) 2^5

d) 5^3

8 Sabendo que $\log_6 11 = 1{,}34$ e $\log_6 2 = 0{,}37$, calcule:

a) $\log_6 44$

b) $\log_6 \dfrac{121}{8}$

c) $\log_6 \sqrt[7]{2}$

d) $\log_{22} 3$

e) $\log_6 4\sqrt{11}$

f) $\log_{\sqrt{2}} 22$

9 Calcule log 35, dado que $\log 7 = 0{,}84$ e $\log 2 = 0{,}30$.

10 (Ufac) Se x e y são números reais positivos e $\log x + \log y = t$, então o valor de $\log\left(\dfrac{1}{xy}\right)$, em função de t, é:

a) t

b) $-t$

c) $\dfrac{1}{t}$

d) t^2

e) $2t$

11 (UFRN) Sabendo-se que $\log (AB) = 7$ e $\log \dfrac{A}{B} = 3$, pode-se concluir que o valor da expressão $(\log A)^2 - (\log B)^2$ é igual a:

a) 21

b) 4

c) 10

d) 40

12 (Fuvest-SP) Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale:

a) a^3

b) $5a - 1$

c) $\dfrac{2a}{3}$

d) $1 + \dfrac{a}{3}$

e) $1 - \dfrac{a}{3}$

13 (UFRR) Sejam a e b números reais positivos tais que $\log_b \sqrt[5]{ab} = 5$. Então:

a) $\log_b a = 2^5$

b) $\log_b a = 25$

c) $\log_b a = 10$

d) $\log_b a = 24$

e) $\log_b a = \sqrt{25}$

14 (FGV) Adotando $\log 2 = 0{,}301$, a melhor aproximação de $\log_5 10$ representada por uma fração irredutível de denominador 7 é:

a) $\dfrac{8}{7}$

b) $\dfrac{9}{7}$

c) $\dfrac{10}{7}$

d) $\dfrac{11}{7}$

e) $\dfrac{12}{7}$

15 (UFC-CE) Se $\log_7 875 = a$, então $\log_{35} 245$ é igual a:

a) $\dfrac{a + 2}{a + 7}$

b) $\dfrac{a + 2}{a + 5}$

c) $\dfrac{a + 5}{a + 2}$

d) $\dfrac{a + 7}{a + 2}$

e) $\dfrac{a + 5}{a + 7}$

16 (UFSCar-SP) Adotando-se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, o valor de $\log_{1,5} 135$ é igual a:

a) $\dfrac{3ab}{b - a}$

b) $\dfrac{2b - a + 1}{2b - a}$

c) $\dfrac{3b - a}{b - a}$

d) $\dfrac{3b + a}{b - a}$

e) $\dfrac{3b - a + 1}{b - a}$

17 (Unifesp) Uma das raízes da equação $2^{2x} - 8 \cdot 2^x + 12 = 0$ é $x = 1$. A outra raiz é:

a) $1 + \log_{10}\left(\dfrac{3}{2}\right)$

b) $1 + \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

c) $\log_{10} 3$

d) $\dfrac{\log_{10} 6}{2}$

e) $\log_{10}\left(\dfrac{3}{2}\right)$

18 (Vunesp) Sejam α e β constantes reais, com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, tais que $\log \alpha = 0{,}5$ e $\log \beta = 0{,}7$.

a) Calcule $\log (\alpha\beta)$, em que $\alpha\beta$ indica o produto de α e β.

b) Determine o valor de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaz a equação:

$$\left(\frac{\alpha\beta}{10}\right)^x = (\alpha\beta)^2$$

19 (ITA-SP) Se $u = x \cdot \ln 2$, $v = x \cdot \ln 3$ e $e^u \cdot e^v = 36$, calcule x.

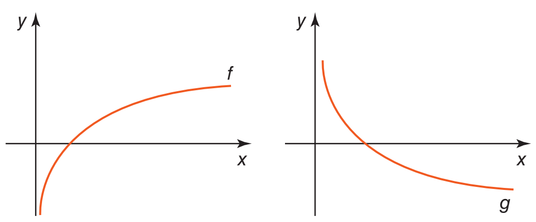
20 (UCS-RS) Um modelo matemático, para descrever a relação entre o crescimento de uma grandeza y em função de tempo t, é $y(t) = \left(\ln\sqrt{ab^3}\right)t$, em que a e b são constantes que dependem da particular situação concreta modelada, e ln denota o logaritmo natural.
Supondo que $\ln a = 2$ e $\ln b = 4$, qual é o valor de y quando $t = 2$?

a) 124
b) 128
c) 12
d) 24
e) 14

21 Usando uma calculadora científica, determine uma aproximação com três casas decimais para cada um dos logaritmos:

a) $\log 8$
b) $\log_5 8$
c) $\ln 5$
d) $\log_5 e$ (e é o número de Neper)

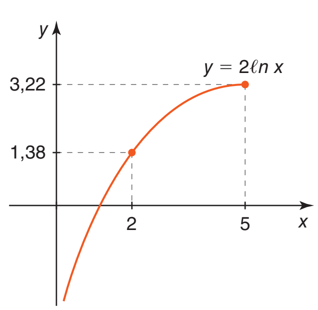
22 Os gráficos abaixo representam as funções $f(x) = \log_b x$ e $g(x) = \log_c x$



Pode-se afirmar que:

a) $b > 1$ e $c > 1$
b) $0 < b < 1$ e $0 < c < 1$
c) $b > 1$ e $0 < c < 1$
d) $b < c$ e $c > 1$
e) $0 < b < 1$ e $c > 1$

23 (Vunesp) A função $f(x) = 2\,\ell n\, x$ apresenta o gráfico seguinte.



Qual o valor de $\ell n\, 100$?

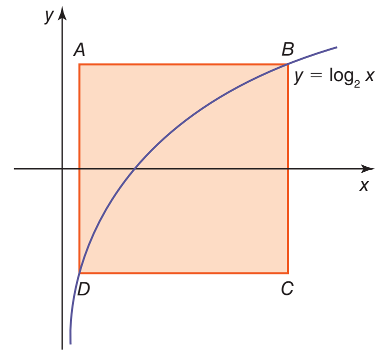
a) 4,6
b) 3,91
c) 2,99
d) 2,3
e) 1,1109

24 (Cefet-PR) O domínio da função $f(x) = \log_{(4-x)}(x^2 - 4x - 21)$ é o conjunto:

a) $]-\infty, 4[$
b) $]7, +\infty[$
c) $]-\infty, -3[$
d) $]4, +\infty[$
e) $]-\infty, 3[$

25 (UFPB) Sejam $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funções definidas, respectivamente, por $f(x) = \ln x$ (logaritmo natural de x) e $g(x) = e^x$ (e é o número de Neper). Calcule $f(g(1.000))$.

26 (UFMG) Neste plano cartesiano, estão representados o gráfico da função $y = \log_2 x$ e o retângulo $ABCD$, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados:



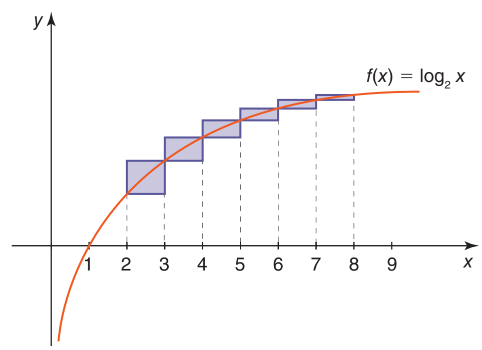
Sabe-se que:

- os pontos B e D pertencem ao gráfico da função $y = \log_2 x$; e
- as abscissas dos pontos A e B são, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e 8.

Então, é **correto** afirmar que a área do retângulo $ABCD$ é:

a) 38,75
b) 38
c) 38,25
d) 38,5

27 (Uece) Na figura abaixo estão representados seis retângulos com lados paralelos aos eixos coordenados e vértices opostos sobre o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$, $x > 0$.



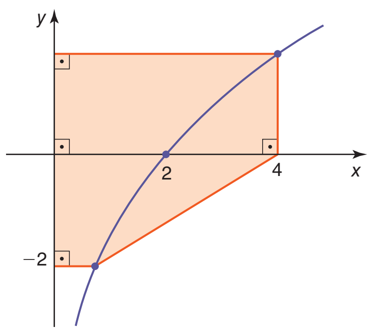
A soma das áreas dos seis retângulos é igual a:

a) 2 unidades de área.
b) 3 unidades de área.
c) 4 unidades de área.
d) 5 unidades de área.

28 (FGV) O gráfico que representa uma função logarítmica do tipo $f(x) = 2 + a \cdot \log(b \cdot x)$, com a e b reais, passa pelos pontos de coordenadas $\left(\frac{1}{50}, 6\right)$ e $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$. Esse gráfico cruza o eixo x em um ponto de abscissa:

a) $\frac{\sqrt[3]{10}}{4}$
b) $\frac{14}{25}$
c) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
d) $\frac{7}{10}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

29 (ESPM-SP) A curva abaixo representa uma parte do gráfico da função $f(x) = \log_2 (k \cdot x)$, com $k > 0$.



A área da região sombreada vale:

a) 6,5 b) 8,5 c) 10,5 d) 9 e) 12

30 Obtenha a inversa das funções:

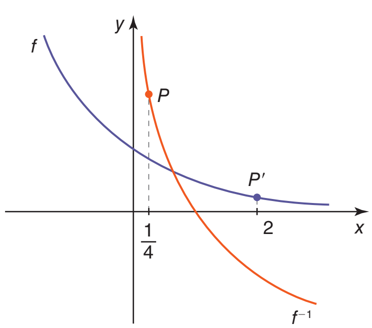
a) $y = 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$
b) $y = -4 + 3 \cdot \log_2 (x - 1)$
c) $y = -4 + e^{2x}$
d) $y = -1 + \ln x$

31 (Ibmec) Se $f(x) = \frac{\ln (x^2) - 1}{2}$, para $x > 0$, então a inversa da função f é dada por:

a) $f^{-1}(x) = \sqrt{e^{2x + 1}}$
b) $f^{-1}(x) = e^{\sqrt{2x + 1}}$
c) $f^{-1}(x) = 2e^{\sqrt{x}} + 1$
d) $f^{-1}(x) = 2\sqrt{e^x} + 1$
e) $f^{-1}(x) = \sqrt{2e^x + 1}$

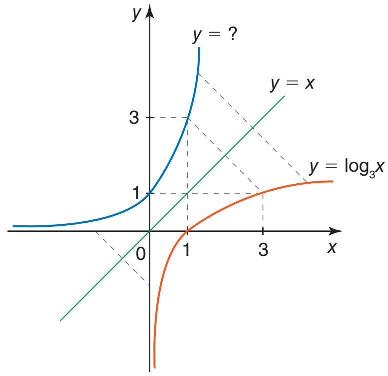
32 Construa o gráfico da inversa da função:
$y = \log_2 x^5 + \log_2 x^4 - \log_2 x^8$, com $x > 0$

33 Os gráficos abaixo representam funções inversas f e f^{-1}, sendo $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^*_+$ e $a \neq 1$.



a) Determine as ordenadas de P e P' sabendo que esses pontos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.
b) Determine o valor de a.
c) Obtenha f^{-1}.
d) Prove que o ponto comum aos gráficos de f e f^{-1} pertencem à bissetriz dos quadrantes ímpares.

34 (UFRN) Na figura abaixo, estão esboçados os gráficos das funções $y = \log_3 x$ e $y = x$. O gráfico da função que está representado em azul é simétrico ao gráfico da função $y = \log_3 x$ em relação à reta de equação $y = x$. A função que corresponde ao gráfico azul é:



a) $y = \frac{x}{3}$
b) $y = 3x$
c) $y = x^3$
d) $y = 3^x$

35 Dadas as funções $f(x) = \log_b x$ e $g(x) = b^x$, com $b \in \mathbb{R}^*_+$ e $b \neq 1$, determine:

a) $f(g(x))$
b) $g(f(x))$

36 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $2 \log_4 (x + 1) - \log_4 (x^2 + 7) = -1$
b) $\log_{\frac{1}{2}} (5x - 3) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) = 2 \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$
c) $\log_2 (x + 6) + \log_2 (x - 6) = \log_2 (12x + 8) - 1$
d) $\ln (x + 3) - \ln (x - 2) = 1$

37 Considerando o universo dos números reais, resolva as equações:

a) $\log_4 (x + 2) + \log_2 3 = \log_2 \left(x\sqrt{5}\right)$
b) $\log_9 x^2 - \log_3 2 = \log_3 \left(\frac{x}{2}\right)$

38 Determine no universo $\mathbb{R}$ o conjunto solução de cada equação a seguir.

a) $\log_x (x + 3) + \log_x (3x) - \log_x (x + 1) = \log_x (5x)$
b) $\log_x (x^2 - 3x + 2) = \log_x (x + 1) + \log_x (x - 1)$

39 (UEMS) Se $\log_2 (2^{2x} + 12) = 4x$, então x é:

a) -1
b) 0
c) 1
d) $\sqrt{2}$
e) 2

40 (Fuvest-SP) O número real a é o menor dentre os valores de x que satisfazem a equação
$2 \log_2 \left(1 + \sqrt{2}x\right) - \log_2 \left(\sqrt{2}x\right) = 3$.

Então, $\log_2 \left(\frac{2a + 4}{3}\right)$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) $\frac{3}{2}$
e) 2

41 (UFPE) Se x e y são números reais positivos satisfazendo $\log_8 x + \log_4 y^2 = 6$ e $\log_4 x^2 + \log_8 y = 10$, qual o valor de $\sqrt{xy}$?

42 (Fuvest-SP) Os números reais x e y são soluções do sistema

$$\begin{cases} 2\log_2 x - \log_2 (y-1) = 1 \\ \log_2 (x+4) - \dfrac{1}{2}\log_2 y = 2 \end{cases}$$

Então, $7\left(\sqrt{y} - x\right)$ vale:

a) -7 b) -1 c) 0 d) 1 e) 7

43 (Ufac) Considere a equação (na variável x),
$1 + \log_2 (x^2 - 6x + 9) = \log_2 (x - 2)$;
onde $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } x \neq 3\}$ é o seu conjunto universo.
As soluções desta equação são números reais tais que:

a) o produto entre eles é um número ímpar.
b) o produto entre eles é negativo.
c) o produto entre eles é igual a 10.
d) o produto entre eles é menor que 7.
e) o produto entre eles é maior que 15.

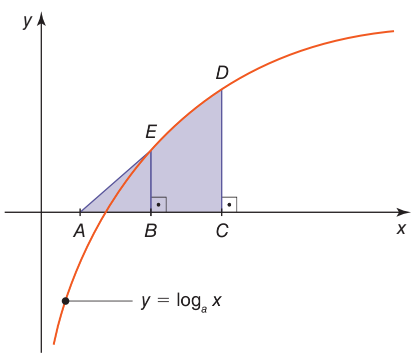
44 (Uece) Sejam f a função real de variável real definida por $f(x) = 10 - \log_2 x^4 - \log_x 16$, $x > 0$ e $x \neq 1$, e $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. O valor de $x_1 \cdot x_2$ é:

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{2}$

45 (Mackenzie-SP) A raiz real da equação $\log_3 (9^x - 2) = x$ é:

a) $\log_3 \sqrt{2}$
b) $2\log_3 2$
c) $\log_3 \dfrac{2}{3}$
d) $\log_3 2$
e) $\log_3 \sqrt{3}$

46 (Fuvest-SP) Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com $a > 1$ (figura abaixo). Suponha que $B = (x, 0)$, $C = (x + 1, 0)$ e $A = (x - 1, 0)$. Então, o valor de x para o qual a área do trapézio $BCDE$ é o triplo da área do triângulo ABE é:



a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
b) $1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\dfrac{1}{2} + \sqrt{5}$
d) $1 + \sqrt{5}$
e) $\dfrac{1}{2} + 2\sqrt{5}$

47 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\log_5 (4x - 1) + \log_5 (x - 5) < 1$
b) $\log_2 (x + 1) + \log_2 x - \log_2 5 < 2$
c) $\ln (x + 5) + 1 \leqslant \ln 5$

48 Determine no universo $\mathbb{R}$ o conjunto solução da inequação:

$$\log_9 (3x) \leqslant \log_3 (x + 6) - 1$$

49 (Ufop-MG) Para que $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) < 1$, deve-se ter:

a) $2 < x < 4$
b) $x < 2$ ou $x > 4$
c) $x < 3$ ou $x > 4$
d) $3 < x < 4$
e) $2 < x < 3$

50 (UFC-CE) Seja S o conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_3 \sqrt{x} + \log_9 (x - 8)\right) \geqslant 0$. Se $\mathbb{Z}$ representa o conjunto dos números inteiros, então o conjunto $\mathbb{Z} \cap S$ possui exatamente:

a) 2 elementos.
b) 3 elementos.
c) 1 elemento.
d) 4 elementos.
e) 5 elementos.

51 (Fuvest-SP) Seja $f(x) = \log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1)$. Os valores de x para os quais f está definida e satisfaz $f(x) > 1$ são:

a) $x < \dfrac{7}{3}$
b) $\dfrac{1}{2} < x$
c) $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{3}$
d) $-\dfrac{4}{3} < x$
e) $-\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{1}{2}$

52 (UFMA) Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação:
$\log_3 x + 3\log_x 3 - 4 \geqslant 0$

Exercícios contextualizados

53 (FGV) Em um regime de juros compostos, um capital inicial aplicado à taxa mensal de juros i irá triplicar em um prazo, indicado em meses, igual a:

a) $\log_{1+i} 3$
b) $\log_i 3$
c) $\log_3 (1 + i)$
d) $\log_3 i$
e) $\log_{3i} (1 + i)$

54 (UFRN) Na década de 1930, Charles F. Richter desenvolveu uma escala de magnitude de terremotos conhecida hoje em dia por escala Richter, para quantificar a energia, em joule, liberada pelo movimento tectônico. Se a energia liberada nesse movimento é representada por E e a magnitude medida em grau Richter é representada por M, a equação que relaciona as duas grandezas é dada pela seguinte equação logarítmica:

$$\log E = 1{,}44 + 1{,}5 \cdot M$$

Comparando o terremoto de maior magnitude ocorrido no Chile em 1960, que atingiu 9.0 (valor aproximado) na escala Richter, com o terremoto ocorrido em San Francisco, nos Estados Unidos, em 1906, que atingiu 8.0, podemos afirmar que a energia liberada no terremoto do Chile é aproximadamente:

a) 10 vezes maior que a energia liberada no terremoto dos Estados Unidos.
b) 15 vezes maior que a energia liberada no terremoto dos Estados Unidos.
c) 21 vezes maior que a energia liberada no terremoto dos Estados Unidos.
d) 31 vezes maior que a energia liberada no terremoto dos Estados Unidos.

55 (Fuvest-SP) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de $I = 0$ até $I = 8{,}9$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

a) Qual é a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando em uma unidade a intensidade de um terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

56 (UFRN) A escala decibel de som é definida pela seguinte expressão:

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Nessa expressão, B é o nível do som, em decibel (dB), de um ruído de intensidade física I, e I_0 é a intensidade de referência associada ao som mais fraco percebido pelo ouvido humano.

Som	Nível do som (dB)
Som mínimo	0
Raspagem de folhas	10
Sussurro	20
Conversação normal	60
Banda de rock	80
Orquestra	90
Máximo suportável	120

De acordo com a expressão dada e a tabela acima, pode-se concluir que a intensidade do som de uma orquestra é:

a) 1.000 vezes a intensidade de uma conversação normal.

b) 200 vezes a intensidade de uma conversação normal.

c) 100 vezes a intensidade de uma conversação normal.

d) 2.000 vezes a intensidade de uma conversação normal.

57 (Cefet-SP) Em um piano bem afinado, a frequência de cada nota é $\sqrt[12]{2}$ vezes a frequência da nota imediatamente abaixo dela. Adotando-se log 2 = 0,3, e utilizando-se algum dado da tabela, é correto dizer que o aumento percentual da frequência entre duas notas consecutivas de um piano afinado é:

a) 1,1%

b) 2,5%

c) 5,9%

d) 11,0%

e) 25,0%

x	log x
1,025	0,011
1,059	0,025

58 (UFSCar-SP) Um forno elétrico estava em pleno funcionamento quando ocorreu uma falha de energia elétrica, que durou algumas horas. A partir do instante em que ocorreu a falha, a temperatura no interior do forno pôde ser expressa pela função:

$$T(t) = 2^t + 400 \cdot 2^{-t}$$

com t em horas, $t \geq 0$, e a temperatura em graus Celsius.

a) Determine as temperaturas do forno no instante em que ocorreu a falha de energia elétrica e uma hora depois.

b) Quando a energia elétrica voltou, a temperatura no interior do forno era de 40 graus. Determine por quanto tempo houve falta de energia elétrica. (Use a aproximação $\log_2 5 = 2{,}3$.)

59 (Vunesp) As estradas (oficiais e não oficiais) na Amazônia têm um importante papel na evolução do desmatamento: análises mostram que o risco de desmatamento aumenta nas áreas mais próximas às estradas. A função

$$P(d) = \frac{3^{-1{,}3d + 3{,}5}}{1 + 3^{-1{,}3d + 3{,}5}}$$

fornece, aproximadamente, a probabilidade de desmatamento de uma área na Amazônia em função da distância d da estrada, em quilômetros (INPE, *Anais do XIII Simpósio de Sensoriamento Remoto*, 2007 – modificada).

Com base nessa função, determine para qual distância d a probabilidade de desmatamento é igual a 0,8. Use a aproximação $\log_3 2 = 0{,}6$.

60 (Unicamp-SP) A escala de um aparelho de medir ruídos é definida como $R_\beta = 12 + \log_{10} I$, em que R_β é a medida do ruído, em bel, e I é a intensidade sonora, em W/m^2. No Brasil, a unidade mais usada para medir ruídos é o decibel, que equivale a um décimo do bel. O ruído dos motores de um avião a jato equivale a 160 decibéis, enquanto o tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade atinge 80 decibéis, que é o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano.

a) Escreva uma fórmula que relacione a medida do ruído $R_{d\beta}$, **em decibéis**, com a intensidade sonora I, em W/m^2. Empregue essa fórmula para determinar a intensidade sonora máxima que o ouvido humano suporta sem sofrer qualquer dano.

b) Usando a fórmula dada no enunciado ou aquela que você obteve no item **a**, calcule a razão entre as intensidades sonoras do motor de um avião a jato e do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.

61 O cientista Arthur Eddington afirmou que o número de prótons no universo é $136 \cdot 2^{256}$. Usando as aproximações $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 17 = 1{,}23$, assinale a alternativa com a potência de dez mais próxima do número estimado por Eddington.

a) 10^{60}
b) 10^{70}
c) 10^{80}
d) 10^{90}
e) 10^{95}

62 (Vunesp) O brilho de uma estrela percebido pelo olho humano, na Terra, é chamado de *magnitude aparente* da estrela. Já a *magnitude absoluta* da estrela é a magnitude aparente que a estrela teria se fosse observada a uma distância padrão de 10 parsecs (1 parsec é aproximadamente 3×10^{13} km). As magnitudes aparente e absoluta de uma estrela são muito úteis para se determinar sua distância ao planeta Terra. Sendo m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta de uma estrela, a relação entre m e M é dada aproximadamente pela fórmula

$$M = m + 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48})$$

onde d é a distância da estrela *em parsecs*. A estrela Rigel tem aproximadamente magnitude aparente 0,2 e magnitude absoluta −6,8. Determine a distância, *em quilômetros*, de Rigel ao planeta Terra.

63 (Unicamp-SP) O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t, o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é $T(t) = (T_0 - T_{ext}) \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + T_{ext}$, onde T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que $T_0 = 21$ °C e $T_{ext} = 30$ °C, responda às questões abaixo.

a) Calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado. Em seguida, esboce abaixo o gráfico de $T(t)$.

b) Calcule o tempo gasto, a partir do momento da quebra do ar condicionado, para que a temperatura subisse 4 °C. Se necessário, use $\log_{10} 2 \approx 0{,}30$, $\log_{10} 3 \approx 0{,}48$ e $\log_{10} 5 \approx 0{,}70$.

64 (UnB-DF) A disseminação de uma doença infecciosa em determinada população de 30.000 frangos em uma granja pode ser descrita pela equação

$$P(t) = \frac{11.480}{1 + 3^{4 - t}},$$

em que t é o número de dias decorridos desde a detecção da doença, que é definido como o momento do aparecimento dos primeiros casos ($t = 0$) e $P(t)$ é a quantidade total de frangos infectados após t dias. Com base nessas informações, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir.

I. A quantidade de frangos infectados no momento em que a doença foi detectada é superior a 150.

II. Caso a doença não seja controlada, toda a população de frangos da granja será infectada.

III. 4.100 frangos serão infectados decorridos $2 + \log_3 5$ dias do momento da detecção da doença.

IV. O número de frangos infectados somente no terceiro dia é inferior a 1.200.

65 (FGV) Os biólogos consideram que, ao chegar a 100 indivíduos, a extinção de uma espécie animal é inevitável.
A população de determinada espécie animal, ameaçada de extinção, diminui segundo a função $f(t) = K \cdot a^t$, na qual K e a são números reais e $f(t)$ indica o número de indivíduos dessa espécie no instante t (em anos). Atualmente (instante $t = 0$), existem 1.500 indivíduos da espécie e estima-se que, daqui a 10 anos, haverá 750.
Caso nenhuma providência seja tomada, mantido tal descrescimento exponencial, daqui a quantos anos será atingido o nível de população que os biólogos consideram como irreversível para a extinção?
Para os cálculos, utilize, se necessário, alguns dos valores da tabela abaixo:

n	2	3	7	10
$\log n$	0,30	0,47	0,85	1

66 (PUC-SP) Um laboratório iniciou a produção de certo tipo de vacina com um lote de x doses. Se o planejado é que o número de doses produzidas dobre a cada ano, após quanto tempo esse número passará a ser igual a 10 vezes o inicial?
(Use $\log 2 = 0{,}3$.)

a) 1 ano e 8 meses
b) 2 anos e 3 meses
c) 2 anos e 6 meses
d) 3 anos e 2 meses
e) 3 anos e 4 meses

67 (UCS-RS) Um explorador descobriu na selva amazônica uma nova espécie de planta. Pesquisando-a durante anos, comprovou que seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40 \cdot (1{,}1)^t$, em que a altura média A é medida em centímetro e o tempo t em ano.

Verificou também que seu crescimento estacionava, após os 20 anos, abaixo dos 3 metros. Sabendo que $\log 2 \approx 0{,}30$ e $\log 11 \approx 1{,}04$, então a idade, em ano, na qual a planta tem uma altura média de 1,6 metro é igual a:

a) 15 anos.
b) 10 anos.
c) 9 anos.
d) 5 anos.

68 (UFMT) Para determinada espécie de roedores, com população inicial de 2.000 indivíduos e uma taxa constante de crescimento de 10% ao mês, se $P(t)$ é o número de roedores após t meses, então:

$$P(t) = 2.000 \cdot (1{,}1)^t$$

Nessas condições, em quantos meses a população de roedores atingirá 22.000 indivíduos?
(Dado: $\log 11 = 1{,}04$.)

69 A partir de certo instante, a concentração C (número de indivíduos por litro) de um tipo de bactéria poluente em um lago decresce de acordo com a função $C(t) = 50 \cdot 2^{-2t} + 20 \cdot 2^{-t}$, em que t representa o tempo em ano. Considerando o ano com 365 dias e $\log 2 = 0{,}30$, determine o tempo necessário, em dia, para que a concentração seja reduzida a 16 indivíduos por litro.

70 (Ufes) Um pesquisador constata que, em um dado instante, existem 400 tartarugas da espécie A e 200 tartarugas da espécie B em uma reserva marinha. Nessa reserva, a população de tartarugas da espécie A diminui à taxa de 20% ao ano, enquanto a população da espécie B aumenta à taxa de 10%, também ao ano.

Determine, usando duas casas decimais, quanto tempo é necessário, a partir desse instante, para que as populações sejam iguais.
(Considere: $\log_{10} 11 = 1{,}04$; $\log_{10} 2 = 0{,}30$.)

71 (Ueap-AP) Num instante $t = 0$, um recipiente contém uma quantidade Q_0 de bactérias que se reproduzem normalmente. Em um instante $t > 0$ a quantidade de bactérias existentes nesse recipiente é dada pela fórmula $Q(t) = Q_0 \cdot e^{at}$, onde t é o tempo, em hora, a é a constante que depende do tipo de bactéria e e é o número neperiano que é a base do logaritmo natural. Supondo que um cultivo inicial de 10 bactérias se reproduz em condições favoráveis e que doze horas mais tarde contamos 50 bactérias nesse cultivo, qual o valor da constante a para esse tipo de bactéria?
(Obs. o símbolo **ln**, abaixo, representa o logaritmo natural, ou seja, o logaritmo na base e.)

a) $\ln \sqrt[12]{5}$
b) $\ln \sqrt[5]{12}$
c) $12 \ln \sqrt[12]{5}$
d) $5 \ln \sqrt[12]{5}$
e) $\dfrac{5 \ln \sqrt[12]{5}}{12}$

72 Em certo país com população A (em milhão de habitantes), as emissoras de tevê noticiaram a implantação de um novo plano econômico pelo governo. O número $f(t)$ de pessoas que já sabiam da notícia após t horas de sua divulgação, $t \geq 0$, é dado por:

$$f(t) = \frac{A}{1 + 4e^{-\frac{At}{40}}}$$

Sabe-se também que, decorrida 1 hora da divulgação do plano, 50% da população já estava ciente da notícia.

a) Que porcentagem da população tomou conhecimento do plano no instante em que ele foi noticiado?
b) Qual é a população desse país?
(Adote $\ln 2 = 0{,}69$.)

73 (UFCG-PB) Certa espécie de animal, com população inicial de 200 indivíduos, vivendo em um ambiente limitado, capaz de suportar no máximo 500 indivíduos, é modelada pela função $P(t) = \dfrac{100.000}{200 + 300e^{-2t}}$, onde a variável t é dada em ano. O tempo necessário para a população atingir 60% da população máxima é:

a) 0,4 anos.
b) 0,2 anos.
c) 0,5 anos.
d) 0,1 anos.
e) 0,6 anos.

(Obs: use a aproximação $\ln\left(\dfrac{4}{9}\right) = -0{,}8$, onde $\ln x$ representa o logaritmo natural (ou neperiano) do número real x.)

74 (UFF-RJ) Após acionado o *flash* de uma câmera fotográfica, a bateria começa imediatamente a recarregar o capacitor que armazena uma quantidade de carga elétrica (medida em coulomb) dada por:

$$Q = Q(t) = Q_0(1 - e^{-\lambda t})$$

Sendo:
- e o número de Neper;
- $Q(t)$ a carga elétrica armazenada até o instante t, medido em segundo;
- Q_0 a carga máxima; e
- λ uma constante.

Considerando $\lambda = \dfrac{1}{2}$ e $\ln 10 = 2{,}3$, determine:

a) a expressão de t em função de Q;
b) o tempo necessário para que o capacitor recarregue 90% da carga máxima.

75 A concentração C de um medicamento no sangue de uma pessoa, em função do tempo t, em hora, a partir do instante da injeção, decresce de acordo com a função $C(t) = d \cdot (0{,}8)^t$, em que d é a dose administrada. Quanto tempo após a injeção a concentração do medicamento no sangue se reduz a 40% da dose administrada? (Use a tabela de logaritmos naturais abaixo).

x	1	2	3	4	5
ln (x)	0,00	0,69	1,10	1,39	1,61

x	6	7	8	9	10
ln (x)	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30

76 (Vunesp) A temperatura média na Terra começou a ser medida por volta de 1870, e em 1880 já apareceu uma diferença: estava 0,01 °C (grau Celsius) acima daquela registrada em 1870 (10 anos antes). A função $t(x) = (0{,}01) \cdot 2^{(0{,}05)x}$, com $t(x)$ em °C e x em ano, fornece uma estimativa para o aumento da temperatura média na Terra (em relação àquela registrada em 1870) no ano $(1.880 + x)$, $x \geq 0$. Com base na função, determine em que ano a temperatura média na Terra terá aumentado 3 °C. (Use as aproximações: $\log_2 3 = 1{,}6$; $\log_2 5 = 2{,}3$.)

77 (Vunesp) Em uma experiência para se obter cloreto de sódio (sal de cozinha), coloca-se num recipiente certa quantidade de água do mar e expõe-se o recipiente a uma fonte de calor para que a água evapore lentamente. A experiência termina quando toda a água se evapora. Em cada instante t, a quantidade de água existente no recipiente (em litro) é dada pela expressão:

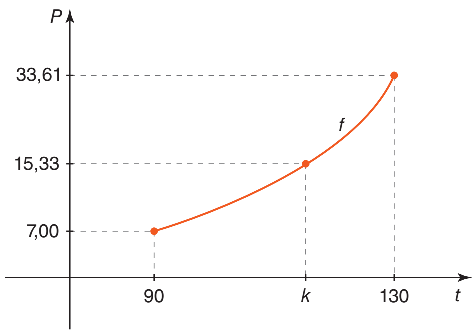
$$Q(t) = \log \frac{10^k}{t+1}$$

sendo k uma constante positiva e t em hora.

a) Sabendo que havia inicialmente 1 litro de água no recipiente, determine a constante k.

b) Ao fim de quanto tempo a experiência terminará?

78 A pressão p do vapor-d'água no interior de uma panela de pressão, em newton por centímetro quadrado (N/cm²), varia em função da temperatura t, em grau Celsius (°C), de acordo com a função $f(t) = 7 \cdot (1{,}04)^{t-90}$, quando t varia de 90 °C a 130 °C, conforme mostra o gráfico:



Conhecendo os valores $\log 219 = 2{,}34$ e $\log 104 = 2{,}02$, concluímos que, quando a pressão interna do vapor-d'água é 15,33 N/cm², a temperatura no interior da panela é igual a:

a) 110 °C
b) 109 °C
c) 108 °C
d) 107 °C
e) 106 °C

79 (UFRN) Suponha que, numa colônia de fungos, a massa biológica de sua população, no instante t (hora), denotada por $m(t)$, seja dada pela expressão:

$$m(t) = \frac{2^t}{10^{11}} \text{ gramas (considere } \log 2 = 0{,}3)$$

De acordo com o ritmo de crescimento populacional estabelecido por essa expressão, a massa da população de fungos, em 50 horas, é da ordem de:

a) 100 g **b)** 10 g **c)** 10.000 g **d)** 1.000 g

80 Estudando o decaimento radioativo de duas amostras de substância, A e B, um cientista concluiu que os tempos $f(x)$ e $g(x)$, em século, necessários para que cada uma delas perca x gramas de sua massa, respectivamente, são dados por:

$$f(x) = \log_{0,99} \frac{12-x}{12} \text{ e } g(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_{0,99} \frac{8-x}{8}$$

(Adote $(0{,}99)^8 = 0{,}92$.)

a) Em quanto tempo a substância A perde 0,12 g de sua massa?

b) Em quatro séculos, que quantidade de massa a substância B terá perdido?

c) Para que quantidade x de massa perdida tem-se $f(x) = g(x)$?

81 (UFPA) As populações A e B de duas cidades são determinadas em milhar de habitantes pelas funções: $A(t) = \log_4 (2 + t)^5$ e $B(t) = \log_2 (2t + 4)^2$, nas quais a variável t representa o tempo em ano. Essas cidades terão o mesmo número de habitantes no ano t, que é igual a:

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

82 (UFV-MG) A fim de medir a magnitude de um terremoto, os sismólogos Charles Francis Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter em 1935. Nesta escala, o maior terremoto já registrado foi o Grande Terremoto do Chile, em 1960, atingindo a magnitude de 9,5, seguido do ocorrido na Indonésia, em 2004, que atingiu a magnitude de 9,3. Na escala Richter, a magnitude M é dada por:

$$M = \log A - \log A_0$$

onde log denota logaritmo decimal, A é a amplitude máxima medida pelo sismógrafo e A_0 é uma amplitude de referência padrão. Sabe-se também que a energia E, em ergs (1 erg $= 10^{-7}$ joules), liberada em um terremoto está relacionada à sua magnitude M por meio da expressão

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$$

A partir das informações acima, faça o que se pede:

a) Sabendo que no litoral do Brasil, em 1955, foi registrado um terremoto de magnitude 6,3 na escala Richter, determine a razão entre as energias liberadas nos terremotos ocorridos na Indonésia e no Brasil.

b) Considerando A_1 a amplitude máxima de um terremoto e E_1 sua energia, e A_2 a amplitude máxima de outro terremoto e E_2 sua energia, determine k tal que

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^k.$$

83 (Unicamp-SP) Um capital de R$ 12.000,00 é aplicado à taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre:

a) o capital acumulado após 2 anos;

b) o número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial.

(Se necessário, use $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$.)

84 (FGV) Um instituto de pesquisa publicou os dados abaixo, referentes ao número de usuários da internet (por 10 mil habitantes) no ano de 2008.

País	Internet (2008): usuários por 10 mil habitantes
A	284,5
B	728,32

Especialistas avaliam que, a partir de 2008, o número de usuários por 10 mil habitantes crescerá à taxa de 10% ao ano no país B e de 20% ao ano no país A. Baseado nessa estimativa, calcule o número mínimo de anos completos para que o número de usuários (por 10.000 habitantes) do país A supere o do país B. (Use as aproximações: $\log 2 = 0{,}3$; $\log 3 = 0{,}48$; $\log 11 = 1{,}04$; sendo $\log k$ o logaritmo de k na base 10.)

85 Suponha que a população humana era de 6 bilhões de habitantes no final do ano 2000. Sabendo que a estimativa do crescimento populacional é de 1,6% ao ano, calcule o primeiro ano N em que a população ultrapassará 7 bilhões de habitantes. (Utilize uma calculadora científica para efetuar os cálculos.)

86 (UnB-DF) Um dos grandes desafios para o comitê organizador das Paraolimpíadas foi classificar os atletas ao final de cada competição de corrida, já que cada atleta apresenta um nível particular de comprometimento físico. Para diminuir as disparidades, o comitê impôs um cálculo para determinar o desempenho final de cada atleta, ajustando o tempo gasto por ele na prova de acordo com sua deficiência. Considere que uma comissão de especialistas atribuiu a cada atleta um valor x, de acordo com o grau de deficiência dele, e que, a partir desse valor, determinou o fator de correção $f(x) = \dfrac{1}{1 + 9e^{-x}}$.

Assim, nas provas de corrida, para o atleta ao qual foi associado o valor x, o tempo t_i gasto por ele foi corrigido, e obteve-se o tempo final t_f pela fórmula $t_f = t_i \cdot f(x)$.
Com base nessas informações e supondo que x varie no intervalo $]0; \infty[$, julgue os itens que se seguem.

a) $f(x) \geqslant \dfrac{1}{10}$ para todo $x > 0$.

b) Existem valores de x para os quais $f(x)$ é superior a 1,1.

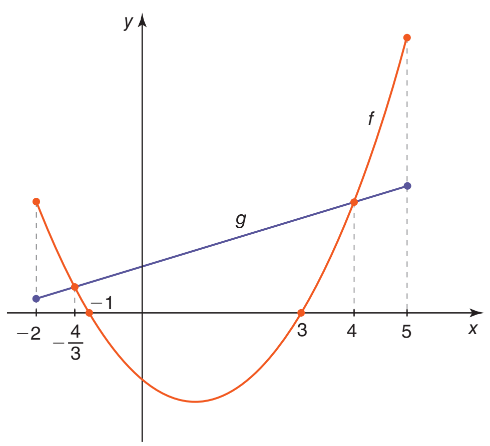
c) Suponha que a comissão de especialistas atribuiu ao corredor A o valor $x = 1$, e ao corredor B, $x = 3$. Nessa situação, o tempo final do corredor B será menor que o do corredor A sempre que o tempo gasto por B for inferior ao tempo gasto pelo corredor A.

(*Nota*: e é o número de Neper, isto é, $e = 2{,}7182...$.)

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

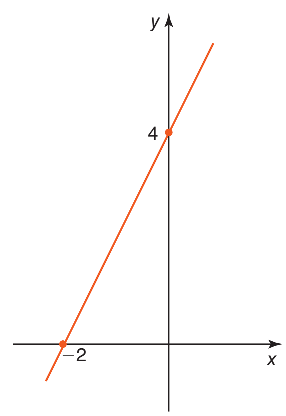
1 No plano cartesiano abaixo, estão representados os gráficos de duas funções, f e g, de domínio $[-2, 5]$ e contradomínio $\mathbb{R}$.



Determine os valores de x, com $x \in [-2, 5]$, tal que:

a) $f(x) = 0$
b) $f(x) > 0$
c) $f(x) \leqslant 0$
d) $f(x) > g(x)$
e) $f(x) \cdot g(x) < 0$
f) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$

2 O gráfico abaixo representa a função $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.
Determine os valores de a e b.



3 Construa o gráfico das funções:

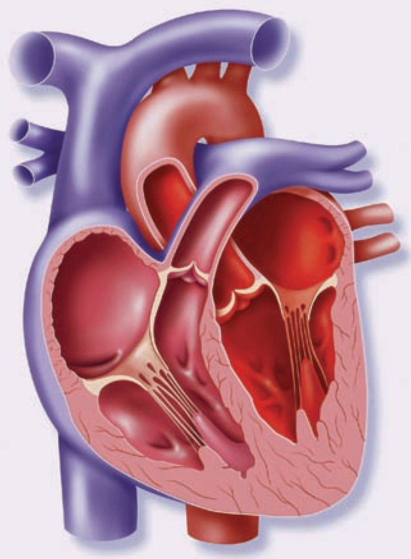
a) $f(x) = |x^2 - 2x|$
b) $g(x) = 2 + |x - 3|$
c) $h(x) = 3x + |2x - 6|$
d) $t(x) = |x - 4| + |2 - x|$

4 Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x - 3}}$.

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Quando as válvulas da artéria aorta se fecham, a pressão P, em mmHg (milímetro de mercúrio), no interior dessa artéria, durante o fechamento, pode ser expressa em função do tempo t, em segundo, por meio da equação $P = 95 \cdot e^{-0,49t}$. Após o fechamento das válvulas, em quanto tempo a pressão atingirá 70 mmHg?



Resolução

Para $P = 70$, temos: $70 = 95 \cdot e^{-0,49t} \Rightarrow e^{-0,49t} = \frac{70}{95}$

Assim: $-0,49t = \log_e \frac{70}{95} \Rightarrow t = -\frac{\log_e \frac{70}{95}}{0,49}$

ERRADO!

Como chegamos num valor negativo e o tempo deve ser positivo, concluímos que a pressão não atingirá 70 mmHg.

Comentário

Os cálculos efetuados pelo aluno estão corretos, porém a conclusão (último parágrafo) está incorreta, pois: $0 < \frac{70}{95} < 1 \Rightarrow \log_e \frac{70}{95} < 0$

Logo, o valor obtido para t é positivo.

Agora, refaça a resolução completando-a e corrigindo-a.

Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule o valor obtido para *t*. (Na calculadora, a tecla que corresponde ao logaritmo de base *e* é aquela que apresenta o símbolo ln.)

Capítulo

10

Geometria plana

Observando um campo de futebol ou a pista de um aeroporto percebemos algo em comum: ambos são superfícies planas que têm lados retos. Esse tipo de superfície, que será vista neste capítulo, recebe o nome de polígono. Outras figuras planas que vamos estudar agora são a circunferência e o círculo, que podem ser observadas, por exemplo, na linha do equador da Terra e em um *compact disc* (CD), respectivamente.

10.1 Polígonos

Os polígonos têm relação estreita com os triângulos, pois podem ser considerados triângulos justapostos. Por isso, várias propriedades dos polígonos decorrem das propriedades dos triângulos.

10.2 Teorema de Tales e semelhança de figuras

Em um desenho técnico, na construção de um mapa geográfico, na confecção de uma planta arquitetônica e em muitas outras situações, é aplicado o conceito de semelhança de figuras.

10.3 Circunferência e círculo

A observação das formas circulares e de suas propriedades conduziu a humanidade a grandes descobertas e invenções, desde a roda até o acelerador circular de partículas.

10.4 Cálculo de áreas

Na compra de um terreno, na pintura de uma casa ou na avaliação da extensão da região alagada por uma represa está presente o conceito de área, que é uma medida de superfície.

Um feito notável há 2.200 anos

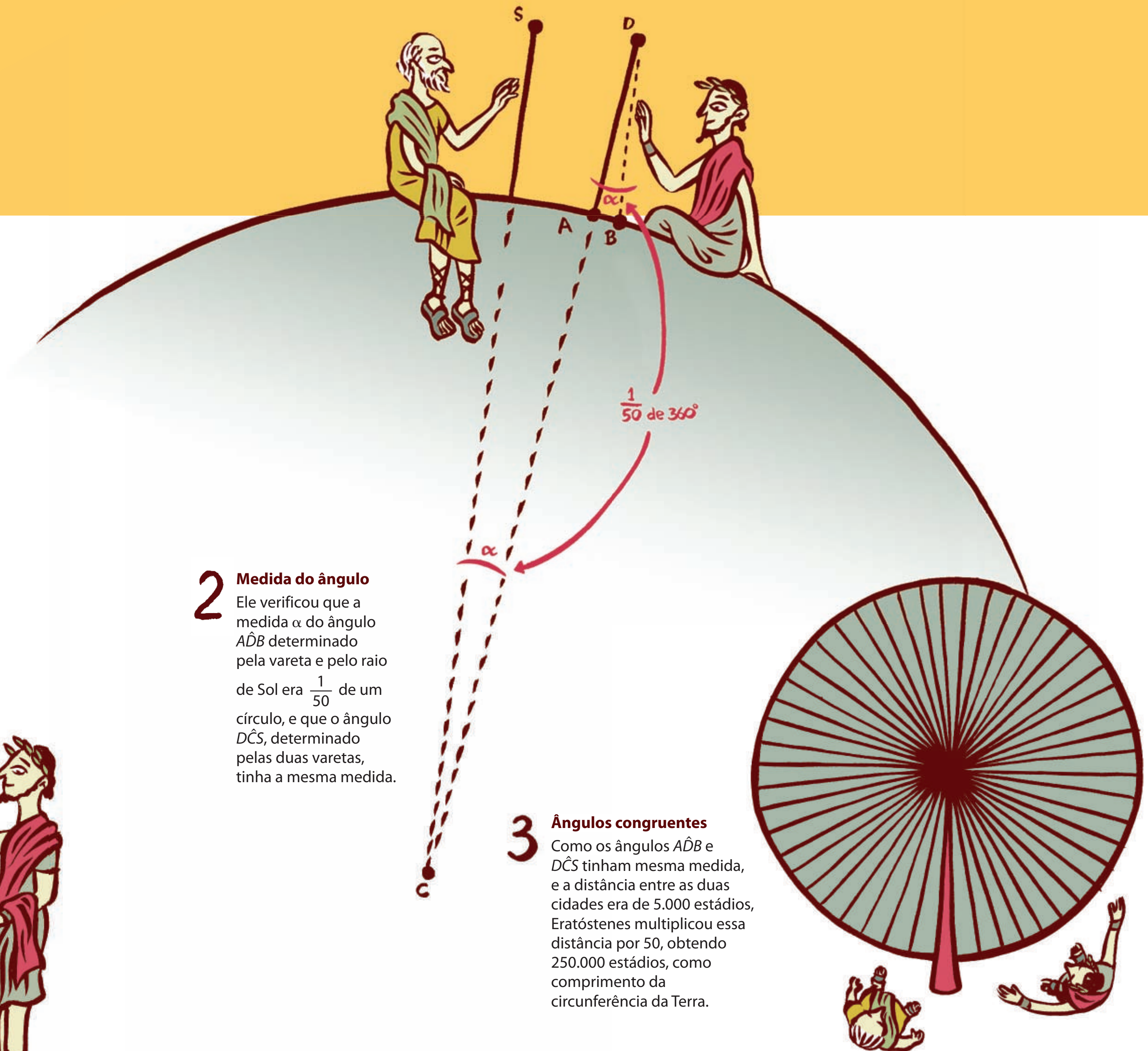
Com varetas, olhos, pés e cérebro, Eratóstenes (276-195 a.C.), por volta de 240 a.C., calculou o comprimento da circunferência da Terra com bastante precisão.

1 Sombras desiguais

Eratóstenes percebeu que em Siena a sombra de uma vareta vertical era invisível, por coincidir com a base da vareta, ao passo que, ao mesmo tempo, em Alexandria uma vareta vertical projetava uma sombra visível.

Em Siena ao meio dia a vareta não produzia sombra.

Em Alexandria nesse mesmo horário a vareta produzia sombra.



2 Medida do ângulo

Ele verificou que a medida α do ângulo $A\hat{D}B$ determinado pela vareta e pelo raio de Sol era $\frac{1}{50}$ de um círculo, e que o ângulo $D\hat{C}S$, determinado pelas duas varetas, tinha a mesma medida.

3 Ângulos congruentes

Como os ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{C}S$ tinham mesma medida, e a distância entre as duas cidades era de 5.000 estádios, Eratóstenes multiplicou essa distância por 50, obtendo 250.000 estádios, como comprimento da circunferência da Terra.

Erro insignificante

O valor encontrado por Eratóstenes foi apenas 15% maior do que o real, o que é bastante razoável pelo método usado na época. O erro ocorreu por duas razões: a distância entre Siena e Alexandria não era exatamente 5.000 estádios, nem as duas cidades se localizavam no mesmo meridiano. Se esses dois fatos fossem verdadeiros o erro seria de aproximadamente 2%.

Para pensar

1. Calcule a medida α, em grau.
2. Por que os ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{C}S$ tinham a mesma medida?
3. Sabendo que 1 estádio equivale a 185 metros, qual foi o comprimento, em quilômetro, da circunferência da Terra obtido por Eratóstenes?

Seção 10.1

Polígonos

Objetivos

- **Reconhecer** polígonos e seus elementos.
- **Classificar** triângulos.
- **Identificar** os casos de congruência e de semelhança de triângulos.
- **Classificar** quadriláteros.
- **Calcular** a soma dos ângulos internos de um polígono.

Termos e conceitos

- triângulo
- trapézio
- paralelogramo
- retângulo
- losango
- quadrado

As origens da Geometria

No antigo Egito, as únicas terras cultiváveis localizavam-se nas margens do rio Nilo. Anualmente, essas terras eram alagadas e fertilizadas pelos nutrientes que vinham com as cheias provocadas pelas chuvas na cabeceira do rio. O alagamento dos campos danificava as demarcações de limites das propriedades, por isso, após o período das chuvas, quando as águas voltavam ao leito do rio, era necessário remarcar esses limites. O trabalho de remarcação era feito por agrimensores, que utilizavam como ferramenta uma corda que, esticada, formava um triângulo retângulo.

Para o historiador grego Heródoto (século V a.C.), essa atividade teria dado origem, há, aproximadamente, 5.000 anos, à ciência das formas e medidas, que viria a ser chamada de Geometria (do grego *geo*, "terra", e *métria*, "medida").

No entanto, o homem pré-histórico já apresentava rudimentos de um sentido geométrico, quando representava a natureza por meio de desenhos ou dava forma aos objetos, construindo vasos ou esculpindo, em pedra, as pontas de suas lanças e de outros instrumentos. Assim, se considerarmos a Geometria quanto à forma, sua origem é anterior à civilização egípcia.

Fonte: SIMIELLI, Maria Elena. *Geoatlas*. São Paulo: Ática, 2006.

Pintura rupestre representando animais, cerca de 15.000 a.C. Caverna de Altamira, Espanha.

Vaso de cerâmica do período neolítico, cerca de 6.500 a.C. Encontrado na caverna de Áquila, Itália.

Como se vê, a origem da Geometria é imprecisa, pois, como afirmava o matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813):

"Logo que houve homens na sociedade, propriedades, trocas e partilhas, é natural que se tenha procurado medir a extensão dos campos e determinar o seu contorno."

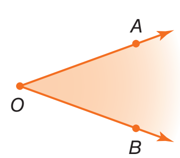
Em contraponto a essas dúvidas há uma certeza: um marco na construção da Geometria ocorreu no século III a.C., quando o matemático grego Euclides de Alexandria organizou todo o conhecimento geométrico então disponível – grande parte de sua própria criação – em uma obra de treze volumes, imortalizada com o nome de *Os elementos*. Neste e nos próximos capítulos, vamos estudar uma parte da **Geometria euclidiana**.

Ângulos

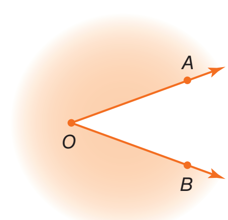
Antes de iniciar o estudo de polígonos, convém relembrar alguns conceitos básicos sobre ângulos.

Definição

Duas semirretas de mesma origem separam o plano que as contém em duas regiões. A reunião dessas semirretas com qualquer uma dessas regiões é chamada de ângulo plano ou, simplesmente, **ângulo**.



ou



As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ determinam dois ângulos e são os lados desses ângulos. Cada um desses ângulos pode ser simbolizado por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$.

Vale destacar que:

- Indicamos a medida de um ângulo $A\hat{O}B$ por: m($A\hat{O}B$).
- Um ângulo de uma volta completa mede 360°.
- Ângulo reto é um ângulo de medida 90°.
- Ângulo agudo é um ângulo de medida maior que 0° e menor que 90°.
- Ângulo obtuso é um ângulo de medida maior que 90° e menor que 180°.

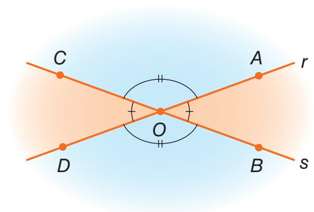
- Ângulo raso é o ângulo de medida 180°.
- Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida. Indicamos a congruência de dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{A}O$ por: $A\hat{O}B \cong C\hat{A}O$ (lemos: "$A\hat{O}B$ é congruente a $C\hat{A}O$").
- Dois ângulos são adjacentes quando têm em comum apenas um lado.
- Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°.
- Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180°.
- Se duas semirretas coincidem, elas determinam um ângulo nulo e outro de uma volta completa.

$m(A\hat{O}B) = 0°$ ou $m(A\hat{O}B) = 360°$

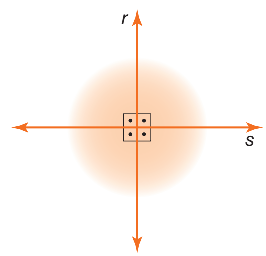
- Se duas semirretas são opostas, elas formam ângulos de meia-volta.

$m(A\hat{O}B) = 180°$

- Duas retas concorrentes r e s determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.



$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice ($A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$).
Assim como $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice ($A\hat{O}C \cong B\hat{O}D$).



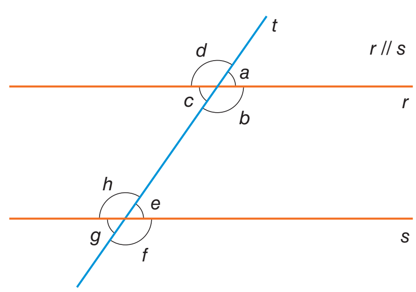
Duas retas concorrentes que formam ângulos retos entre si são chamadas de **retas perpendiculares**.

Notas:

1. Convencionamos que o ângulo determinado por duas retas paralelas é um ângulo nulo.
2. Indicamos que duas retas são perpendiculares por: $r \perp s$ (lemos: "r é perpendicular a s").

Retas paralelas interceptadas por uma transversal

Quando duas retas paralelas r e s são cortadas por uma transversal t, dois ângulos quaisquer determinados por t e r ou t e s têm medidas iguais ou são suplementares.



Particularmente:

- Dois ângulos têm medidas iguais se forem alternos ou correspondentes.

correspondentes: $\begin{cases} a = e;\ b = f \\ c = g;\ d = h \end{cases}$ alternos: $\begin{cases} \text{internos: } b = h;\ c = e \\ \text{externos: } a = g;\ d = f \end{cases}$

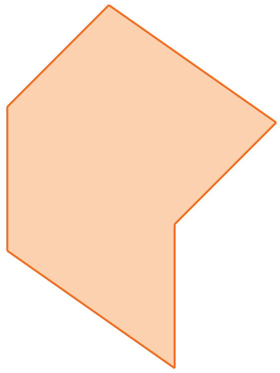
- Dois ângulos são suplementares se forem colaterais.

Colaterais $\begin{cases} \text{internos: } b + e = 180°;\ c + h = 180° \\ \text{externos: } a + f = 180°;\ d + g = 180° \end{cases}$

Polígonos

Vamos considerar, em um plano, uma linha *L* formada por segmentos de reta tais que:

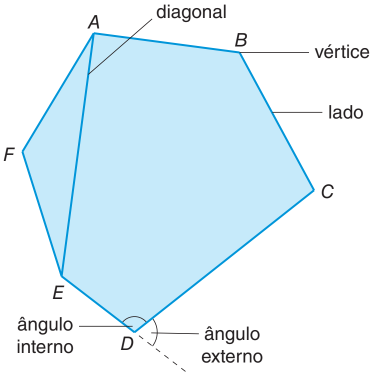
- cada extremidade de qualquer um deles é extremidade de dois e apenas dois deles;
- dois segmentos consecutivos quaisquer, dentre eles, não são colineares;
- dois segmentos não consecutivos quaisquer, dentre eles, não têm ponto comum.



Essa linha *L* separa o plano em duas regiões, das quais uma é limitada. A reunião da linha *L* com essa região limitada é chamada de **polígono** (do grego *polús*, “muitos”, e *gonos*, “ângulo”).

Elementos de um polígono

Observe na figura abaixo um polígono e seus elementos:



Nomenclatura

Os polígonos que têm de três a 20 lados recebem os nomes apresentados na tabela a seguir.

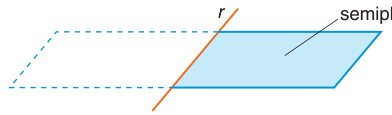
Número de lados (número de vértices)	Nome do polígono
3	triângulo ou trilátero
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono ou octágono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono

Número de lados (número de vértices)	Nome do polígono
12	dodecágono
13	tridecágono
14	tetradecágono
15	pentadecágono
16	hexadecágono
17	heptadecágono
18	octadecágono
19	eneadecágono
20	icoságono

Quando tratarmos de polígonos com mais de 20 lados, indicaremos seu número de lados, não lhes dando nomes especiais. Porém, como curiosidade, é interessante saber que para eles também existe uma nomenclatura; por exemplo, um octacoságono é um polígono de 28 lados e um hexacontágono é um polígono de 60 lados.

Polígono convexo

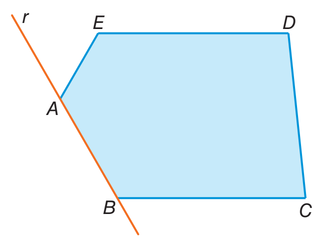
Em um plano, a reunião de uma reta r com qualquer uma das duas regiões separadas por ela é chamada de semiplano de origem r.



Um polígono é **convexo** se, e somente se, a reta r que contém qualquer um de seus lados deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano de origem r.

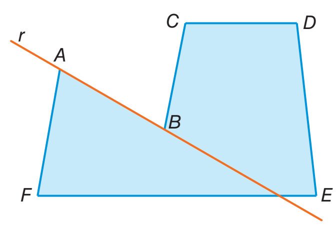
Exemplo

No polígono $ABCDE$, abaixo, a reta r que contém o lado $\overline{AB}$ deixa os demais lados em um mesmo semiplano de origem r. O mesmo acontece com a reta que contém qualquer um dos outros lados. Por isso, dizemos que esse polígono é convexo.



Contraexemplo (polígono não convexo)

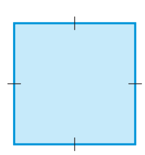
O polígono $ABCDEF$, a seguir, **não é convexo**, pois a reta r que contém o lado $\overline{AB}$ não deixa os demais lados em um mesmo semiplano de origem r.



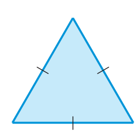
Polígono regular

Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si é chamado de **polígono regular**.

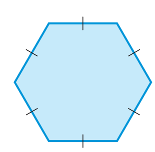
Exemplos



Quadrilátero regular (quadrado)



Triângulo regular (triângulo equilátero)



Hexágono regular

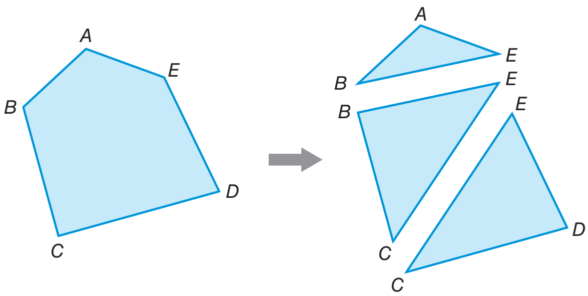
Notas:

Dois segmentos de reta, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, são congruentes quando têm a mesma medida. Indica-se essa congruência por: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Dois ângulos, $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$, são congruentes quando têm a mesma medida. Indica-se essa congruência por: $A\hat{O}B \cong M\hat{P}Q$

Triângulos

O triângulo é o polígono fundamental, pois qualquer outro polígono pode ser considerado uma composição de triângulos dispostos lado a lado. Por exemplo: o pentágono *ABCDE*, abaixo, é composto pelos triângulos *ABC*, *BCE* e *CDE*.

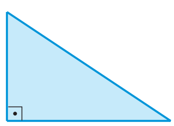


Por isso, o triângulo merece um estudo mais detalhado.

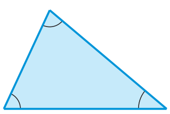
Os triângulos apresentam uma rigidez geométrica que outros polígonos não têm. Essa característica é responsável pela frequente utilização de triângulos em grandes estruturas, como pontes e torres.

Classificação dos triângulos

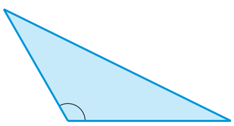
Quanto aos ângulos, um triângulo pode ser classificado como:



Triângulo retângulo: tem um ângulo interno reto.



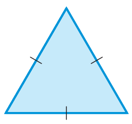
Triângulo acutângulo: tem os três ângulos internos agudos.



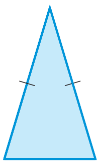
Triângulo obtusângulo: tem um ângulo interno obtuso.

No triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros, de catetos.

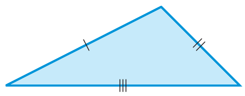
Quanto aos lados, um triângulo pode ser classificado como:



Triângulo equilátero: tem os três lados congruentes entre si.



Triângulo isósceles: tem dois lados congruentes entre si.



Triângulo escaleno: tem os três lados com medidas diferentes entre si.

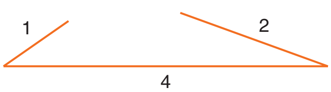
Observe que o triângulo equilátero também é isósceles, pois tem dois lados congruentes entre si.

No triângulo isósceles, o extremo comum aos lados congruentes é chamado de vértice do triângulo isósceles e o lado oposto a esse vértice, de base do triângulo.

Nota:

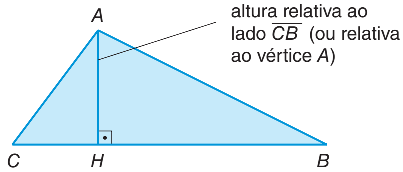
Três números positivos a, b e c podem representar as medidas dos lados de um triângulo se, e somente se, a soma de dois deles é maior que o terceiro. Essa propriedade é chamada de **desigualdade triangular**.

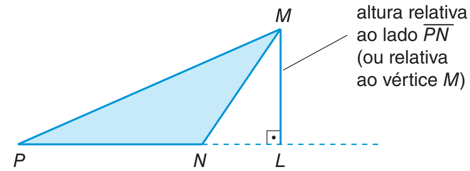
Por exemplo, os números 1, 2 e 4 não podem ser lados de um triângulo, pois $1 + 2 < 4$:



Elementos de um triângulo

- **Altura** de um triângulo é o segmento de reta que liga perpendicularmente um vértice à reta que contém o lado oposto a esse vértice.

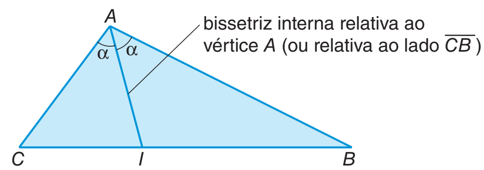




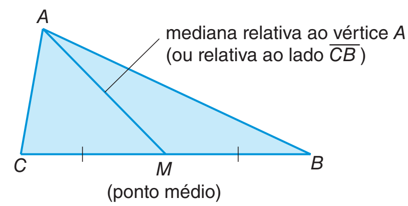
Nota:

Nesta e nas definições a seguir, quando for dito que um segmento de reta liga dois pontos, significa que os extremos do segmento são esses pontos.

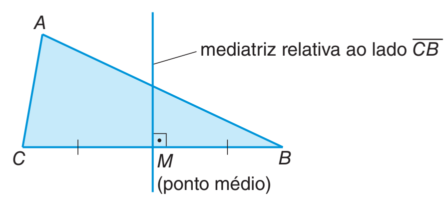
- **Bissetriz interna** de um triângulo é o segmento de reta contido na bissetriz de um ângulo interno, ligando um vértice ao lado oposto.



- **Mediana** de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.



- **Mediatriz** em um triângulo é a reta perpendicular a um dos lados que passa pelo ponto médio desse lado.



Soma dos ângulos internos de um triângulo

Considere um triângulo qualquer ABC, cujos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas α, β e θ, respectivamente (figura 1).

Traçando por B a reta $\overleftrightarrow{DE}$, paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, determinamos ângulos alternos congruentes (figura 2).

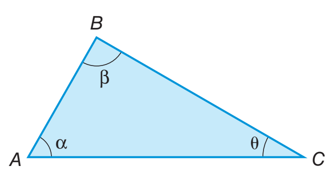


Figura 1

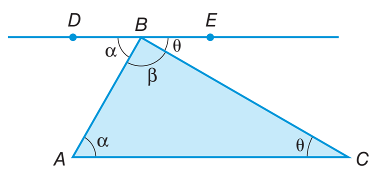


Figura 2

Como o ângulo $D\hat{B}E$ é raso, concluímos que: $\alpha + \beta + \theta = 180°$

Isso significa que:

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Calcular a medida de cada ângulo interno de um triângulo equilátero.

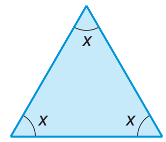
Resolução

Os três ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes entre si. Indicando por x a medida de cada um desses ângulos, temos:

$x + x + x = 180° \Rightarrow 3x = 180°$

$\therefore x = 60°$

Logo, cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°.



Teorema do ângulo externo de um triângulo

Na figura abaixo, o ângulo $B\hat{A}D$ é adjacente e suplementar de um ângulo interno do triângulo ABC; por isso $B\hat{A}D$ é chamado de **ângulo externo** desse triângulo.

Há uma importante relação entre a medida de um ângulo externo e as medidas dos ângulos internos de um triângulo. Para obtê-la, vamos traçar por B a reta r paralela a $\overline{CA}$ e indicar por α e β as medidas dos ângulos internos $\hat{C}$ e $\hat{B}$, respectivamente, e por e a medida do ângulo externo relativo ao vértice A, conforme a figura 2.

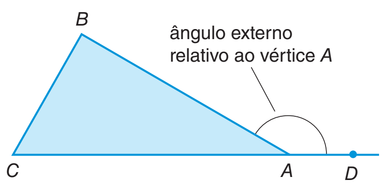


Figura 1

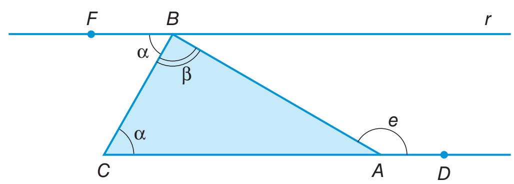


Figura 2

Os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{B}F$ têm medidas iguais por serem alternos internos formados por duas retas paralelas e uma transversal. Pelo mesmo motivo, os ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}F$ também têm medidas iguais, isto é:

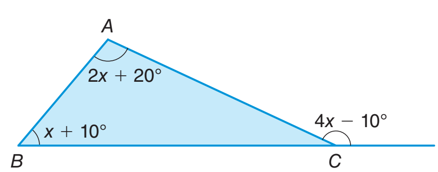
$$m(B\hat{A}D) = m(A\hat{B}F) \Rightarrow e = \alpha + \beta$$

Demonstramos, assim, o seguinte teorema:

A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2 No triângulo ABC, a expressão próxima de cada ângulo indica a medida, em grau, do respectivo ângulo. Determinar a medida do ângulo externo relativo ao vértice C.



Resolução

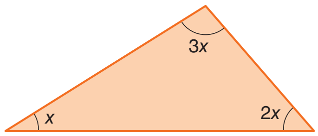
Pelo teorema do ângulo externo, temos:

$4x - 10° = 2x + 20° + x + 10° \Rightarrow x = 40°$

Logo, a medida do ângulo externo relativo ao vértice C é $4 \cdot 40° - 10°$, ou seja, 150°.

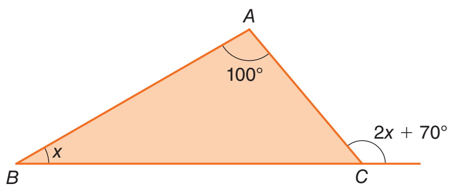
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 As medidas, em grau, dos ângulos internos de um triângulo são x, $2x$ e $3x$.



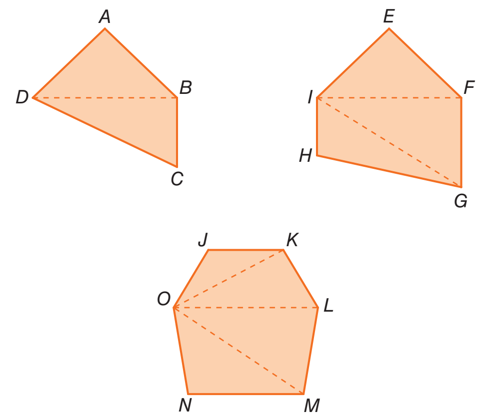
Quanto mede o menor ângulo interno desse triângulo?

2 Determine a medida do ângulo externo relativo ao vértice C do triângulo abaixo:



3 Um mastro AB de uma bandeira localiza-se sobre um terreno plano e horizontal. Uma pessoa, parada em um ponto P desse terreno, avista o ponto A por um ângulo de medida α com a horizontal. Caminhando em linha reta no sentido da base B do mastro, essa pessoa para em um ponto Q e avista o ponto A por um ângulo de medida 60° com a horizontal. Sabendo que a medida do ângulo $P\hat{A}Q$ é $\frac{\alpha}{4}$, calcule a medida α, em grau.

4 Vimos que o triângulo é considerado o polígono fundamental, pois qualquer outro polígono pode ser considerado uma composição de triângulos dispostos lado a lado. Por exemplo, um quadrilátero é composto de dois triângulos, um pentágono é composto de três triângulos e um hexágono é composto de quatro triângulos.



a) Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. A partir dessa informação, calcule a soma dos ângulos internos do quadrilátero, do pentágono e do hexágono convexos representados acima.

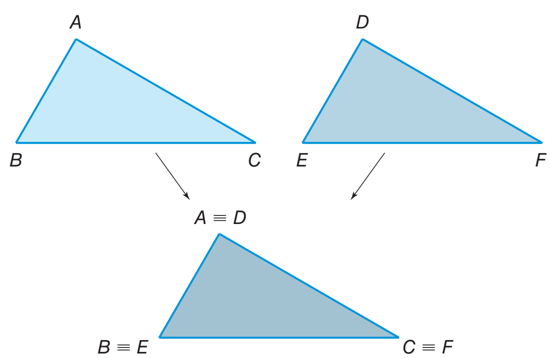
b) Calcule a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n vértices.

Resolva os exercícios complementares 1 a 4.

Congruência de triângulos

Se você tivesse dois triângulos de cartolina na mão, como faria para descobrir se os lados e os ângulos internos de um deles têm medidas respectivamente iguais aos lados e ângulos internos do outro?

Intuitivamente, a igualdade entre essas medidas ocorrerá se for possível uma **sobreposição total** dos dois triângulos, isto é, se for possível sobrepor os triângulos de modo que cada ponto de qualquer um deles coincida com um ponto do outro.



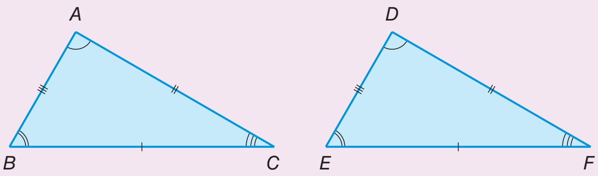
(Lemos ≡ como "coincide".)

A sobreposição total entre dois triângulos só é possível se, para cada ângulo de qualquer um dos triângulos, existe um ângulo congruente no outro, e se, para cada lado de qualquer um dos triângulos, existe um lado congruente no outro. Sob essas condições, dizemos que os triângulos são **congruentes** (indicamos a congruência pelo símbolo $\cong$).

Definição

Dois triângulos são congruentes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um triângulo aos três vértices do outro tais que:

- ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
- lados opostos a vértices correspondentes são congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} & \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \quad \text{e} & \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \hat{C} \cong \hat{F} & \overline{BC} \cong \overline{EF} \end{cases}$$

Notas:

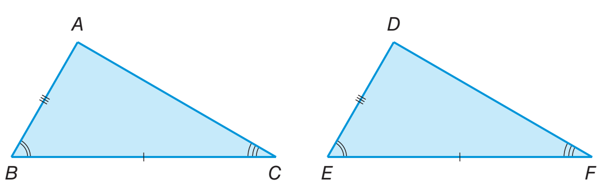
1. Ao indicar a congruência por $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ estamos afirmando que os vértices A, B e C são os correspondentes dos vértices D, E e F, respectivamente.
2. Em triângulos congruentes, lados opostos a vértices correspondentes serão chamados de lados correspondentes.
3. A medida de um segmento de reta $\overline{AB}$ é indicada por AB (sem o traço).
4. Não dizemos que dois triângulos congruentes são iguais, porque um ente matemático só é igual a ele mesmo. Assim, se dois triângulos representam conjuntos de pontos diferentes, não é possível dizer que eles são iguais.

Casos de congruência de triângulos

A definição de congruência de triângulos exige que sejam obedecidas seis condições: três congruências entre lados e três entre ângulos. Porém, escolhendo adequadamente algumas dentre essas seis condições, percebemos que, se elas forem obedecidas, as outras também o serão. Qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a congruência entre dois triângulos é chamado de **caso de congruência** (ou critério de congruência). A seguir, apresentamos os principais casos de congruência de triângulos.

Caso LAL (lado-ângulo-lado)

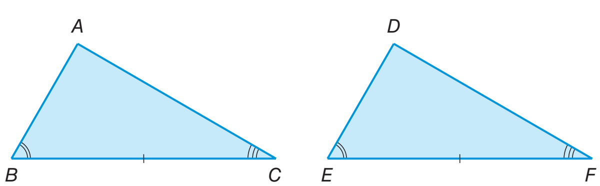
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm dois lados e o ângulo compreendido por eles, respectivamente, congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \end{cases}$$

Caso ALA (ângulo-lado-ângulo)

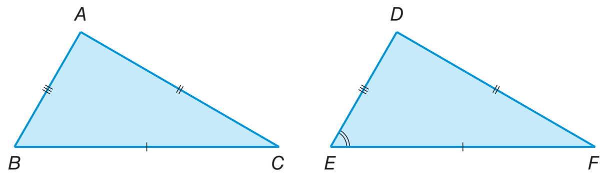
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm um lado e os ângulos adjacentes a ele, respectivamente, congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{B} \cong \hat{E} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases}$$

Caso LLL (lado-lado-lado)

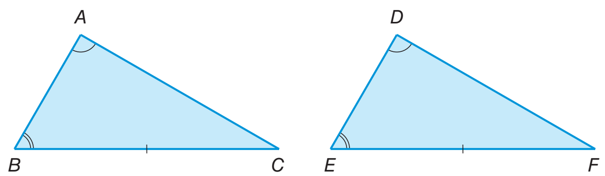
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente, congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{cases}$$

Caso LAA$_o$ (lado-ângulo-ângulo oposto)

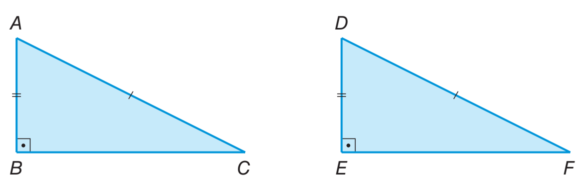
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm um lado, um ângulo adjacente a ele e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente, congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{A} \cong \hat{D} \end{cases}$$

Caso RHC (ângulo reto-hipotenusa-cateto)

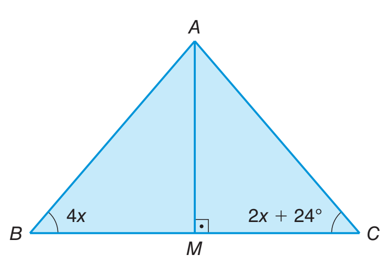
Dois triângulos retângulos são congruentes se, e somente se, têm a hipotenusa e um cateto, respectivamente, congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{B} \text{ e } \hat{E} \text{ são retos} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \overline{AB} \cong \overline{DE} \end{cases}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 No triângulo ABC, representado a seguir, M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.



a) Provar que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

b) Calcular a medida do ângulo $A\hat{C}M$.

Resolução

a) Para provar que dois triângulos são congruentes, basta identificar um dos casos de congruência.

Temos:

I. $\overline{BM} \cong \overline{CM}$, pois M é ponto médio de $\overline{BC}$;

II. $A\hat{M}B \cong A\hat{M}C$, pois ambos são ângulos retos;

III. $\overline{AM}$ é lado comum aos triângulos ABM e ACM.

As condições (I), (II) e (III) caracterizam o caso **LAL** de congruência de triângulos; logo, $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

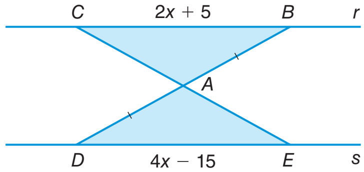
b) Como os triângulos ABM e ACM são congruentes, concluímos que os ângulos correspondentes são congruentes. Assim, temos:

$$4x = 2x + 24° \Rightarrow x = 12°$$

Logo, a medida do ângulo $A\hat{C}M$ é

$2 \cdot 12° + 24°$, ou seja, $48°$.

4 Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas, *A* é o ponto médio do segmento $\overline{DB}$ e as expressões $2x + 5$ e $4x - 15$ indicam as medidas, em cm, dos segmentos $\overline{CB}$ e $\overline{ED}$, respectivamente.



a) Provar que os triângulos *ABC* e *ADE* são congruentes.

b) Calcular a medida do segmento $\overline{CB}$.

Resolução

a) Nos triângulos *ABC* e *ADE*, temos:

I. $C\hat{A}B \cong D\hat{A}E$, pois são ângulos opostos pelo vértice;

II. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$, pois *A* é o ponto médio do segmento $\overline{DB}$;

III. $A\hat{D}E \cong A\hat{B}C$, pois são ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal.

As condições (I), (II) e (III) caracterizam o caso **ALA** de congruência de triângulos; logo, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$.

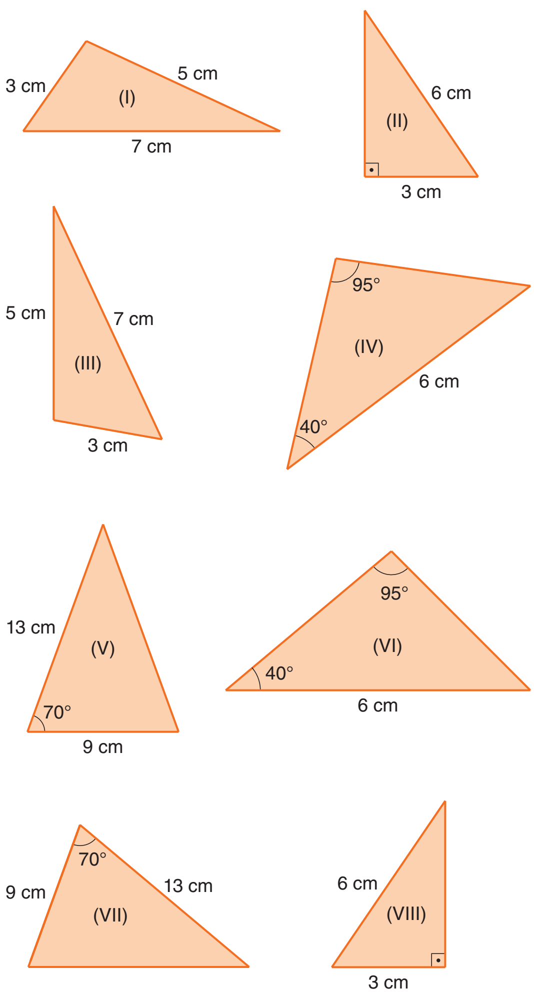
b) Como os triângulos *ABC* e *ADE* são congruentes, concluímos que os lados correspondentes são congruentes. Assim, temos:

$$4x - 15 = 2x + 5 \Rightarrow x = 10$$

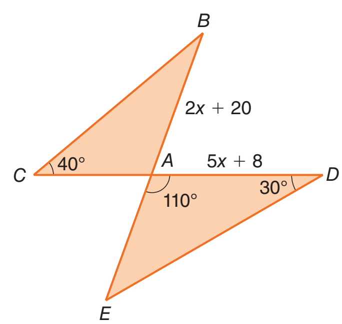
Logo, a medida, em cm, do segmento $\overline{CB}$ é $2 \cdot 10 + 5$, ou seja, 25 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5 Dentre os oito triângulos representados abaixo, existem quatro pares de triângulos congruentes. Identifique esses pares, explicitando o caso de congruência que você utilizou para a identificação.



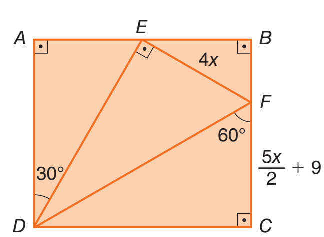
6 Na figura, em que as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ concorrem no ponto *A*, temos $\overline{CB} \cong \overline{ED}$.



a) Prove que $\triangle ABC \cong \triangle ADE$.

b) Calcule a medida do segmento $\overline{AD}$.

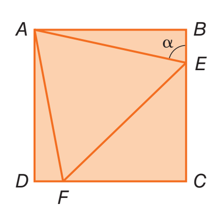
7 Na figura abaixo, $4x$ e $\frac{5x}{2} + 9$ indicam, respectivamente, as medidas, em decímetro, dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{CF}$.



a) Prove que os triângulos *EFD* e *CFD* são congruentes.

b) Calcule a medida do segmento $\overline{EF}$.

8 Um triângulo equilátero *AEF* está inscrito em um quadrado *ABCD*, conforme mostra a figura. A medida α do ângulo $A\hat{E}B$ é:



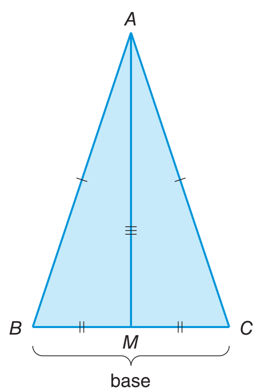
a) 65°
b) 60°
c) 80°
d) 70°
e) 75°

Resolva os exercícios complementares 5 a 7.

Propriedades do triângulo isósceles

- Se dois lados de um triângulo são congruentes, então os ângulos internos opostos a esses lados são congruentes.
- A mediana, a bissetriz e a altura relativas à base do triângulo isósceles coincidem.
- A mediatriz relativa à base de um triângulo isósceles contém a mediana, a bissetriz e a altura relativas a essa base.

Essas propriedades são consequências do conceito de congruência de triângulos. Para justificá-las, vamos traçar a mediana relativa à base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles ABC.



Pelo caso **LLL** de congruência de triângulos, temos: $\triangle AMB \cong \triangle AMC$ e, portanto, $A\hat{B}M \cong A\hat{C}M$, $B\hat{A}M \cong C\hat{A}M$, $A\hat{M}B \cong A\hat{M}C$ e os ângulos $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$ são retos, pois são congruentes e suplementares. O que demonstra as propriedades. Valem também as recíprocas dessas propriedades, por isso, podemos enunciar:

P1. Dois lados de um triângulo são congruentes se, e somente se, os ângulos internos opostos a esses lados são congruentes.

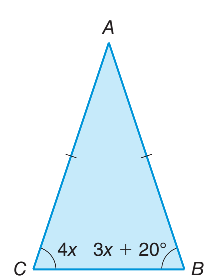
P2. Um triângulo é isósceles se, e somente se, uma bissetriz interna coincide com uma mediana ou uma altura do triângulo.

P3. Um triângulo é isósceles se, e somente se, a mediatriz relativa a um lado contém a mediana ou a bissetriz interna ou a altura relativa a esse lado.

Uma consequência da propriedade P1 é que cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60°, o que já demonstramos no exercício resolvido 1.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5 No triângulo representado ao lado tem-se $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Calcular a medida do ângulo $A\hat{B}C$.



Resolução

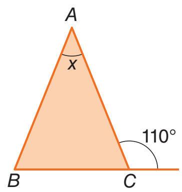
O triângulo ABC é isósceles, portanto, os ângulos da base têm a mesma medida:

$$4x = 3x + 20° \Rightarrow x = 20°$$

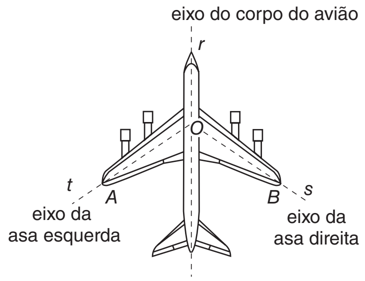
Logo, a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é: $3 \cdot 20° + 20° = 80°$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 No triângulo ABC da figura, tem-se $AB = AC$. Determine a medida x, em grau.



10 No projeto de um avião, um engenheiro desenhou três eixos, r, s e t, que denominou eixo do corpo do avião e eixos das asas, conforme a figura abaixo.

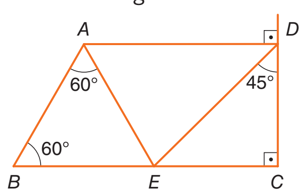


Cada um dos ângulos obtusos que r forma com s ou t mede 30° a mais que a medida do ângulo $A\hat{O}B$. Sabendo que as asas têm comprimentos iguais, a medida do ângulo $O\hat{B}A$ é:

a) 40° **b)** 50° **c)** 56° **d)** 58° **e)** 60°

11 (Ceeteps-SP) Analise as sentenças relativas à figura a seguir.

I. O triângulo CDE é isósceles.
II. O triângulo ABE é equilátero.
III. $\overrightarrow{AE}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}D$.



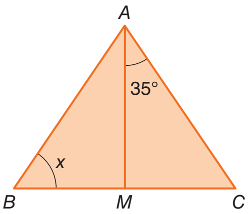
É verdade que:

a) somente a afirmativa I é falsa;
b) somente a afirmativa II é falsa;
c) somente a afirmativa III é falsa;
d) são todas afirmativas falsas;
e) são todas afirmativas verdadeiras.

12 Há milhares de anos, um meteorito com mais de um milhão de toneladas chocou-se com o solo no estado do Arizona, EUA, formando uma enorme cratera (Cratera de Barringer). Para medir o diâmetro dessa cratera, um geólogo fixou dois pontos, A e B, extremos de um diâmetro da cratera, e caminhou 1.260 m a partir do ponto A, perpendicularmente a $\overline{AB}$, até um ponto C tal que $m(A\hat{C}B) = 45°$.
Qual é a medida do diâmetro $\overline{AB}$?

Cratera de Barringer, Arizona, EUA.

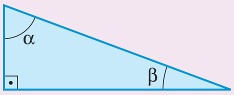
13 O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e M é o ponto médio da base. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.



Resolva os exercícios complementares 8 e 9.

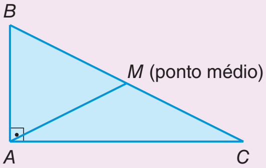
Propriedades do triângulo retângulo

P1. Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.



$$\alpha + \beta = 90°$$

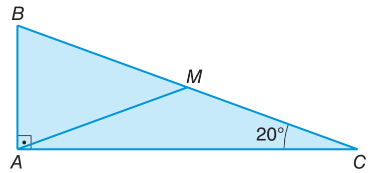
P2. Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.



$$AM = \frac{BC}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 No triângulo retângulo abaixo, em que M é o ponto médio da hipotenusa, determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo AMB.



Resolução

Como a mediana $\overline{AM}$ mede metade da hipotenusa $\overline{BC}$, temos que o triângulo AMC é isósceles de base $\overline{AC}$; logo, o ângulo $M\hat{A}C$ mede 20°.

$B\hat{M}A$ é externo do $\triangle AMC \Rightarrow \text{m}(B\hat{M}A) = 20° + \text{m}(M\hat{A}C) = 20° + 20° = 40°$

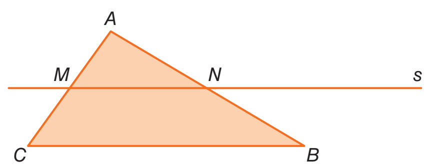
$\triangle AMB$ é isósceles de base $\overline{AB}$ e $\text{m}(B\hat{M}A) = 40° \Rightarrow \text{m}(M\hat{A}B) = \text{m}(M\hat{B}A) = 70°$

Portanto, os ângulos internos do triângulo AMB medem 70°, 40° e 70°.

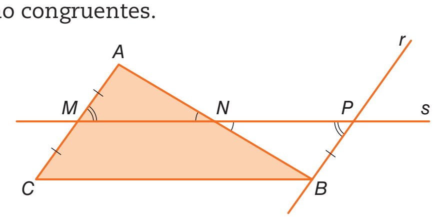
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14 Demonstre as propriedades a seguir:

a) Em um triângulo ABC, se uma reta s passa pelo ponto médio M do lado $\overline{AC}$ e é paralela ao lado $\overline{BC}$, então o ponto N de intersecção de s com $\overline{AB}$ é o ponto médio de $\overline{AB}$.

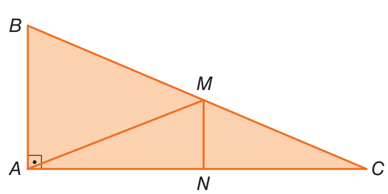


Sugestão: Trace por B a reta r paralela a $\overline{AC}$, com $r \cap s = \{P\}$, e prove que os triângulos AMN e BPN são congruentes.

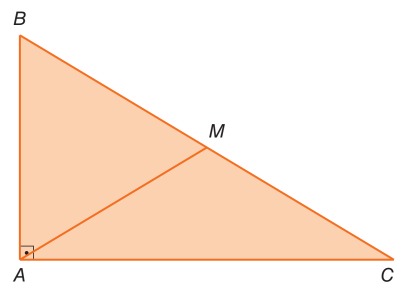


(*Nota*: O segmento $\overline{MN}$ é chamado de base média do triângulo e sua medida é metade do lado paralelo.)

b) Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.
Sugestão: Sendo M o ponto médio da hipotenusa de um triângulo ABC, retângulo em A, trace por M a reta s paralela ao cateto $\overline{AB}$, obtendo $s \cap \overline{AC} = \{N\}$. A seguir, mostre que o triângulo AMC é isósceles.



15 No triângulo retângulo ABC, temos: M é ponto médio de $\overline{BC}$, $\text{m}(M\hat{A}C) = 30°$ e $CM = 3$ cm.
Calcule o perímetro do triângulo ABM.

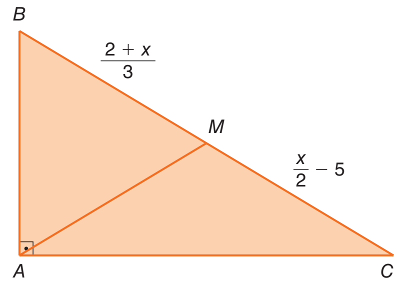


(*Nota*: Perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados.)

16 (UFMA) Um triângulo retângulo possui um ângulo interno de 40°. A medida de um ângulo agudo determinado pela mediana e pela altura, ambas relativas à hipotenusa, é:

a) 10°
b) 20°
c) 25°
d) 30°
e) 35°

17 Calcule a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo retângulo ABC abaixo.



Resolva o exercício complementar 10.

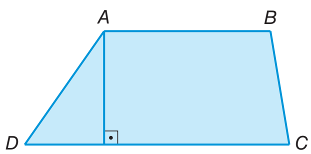
Quadriláteros notáveis

Trapézio

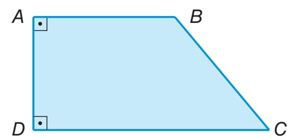
Os quadriláteros que mais se destacam no estudo da Geometria plana são aqueles que possuem pelo menos um par de lados paralelos. Esses quadriláteros são chamados de **trapézios**.

Exemplos

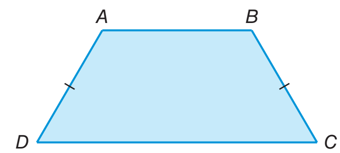
Nos quadriláteros a seguir, temos $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (lemos o símbolo $\parallel$ como "é paralelo a"). Logo, esses polígonos são trapézios.



Trapézio



Trapézio retângulo: (dois ângulos internos retos)

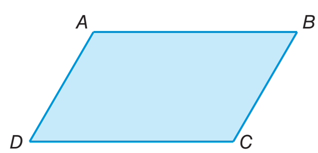


Trapézio isósceles: (dois lados não paralelos congruentes)

Os lados paralelos dos trapézios são chamados de bases. Os trapézios podem ter uma base maior e uma base menor e a distância entre as bases é a altura do trapézio.

Paralelogramo

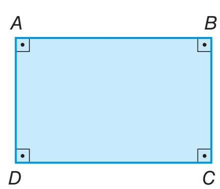
É todo trapézio que apresenta dois pares de lados paralelos.



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

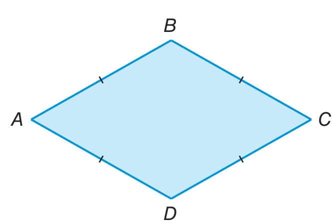
Retângulo

É todo paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos.



Losango

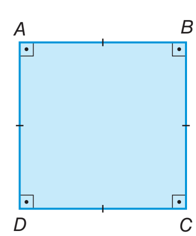
É todo paralelogramo que tem os quatro lados congruentes entre si.



$AB = BC = CD = DA$

Quadrado

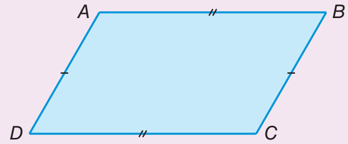
É todo paralelogramo que possui os quatro ângulos retos e os quatro lados congruentes entre si.



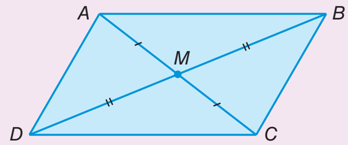
$AB = BC = CD = DA$

Propriedades dos quadriláteros notáveis

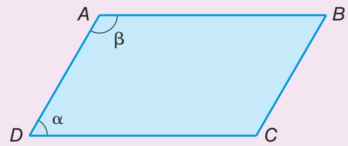
P1. Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.



P2. O ponto de cruzamento das diagonais de um paralelogramo é o ponto médio de cada uma delas.

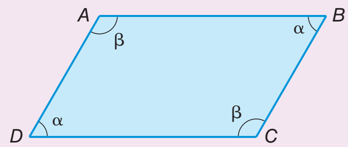


P3. Em todo paralelogramo, dois ângulos consecutivos quaisquer são suplementares.

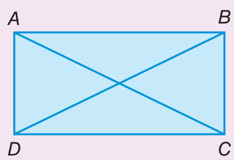


$\alpha + \beta = 180°$

P4. Em todo paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.

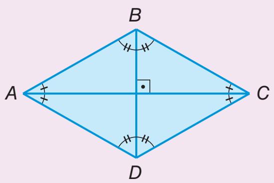


P5. As diagonais de um retângulo são congruentes.



$AC = BD$

P6. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango.



Notas:

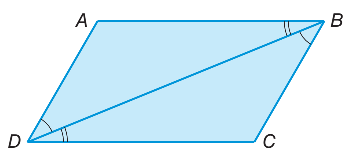
1. Todas as propriedades válidas para o paralelogramo valem para o retângulo e o losango, pois esses quadriláteros são também paralelogramos.
2. Todas as propriedades válidas para o retângulo e o losango valem também para o quadrado, pois esse quadrilátero é também retângulo e losango.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7 As propriedades P1 a P6 dos quadriláteros notáveis podem ser demonstradas pela congruência de triângulos. Demonstrar a propriedade P1: "Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes".

Resolução

Consideremos um paralelogramo *ABCD* e a diagonal $\overline{BD}$.



Temos:

I. $D\hat{B}C \cong B\hat{D}A$, pois são ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal.

II. $\overline{BD}$ é lado comum aos triângulos *ADB* e *CBD*.

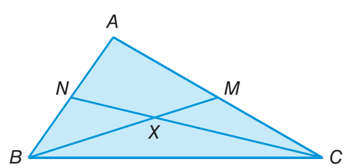
III. $B\hat{D}C \cong D\hat{B}A$, pois são ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal.

As condições (I), (II) e (III) caracterizam o caso ALA de congruência de triângulos; logo, $\triangle ADB \cong \triangle CBD$.
Dessa congruência, concluímos que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, ou seja, os lados opostos do paralelogramo são congruentes.

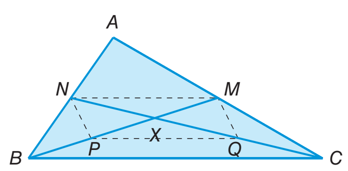
8 Provar que as três medianas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto que divide cada mediana, a partir do vértice, na razão 2 para 1. (Ou seja, a distância desse ponto a um vértice do triângulo é o dobro da distância dele ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.)

Resolução

Em um triângulo qualquer *ABC*, consideremos as duas medianas $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$, que se cruzam em um ponto *X*.



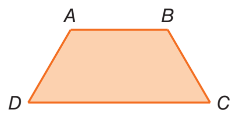
Considere também os pontos médios P e Q dos segmentos $\overline{XB}$ e $\overline{XC}$, respectivamente, conforme a figura abaixo:



As bases médias $\overline{NM}$ e $\overline{PQ}$ dos triângulos *ABC* e *XBC*, relativas à base $\overline{BC}$, são congruentes e paralelas, pois cada uma delas é paralela a $\overline{BC}$ e mede metade de $\overline{BC}$. Assim, o quadrilátero *MNPQ* é um paralelogramo, pois ele tem dois lados paralelos e congruentes: $\overline{NM}$ e $\overline{PQ}$
Logo, *X* é o ponto médio de cada uma das diagonais $\overline{PM}$ e $\overline{QN}$, portanto, $CX = 2 \cdot XN$ e $BX = 2 \cdot XM$.
Pelo mesmo raciocínio, considerando, agora, as duas medianas $\overline{AO}$ e $\overline{BM}$, que se cruzam no ponto Y, deduzimos que $AY = 2 \cdot YO$ e $BY = 2 \cdot YM$. Com isso, concluímos que os pontos *X* e Y coincidem e, portanto, as três medianas se cruzam em um mesmo ponto que divide cada uma delas na razão 2 para 1.
(*Nota*: O ponto de encontro das três medianas é chamado de **baricentro** do triângulo (ou centro de gravidade do triângulo). É usual indicar esse ponto por *G*.)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 O perímetro do trapézio isósceles representado a seguir é 32 cm e suas bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem 8 cm e 14 cm, respectivamente.



Calcule:

a) as medidas dos lados não paralelos desse trapézio.

b) as medidas das projeções ortogonais dos lados não paralelos sobre a base maior.

c) a medida da altura desse trapézio.

19 Em um trapézio retângulo, a medida do maior ângulo interno é o dobro da medida do menor ângulo interno. Quais são as medidas desses dois ângulos?

20 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

a) Em qualquer paralelogramo, as diagonais são congruentes entre si.

b) Em todo paralelogramo, cada diagonal passa pelo ponto médio da outra diagonal.

c) Cada diagonal de um paralelogramo qualquer está contida na bissetriz de dois ângulos internos opostos desse paralelogramo.

d) As diagonais de qualquer retângulo dividem-no em quatro triângulos congruentes entre si.

e) As diagonais de qualquer losango dividem-no em quatro triângulos congruentes entre si.

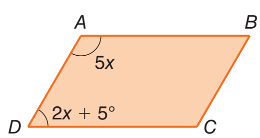
f) As diagonais de qualquer losango dividem-no em quatro triângulos retângulos.

g) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares entre si, então esse quadrilátero é um losango.

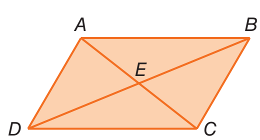
h) Se as diagonais de um retângulo são perpendiculares entre si, então esse retângulo é um quadrado.

i) Se os quatro lados de um paralelogramo têm medidas iguais, então as diagonais desse paralelogramo têm medidas iguais.

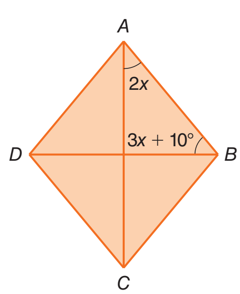
21 O quadrilátero representado a seguir é um paralelogramo. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.



22 No paralelogramo *ABCD* abaixo, tem-se $AC + BD = 28$ cm. Calcule a soma $EB + EC$.



23 No losango *ABCD*, abaixo, calcule a medida do ângulo $A\hat{B}C$.



Resolva os exercícios complementares 11 a 13.

Teorema de Tales e semelhança de figuras

Objetivos

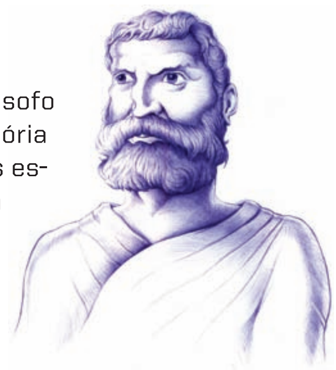
- **Resolver** problemas usando o teorema de Tales.
- **Identificar** os casos de semelhança de triângulos.
- **Resolver** problemas que envolvem semelhança de figuras.
- **Resolver** problemas usando as relações métricas do triângulo retângulo.

Termo e conceito

- **razão de semelhança**

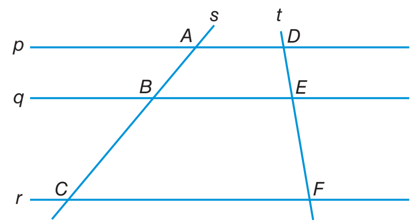
Teorema de Tales

Tales de Mileto é considerado o primeiro filósofo grego e é também o primeiro pensador da História a quem se atribuem descobertas matemáticas específicas, embora, antes dele, a humanidade já tivesse acumulado conhecimento matemático. Um dos teoremas associados ao nome de Tales trata da proporção entre segmentos de reta, conforme é enunciado a seguir.



Tales de Mileto (624 a.C.-548 a.C.)

Consideremos três retas paralelas, p, q, r, "cortadas" por duas transversais, s e t.



Dizemos que dois segmentos das transversais s e t são **correspondentes** quando seus extremos pertencem às mesmas paralelas. Por exemplo: $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são correspondentes, pois seus extremos pertencem às mesmas paralelas p e q; de modo análogo, são correspondentes $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, $\overline{CB}$ e $\overline{FE}$.

Tales demonstrou que a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal, isto é:

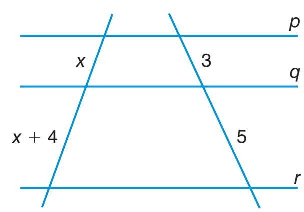
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}; \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}; \quad \frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$$

Esse teorema pode ser generalizado para mais de três retas paralelas, como segue.

> Se três ou mais retas paralelas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9 As retas p, q e r, representadas ao lado, são paralelas. Determinar a medida x.



Resolução

Pelo teorema de Tales, temos: $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{5}$

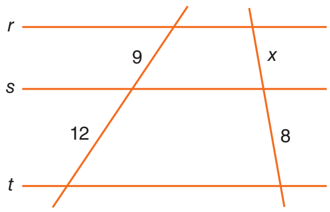
Assim: $5x = 3x + 12 \Rightarrow 2x = 12$

$\therefore\ x = 6$

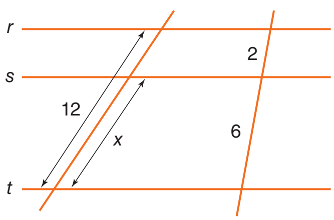
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

24 Determine a medida x em cada figura:

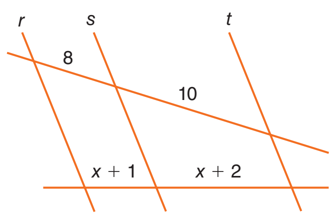
a) $r /\!/ s /\!/ t$



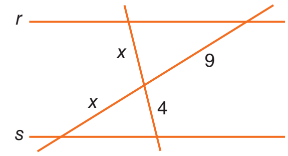
b) $r /\!/ s /\!/ t$



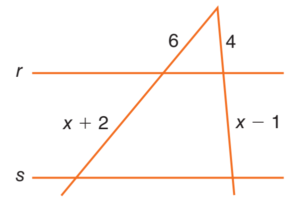
c) $r /\!/ s /\!/ t$



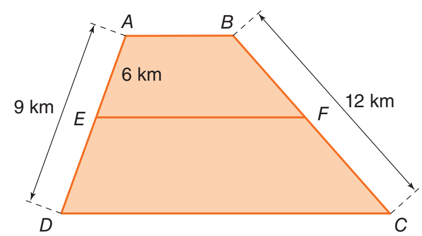
d) $r /\!/ s$



e) $r /\!/ s$



25 Uma fazenda tem a forma de um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com $AD = 9$ km e $BC = 12$ km. A partir de um ponto E do lado $\overline{AD}$, com $AE = 6$ km, o fazendeiro pretende construir uma estrada paralela a $\overline{AB}$ que cruze a fazenda até um ponto F do lado $\overline{BC}$. Calcule a distância FC.



Resolva os exercícios complementares 14, 15 e 31.

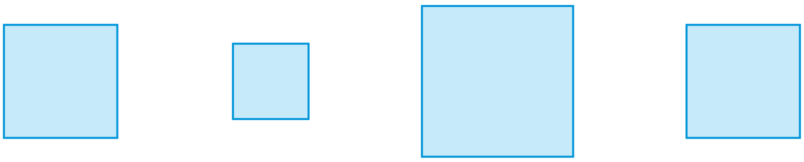
Semelhança de figuras planas

Você já deve ter visto em alguma loja dois ou mais televisores mostrando a mesma imagem. As figuras que aparecem nas telas têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Tendo o mesmo tamanho ou não, dizemos que essas figuras são semelhantes.

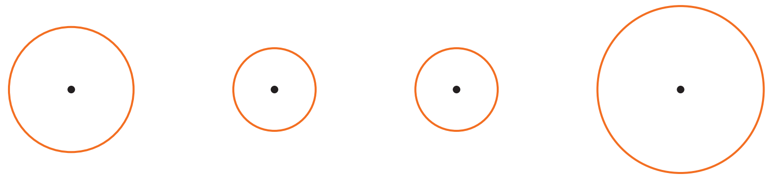
Intuitivamente, duas figuras planas são **semelhantes** quando têm a mesma forma, não importando se têm ou não o mesmo tamanho.

Exemplos

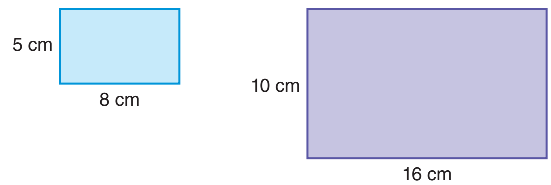
a) Todos os quadrados são figuras semelhantes entre si.



b) Todas as circunferências são figuras semelhantes entre si.



c) Dois retângulos são semelhantes somente quando os lados de um deles são proporcionais aos do outro.



$$\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$$

Nota:

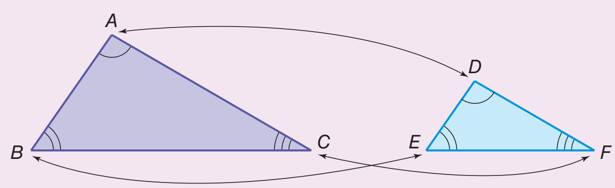
1. Indica-se a semelhança de duas figuras A e B por $A \sim B$ (lemos: "A é semelhante a B").
2. Se duas figuras semelhantes tiverem o mesmo tamanho, então elas são congruentes. A congruência é um caso particular da semelhança.

Semelhança de triângulos

O conceito intuitivo de semelhança é muito importante, porém devemos formalizá-lo. Para isso, adotamos a definição a seguir.

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro tal que:

- ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
- lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais.



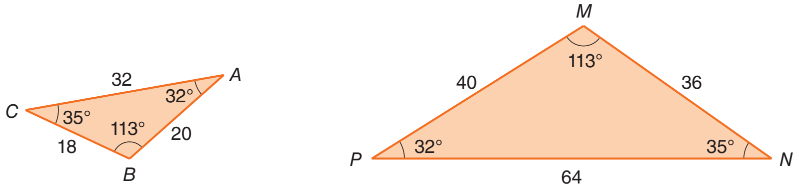
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

O número k, tal que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$, é chamado de **razão de semelhança** do triângulo ABC para o triângulo DEF.

Notas:

1. Ao indicar a semelhança por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ estamos afirmando que os vértices A, B e C são, respectivamente, os correspondentes dos vértices D, E e F.
2. Lados opostos a ângulos correspondentes são chamados de **lados correspondentes** (ou lados homólogos).

Exemplo



Os triângulos *ABC* e *PMN* são semelhantes, pois a correspondência que associa os vértices *A*, *B* e *C* aos vértices *P*, *M* e *N*, respectivamente, é tal que:

- ângulos de vértices correspondentes são congruentes (têm medidas iguais): $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{M}$ e $\hat{C} \cong \hat{N}$;
- lados correspondentes são proporcionais: $\frac{AB}{PM} = \frac{BC}{MN} = \frac{CA}{NP} \Rightarrow \frac{20}{40} = \frac{18}{36} = \frac{32}{64}$.

A razão de semelhança *k* do triângulo *ABC* para o triângulo *PMN* é a razão entre a medida de um lado do triângulo *ABC* e a medida do lado correspondente no triângulo *PMN*, nessa ordem, isto é: $\frac{AB}{PM} = \frac{BC}{MN} = \frac{CA}{NP} = k \Rightarrow \frac{20}{40} = \frac{18}{36} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$. Isso significa que cada lado do triângulo *ABC* mede metade da medida do lado correspondente no triângulo *PMN*.

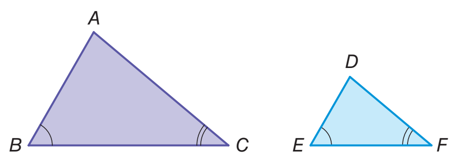
Analogamente, a razão de semelhança do triângulo *PMN* para o triângulo *ABC* é dada por $\frac{40}{20} = \frac{36}{18} = \frac{64}{32} = \frac{2}{1}$, o que significa que cada lado do triângulo *PMN* mede o dobro da medida do lado correspondente no triângulo *ABC*.

Casos de semelhança de triângulos

Pela definição de semelhança de triângulos é necessário que sejam obedecidas seis condições: três congruências e três proporcionalidades. Porém, escolhendo adequadamente algumas dentre essas seis condições, percebemos que, se elas forem obedecidas, as outras também o serão. Qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a semelhança de dois triângulos é chamado de **caso de semelhança** (ou critério de semelhança). A seguir, apresentamos os casos principais.

Caso AA (ângulo-ângulo)

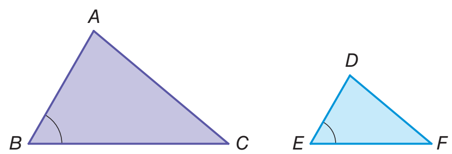
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes.



$$\left.\begin{matrix}\hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Caso LAL (lado-ângulo-lado)

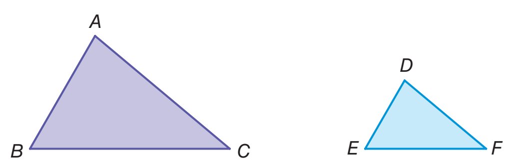
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados, respectivamente, proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes.



$$\left.\begin{matrix}\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \\ \hat{B} \cong \hat{E}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Caso LLL (lado-lado-lado)

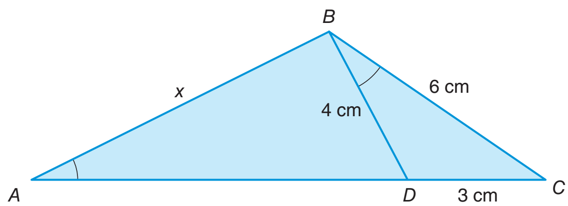
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente, proporcionais.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

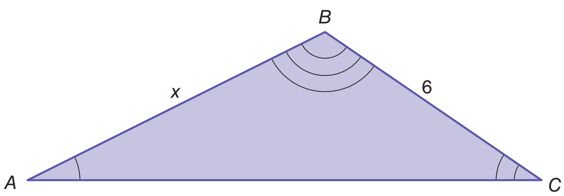
EXERCÍCIO RESOLVIDO

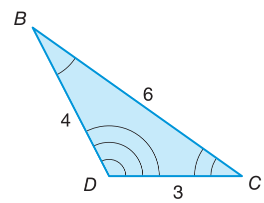
10 Determinar a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC abaixo, sabendo que $B\hat{A}C \cong D\hat{B}C$.



Resolução

Separando os triângulos ABC e BDC e observando que $B\hat{A}C \cong D\hat{B}C$ e $B\hat{C}A \cong B\hat{C}D$ ($\hat{C}$ é ângulo comum aos dois triângulos), concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle BDC$, pelo caso AA. Marcando os ângulos congruentes com o mesmo número de arquinhos, temos os triângulos abaixo.





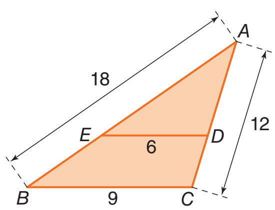
Fazendo a proporção entre os lados correspondentes, temos:

$$\frac{x}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 8$$

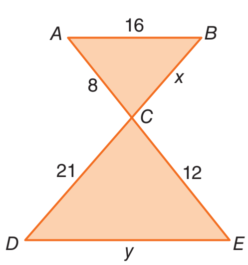
Logo, o lado $\overline{AB}$ mede 8 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

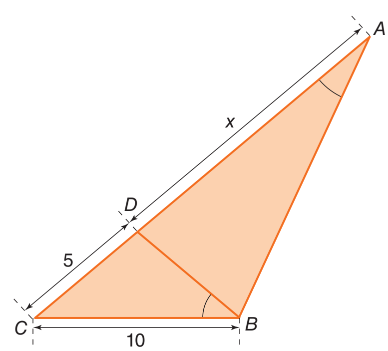
26 No triângulo ABC abaixo, o segmento $\overline{ED}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Determine as medidas AE e AD.



27 Na figura abaixo, $\overline{AB} /\!/ \overline{DE}$. Determine as medidas x e y.



28 (Unir-RO) Na figura, tem-se $D\hat{A}B \cong D\hat{B}C$. A medida x é:



a) 12
b) 13
c) 14
d) 15
e) 16

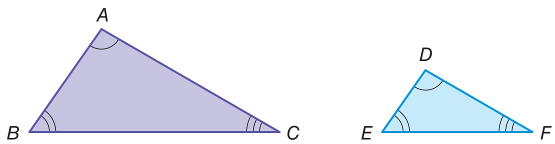
Resolva os exercícios complementares 16 e 32 a 34.

Cálculo da razão de semelhança de dois triângulos

Conforme já definimos, a razão de semelhança entre dois triângulos é a razão entre dois lados correspondentes, em determinada ordem. Demonstra-se que essa razão pode ser calculada como a razão entre dois segmentos correspondentes quaisquer nos dois triângulos: alturas, medianas, bissetrizes etc. A seguir, vamos demonstrar esse fato em relação às alturas correspondentes de dois triângulos semelhantes.

Demonstração

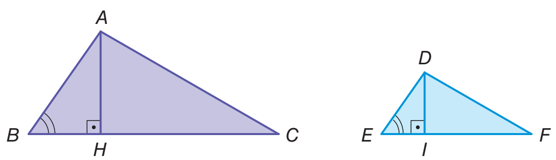
Consideremos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



A razão de semelhança do triângulo ABC para DEF é o número k tal que:

$$k = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad \text{(I)}$$

Traçando as alturas correspondentes $\overline{AH}$ e $\overline{DI}$, concluímos, pelo caso AA, que os triângulos ABH e DEI são semelhantes:



Logo, temos:

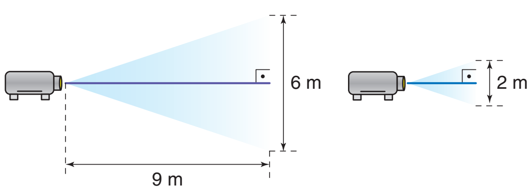
$$\frac{AH}{DI} = \frac{AB}{DE} \quad \text{(II)}$$

Em (I), observamos que $\frac{AB}{DE} = k$; logo, de (II), podemos concluir que $\frac{AH}{DI} = k$, ou seja, a razão entre as alturas correspondentes $\overline{AH}$ e $\overline{DI}$ é a razão de semelhança entre os triângulos.

De maneira análoga, podemos demonstrar que a razão de semelhança se mantém para dois comprimentos correspondentes quaisquer: medianas, bissetrizes, perímetros etc.

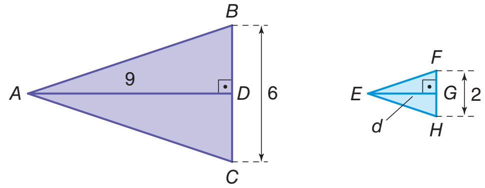
EXERCÍCIO RESOLVIDO

11 Um projetor, colocado a 9 m de distância de uma tela, projeta um retângulo de altura 6 m. A que distância da tela deve ser colocado o projetor para que o retângulo projetado tenha 2 m de altura?



Resolução

Sendo d a distância procurada, esquematizamos:



Temos: $\triangle ABC \sim \triangle EFG$, e a razão de semelhança é a razão entre dois comprimentos correspondentes quaisquer. Assim:

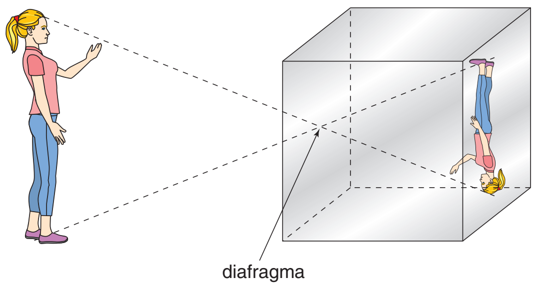
$$\frac{BC}{FH} = \frac{AD}{EG} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{9}{d}$$

$$\therefore 6d = 18 \Rightarrow d = 3$$

Logo, a distância entre o projetor e a tela deve ser 3 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

29 O esquema abaixo, fora de escala, representa uma pessoa em frente a uma máquina fotográfica cuja base é paralela ao piso plano e horizontal.



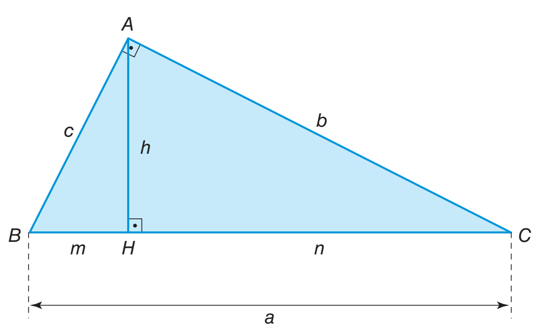
Se a distância entre a pessoa e o diafragma da máquina é 3 m, a distância entre o diafragma e o filme é 6 cm e a altura da pessoa é 1,75 m, calcule a altura, em centímetro, da imagem da pessoa projetada no filme.

30 Em uma noite de lua cheia, Paulo e Renata realizaram a seguinte experiência: Paulo fechou um dos olhos e Renata segurou uma moeda de 2,5 cm de diâmetro entre a Lua e o olho aberto de Paulo, de modo que o jovem visse a moeda coincidindo com a imagem do disco lunar. A seguir, mediram a distância entre a moeda e o olho aberto de Paulo, obtendo 290 cm. Sabendo que a distância da Terra à Lua é $4 \cdot 10^5$ km, os jovens estimaram a medida do diâmetro da Lua. Com esses dados, que medida, em quilômetro, obtiveram para o diâmetro da Lua?

Relações métricas no triângulo retângulo

Considerando o triângulo retângulo ABC abaixo, temos:

- b e c são as medidas dos catetos;
- a é a medida da hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- m é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- n é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

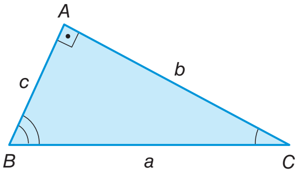


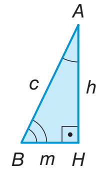
Vamos demonstrar as seguintes relações métricas:

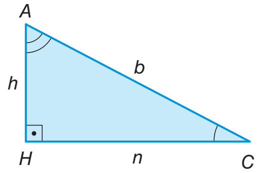
$a \cdot h = b \cdot c$	$c \cdot h = b \cdot m$	$a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras)
$c^2 = a \cdot m$	$b \cdot h = c \cdot n$	
$b^2 = a \cdot n$	$h^2 = m \cdot n$	

Demonstrações

No triângulo retângulo *ABC* podem ser observados três triângulos semelhantes entre si:







Assim, temos:

• $\triangle ABC \sim \triangle HBA \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$

Logo: $ah = bc$; $c^2 = am$; $ch = bm$

• $\triangle ABC \sim \triangle HAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$

Logo: $b^2 = an$; $ah = bc$; $bh = cn$

• $\triangle HBA \sim \triangle HAC \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$

Logo: $bh = cn$; $ch = bm$; $h^2 = mn$

• Para demonstrar o teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, obtendo:

$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $n + m = a$, concluímos que: $b^2 + c^2 = a^2$

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Teorema de Pitágoras*.

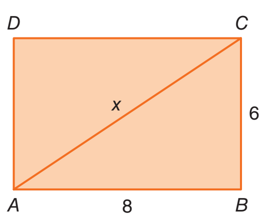
EXERCÍCIO RESOLVIDO

12 Em um retângulo *ABCD*, tem-se $AB = 8$ cm e $BC = 6$ cm. Calcular:

a) a medida da diagonal $\overline{AC}$;
b) a distância do ponto *B* à diagonal $\overline{AC}$;
c) a medida da projeção ortogonal do lado $\overline{AB}$ sobre a diagonal $\overline{AC}$.

Resolução

a) Traçando a diagonal $\overline{AC}$, obtemos o triângulo retângulo *ABC*.

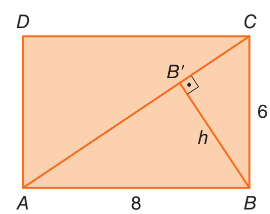


Indicando por *x* a medida, em centímetro, dessa diagonal, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 100$$
$$\therefore x = +10 \text{ ou } x = -10$$

Excluímos o valor -10, porque *x* é necessariamente positivo; logo, a medida da diagonal $\overline{AC}$ é 10 cm.

b) A distância de *B* à diagonal $\overline{AC}$ é a medida *h* da altura $\overline{BB'}$ relativa à hipotenusa do triângulo retângulo *ABC*.



Uma das relações métricas no triângulo retângulo estabelece que o produto da medida da hipotenusa e da sua altura relativa é igual ao produto da medida dos catetos. Assim, no triângulo *ABC*, temos:

$$10h = 8 \cdot 6 \Rightarrow h = 4{,}8$$

Concluímos, então, que B dista 4,8 cm da diagonal $\overline{AC}$.

c) Observando a figura apresentada no item **b**, vemos que a projeção ortogonal do lado $\overline{AB}$ sobre a diagonal $\overline{AC}$ é o segmento $\overline{AB'}$.

Uma relação métrica no triângulo retângulo garante que o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto.

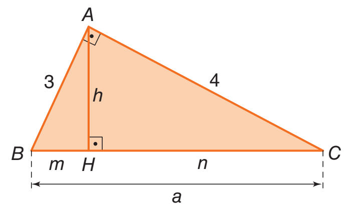
Indicando por *y* a medida da projeção $\overline{AB'}$ do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{AC}$, temos:

$$8^2 = 10y \Rightarrow y = 6{,}4$$

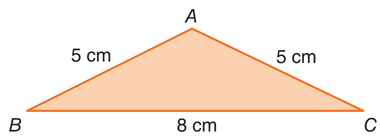
Concluímos, então, que AB' é igual a 6,4 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

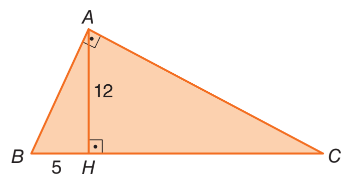
31 Determine as medidas a, h, m e n no triângulo retângulo ABC a seguir.



32 Calcule a medida da altura relativa à base $\overline{BC}$ do triângulo isósceles a seguir.



33 No triângulo retângulo ABC abaixo, calcule a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

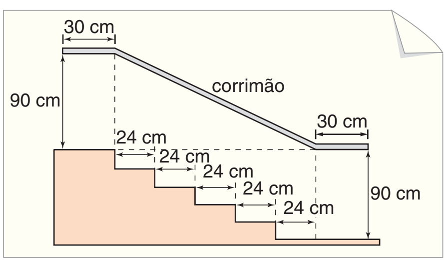


34 Calcule a medida d da diagonal de um quadrado de lado a.

35 Calcule a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado a.

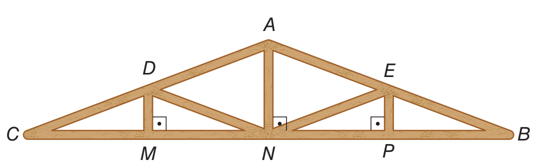
36 (UFPE) Uma embarcação está presa ao cais por um cabo horizontal de comprimento 2,9 m. Quando a maré baixar 2,0 m, qual será a distância, em decímetro, medida na horizontal, da embarcação ao cais?

37 (Enem) Na figura abaixo, que representa o projeto de uma escada com cinco degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:



a) 1,8 m **b)** 1,9 m **c)** 2,0 m **d)** 2,1 m **e)** 2,2 m

38 Nas armações de madeira que suportam telhados, são construídas estruturas com a forma de triângulos isósceles, ABC, de base $\overline{BC}$, chamadas de tesoura de telhado, conforme mostra a figura abaixo, em que N, M e P dividem a base $\overline{BC}$ em quatro partes congruentes.



Se $AN = 3$ m e $ND = 2{,}5$ m, calcule a metragem linear necessária de caibros para a construção dessa estrutura.

Resolva os exercícios complementares 17 e 35 a 39.

Seção 10.3

Objetivos

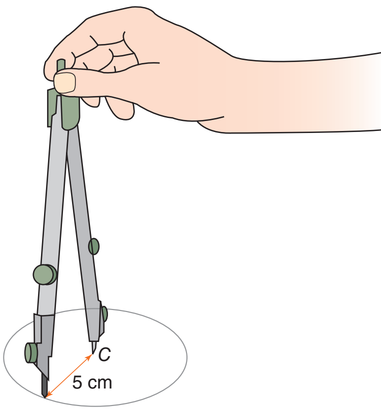
- **Usar** as propriedades das cordas na resolução de problemas.
- **Relacionar** as medidas dos ângulos central e inscrito com a medida do arco determinado por eles.
- **Calcular** o comprimento de uma circunferência.

Termos e conceitos

- circunferência
- círculo

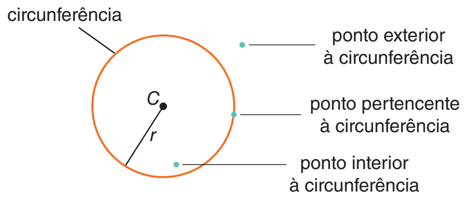
Circunferência e círculo

Vamos considerar um compasso com abertura de 5 cm, ou seja, que a distância entre a ponta de grafite e a ponta-seca seja 5 cm. Ao fixar a ponta-seca em um ponto C da folha de caderno e desenhar uma linha com a ponta de grafite, fazendo-a girar uma volta completa em torno do ponto C, estamos marcando todos os pontos da folha que distam 5 cm de C. Essa linha é chamada de circunferência de centro C e raio 5 cm.

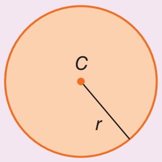


Sendo C um ponto de um plano e r uma medida positiva, chama-se **circunferência** de centro C e raio r o conjunto dos pontos desse plano que distam de C a medida r.

Um ponto P do plano que contém uma circunferência de centro C e raio r é interior a ela quando a distância PC é menor que o raio; e é exterior a ela quando a distância PC é maior que o raio, conforme mostra a figura abaixo.



A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.

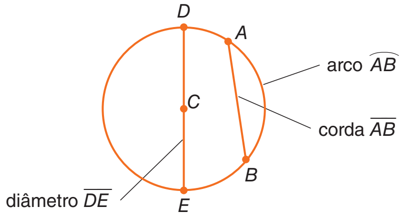


Nota:

O círculo é uma superfície plana cujo contorno é uma circunferência.

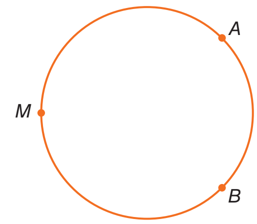
Arcos e cordas

Dois pontos, A e B, de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas de **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro C da circunferência é chamada de **diâmetro**.



Notas:

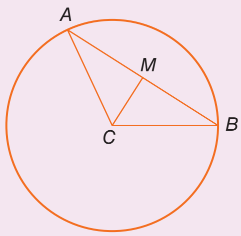
1. Como os pontos A e B dividem a circunferência em dois arcos distintos, a notação $\overset{\frown}{AB}$ é ambígua, pois não determina qual dos dois arcos está sendo representado. Para eliminar essa ambiguidade, podemos considerar, além de A e B, um terceiro ponto M do arco considerado e representá-lo por $\overset{\frown}{AMB}$. Observe o exemplo ao lado.
2. Se os pontos A e B coincidem, temos um arco nulo e um arco de uma volta completa.
3. Qualquer diâmetro $\overline{AB}$ de uma circunferência de raio r divide-a em duas partes chamadas de semicircunferências de raio r e diâmetro $\overline{AB}$.



A notação $\overset{\frown}{AMB}$ indica o arco que passa por M e tem extremos A e B.

Propriedade das cordas

Em uma circunferência de centro C, sejam dois pontos distintos A e B, e M um ponto da corda $\overline{AB}$. O segmento $\overline{CM}$ é perpendicular à corda $\overline{AB}$ se, e somente se, M é o ponto médio dessa corda.



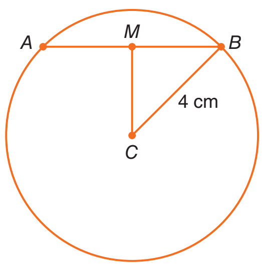
Justificativa

Observe na figura acima que o triângulo ABC é isósceles, pois $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são raios da circunferência. Em todo triângulo isósceles, a mediana coincide com a altura. Então:

- se $\overline{CM}$ é perpendicular à corda, $\overline{CM}$ é altura do triângulo, portanto, também é mediana desse triângulo. Logo, M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$;
- se M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$, $\overline{CM}$ é mediana do triângulo, portanto também é altura desse triângulo. Logo, $\overline{CM}$ é perpendicular à corda $\overline{AB}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

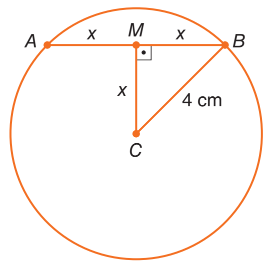
13 Na circunferência de centro C e raio 4 cm, representada abaixo, o ponto M da corda $\overline{AB}$ é tal que $AM = BM = CM$. Calcular a medida dessa corda.



Resolução

Como M é o ponto médio de $\overline{AB}$, pois $AM = BM$, temos $\overline{CM} \perp \overline{AB}$ (lemos $\perp$ como "é perpendicular a").

Indicando por x a medida de cada um dos segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$, temos:



$x^2 + x^2 = 4^2 \Rightarrow 2x^2 = 16$

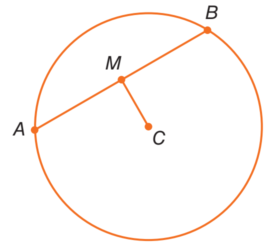
$\therefore\ x^2 = 8$

$\therefore\ x = 2\sqrt{2}$

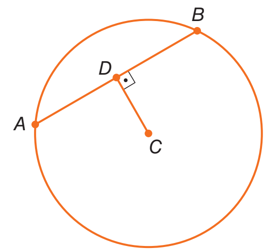
Logo, a medida da corda $\overline{AB}$ é $4\sqrt{2}$ cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

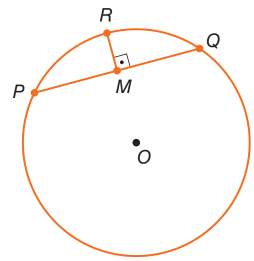
39 Na circunferência de centro C, abaixo, a corda $\overline{AB}$ tem ponto médio M e mede 18 cm. Dado que $\overline{BC}$ mede o dobro de $\overline{CM}$, determine a medida do raio dessa circunferência.



40 Na circunferência de centro C e raio 15 cm, representada abaixo, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{BD}$ mede 3 cm a mais que $\overline{CD}$. Calcule a medida da corda $\overline{AB}$.



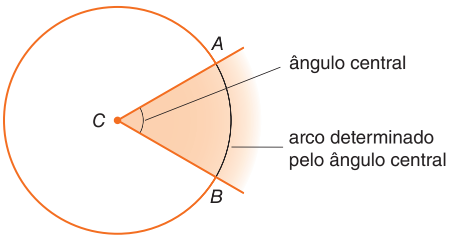
41 Na figura ao lado, M é o ponto médio da corda $\overline{PQ}$ da circunferência e $PQ = 24$ cm. O segmento $\overline{RM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e $RM = 8$ cm. Calcule a medida do raio da circunferência.



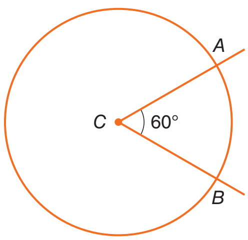
Resolva o exercício complementar 40.

Ângulo central de uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice é o centro C de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.



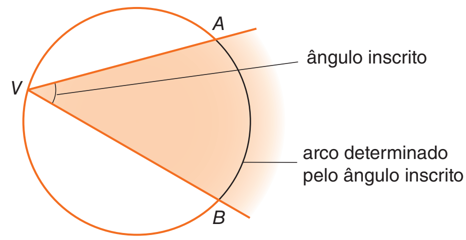
Define-se a medida, em grau, de um arco de circunferência como a medida do ângulo central que o determina. Por exemplo, na circunferência de centro C:



$$m(A\hat{C}B) = 60° \Rightarrow m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$$

Ângulo inscrito em uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** nessa circunferência.



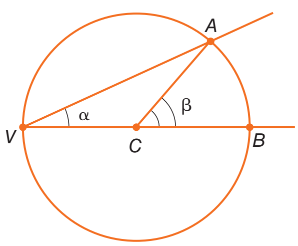
Um ângulo inscrito e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de **ângulos correspondentes** nessa circunferência.

Propriedade

A medida de um ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração

Faremos a demonstração do caso fundamental, que é aquele em que um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro C da circunferência.

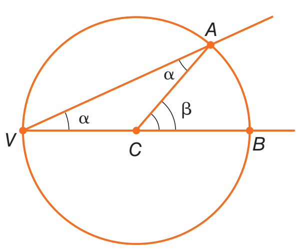


$m(A\hat{V}C) = \alpha$

$m(A\hat{C}B) = \beta$

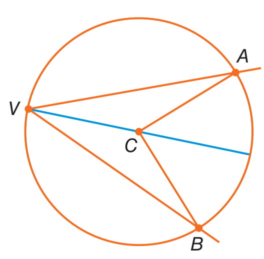
O triângulo VCA é isósceles, pois $\overline{CV} \cong \overline{CA}$.

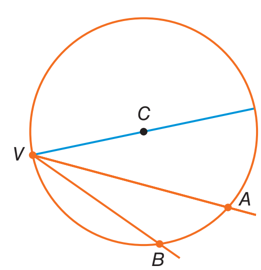
Logo: $C\hat{V}A \cong C\hat{A}V$



Como β é medida do ângulo externo $A\hat{C}B$ do triângulo ACV, temos: $\beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta}{2}$

Para a demonstração dos casos em que o centro C da circunferência é interior ou exterior ao ângulo, basta traçar um diâmetro auxiliar a partir do vértice do ângulo e aplicar duas vezes o caso fundamental.

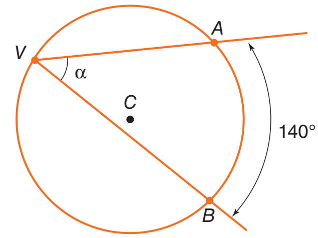




Exemplo

Na figura, a medida do ângulo central $A\hat{C}B$ é igual à medida do arco que ele determina na circunferência, isto é, 140°. Como a medida α do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente, concluímos que:

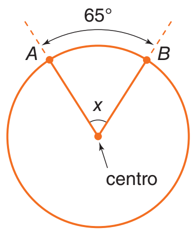
$$\alpha = \frac{140°}{2} \Rightarrow \alpha = 70°$$



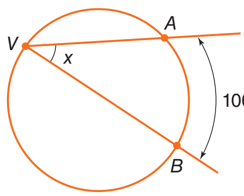
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42 Determine a medida x, em grau, em cada uma das circunferências:

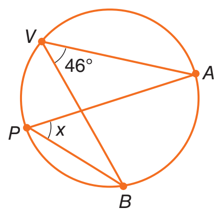
a)



b)

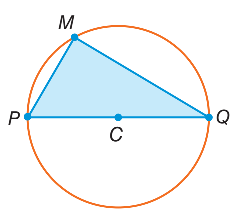


c)



43 Um triângulo é inscrito em uma semicircunferência quando seus três vértices pertencem a ela e um de seus lados passa pelo centro da semicircunferência.

a) Calcule a medida do ângulo $P\hat{M}Q$ no triângulo inscrito na semicircunferência seguinte.

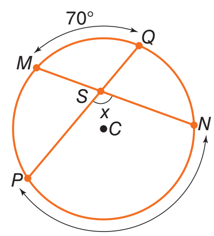


(*C* é o centro da circunferência.)

b) Reescreva e complete a sentença abaixo no seu caderno, tornando-a verdadeira.
Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é ... .

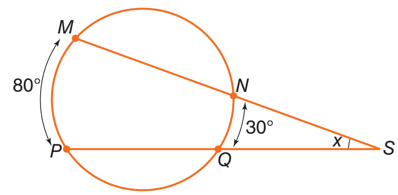
44 A superfície de um lago tem a forma de um círculo com 0,5 km de raio. Um barco partiu de um ponto A, junto à margem, e percorreu um trajeto reto até um ponto B da margem tal que a distância entre B e o diâmetro $\overline{AC}$ é 0,48 km. Qual foi a distância percorrida pelo barco de A até B, dado que $AB < BC$?

45 Na circunferência de centro C, determine a medida x, em grau, do ângulo $P\hat{S}N$.



(*Sugestão*: Trace o segmento $\overline{PM}$ e observe os ângulos inscritos $P\hat{M}N$ e $M\hat{P}Q$.)

46 Determine a medida x, em grau, do ângulo $P\hat{S}M$, na figura:

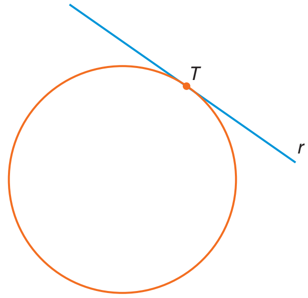


(*Sugestão*: Trace o segmento $\overline{PN}$ e observe os ângulos inscritos $P\hat{N}M$ e $N\hat{P}Q$.)

47 Em um espetáculo de acrobacias aéreas, um avião realiza um *loop* circular em um plano vertical α. De um ponto P do solo, pertencente ao plano α, observa-se o movimento do avião ao descrever um arco $\overset{\frown}{AB}$ de 60°. Sabendo que $m(A\hat{P}B) = 45°$, calcule a medida do maior arco $\overset{\frown}{CD}$ descrito pelo avião, visto sob o mesmo ângulo $A\hat{P}B$.

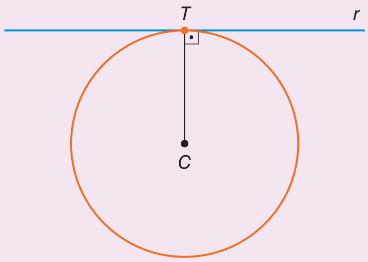
Reta tangente a uma circunferência

Uma reta r e uma circunferência de um mesmo plano são tangentes entre si quando têm um único ponto T em comum.



Propriedades

P1. Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

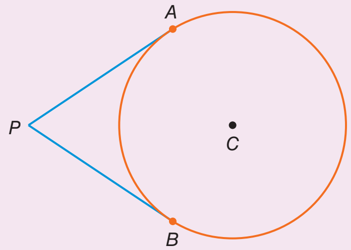


$\overline{CT} \perp r$

Justificativa

A menor distância entre o centro C e a reta tangente r é a medida do raio da circunferência. Como a menor distância entre um ponto e uma reta corresponde à medida do segmento que liga o ponto à reta perpendicularmente, concluímos que $\overline{CT}$ é perpendicular a r.

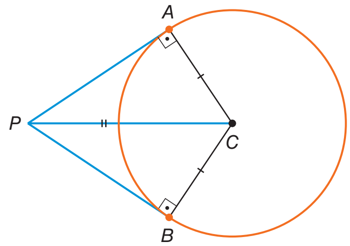
P2. Se P é um ponto exterior a uma circunferência e os pontos A e B pertencem a ela, de modo que $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência, então $PA = PB$.



$PA = PB$

Justificativa

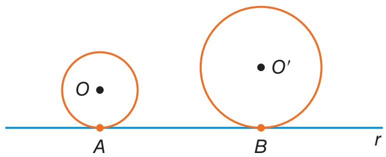
Traçando os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{PC}$, em que C é o centro da circunferência, obtemos os triângulos retângulos PAC e PBC da figura abaixo.



Como $P\hat{A}C \cong P\hat{B}C$, $\overline{PC}$ é hipotenusa comum aos dois triângulos e $CA = CB$, temos, pelo caso RHC, que os triângulos PAC e PBC são congruentes. Logo, $PA = PB$.

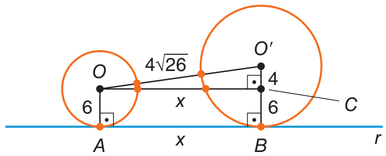
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 A reta r tangencia as circunferências de centros O e O' e raios 6 cm e 10 cm, representadas abaixo. Dado que a distância entre O e O' é $4\sqrt{26}$ cm, calcular a distância entre os pontos de tangência A e B.



Resolução

A reta tangente r é perpendicular aos raios $\overline{OA}$ e $\overline{O'B}$. Indicando por x a medida, em cm, do segmento $\overline{AB}$ e traçando os segmentos $\overline{OO'}$, $\overline{OA}$, $\overline{O'B}$ e a reta s, paralela a r, que passa por O e intercepta $\overline{O'B}$ em C, temos:

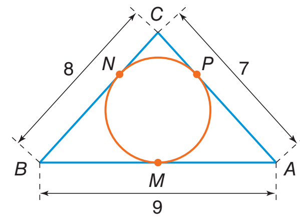


$x^2 + 4^2 = (4\sqrt{26})^2 \Rightarrow x^2 + 16 = 416$

$\therefore\ x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$

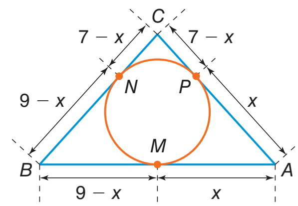
Logo, a distância entre os pontos de tangência é 20 cm.

15 A figura mostra uma circunferência tangenciando os três lados do triângulo ABC nos pontos M, N e P. Calcular a medida do segmento $\overline{AM}$.



Resolução

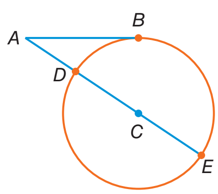
A propriedade dos segmentos tangentes permite concluir que: $AM = AP$, $CN = CP$ e $BN = BM$. Assim, indicando por x a medida do segmento $\overline{AM}$, temos:



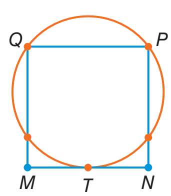
Logo: $9 - x + 7 - x = 8 \Rightarrow x = 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

48 Na circunferência de centro C, a seguir, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ medem 8 cm e 16 cm, respectivamente, e $\overline{AB}$ tangencia a circunferência em B. Calcule a medida do segmento $\overline{AD}$.



49 Os vértices P e Q do quadrado $MNPQ$, abaixo, pertencem à circunferência; e o lado $\overline{MN}$ tangencia essa circunferência no ponto T. Dado que $MN = 8$ cm, determine o raio da circunferência.



50 (FUE-RN) Na figura, o segmento $\overline{AB}$ mede 8 cm e é tangente, em A e B, às circunferências de centros O e O' e raios 4 cm e 2 cm.

A distância entre O e O' é:

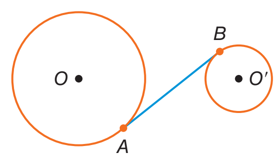
a) 9 cm

b) 9,2 cm

c) 9,4 cm

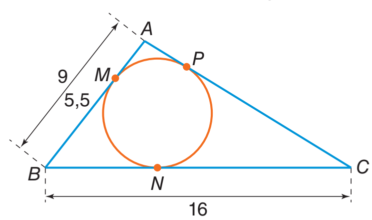
d) 10 cm

e) 10,2 cm



(*Sugestão*: Construa o triângulo POO', em que P é o ponto de encontro da reta $\overleftrightarrow{OA}$ com a reta que passa por O' e é paralela a $\overline{AB}$.)

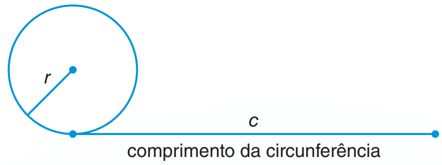
51 A circunferência, representada abaixo, tangencia os lados do triângulo ABC nos pontos M, N e P. Calcule a medida do lado $\overline{AC}$ desse triângulo.



Resolva os exercícios complementares 18 e 19.

Comprimento da circunferência

Todas as circunferências são figuras semelhantes entre si. Portanto, em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento c e a medida $2r$ de seu diâmetro é constante. Costuma-se indicar essa constante pela letra grega π (pi). Assim:

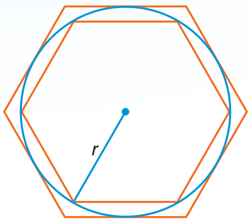


$$\frac{c}{2r} = \pi$$

O matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.) elaborou o primeiro método eficiente para obter sequências de números que se aproximam indefinidamente da constante π. Em uma mesma circunferência, ele construiu polígonos regulares inscritos e circunscritos e dividiu o perímetro de cada um pelo diâmetro da circunferência.

DUBY, Georges. *Atlas historique mondial*. Paris: Larousse, 2003.

O hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio r, por exemplo, tem perímetro $6r$, e o hexágono regular circunscrito a essa circunferência tem perímetro aproximado de $6{,}928r$. Veja a figura:



perímetro da circunferência $= c$
perímetro do hexágono inscrito $= 6r$
perímetro do hexágono circunscrito $\approx 6{,}928r$

Observe que o perímetro do hexágono inscrito é menor que o comprimento c da circunferência, que, por sua vez, é menor que o perímetro do hexágono circunscrito. Ou seja:

$$6r < c < 6{,}928r$$

Dividindo esses perímetros pelo diâmetro $2r$ da circunferência, Arquimedes restringiu o valor de π ao seguinte intervalo:

$$\frac{6r}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{6{,}928r}{2r} \Rightarrow 3 < \pi < 3{,}464$$

Quanto maior o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito, mais próximos do comprimento da circunferência estarão os perímetros desses polígonos. Arquimedes iniciou seus cálculos com hexágonos regulares e foi dobrando o número de lados até chegar a 96 lados para os polígonos, inscrito e circunscrito, obtendo a aproximação:

$$\pi \approx 3{,}14$$

Atualmente, sabe-se que a constante π é um número irracional e, com a ajuda do computador, é possível calcular aproximações com bilhões de casas decimais. Como curiosidade, veja a aproximação do número π com trinta casas decimais:

$$\pi \approx 3{,}141592653589793238462643383279$$

Vimos que a razão entre o comprimento c de uma circunferência e a medida $2r$ do diâmetro é igual a π, isto é: $\frac{c}{2r} = \pi$. Isolando c nessa igualdade, obtemos a seguinte fórmula para o cálculo do **comprimento de uma circunferência** de raio r:

$$\boxed{c = 2\pi r}$$

Exemplo

O comprimento c de uma circunferência de raio 5 cm é:

$$c = 2\pi \cdot 5 \text{ cm} \Rightarrow c = 10\pi \text{ cm}$$

Para obter uma aproximação de c, podemos substituir π por 3,14:

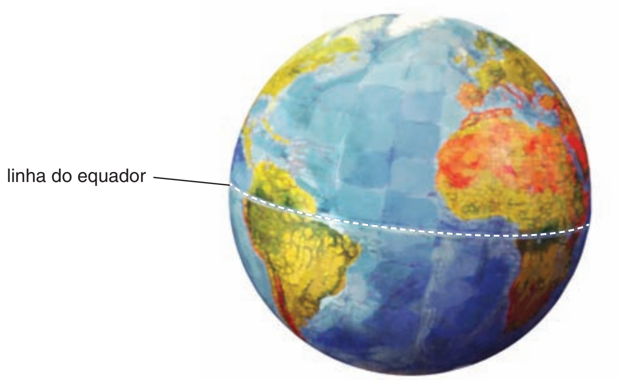
$$c \approx 10 \cdot 3{,}14 \text{ cm} \Rightarrow c \approx 31{,}4 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

52 Uma costureira pretende aplicar uma tira de renda no perímetro de uma toalha circular com 2 m de diâmetro. Quantos metros de renda serão necessários?

53 Em uma estrada de ferro, a distância entre duas estações, A e B, é 12,56 km. Quantas voltas dá cada roda de um trem para ir de A até B se cada uma tem 0,5 m de raio? (Adote $\pi = 3{,}14$.)

54 A circunferência máxima contida na superfície terrestre e que divide o planeta nos hemisférios norte e sul é chamada de **linha do equador**. Seu raio é 6.370 km.



a) Adotando $\pi = 3{,}14$, calcule o comprimento da linha do equador, em km.

b) Um navio percorreu um arco de 10° sobre a linha do equador. Calcule o comprimento, em km, do trecho percorrido pelo navio.

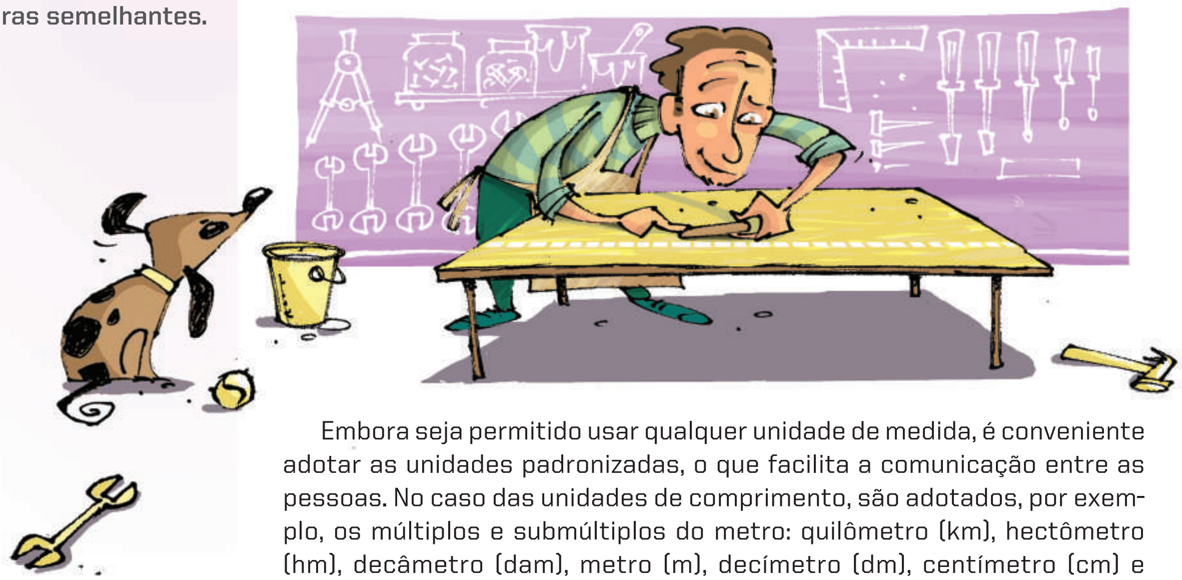
Resolva os exercícios complementares 20, 21, 41 e 42.

Cálculo de áreas

Objetivos

- **Calcular** a área de polígonos, círculos e das partes do círculo.
- **Resolver** problemas que envolvem a área de figuras semelhantes.

Um procedimento comum nas medições de grandezas é adotar uma **unidade de medida** e compará-la com a grandeza que se pretende medir. Por exemplo, para medir o comprimento de uma mesa podemos adotar como unidade o comprimento de um palito de picolé e avaliar quantas vezes essa unidade cabe no comprimento da mesa; o número de vezes é o comprimento da mesa na unidade adotada.

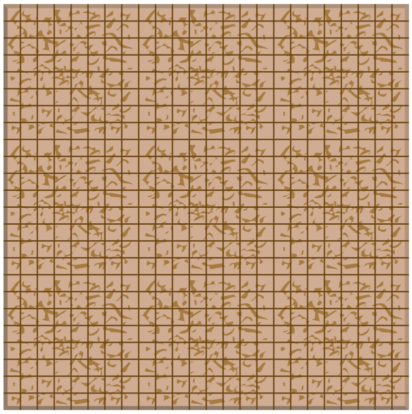


Embora seja permitido usar qualquer unidade de medida, é conveniente adotar as unidades padronizadas, o que facilita a comunicação entre as pessoas. No caso das unidades de comprimento, são adotados, por exemplo, os múltiplos e submúltiplos do metro: quilômetro (km), hectômetro (hm), decâmetro (dam), metro (m), decímetro (dm), centímetro (cm) e milímetro (mm).

A seguir, vamos estudar o conceito de área e as unidades de medida que habitualmente empregamos para calculá-la.

O conceito de área

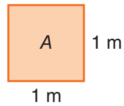
A figura a seguir representa o piso de uma sala, que foi completamente revestido com 576 ladrilhos de mesmo tamanho.



Considerando a superfície ocupada por um ladrilho como uma unidade u de área, dizemos que a área do piso dessa sala é 576 u.

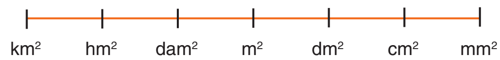
> Medir a área de uma superfície significa compará-la com uma superfície adotada como unidade.

A unidade fundamental de área é o metro quadrado, simbolizado por m^2, que é uma superfície quadrada com 1 m de lado.



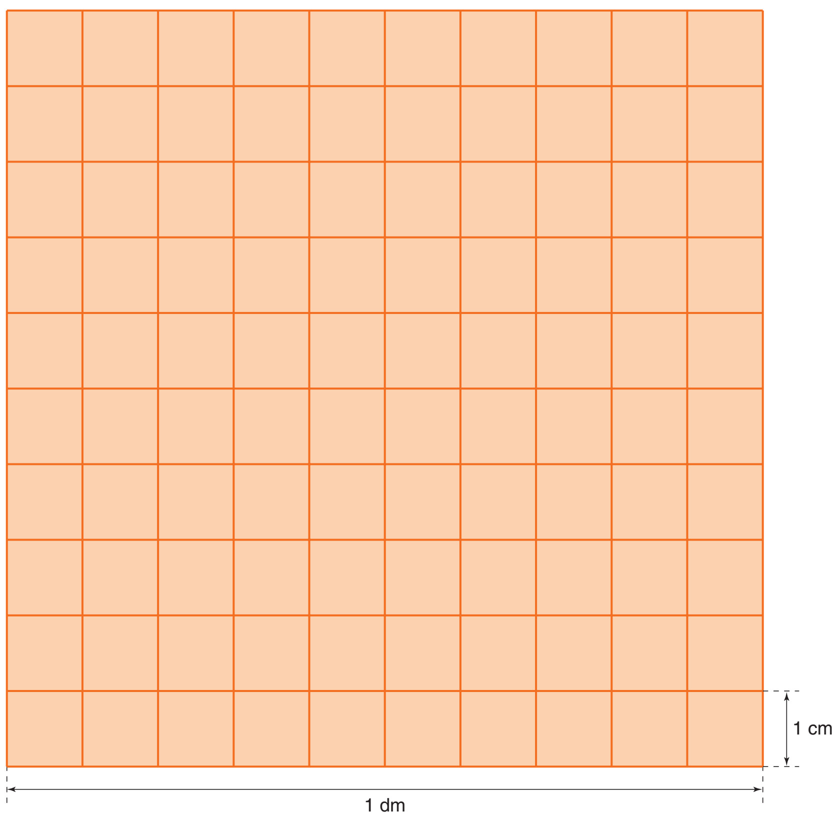
$$A = 1 \text{ m}^2$$

Analogamente, definem-se km^2, hm^2, dam^2, dm^2, cm^2 e mm^2 como quadrados com lados de 1 km, 1 hm, 1 dam, 1 dm, 1 cm e 1 mm, respectivamente. Essas unidades de área podem ser apresentadas conforme a escala abaixo:



Cada unidade dessa escala vale quantas vezes a unidade imediatamente inferior?

Para responder a essa pergunta, vamos dividir um quadrado de 1 dm de lado em quadradinhos de 1 cm de lado:



Note que dividimos o decímetro quadrado em 100 centímetros quadrados. Concluímos, então, que:

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

Usando esse mesmo raciocínio, concluímos também que:

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ hm}^2$$
$$1 \text{ hm}^2 = 100 \text{ dam}^2$$
$$1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$$
$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$
$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

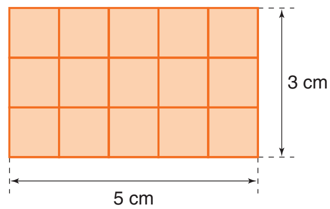
Isto é, na escala de unidades de área, cada unidade vale 100 vezes a imediatamente inferior.

Cálculo da área de alguns polígonos

Embora este item trate do cálculo da área de algumas figuras planas, é importante ressaltar que as ideias apresentadas aqui podem ser ampliadas para o cálculo de área de outras figuras planas. Por exemplo: qualquer polígono pode ser dividido em triângulos; logo, sua área pode ser calculada como a soma das áreas dos triângulos.

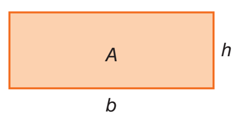
Retângulo

Consideremos um retângulo cuja base mede 5 cm e a altura mede 3 cm. Para calcular a área do retângulo, em centímetro quadrado, vamos dividi-lo em quadradinhos de lado 1 cm:



Obtivemos 5 colunas com 3 quadradinhos em cada uma; logo, o número de quadradinhos é $5 \cdot 3$. Assim, a área A do retângulo é: $A = 15 \text{ cm}^2$.

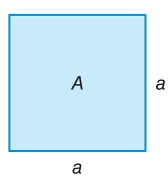
Generalizando, consideremos um retângulo cujas base e altura meçam b e h, respectivamente, em uma mesma unidade de comprimento. A área A desse retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$\boxed{A = b \cdot h}$$

Quadrado

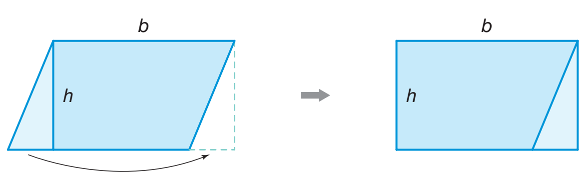
O quadrado é um retângulo; logo, sua área A é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$\boxed{A = a^2}$$

Paralelogramo

A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual à área de um retângulo de base b e altura h. Observe:

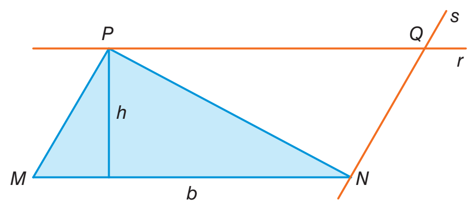


O triângulo azul no paralelogramo é congruente ao triângulo tracejado; assim, colocando o triângulo azul no lugar tracejado, obtemos um retângulo de base b e altura h. Logo, a área A do paralelogramo é o produto da medida da base pela medida da altura.

$$\boxed{A = b \cdot h}$$

Triângulo

Consideremos um triângulo NMP, cuja base $\overline{MN}$ mede b e a altura relativa a essa base mede h. Traçando por P a reta r paralela à base e por N a reta s paralela ao lado $\overline{MP}$, obtemos o paralelogramo $NMPQ$.



Como a área A do triângulo NMP é a metade da área do paralelogramo, temos:

$$\boxed{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

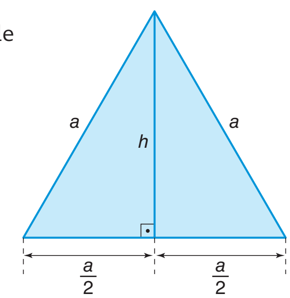
ou seja, a área do triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

16 Calcular a área do triângulo equilátero de lado a.

Resolução

Traçando a altura h, obtemos a figura ao lado. Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos retângulos formados, temos:



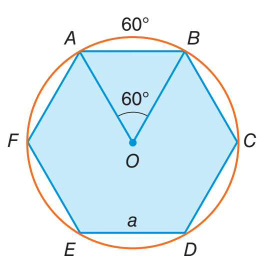
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área A desse triângulo é: $A = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

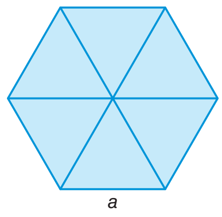
Hexágono regular

Os vértices de um hexágono regular dividem a circunferência circunscrita a ele em seis arcos congruentes; logo, cada um desses arcos mede 60°. Assim, o ângulo central correspondente a cada um desses arcos também mede 60°.



ABCDEF é um hexágono regular.
O é o centro da circunferência.

Como $OA = OB$ e $m(A\hat{O}B) = 60°$, temos $m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = 60°$; portanto, o triângulo AOB é **equilátero**. Assim, a área A de um hexágono regular de lado a é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado a, pois as diagonais que passam pelo centro O desse hexágono dividem-no em seis triângulos equiláteros de lado a:



$$A = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}$$

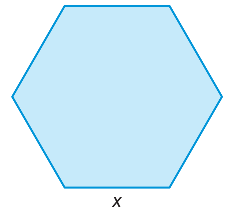
EXERCÍCIO RESOLVIDO

17 Um tipo de lajota no formato de hexágono regular é vendido em caixas de 20 peças de mesmo tamanho, totalizando 0,51 m^2. Adotando $\sqrt{3} = 1{,}7$, calcular a medida do lado de cada peça, em centímetro.

Resolução

Como $0{,}51 \text{ m}^2 = 5.100 \text{ cm}^2$, temos que a área A de cada peça hexagonal é:

$A = \dfrac{5.100}{20} \text{ cm}^2 = 255 \text{ cm}^2$



Indicando por x a medida, em centímetro, do lado de cada peça, a área A pode ser expressa por: $A = \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2}$

Assim, devemos ter:

$\dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2} = 255 \Rightarrow \dfrac{3x^2 \cdot 1{,}7}{2} = 255$

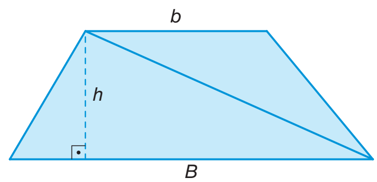
$\therefore \dfrac{5{,}1x^2}{2} = 255 \Rightarrow 5{,}1x^2 = 510$

$\therefore x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$

Concluímos, então, que o lado de cada peça mede 10 cm.

Trapézio

Traçando uma diagonal em um trapézio de altura h e bases b e B, nós o dividimos em dois triângulos de altura h em relação às bases de medidas b e B. Observe a figura ao lado.



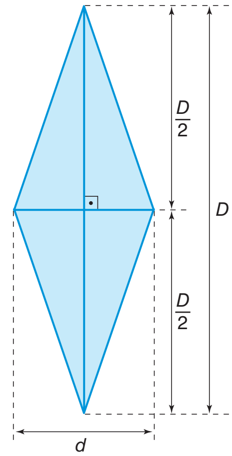
A área A do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

ou seja, a área A do trapézio é igual à metade do produto da medida da altura pela soma das medidas das bases.

Losango

As diagonais de um losango cruzam-se perpendicularmente no ponto médio de cada uma delas. Logo, sendo D e d as medidas dessas diagonais, a área A do losango é o dobro da área de um triângulo de base d e altura $\dfrac{D}{2}$:



$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{d \cdot D}{2}}$$

ou seja, a área A do losango é a metade do produto das medidas das diagonais.

Nota:

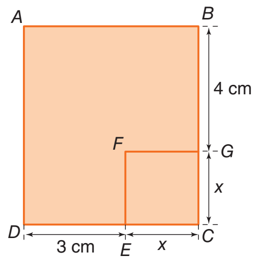
O losango também é um paralelogramo; logo, sua área pode ser calculada como a área de um paralelogramo, isto é, o produto das medidas da base e da altura.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

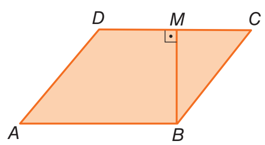
55 (Ufla-MG) Para fazer o assoalho de uma sala são necessárias 63 tábuas retangulares de 2,8 m de comprimento por 0,25 m de largura. No caso de usar tacos (peças retangulares de madeira) de 21 cm de comprimento por 7 cm de largura, o número de tacos a ser utilizado será de:

a) 840 **b)** 225 **c)** 4.410 **d)** 3.000 **e)** 9.261

56 (Covest-PE) Calcule a medida *x* do lado do quadrado *CEFG* da figura abaixo, sabendo que a área do retângulo *ABCD* é 30 cm^2.

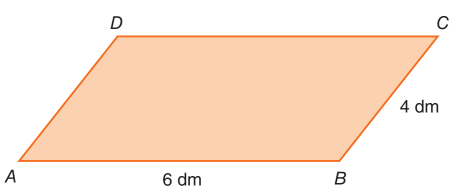


57 O paralelogramo *ABCD*, abaixo, tem perímetro 22 cm; *M* é o ponto médio de $\overline{DC}$, e $\overline{AD}$ tem 2 cm a mais que $\overline{DM}$.



Calcule a área desse paralelogramo.

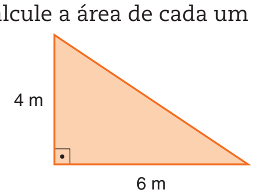
58 A medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do paralelogramo abaixo é 3 dm.



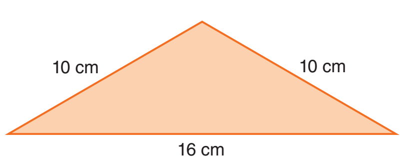
Qual é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$?

59 Calcule a área de cada um dos triângulos a seguir:

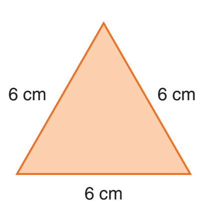
a)



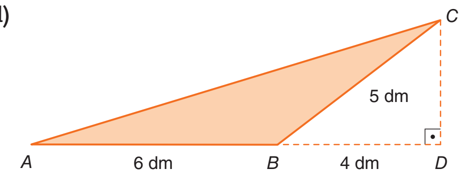
b)



c)

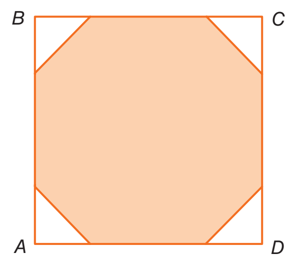


d)



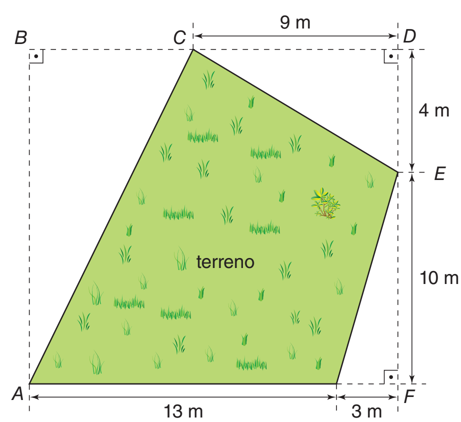
60 A altura de um triângulo equilátero mede 4 cm. Calcule a área desse triângulo.

61 (UFPB) De um quadrado *ABCD* de lado 8 cm foram retirados quatro triângulos retângulos isósceles com catetos de 2 cm, conforme figura. A área do octógono remanescente é:

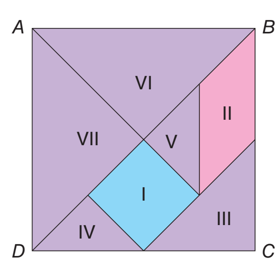


a) 42 cm^2 **b)** 48 cm^2 **c)** 56 cm^2 **d)** 58 cm^2 **e)** 60 cm^2

62 Para medir a área de um terreno, um perito circunscreveu um retângulo ao terreno, conforme mostra a figura abaixo. Qual é a área desse terreno?

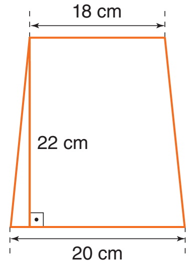


63 O *tangram* é um quebra-cabeça chinês formado por sete peças sendo: 5 triângulos retângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças podem ser colocadas lado a lado formando o seguinte quadrado *ABCD*:



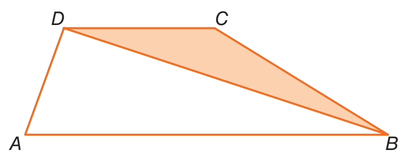
Se o lado desse quadrado mede 24 cm, calcule a área de cada uma das figuras, de I a VII, que compõem o *tangram*.

64 Um fabricante de embalagens recebeu uma encomenda de caixas de panetone. Cada caixa deve ter quatro faces em forma de trapézio, com as dimensões indicadas a seguir, e duas faces quadradas e paralelas (tampa e fundo).



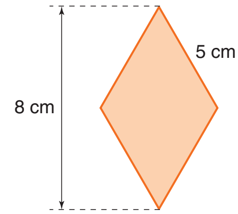
Para comprar o papelão necessário à confecção das caixas, o fabricante precisou calcular a área de uma caixa. Qual é essa área?

65 (Facceba) Na figura, a área do triângulo BCD é 6 cm², $AB = 5$ cm e $DC = 4$ cm. Com base nessas informações, pode-se concluir que a área do trapézio $ABCD$ é:

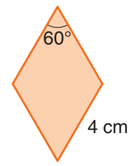


a) 12,0 cm²
b) 16,0 cm²
c) 13,5 cm²
d) 14,5 cm²
e) 14,6 cm²

66 (UFG-GO) Em um losango de lado 5 cm, uma das diagonais mede 8 cm. Calcule a área desse losango.

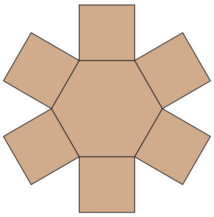


67 A área do losango representado na figura é:



a) $8\sqrt{3}$ cm²
b) $6\sqrt{3}$ cm²
c) $4\sqrt{3}$ cm²
d) $2\sqrt{3}$ cm²
e) $\sqrt{3}$ cm²

68 Para construir uma caixa de fundo hexagonal e sem tampa, um artesão recortou em papelão a figura abaixo, formada por um hexágono regular de lado 10 cm e seis quadrados. Qual é a área dessa figura?



Resolva os exercícios complementares 22 a 24 e 43.

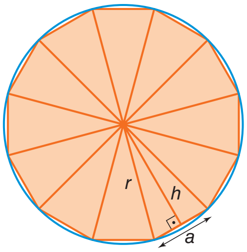
Cálculo da área do círculo e de suas partes

Círculo

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r.

A área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = \underbrace{(na)}_{\text{perímetro do polígono}} \cdot \frac{h}{2}$$



Essa área é menor que a área do círculo; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender ao infinito), verificamos que:

- o perímetro (na) do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);
- a altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;
- a área desse polígono tende a se igualar à área A do círculo.

Assim, a expressão $(na) \times \left(\frac{h}{2}\right)$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A do círculo:

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

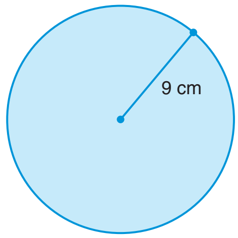
Exemplo

A área A de um círculo de raio 9 cm é dada por:

$A = \pi \cdot 9^2\ \text{cm}^2 = 81\pi\ \text{cm}^2$

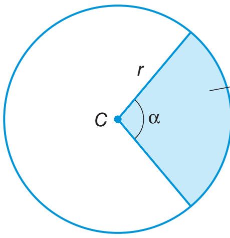
Valor aproximado:

$A \approx 81 \cdot 3{,}14\ \text{cm}^2 \Rightarrow A \approx 254{,}34\ \text{cm}^2$



Setor circular

Em um círculo, a região limitada pelos lados de um ângulo central é chamada de **setor circular**.

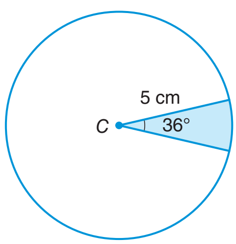


A área A_{setor} desse setor pode ser calculada por meio da seguinte regra de três:

Ângulo central		Área
$360°$	———	πr^2
α	———	A_{setor}

Exemplo

A área A_{setor} do setor circular de raio 5 cm e ângulo central de 36° é dada por:



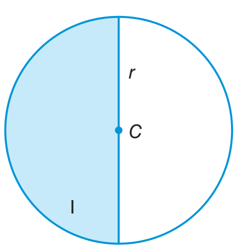
Ângulo central (grau)		Área (cm²)
360	———	$\pi \cdot 5^2$
36	———	A_{setor}

$$\Rightarrow A_{setor} = \frac{36 \cdot 25\pi}{360}\ \text{cm}^2 = \frac{5\pi}{2}\ \text{cm}^2$$

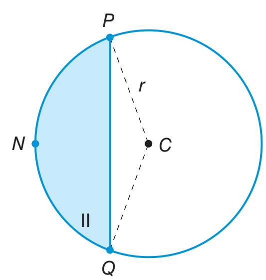
Segmento circular

Toda corda de um círculo divide-o em duas partes, chamadas de **segmentos circulares**.

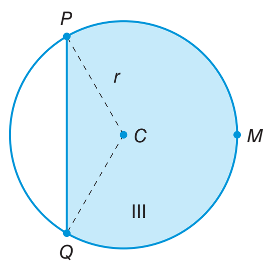
A área de um segmento circular de raio r pode ser igual, maior ou menor que a área do semicírculo de raio r. Observe como se calcula essa área em cada um dos três casos.



$$A_{seg.\ I} = \frac{\pi r^2}{2}$$



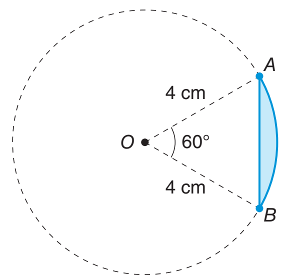
$$A_{seg.\ II} = A_{(setor\ CPNQ)} - A_{(triângulo\ CPQ)}$$



$$A_{seg.\ III} = A_{(setor\ CPMQ)} + A_{(triângulo\ CPQ)}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

18 Calcular a área do segmento circular colorido no círculo de centro O, abaixo.



Resolução

- Área do setor circular OAB:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 4^2$
60	———	A_{setor}

portanto:

$$A_{setor} = \frac{60 \cdot 16\pi}{360}\ cm^2 = \frac{8\pi}{3}\ cm^2$$

- Área do triângulo OAB:

Como $OA = OB$ e $m(A\hat{O}B) = 60°$, temos $m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = 60°$; portanto, o triângulo AOB é equilátero.

Conforme vimos no exercício resolvido 16, a área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Então, indicando por A_T a área do triângulo AOB, temos:

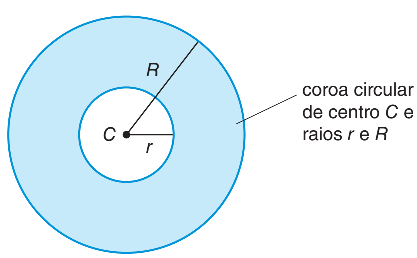
$$A_T = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2 = 4\sqrt{3}\ cm^2$$

Concluímos, então, que a área A do segmento circular colorido na figura é dada por:

$$A = A_{setor} - A_T = \left(\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) cm^2\text{, ou ainda, } A = \frac{4\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{3}\ cm^2$$

Coroa circular

A região do plano limitada por duas circunferências concêntricas (de mesmo centro) é chamada de **coroa circular**.



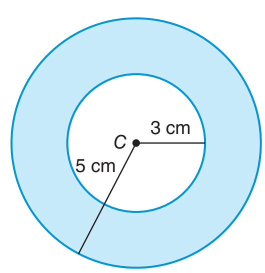
Para entender o cálculo da área da coroa circular, imagine um círculo de cartolina de centro C e raio R, do qual você retira uma parte circular de mesmo centro C e raio r. A área A_c da coroa assim obtida é a diferença entre a área do círculo original e a área do círculo retirado, isto é, $A_c = \pi R^2 - \pi r^2$ ou, ainda:

$$\boxed{A_c = \pi(R^2 - r^2)}$$

Exemplo

A área A_c da coroa circular ao lado é:

$A_c = (\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2)\ cm^2 \Rightarrow A_c = 16\pi\ cm^2$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

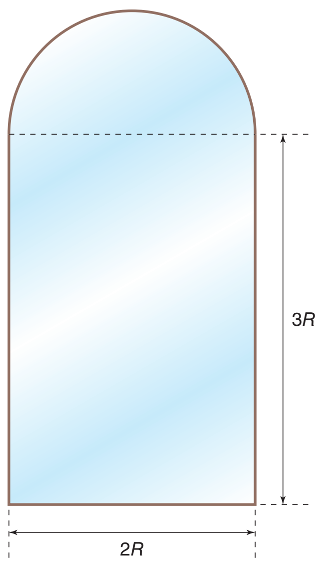
69 Calcule:

a) a área de um círculo inscrito em um quadrado de lado 6 cm;

b) a área de um círculo circunscrito a um quadrado de lado 6 cm.

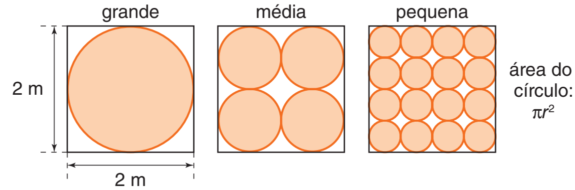
(*Nota*: Uma circunferência está inscrita em um polígono quando tangencia todos os lados do polígono. E uma circunferência está circunscrita a um polígono quando passa por todos os vértices do polígono.)

70 (Unama-AM) Um dos tipos de janela usados na construção civil é o modelo denominado *janela Norman* (retângulo com um semicírculo no topo). Uma dessas janelas possui semicírculo de raio $R = 60$ cm, conforme figura abaixo. Calcule a quantidade de metro quadrado de madeira necessária para fechar totalmente essa janela.



71 (UFG-GO) Um pivô central é usado para irrigação de um terreno circular de 500 metros de raio. Quantos metros cúbicos de água são necessários para irrigar o terreno espalhando em média 5 litros/m^2?

72 (Enem) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura.



Para uma tampa grande, a empresa produz quatro tampas médias e dezesseis tampas pequenas. As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.

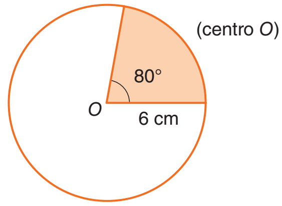
b) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.

c) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

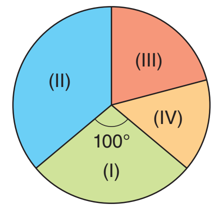
d) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.

e) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

73 Calcule a área do setor circular colorido na figura a seguir:



74 Um círculo de raio 6 cm foi dividido em setores circulares para ser usado como um gráfico estatístico, conforme a figura.



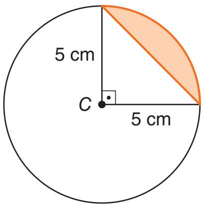
a) Calcule a área A_I do setor I.

b) Sabendo que a área do setor III é 8π cm^2, calcule a medida α do ângulo central desse setor.

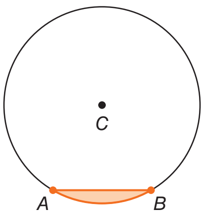
c) Sabendo que o comprimento do arco do setor II é $\dfrac{13\pi}{3}$ cm, calcule a medida β do ângulo central desse setor.

d) De acordo com as informações dos itens anteriores, calcule a área do setor IV.

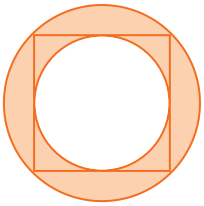
75 Calcule a área do segmento circular colorido no círculo de centro C e raio 5 cm, abaixo.



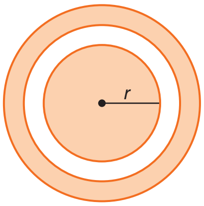
76 No círculo abaixo, a corda $\overline{AB}$ mede 6 cm e é lado de um hexágono regular inscrito na circunferência de centro C. Calcule a área do segmento circular colorido.



77 Calcule a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um quadrado de lado 4 cm.



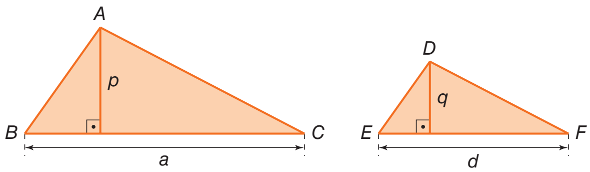
78 A figura abaixo mostra três circunferências concêntricas, sendo 4 cm e 5 cm a medida do raio das duas maiores. Sabendo que as regiões coloridas têm áreas iguais, calcule a medida r do raio da circunferência menor.



Resolva os exercícios complementares 25 a 27 e 44.

Razão entre áreas de figuras semelhantes

Vamos considerar os triângulos semelhantes *ABC* e *DEF*, tal que a razão de semelhança do primeiro para o segundo seja k:



$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k$$

Calculando a razão da área do primeiro triângulo para a área do segundo triângulo, temos:

$$\frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d} \cdot \frac{p}{q} = k \cdot k = k^2$$

Dessa maneira, deduzimos a seguinte propriedade:

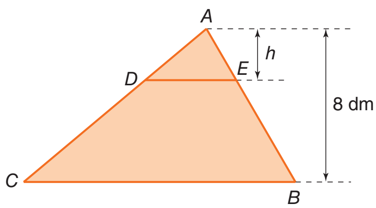
A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Essa propriedade pode ser generalizada para quaisquer figuras semelhantes:

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

19 As áreas dos triângulos *ABC* e *ADE*, representados abaixo, são 48 dm^2 e 3 dm^2, respectivamente. Dado que $\overline{DE} /\!/ \overline{CB}$ e que a altura, relativa à base $\overline{CB}$, do triângulo *ABC* mede 8 dm, calcular a medida da altura do triângulo *ADE*, relativa à base $\overline{DE}$.



Resolução

Os triângulos *ADE* e *ACB* são semelhantes; logo, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles. Indicando por *h* a medida da altura pedida, temos:

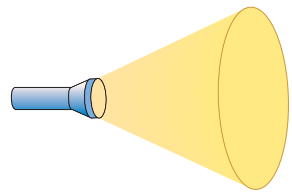
$$\frac{48}{3} = \left(\frac{8}{h}\right)^2 \Rightarrow 16 = \left(\frac{8}{h}\right)^2$$

$$\therefore 4 = \frac{8}{h}$$

$$\therefore h = 2$$

Concluímos, então, que a altura do triângulo *ADE*, relativa à base $\overline{DE}$, mede 2 dm.

20 Quando o plano da lente circular de uma lanterna é paralelo ao plano de uma parede, a área do círculo de luz projetado na parede é o quíntuplo da área da lente. Calcular a razão entre a medida *R* do raio do círculo projetado e a medida *r* do raio da lente.



Resolução

A razão de semelhança entre o círculo projetado e o círculo da lente, nessa ordem, pode ser calculada pela razão entre as medidas dos raios, isto é, $\frac{R}{r}$.

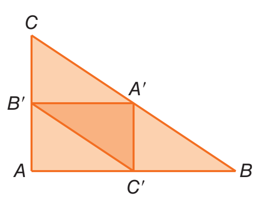
Sendo *A* a área do círculo da lente, o enunciado informa que a área do círculo projetado é 5*A*, portanto, pela propriedade anterior, temos:

$$\frac{5A}{A} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \Rightarrow 5 = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$\therefore \frac{R}{r} = \sqrt{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

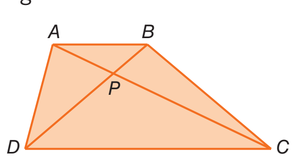
79 (Uerj) Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo *ABC*, obtém-se um novo triângulo *A'B'C'*, como mostra a figura.



Se *S* e *S'* são, respectivamente, as áreas de *ABC* e *A'B'C'*, a razão $\frac{S}{S'}$ equivale a:

a) 4
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{3}{2}$

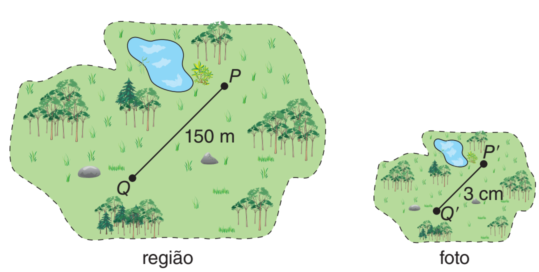
80 No trapézio *ABCD*, representado a seguir, as diagonais se cruzam em *P*. Sabendo que a distância entre *P* e a base $\overline{DC}$ é o triplo da distância entre *P* e a base $\overline{AB}$, e que a área do triângulo *ABP* é 6 cm^2, calcule a área do triângulo *CDP*.



81 (UFJF-MG) Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem a forma de um quadrado de 3 cm de lado.
A área real dessa região é de:

a) 37,50 km^2
b) 56,25 km^2
c) 67,50 km^2
d) 22,50 km^2

82 Trabalhando no mapeamento de uma região plana, um topógrafo fotografou-a de um avião, constatando que a imagem dessa região, na foto, tem 18 cm^2. A seguir, mediu a distância entre dois pontos *P* e *Q* da região e a distância entre as respectivas imagens *P'* e *Q'* desses pontos na foto, obtendo: *PQ* = 150 m e *P'Q'* = 3 cm, conforme mostra o esquema abaixo. Qual é a área da região fotografada?



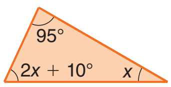
Resolva os exercícios complementares 28 a 30 e 45.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

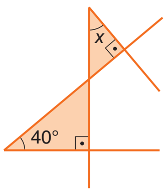
Exercícios técnicos

1 Determine a medida x, em grau, em cada uma das figuras:

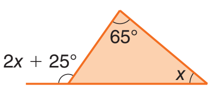
a)



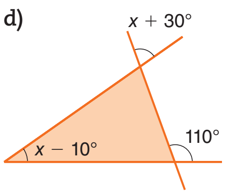
b)



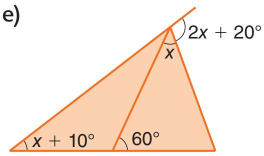
c)



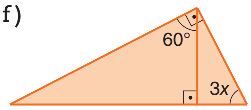
d)



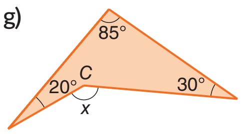
e)



f)



g)

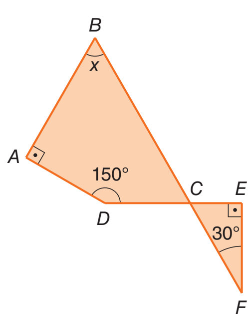


2 Um triângulo ABC, retângulo em A, possui um ângulo interno de 30°. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pela altura e pela bissetriz interna, ambas relativas ao vértice A.

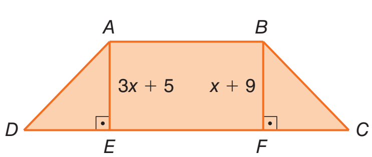
3 Calcule a soma S_i dos ângulos internos de cada um dos seguintes polígonos convexos:

a) quadrilátero
b) heptágono
c) eneágono
d) tridecágono

4 Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$ na figura:



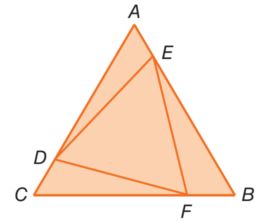
5 No quadrilátero abaixo, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e $A\hat{D}E \cong B\hat{C}F$.



a) Prove que os triângulos ADE e BCF são congruentes.

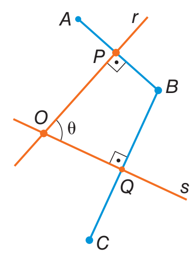
b) Calcule a medida do segmento $\overline{AE}$.

6 Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero e $\overline{AE} \cong \overline{BF} \cong \overline{CD}$. Prove que o triângulo DEF é equilátero.



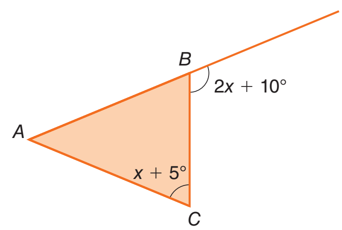
7 (UFMG) Observe a figura ao lado.

Nessa figura, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares, respectivamente, às retas r e s. Além disso, $AP = PB$, $BQ = QC$ e a medida do ângulo $P\hat{O}Q$ é θ. Considerando-se essas informações, é correto afirmar que a medida do ângulo $A\hat{O}C$ interno do quadrilátero $AOCB$ é:

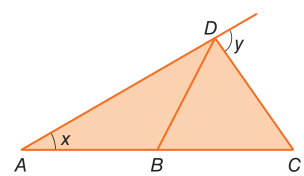


a) 2θ
b) $\frac{5\theta}{2}$
c) 3θ
d) $\frac{3\theta}{2}$

8 No triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ da figura a seguir, determine a medida do ângulo interno $\hat{A}$.



9 (Fuvest-SP) Na figura, $AB = BD = CD$.

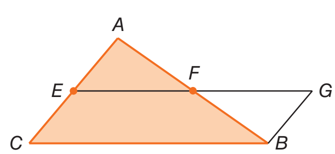


Então:

a) $y = 3x$
b) $y = 2x$
c) $x + y = 180°$
d) $x = y$
e) $3x = 2y$

10 Em um triângulo ABC, retângulo em A, a mediana relativa à hipotenusa e a bissetriz interna relativa ao vértice C formam um ângulo agudo de 60°. Calcule a medida do ângulo $A\hat{C}B$.

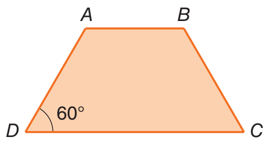
11 No triângulo ABC, abaixo, E é ponto médio do lado $\overline{AC}$, $\overline{EG} /\!/ \overline{CB}$ e $\overline{BG} /\!/ \overline{AC}$.



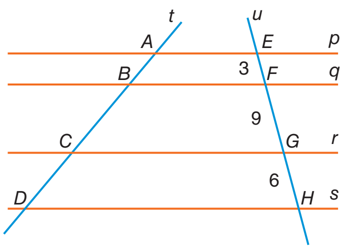
Sabendo que $CB = 10$ cm e $AB = 8$ cm, calcule as medidas dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{AF}$.

12 Em um losango *ABCD*, o ângulo $B\hat{A}D$ mede 50°. Calcule a medida do ângulo formado pela diagonal $\overline{BD}$ e o lado $\overline{AD}$.

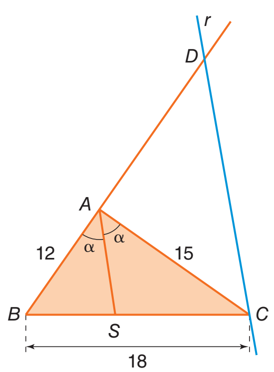
13 No trapézio isósceles *ABCD* abaixo, a base maior $\overline{DC}$ mede 40 cm e $\overline{AD} \cong \overline{AB}$. Calcule a distância entre o vértice *B* e o ponto médio da base maior.



14 Na figura abaixo, as retas *p*, *q*, *r* e *s* são paralelas e $AD = 24$ cm. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$.



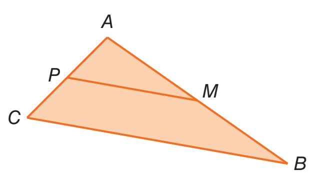
15 Na figura abaixo, $\overline{AS}$ é bissetriz interna e a reta *r* é paralela a essa bissetriz.



a) Prove que o triângulo *ADC* é isósceles.

b) Aplicando o teorema de Tales, determine as medidas dos segmentos $\overline{BS}$ e $\overline{CS}$.

16 O segmento de reta cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é chamado de base média do triângulo. No triângulo *ABC*, abaixo, o segmento $\overline{PM}$ é uma base média do triângulo *ABC*.

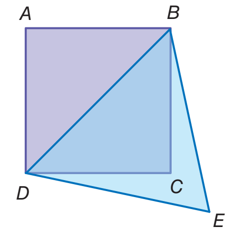


a) Prove que o triângulo *AMP* é semelhante ao triângulo *ABC*.

b) Qual é a posição relativa entre as retas $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{CB}$?

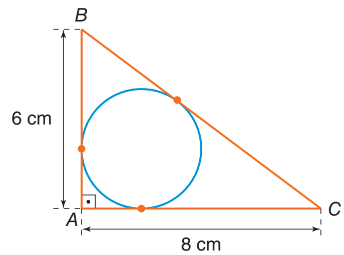
c) Que relação existe entre a medida da base média $\overline{PM}$ e a medida do lado $\overline{CB}$?

17 Na figura, *ABCD* é um quadrado de lado 5 cm.

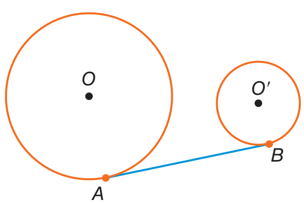


Calcule a medida da altura do triângulo equilátero *DBE*.

18 A circunferência representada a seguir tangencia os três lados do triângulo retângulo *ABC*. Calcule a medida do raio dessa circunferência.



19 Na figura, o segmento $\overline{AB}$ mede 12 cm e é tangente, em *A* e *B*, às circunferências de centros *O* e *O'* e raios 7 cm e 2 cm. Calcule a distância entre os centros *O* e *O'*.



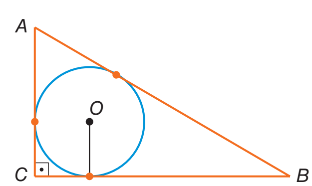
20 Calcule o comprimento da circunferência:

a) inscrita em um quadrado de lado 6 cm.

b) circunscrita a um quadrado de lado 5 cm.

c) circunscrita a um hexágono regular de lado 10 cm.

21 (UFG-GO) A figura abaixo mostra uma circunferência de raio $r = 3$ cm, inscrita em um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 18 cm.

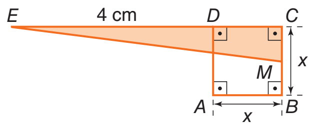


a) Calcule o comprimento da circunferência que circunscreve o triângulo *ABC*.

b) Calcule o perímetro do triângulo *ABC*.

22 Calcule a área de um paralelogramo *ABCD*, em que $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm e $m(A\hat{B}C) = 135°$.

23 (Vunesp) Na figura abaixo, a área do triângulo EMC é igual à área do quadrado $ABCD$, e M é o ponto médio de $\overline{BC}$. De acordo com a figura, o valor de x, em centímetro, é:

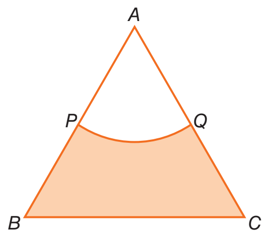


a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

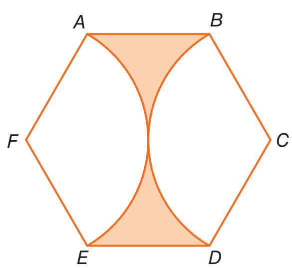
24 Um hexágono regular e um quadrado têm o mesmo perímetro. Sabendo que a diagonal do quadrado mede $3\sqrt{2}$ m, calcule a área do hexágono.

25 Em uma coroa circular de área de 16π cm^2, o raio externo mede o triplo do raio interno. Calcule a medida do raio externo.

26 No triângulo equilátero ABC de lado 6 cm, abaixo, P e Q são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, e o arco de circunferência $\overset{\frown}{PQ}$ tem centro A. Calcule a área da região colorida na figura.



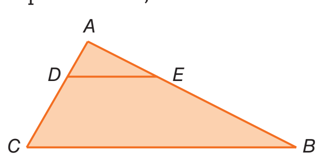
27 No hexágono regular $ABCDEF$ de lado 4 cm, abaixo, os arcos de circunferência $\overset{\frown}{AE}$ e $\overset{\frown}{BD}$ têm centros nos vértices F e C, respectivamente. Calcule a área da região colorida na figura.



28 Seja M o ponto comum às diagonais de um retângulo $ABCD$ com 45 dm^2 de área. Calcule a área do retângulo cujos vértices são os simétricos de M em relação aos pontos A, B, C e D.

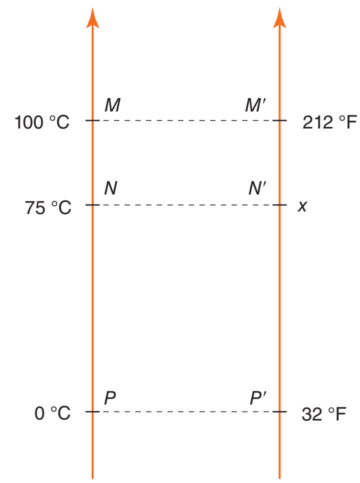
29 Dois octógonos regulares têm áreas iguais a $72(1 + \sqrt{2})$ cm^2 e $8(1 + \sqrt{2})$ cm^2, e o perímetro do maior é 48 cm. Calcule a medida do lado do menor desses octógonos.

30 No triângulo ABC, abaixo, tem-se $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{CB}$, $AD = 2$ e $AC = 8$. Calcule a razão entre as áreas do triângulo ADE e do trapézio $BCDE$, nessa ordem.



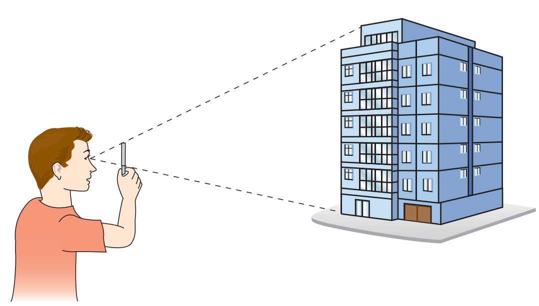
Exercícios contextualizados

31 Uma escala termométrica é uma sequência de valores numéricos na qual para cada valor é associada uma temperatura. A escala Celsius adota, sob pressão normal, ao nível do mar, o valor 0 (zero) para a temperatura de congelamento da água e o valor 100 para a temperatura na qual a água entra em ebulição. Na escala Fahrenheit, são atribuídos os valores 32 e 212 a essas temperaturas, respectivamente.
No esquema a seguir, as três retas representadas pelos tracejados são paralelas e concorrem com as duas transversais, que simbolizam as escalas Celsius (°C) e Fahrenheit (°F).
Aplicando o teorema de Tales, determine a temperatura em grau Fahrenheit (°F) correspondente a 75 °C.



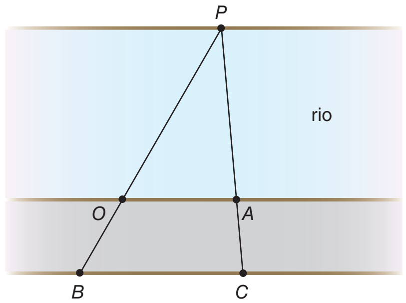
32 Para a realização de uma experiência, uma rampa reta e plana de 2 m de comprimento, de plástico transparente, foi colocada sobre um terreno plano e horizontal. Quando os raios de sol eram perpendiculares ao terreno, fez-se rolar uma bola desde o ponto mais alto da rampa até o solo, observando-se que a sombra da bola sobre o terreno percorreu uma distância de 1,6 m. Que distância percorreu essa sombra, quando a bola se deslocou 50 cm sobre a rampa?

33 Um estudante posicionou-se a 50 m de distância de um prédio e colocou, a 16 cm de seus olhos, uma haste vertical de 20 cm de comprimento tal que a haste e o prédio ficassem sob o mesmo ângulo visual, conforme a figura.



A partir dessa situação, o jovem calculou a altura do prédio. Qual é essa altura, em metro?

34 (Vunesp) Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso, marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, $\overline{OA}$ é paralelo a $\overline{BC}$, $OA = 25$ m, $BC = 40$ m e $OB = 30$ m, conforme mostra a figura.



A distância, em metro, do observador em O até o ponto P é:

a) 30 **b)** 35 **c)** 40 **d)** 45 **e)** 50

35 (Enem) Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

a) no centro do quadrado;

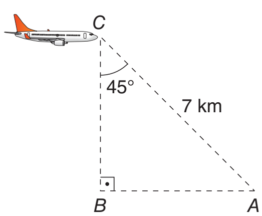
b) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada;

c) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada;

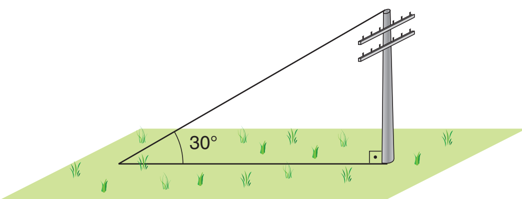
d) no vértice de um triângulo equilátero de base $\overline{AB}$, oposto a essa base;

e) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

36 De um ponto C, o piloto de um avião avista um ponto A na cabeceira da pista de um aeroporto, a 7 km de distância, sob um ângulo de 45° com a vertical $\overline{CB}$, conforme mostra a figura abaixo. A que altura, em relação à pista do aeroporto, está o avião?

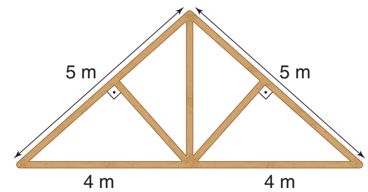


37 Um cabo de aço de 10 m de comprimento é esticado do topo de um poste a um ponto de um terreno plano e horizontal, de modo que o ângulo entre o cabo e o solo mede 30°.



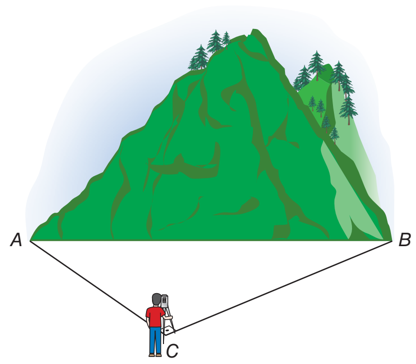
Calcule a altura do poste.

38 Na construção da estrutura de um telhado, um carpinteiro montou um triângulo isósceles formado por três vigas, de 5 m, 5 m e 8 m. Para dar rigidez à estrutura, ele fez uma triangulação conforme o esquema abaixo.



Quantos metros de viga foram usados nessa peça?

39 Para calcular o comprimento de um túnel que será construído em linha reta, ligando dois pontos, A e B, da base de uma montanha, um topógrafo posicionou seu teodolito em um ponto C tal que $m(A\hat{C}B) = 90°$; a seguir, mediu as distâncias AC e BC, obtendo 60 m e 80 m, respectivamente.



O comprimento do túnel, em metro, será:

a) 120

b) 100

c) 110

d) 80

e) 92

40 A órbita de um satélite artificial é uma circunferência de raio 30.000 km, concêntrica com a Terra. Um asteroide cruzou essa órbita, determinando uma corda de 20.000 km. Nessa trajetória, calcule:

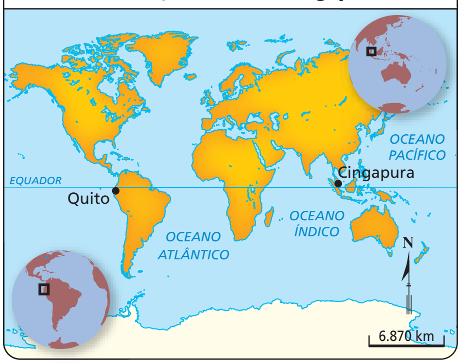
a) a menor distância entre o asteroide e o centro da Terra;

b) a menor distância entre o asteroide e a superfície da Terra, sabendo que o raio do nosso planeta mede 6.370 km e considerando $\sqrt{2} = 1{,}4$.

(*Nota:* Circunferências concêntricas têm o mesmo centro.)

41 (Enem) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do Equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6.370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente:

Localização: Quito e Cingapura

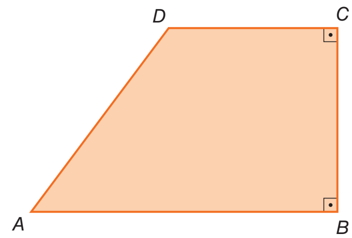


a) 16 horas
b) 20 horas
c) 25 horas
d) 32 horas
e) 36 horas

42 O velocímetro de um automóvel registra a velocidade de acordo com o número de voltas do pneu por unidade de tempo. Para que a velocidade registrada pelo velocímetro seja a velocidade real do veículo, é necessário que a calibragem dos pneus seja aquela especificada no manual do proprietário. Suponha que os pneus sejam calibrados fora da especificação, de modo que o diâmetro de cada pneu aumente 1%. De acordo com essa suposição, quando o velocímetro assinalar 120 km/h, a velocidade real do veículo será de:

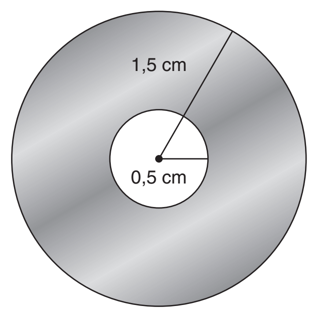
a) 118,8 km/h
b) 121,2 km/h
c) 122,1 km/h
d) 123,1 km/h
e) 124,1 km/h

43 (Unicamp-SP) Um terreno tem a forma de um trapézio retângulo $ABCD$, conforme mostra a figura, e as seguintes dimensões:
$AB = 25$ m, $BC = 24$ m, $CD = 15$ m



a) Se cada metro quadrado desse terreno vale R$ 50,00, qual é o valor total do terreno?
b) Divida o trapézio $ABCD$ em quatro partes de mesma área, por meio de três segmentos paralelos ao lado $\overline{BC}$. Faça uma figura para ilustrar sua resposta, indicando nela as dimensões das divisões no lado $\overline{AB}$.

44 Uma placa retangular de aço tem 60 cm de comprimento por 30 cm de largura. Dessa placa será retirado o maior número possível de arruelas com 1,5 cm de raio externo e 0,5 cm de raio interno. Que área, em centímetro quadrado, dessa placa será utilizada para a fabricação das arruelas?



45 A planta de um apartamento foi desenhada na escala 1 : 50. A representação do piso de uma sala nessa planta tem 168 cm^2 de área. Qual é a área real do piso dessa sala, em m^2?

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Uma função f real, de variável real, obedece às seguintes condições:
I. $f(a + b) = a + f(b)$ **II.** $f(0) = 4$
Calcule:

a) $f(1)$
b) $f(100)$
c) $\sum_{j=1}^{20} f(j)$

2 Uma função real, de variável real, obedece às seguintes condições:
I. $f(ab) = a \cdot f(b)$ **II.** $f(1) = 3$

Calcule:

a) $f(2)$
b) $f(10)$
c) $\sum_{j=1}^{10} f(j)$

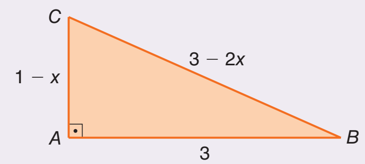
3 Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado em regime de juro composto à taxa de 10% ao ano.
a) Escreva a lei que expressa o montante acumulado $f(x)$, em real, em função do tempo x, em ano.
b) Escreva a lei que expressa o tempo $g(x)$, em ano, em função do montante x, em real, acumulado pela aplicação.
c) Qual é a inversa da função $f(x)$ obtida no item **a**?

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

No triângulo retângulo *ABC*, a seguir, as expressões indicadas sobre os lados representam medidas em uma mesma unidade de comprimento. Determine o número real *x*.



Resolução

$$(3-2x)^2 = (1-x)^2 + 3^2$$

$$9 - 12x + 4x^2 = 1 - 2x + x^2 + 9$$

$$3x^2 - 10x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 112$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{112}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 4\sqrt{7}}{6} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{10 + 4\sqrt{7}}{6} \\ x'' = \dfrac{10 - 4\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

ERRADO!

Logo: $x = \dfrac{5 + 2\sqrt{7}}{3}$ ou $x = \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$

Comentário

O aluno se esqueceu de considerar que as medidas dos lados de um triângulo só podem ser representadas por números reais positivos.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

CAPÍTULO 6 Função modular

Para pensar

$d = |x - 6{,}5|$

Exercícios propostos

1

a) 7
b) 0
c) 3
d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
e) $2 - \sqrt{3}$
f) $2 - \sqrt{3}$
g) $3 + \sqrt{7}$
h) $\pi - 3$
i) $\pi - 3{,}14$
j) 8
k) $\sqrt{11}$
l) 0

2 19

3 resposta possível:

$|x|^2 = |x| \cdot |x| = |x \cdot x| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x|^2 = |x^2|$ (I)

Como $x^2 \geqslant 0$, temos:

$|x^2| = x^2$ (II)

De (I) e (II), concluímos:

$|x|^2 = x^2$

4

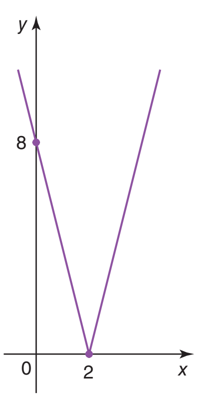
a) F
b) V
c) F
d) V
e) V
f) F
g) F
h) V
i) F
j) V
k) V

5 a) 1,9; 0,6; 0,2; 0,6; 2,1

b) 1,08

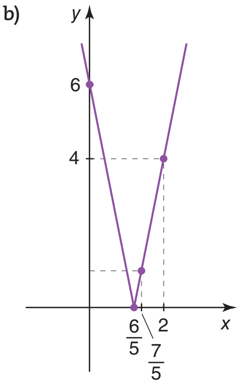
6 d

7 a)



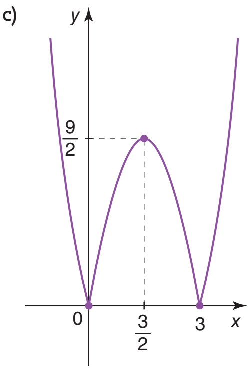
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+$

b)



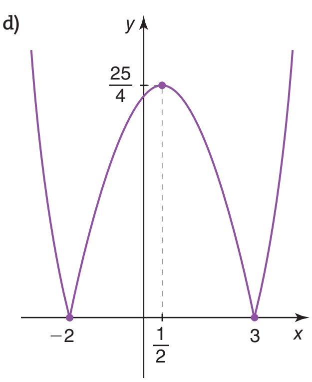
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}_+$

c)



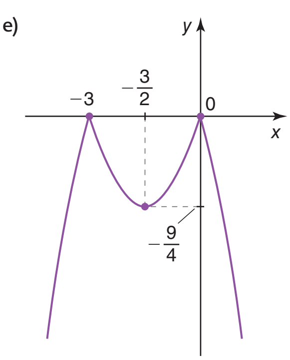
$D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \mathbb{R}_+$

d)



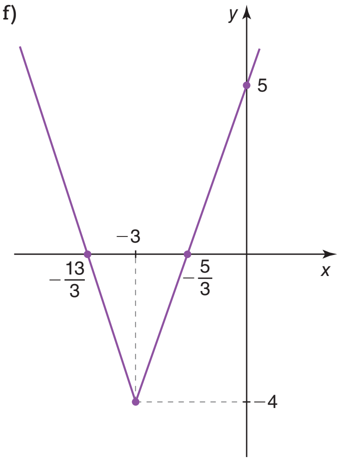
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+$

e)



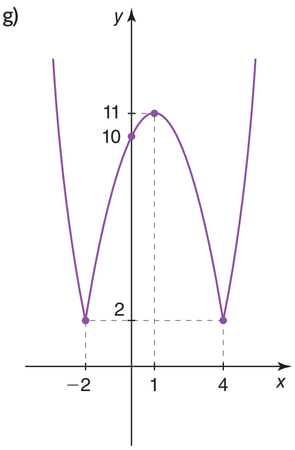
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_-$

f)



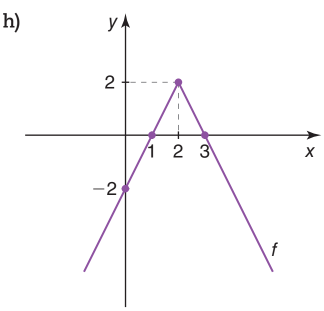
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$

g)



$D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

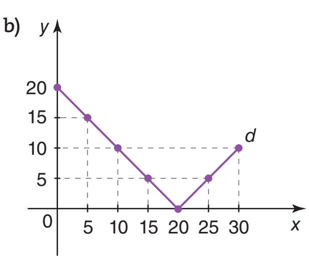
h)



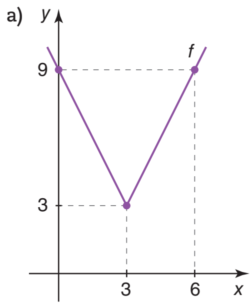
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$

8 a) $d = |x - 20|$ ou $d = |20 - x|$

b)



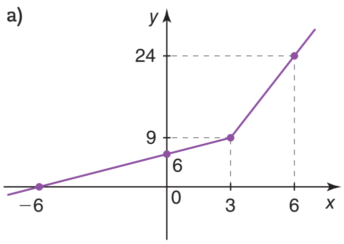
9 a)



b) (2, 5); (4, 5)

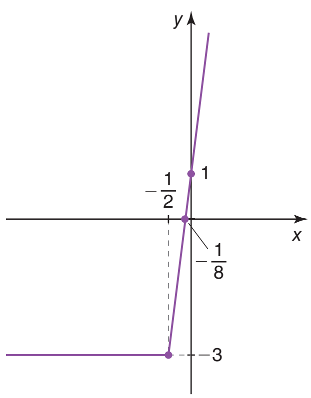
c) $2 < x < 4$

10 a)



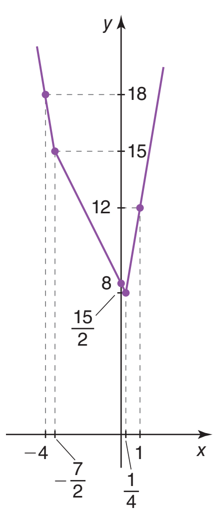
$D(f) = \mathbb{R};\ Im(f) = \mathbb{R}$

b)



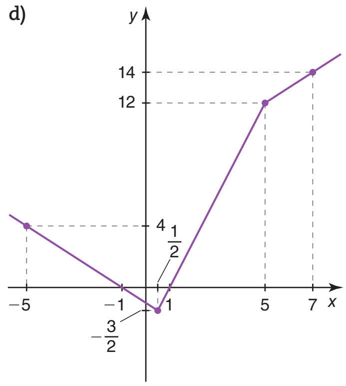
$D(g) = \mathbb{R};\ Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -3\}$

c)



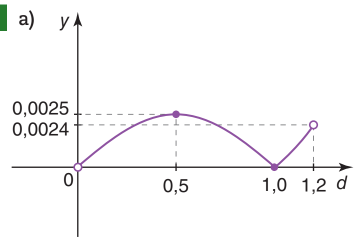
$D(f) = \mathbb{R};\ Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{15}{2}\right\}$

d)



$D(g) = \mathbb{R};\ Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{3}{2}\right\}$

11 a)



b) 0,5 m

c) 0,0025 m

DICA: Para responder aos itens **b** e **c**, observe o ponto de maior ordenada do gráfico do item **a**.

12 das 10 h às 11 h

13 a) $S = \{5, 11\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{-1, 2, 3, 6\}$

e) $S = \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$

f) $S = \left\{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\right\}$

DICA: Aplique a propriedade P5.

g) $S = \{-3, 3\}$

DICA: Faça a mudança de variável $|x| = y$.

h) $S = \{1, -1, 4, -4\}$

i) $S = \varnothing$

14 a) $S = \{9\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{-3, 1\}$

15 $S = \varnothing$

16 $x_A = -33$ e $x_B = -33$ ou

$x_A = -11$ e $x_B = 11$

17 a) 2 vezes

b) 20 flechas

c) A maior distância foi de 5 milímetros no 25º lançamento.

18 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > \frac{6}{5}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} \leq x \leq 4\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq \frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 11\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{14}{15} \leq x \leq -\frac{6}{15}\right\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

19 b

20 b

21 O menor diâmetro é 4,992 cm e o maior é 5,008 cm.

22 $S = \mathbb{R} - \{-2\}$

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 a) 2 c) π e) $\sqrt{10}$

b) 5 d) 0,01 f) 0

2 a

DICA: Pela propriedade P5: $x^2 = |x|^2$.

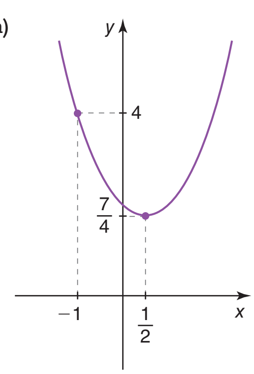
3 a) F c) V e) V

b) F d) V f) F

4 $\frac{1}{2}; \frac{1}{9}$

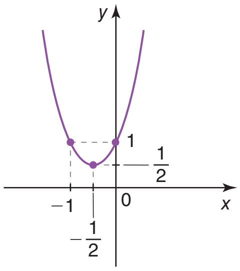
5 c

6 a)



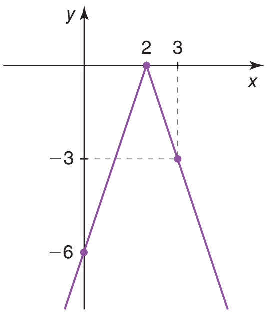
$D(f) = \mathbb{R};\ Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{7}{4}\right\}$

b)



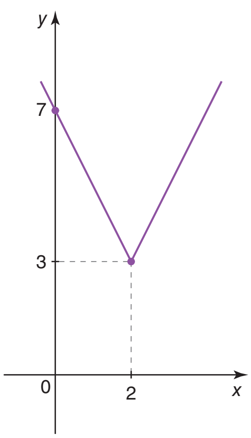
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

c)



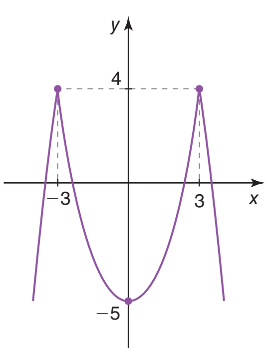
$D(r) = \mathbb{R}$; $Im(r) = \mathbb{R}_-$

d)



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

e)

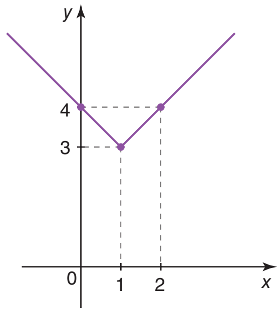


$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$

7 d

8 b

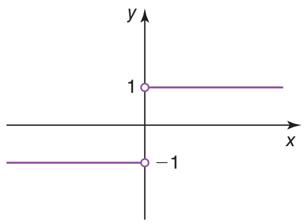
9 a)



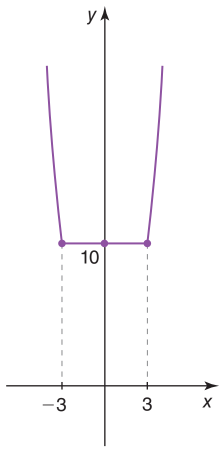
b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

10 b

11

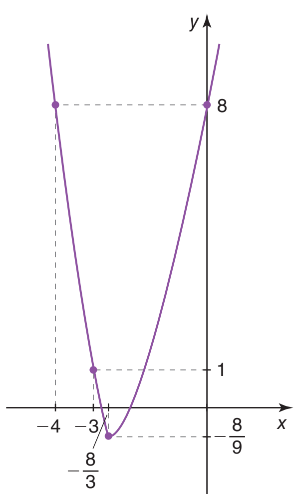


12 a)



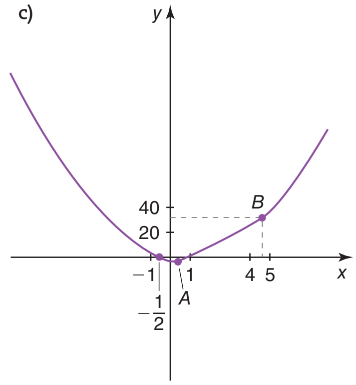
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 10\}$

b)



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{8}{9}\right\}$

c)



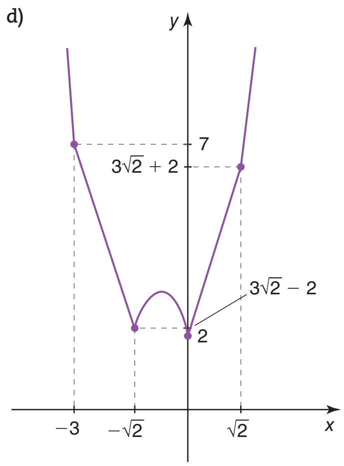
$A\left(\frac{5 - \sqrt{21}}{2}, \frac{27 - 7\sqrt{21}}{2}\right)$

$B\left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \frac{27 + 7\sqrt{21}}{2}\right)$

$D(f) = \mathbb{R}$;

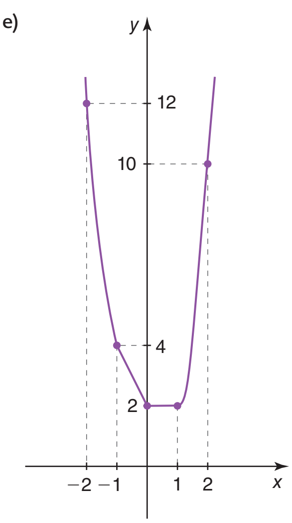
$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{27 - 7\sqrt{21}}{2}\right\}$

d)



$D(h) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

e)



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

13 a) $S = \left\{\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right\}$

b) $S = \{-1, 2, 3, 6\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{-4, 4\}$

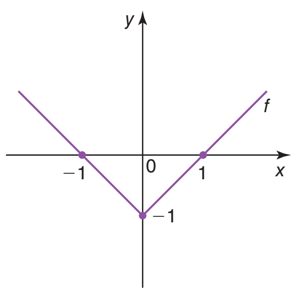
e) $S = \{-4, -1, 1, 4\}$

14 a) $S = \{-1, 4\}$ b) $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$

15 a) $S = \varnothing$ c) $S = \{-2, 2\}$

b) $S = \left\{0, \frac{20}{3}\right\}$ d) $S = \{3\}$

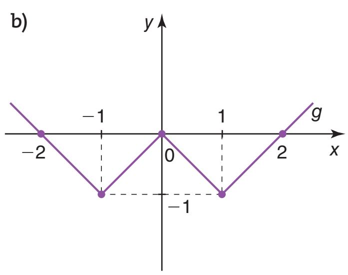
16 a)



eixo Ox: $(-1, 0)$ e $(1, 0)$

eixo Oy: $(0, -1)$

b)



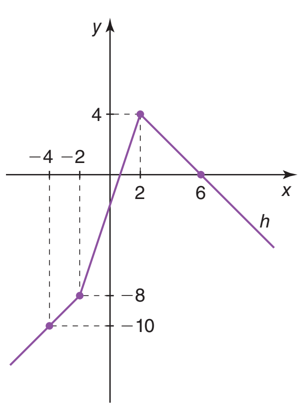
eixo Ox: $(-2, 0)$, $(0, 0)$ e $(2, 0)$

eixo Oy: $(0, 0)$

c) $x = 7$ ou $x - 7$

17 a) $S = \left\{6, \frac{2}{3}\right\}$

b)



18 c

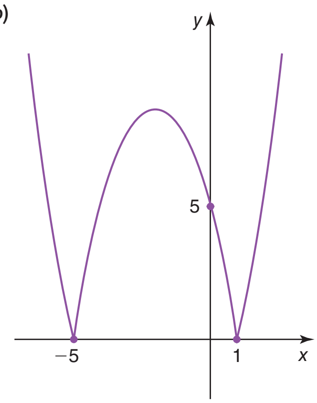
19 $(1, 6)$ e $(-3, 14)$

DICA: As abscissas dos pontos comuns são as soluções da equação $f(x) = g(x)$.

20 d

21 a) $x = 1$ ou $x = -5$

b)



22 d

23 $(7, 52)$, $(1, 4)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$

24 a **25** a **26** c

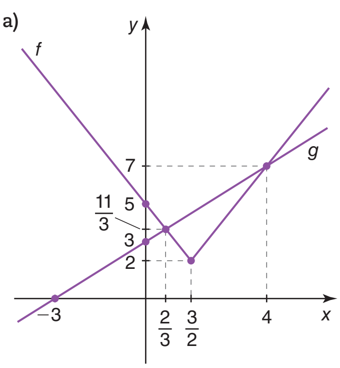
27 e **28** d

29 a) $S = \mathbb{R}$ b) $S = \varnothing$

30 c

DICA: Aplique a propriedade P6.

31 a)



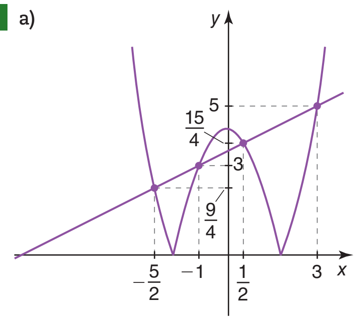
$\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e $(4, 7)$

DICA: As abscissas dos pontos comuns aos gráficos são as soluções da equação $f(x) = g(x)$.

b) $x < \frac{2}{3}$ ou $x > 4$

DICA: As soluções da inequação $f(x) > g(x)$ são as abscissas dos pontos da parte do gráfico de f que está acima do gráfico de g.

32 a)

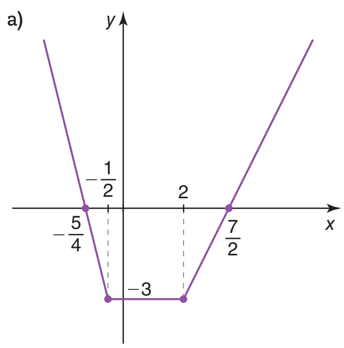


b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant -1 \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

33 a) $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2} \text{ ou } x \geqslant \frac{5}{2}\right\}$

34 a)

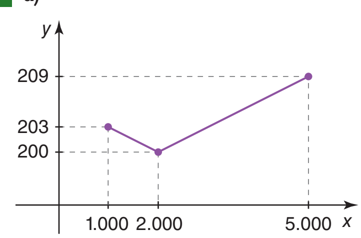


b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{7}{6}\right\}$

35 $x = 3$ **36** e

• Exercícios contextualizados

37 a)



b) 5.209

c) 797

DICA: Para cada valor de x, o número máximo possível e o número mínimo possível de votos são, respectivamente, $x + f(x)$ e $x - f(x)$.

38 a) 2 s

b) $\sqrt{10}$ s

DICA: Não convêm valores negativos de t nem valores para os quais $f(t) < 0$ ou $g(t) < 0$.

39 a) $x = 30$ ou $x = 270$

b) $x < 30$ ou $x > 270$

40 a) máxima: 42 cm; mínima: 18 cm

b) máximo: 12 cm; mínimo: zero

DICA: Sendo *s* a reta vertical que passa pelo ponto de onde foi abandonada a esfera, o desvio da esfera em cada instante é a distância entre ela e a reta *s*.

41 e

42 c

43 $0 < t \leqslant \frac{17}{2}$

DICA: A distância entre A e B é dada por $|f(t) - g(t)|$.

44 a) A concentração do medicamento na corrente sanguínea não pode ser igual a 0,5 miligramas por litro.

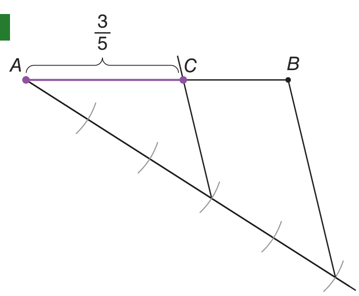
b) 2 miligramas por litro

Exercícios de revisão cumulativa

1 $3\sqrt{10}$

2 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

3



Análise da resolução

$y = \frac{5x}{4} + 5$

CAPÍTULO 7 Matemática financeira

Para pensar

1 R\$ 531,98

2 R\$ 117,79

Exercícios propostos

1 a) $\frac{9}{20}$ c) $\frac{1}{200}$

b) $\frac{12}{5}$

2 a) 0,24 c) 1,24

b) 0,12 d) 0,008

3 a) 25% c) 250%

b) 40% d) 25%

4 a) 12,25% c) 140%

b) 16%

5 12,8%

6 336

7 d

8 b

9 a

10 b

11 a) $x = 44{,}2$; $y = 57{,}46$

b) 30%

12 a

13 e

14 65 kg

15 R\$ 200,00

16 d

17 a) 60% b) 37,5%

18 R\$ 64,00

19 b

20 e

21 R\$ 220,00

22 b

23 7,1%

24 72,8%

25 32%

26 c

27 b

28 R\$ 8.000,00

29 118 ienes

30 ≈ 3.118,72 rúpias

31 a) 14,29% b) 12,5%

32 a) R\$ 288,00 b) R\$ 2.088,00

33 15 meses

34 R\$ 50,88

35 R\$ 900,00

36 20 meses

37 d

38 a) R\$ 5.650,00

b) R\$ 650,00

39 20%

40 R\$ 81,00

41 R\$ 172.800,00

42 c

43 d

44 R\$ 13.680,00

45 a) $p_3 = 0{,}81092p$

b) 18,908%

Exercícios complementares

- **Exercício técnico**

1 c

- **Exercícios contextualizados**

2 3.672 alunos

3 d

4 c

5 b

6 2 toneladas

7 8%

8 d

9 c

10 d

11 c

12 23.358 toneladas

13 a

14 ≈ 47,8 g

15 e

16 e

17 b

18 b

19 c

20 c

21 2 litros

22 e

23 b

24 480.000

25 d

26 b

27 b

28 13.200 MW

29 $\approx 5{,}3 \cdot 10^{24}$ joules

30 b

31 b

32 e

33 e

34 R$ 200,00

35 d

36 b

37 a) 20% b) 25%

38 a

39 a

40 R$ 10.348,00

41 b

42 b

43 b

44 a

45 a

46 25%

47 e

48 a

49 a

50 R$ 1.000,00

51 b

52 R$ 61.600,00

53 c

54 e

55 b

56 d

57 a) R$ 234,00 b) R$ 3.834,00

58 d

59 d

60 c

61 c

62 c

63 d

64 c

65 e

66 $\approx$ R$ 8.145,00

67 c

Exercícios de revisão cumulativa

1 30

2 a) $y = 32 + \frac{x}{30}$ b) $\approx 32{,}3°$ c) ≈ 660 m

3 c

Análise da resolução

10%

CAPÍTULO 8 Função exponencial

Para pensar

1 2.411.724.800 transistores

2 resposta pessoal

Exercícios propostos

1
a) $(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \cdot 3}$
b) $(2x)^3 = (2x)(2x)(2x) = 2^3 \cdot x^3$
c) $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{7^2}{5^2}$

2
a) 25
b) 25
c) -25
d) -8
e) -8
f) 1
g) 1
h) -1
i) $\frac{8}{27}$
j) $-\frac{8}{27}$
k) $\frac{16}{81}$
l) 0
m) 1
n) 1
o) -1
p) $\frac{1}{25}$
q) $\frac{4}{25}$
r) $\frac{4}{25}$
s) $\frac{125}{8}$
t) $-\frac{125}{8}$
u) $-\frac{1}{8}$

3
a) $125x^3$
b) x^8
c) $9x^6$
d) $16a^4b^{12}$
e) $16x^4y^6$
f) $\frac{8}{b^{15}}$
g) $\frac{a^3b^9}{27c^6}$
h) $\frac{25y^2z^4}{4x^6}$
i) $\frac{16u^8}{81t^{12}}$
j) $\frac{c^{15}}{a^3b^6}$

4
a) x^8
b) y^4
c) $72a^{17}b^8$
d) $8x^7y^{11}z^6$
e) $3a^4bcd^3$
f) $\frac{q^2v^2}{4p^2u^2}$

5 $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

6 $1{,}496 \cdot 10^8$ km

7 $3 \cdot 10^{-4}$ mm

8 e

DICA: Resolva uma regra de três.

9
a) $5 \cdot 10^8$ km²
b) $5 \cdot 10^{14}$ m²

10 d

11 a) $\sqrt[6]{2^5}$ b) $\sqrt[12]{2}$

12
a) $\boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$
b) $\boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$

13
a) 5
b) 3
c) 7
d) 1
e) 0
f) 12
g) -5
h) -2
i) -1

14
a) $2\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $2\sqrt[3]{3}$
d) $2\sqrt[4]{2}$
e) $2\sqrt{10}$
f) $2\sqrt[5]{3}$
g) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
h) $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}$
i) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

15
a) $8\sqrt{3}$
b) $10\sqrt{2} - \sqrt{5}$
c) $18\sqrt[3]{2}$
d) $8\sqrt[5]{12}$
e) $3\sqrt{2}$
f) 4
g) $7\sqrt[3]{5}$

16 d

17
a) $2\sqrt{2}$
b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
c) $\frac{2\sqrt[3]{49}}{7}$

18
a) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$
b) $4\sqrt{2} - 3$
c) $\frac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}$

19 a

DICA: Basta fazer $\Delta t' = 60$ e $\Delta t = 20$.

20
a) $\sqrt[5]{81}$
b) $\sqrt{6}$
c) $\sqrt{7}$
d) $\sqrt[4]{27}$

21
a) $2^{\frac{1}{5}}$
b) $a^{\frac{2}{3}}$
c) $2^{\frac{3}{4}}$

22 27

DICA: Essa questão pode ser resolvida de duas maneiras: transformando as potências em radicais, ou, simplesmente, aplicando as propriedades da potenciação.

23 e

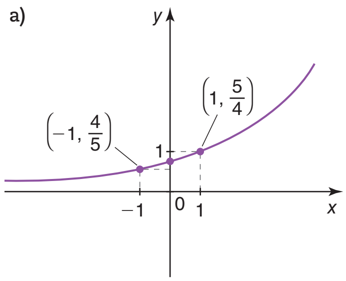
24 d

25
a) 3
b) 7
c) 13.824
d) 1

26 a

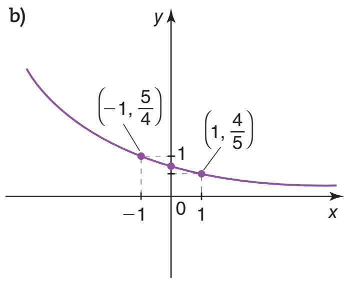
27 a

28 a)



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}^*_+$

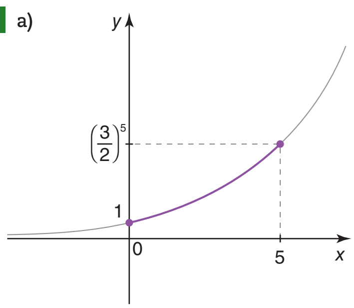
b)



$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = \mathbb{R}^*_+$

29 d

30 a)



b) I) V IV) F
II) F V) V
III) V

31 a) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) $S = \{-11\}$ e) $S = \{0\}$
c) $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$ f) $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

32 e

33 a) $S = \{3\}$ b) $S = \{2\}$

34 a) $S = \{0, 1\}$ c) $S = \{1, 2\}$
b) $S = \{1\}$ d) $S = \{-1\}$

35 c **36** d

37 a) $a = 5$; $b = 203$
b) daqui a cinco anos
c) 587 indivíduos
d) $\Delta f = 24$; $\Delta g = 12$

38 8 anos

39 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{6}\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$
e) $S = \varnothing$
f) $S = \mathbb{R}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

40 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

41 a) $m = 1.000 \cdot 1{,}1^t$
b) qualquer tempo menor que 3 anos

42 a) $m = 1.000 \cdot 0{,}4t$
b) $t > 3$

Exercícios complementares

• Exercícios técnicos

1 a **2** e

3 m deve ser um número inteiro e k, um número real com módulo menor que 10 e maior ou igual a 1.

4 a) $3 \cdot 10^9$ e) $5 \cdot 10^{-7}$
b) $1{,}5 \cdot 10^7$ f) $2{,}5 \cdot 10^{-9}$
c) $2{,}5 \cdot 10^8$ g) $3{,}2 \cdot 10^{-6}$
d) 10^4 h) $4{,}38 \cdot 10^{-1}$

5 b

6 a) $19\sqrt{6}$ b) $11\sqrt[3]{2}$

7 a) 7 d) 3
b) 5 e) 12
c) 3 f) 6

8 2 **9** $n - p$

10 a) 1 b) 11 c) 25

11 a) $\frac{\sqrt[6]{32}}{6}$ c) $\frac{a\sqrt[5]{c^3}}{bc}$
b) $\frac{2\sqrt{a}}{3a}$

12 a) $\frac{6(2\sqrt{5} + \sqrt{7})}{13}$ c) $\frac{3 + \sqrt{6}}{3}$
b) $\frac{10(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{19}$

13 a) $\sqrt[3]{625}$ c) $8\sqrt[5]{8}$
b) $\sqrt[10]{729}$

14 a) $7^{\frac{1}{2}}$ b) x^2 c) $a^{\frac{1}{2}}$

15 $\frac{49}{5}$ **16** e

17 97 **18** $\frac{1}{2}$

19 23
DICA: Eleve ao quadrado ambos os membros da igualdade.

20 $\approx 0{,}302$

21 a) 1,7321
b) 1,6266
c) 1,5518

22 68,87

23 a) 8,82 c) 3,27
b) 9,74

24 c **25** b

26 b **27** c

28 a) $S = \{1\}$ c) $S = \{-1\}$
b) $S = \{0\}$ d) $S = \{0, 2\}$

29 a) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ c) $S = \{1\}$
b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $S = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$

30 c **31** d **32** b

33 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{11}{4}\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -10\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$
DICA: A função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^*_+$ e $a \neq 1$, é crescente, se $a > 1$, e decrescente, se $0 < a < 1$.

34 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

35 -3 e -2

- **Exercícios contextualizados**

36 b

37 $2 \cdot 10^{30}$ kg

38 $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ m

39 a) $2{,}7 \cdot 10^{19}$ b) $2{,}7 \cdot 10^{22}$

40 a) $5 \cdot 10^{6}$ b) $5 \cdot 10^{9}$

41 a) $5 \cdot 10^{99}$ c) $3 \cdot 10^{97}$
b) $7{,}5 \cdot 10^{99}$ d) $4 \cdot 10^{-100}$

42 e

43 4,29 anos-luz

DICA: $4{,}057 \cdot 10^{13}$ km $= 4{,}057 \cdot 10^{16}$ m e 1 ano $=$ 365 dias $= 3{,}1536 \cdot 10^{7}$ s

44 $\approx 944{,}82$ m²

45 d

46 a

47 e

48 $\approx 0{,}2\%$ ao ano

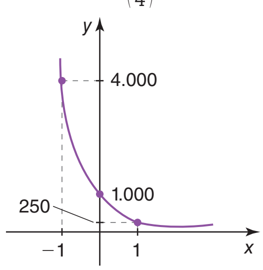
DICA: O intervalo de tempo decorrido do início de 1701 ao final de 1900 equivale a 200 anos.

49 a) $f(t) = 100.000 \cdot 2^t$;
$g(t) = 70.000 + 2.000t$
b) 40 ratos/habitante

50 e

51 a) $f(x) = 4.000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

b)



52 a) tipo A: 300; tipo B: 900
b) 20 minutos

53 d

54 d

55 a) A: 1.050; B: 140
b) 3 meses

56 c

Exercícios de revisão cumulativa

1 c

2 10

3 P(4, 2)

4 $2\sqrt{5} + 3$

Análise da resolução

$m > 2$

CAPÍTULO 9 Função logarítmica

Para pensar

1 O eixo horizontal representa a expectativa de vida ao nascer, em anos, e o eixo vertical representa a renda, PIB *per capita* em dólares.

2 Em um trecho, o eixo vertical varia de 100 em 100, em seguida de 1.000 em 1.000, depois de 10.000 em 10.000. Esse eixo apresenta uma escala logarítmica.

3 África

Exercícios propostos

1 a) 8 d) -4 g) $\frac{4}{3}$
b) -2 e) 4 h) $\frac{2}{5}$
c) 3 f) $\frac{7}{8}$ i) 3

2 a) 1,89 b) $-2{,}52$ c) 0,42

3 a) 256 f) 1
b) 6.561 g) 1
c) 4,9981 h) 1
d) 12,8111 i) 10
e) 209,6042 j) 1,6

4 a) $a = 4$
b) $b = -2$
c) $c = -\frac{2}{3}$

5 1,48

DICA: Faça $\sqrt[5]{7} = x$ e calcule o logaritmo decimal dos dois membros da igualdade.

6 b

7 a) -2 b) $-\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{4}$

8 e

9 a

10 b

11 $3{,}2 \cdot 10^{94}$

12 a) 1,71 d) $\approx 3{,}62$
b) $-0{,}97$ e) $\approx 0{,}28$
c) 0,97 f) 1,48

13 0,79

14 $x = 2$

15 a

16 d

17 30,1 anos

DICA: Como o crescimento ocorre através do produto por uma taxa constante, é possível aplicar a fórmula: $M = C(1 + i)^t$.

18 6 horas

19 8 horas

20 a) 1 b) 4 c) -1

21 a) 1,7 c) 1,15
b) 0,5 d) $\approx 0{,}59$

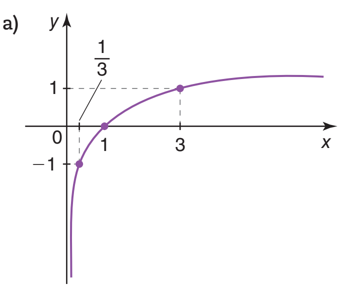
22 d

DICA: Calcule o logaritmo natural dos dois membros da igualdade $e^{-\lambda t} = \frac{N}{N_0}$.

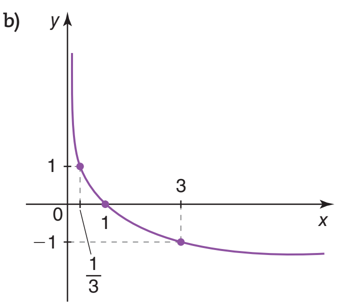
23 6,875 meses ou ≈ 7 meses

DICA: Como o decrescimento ocorre através do produto por uma taxa constante, é possível aplicar a fórmula: $M = C(1 + i)^t$, com a taxa negativa.

24 a)



b)



25 a) crescente c) crescente
b) decrescente d) decrescente

26 a) V d) V
b) V e) V
c) F

27 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$

28 a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{6}{5}\right\}$

b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

c) $D(u) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ e } x \neq \frac{3}{2}\right\}$

d) $D(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

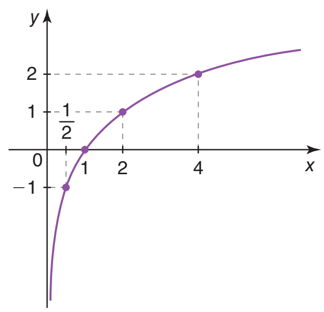
e) $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

29 9

30 a) $a = 2$; $b = 4$; $c = 8$; $d = 16$

b) $y = \log_2 x$

c)

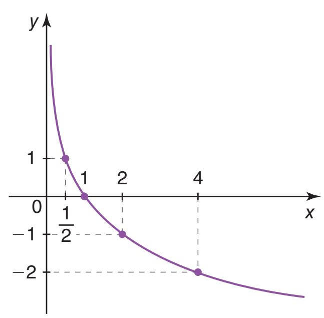


O gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f, pois possui apenas ordenadas de valores não negativos e limitados, por se tratar de uma função que determina a área de uma região.

31 a) $a = 0{,}5$; $b = 0{,}25$; $c = 0{,}125$; $d = 0{,}0625$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

c)



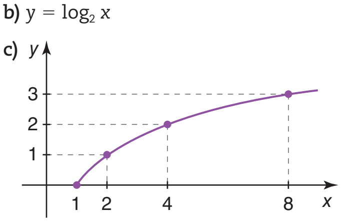
O gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f, pois possui apenas ordenadas de valores não negativos e limitados, por se tratar de uma função que determina a área da região ocupada pela planta.

32 a)

Tempo (ano)	Preço (D$)
0	1
1	2
2	4
3	8
y	2^y

b) $y = \log_2 x$

c)



33 $b = \frac{4}{3}$; $k = 2$

34 a) decrescente b) crescente

35 c

36 e

37 $Im(f^{-1}) =]3, 9[$

38 $f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x-1}{2}$

39 $b = \frac{4}{3}$; $k = 3$

40 a) $f(x) = 1.000 \cdot (1{,}2)^x$

b) $g(x) = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$

c) $f^{-1}(x) = g(x) = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$

41 a) $\approx$ 227,9 milhões de habitantes

b) $y = 191{,}5 \cdot (1{,}011)^x$

c) $x = \log_{1,011} \frac{y}{191{,}5}$

d) $y = \log_{1,011} \frac{x}{191{,}5}$

42 a) $S = \{3\}$

b) $S = \left\{\frac{5}{11}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

d) $S = \{10\}$

e) $S = \{2\}$

f) $S = \{2\}$

43 a) $S = \{6\}$ b) $S = \{4\}$

44 $S = \varnothing$

45 d

46 a) A altura e o diâmetro medem 1 m e 10 cm, respectivamente.

b) 20 cm

47 d

DICA: Aplique a fórmula $M = C(1 + i)^t$ para calcular o montante de cada uma das aplicações.

48 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{10}{3}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > e\}$

49 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

50 d

51 b

DICA: Basta resolver a inequação $300(1{,}04)^n > 600$.

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 a) $\approx 1{,}58$ b) $\approx 0{,}69$

2 a) 3,78033 b) 1,83337 c) 18,07674 d) 1,43595

3 a) $\frac{2}{3}$

b) 2

c) $-\frac{3}{2}$

d) 1

e) 0

f) 10

g) $\frac{5}{2}$

h) $\frac{3}{2}$

i) $\frac{18}{35}$

4 1,50

5 d

6 c

7 d

8 a) 2,08 b) 1,57 c) $\approx 0{,}053$ d) $\approx 0{,}37$ e) 1,41 f) $\approx 9{,}24$

DICA: Nos itens **d** e **f**, aplique a fórmula de mudança de base de um logaritmo.

9 1,54

10 b

11 a

12 e

13 d

14 c

15 c

16 e

17 b

18 a) 1,2

b) $x = 12$

19 $x = 2$

20 e

21 a) $\approx 0{,}903$

b) $\approx 1{,}293$

c) $\approx 1{,}609$

d) $\approx 0{,}621$

22 c

23 a

24 c

DICA: A condição de existência de $\log_b a$ é dada por: $a > 0$ e $b > 0$ e $b \neq 1$.

25 1.000

26 a

DICA: Na função $y = \log_2 x$, atribuindo-se a x a abscissa $\frac{1}{4}$, obtém-se a ordenada do ponto D, que é a mesma de A.

27 a

28 c

29 b

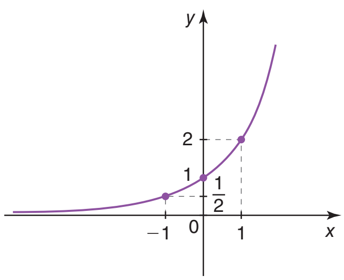
DICA: Decomponha a região sombreada em um retângulo e um trapézio.

30 **a)** $y = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}}(5 - x)$ **c)** $y = \frac{\ln(x + 4)}{2}$

b) $y = 2^{\frac{x+4}{3}} + 1$ **d)** $y = e^{x+1}$

31 a

32



DICA: Aplique as propriedades dos logaritmos.

33 **a)** $P\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ e $P'\left(2, \frac{1}{4}\right)$

b) $a = \frac{1}{2}$

c) $f^{-1}(x) = y = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) demonstração

DICA: Sendo f e f^{-1} duas funções inversas quaisquer, temos a equivalência:
$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

34 d

35 **a)** $f(g(x)) = x$ **b)** $g(f(x)) = x$

36 **a)** $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ **c)** $S = \{10\}$

b) $S = \{7\}$ **d)** $S = \left\{\frac{3 + 2e}{e - 1}\right\}$

37 **a)** $S = \{3\}$ **b)** $S = \mathbb{R}_+^*$

38 **a)** $S = \{2\}$ **b)** $S = \varnothing$

39 c **40** b **41** 64

42 d **43** c **44** d

45 d

46 a

47 **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < \frac{21}{4}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

c) $S = \varnothing$

48 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3 \text{ ou } x \geq 12\}$

49 d

50 c

51 c

52 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3 \text{ e } x \neq 1 \text{ ou } x \geq 27\}$

- **Exercícios contextualizados**

53 a

54 d

DICA: As energias liberadas E_1 e E_2, dos dois terremotos, podem ser comparadas através da razão $\frac{E_1}{E_2}$.

55 **a)** $7 \cdot 10^9$ kWh

b) $10^{\frac{3}{2}} \approx 31,6$

56 a

DICA: Obtenha as intensidades I_Q e I_C dos sons de uma orquestra e de uma conversação normal, em função de I_0, e depois calcule a razão $\frac{I_Q}{I_C}$.

57 c

DICA: O número $\sqrt[12]{2} - 1$ equivale ao percentual de aumento de uma nota para a imediatamente superior.

58 **a)** As temperaturas são 401 °C e 202 °C, respectivamente.

b) 4,3 horas

59 $d \approx 1,77$ km

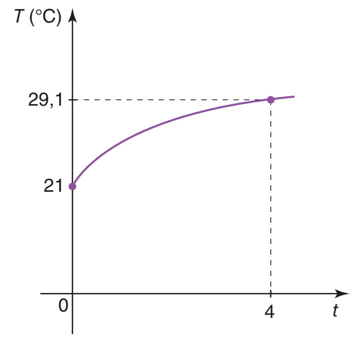
60 **a)** $R_{dB} = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$; 10^{-4} w/m²

b) 10^8

61 c

62 $7,29 \cdot 10^{15}$ quilômetros

63 **a)** 29,1 °C



b) 1,04 hora

64 I. F

II. F

III. V

IV. F

DICA: Observe o valor obtido no item (I) e, depois, verifique se a função é crescente ou decrescente.

65 ≈ 39 anos

66 e

67 a

68 26

69 487 dias

70 ≈ 2,14 anos

71 a

72 **a)** 20%

b) 55,2 milhões de habitantes

DICA: Observe que $f(1) = \frac{A}{2}$.

73 a

74 **a)** $t = -2 \ln\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)$

b) 4,6 segundos

75 ≈ 4,1 horas

76 2044

77 **a)** $k = 1$

DICA: Basta fazer $Q(t) = 1$.

b) 9 horas

DICA: Basta fazer $Q(t) = 0$.

78 d

79 c

80 a) 1 século
b) 0,64 g
c) 6 g

81 e

82 a) $10^{4,5}$
b) $k = \frac{2}{3}$

83 a) R$ 13.996,80
b) 10

84 11

85 no decorrer de 2009

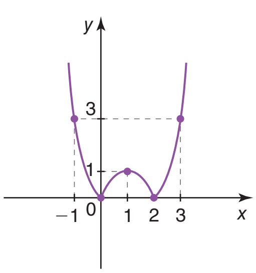
86 a) V
DICA: Pense na inequação
$\frac{1}{1 + 9e^{-x}} \geq \frac{1}{10}$
b) F
DICA: Pense na inequação
$\frac{1}{1 + 9e^{-x}} > \frac{11}{10}$
c) F

Exercícios de revisão cumulativa

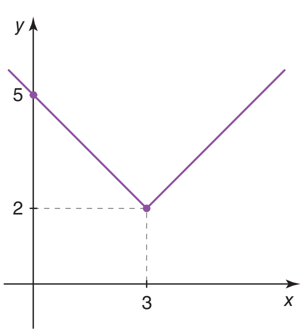
1 a) $x = -1$ ou $x = 3$
b) $-2 \leq x < 1$ ou $3 < x \leq 5$
c) $-1 \leq x \leq 3$
d) $-2 \leq x < -\frac{4}{3}$ ou $4 < x \leq 5$
e) $-1 < x < 3$
f) $-2 \leq x < -1$ ou $3 < x \leq 5$

2 $a = 2$; $b = 4$

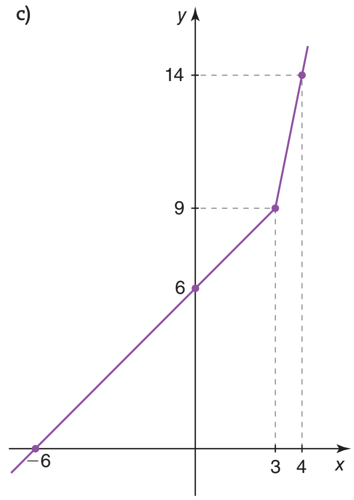
3 a)



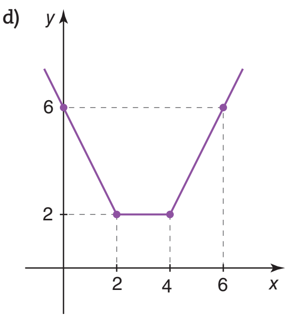
b)



c)



d)



4 $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$

Análise da resolução

≈ 0,61 segundo

CAPÍTULO 10 Geometria plana

Para pensar

1 7,2°

2 Porque eram alternos internos.

3 46.250 quilômetros

Exercícios propostos

1 30°

2 130°

3 48°

4 a) quadrilátero: 360°; pentágono: 540°; hexágono: 720°
b) Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, concluímos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados (ou n vértices) é $180° \cdot (n - 2)$.

5 (I) ≅ (III), pelo caso LLL
(II) ≅ (VIII), pelo caso RHC
(IV) ≅ (VI), pelo caso LAA_O
(V) ≅ (VII), pelo caso LAL

6 a) demonstração
b) 28

7 a) demonstração
b) 24

8 e

9 40°

10 a

11 e

12 1.260 m

13 55°

14 demonstração

15 9 cm

16 a

17 12

18 a) 5 cm
b) 3 cm
c) 4 cm

19 60° e 120°

20 a) F
b) V
c) F
d) F
e) V
f) V
g) F
h) V
i) F

21 55°

22 14 cm

23 116°

24 a) 6
b) 9
c) 3
d) 6
e) 7

25 4 km

26 $AE = 12$; $AD = 8$

27 $x = 14$; $y = 24$

28 d

29 3,5 cm

30 $\approx 3{,}45 \cdot 10^3$ km

31 $a = 5$; $h = 2{,}4$; $m = 1{,}8$; $n = 3{,}2$

32 3 cm

33 $HC = 28{,}8$

34 $a\sqrt{2}$

35 $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

36 21 dm

37 d

38 29 m

39 $6\sqrt{3}$ cm

40 24 cm

41 13 cm

42 a) 65° b) 50° c) 46°

43 a) 90° b) triângulo retângulo

44 0,6 km

45 100°

46 25°

47 150°

48 4 cm

49 5 cm

50 d

51 14

52 $2\pi m \approx 6{,}28$ m

53 4.000 voltas

54 a) 12.740π km $\approx$ 40.003,6 km
b) $\approx$ 1.111,21 km

55 d

56 2 cm

57 24 cm^2

58 4,5 dm

59 a) 12 m^2 c) $9\sqrt{3}$ cm^2
b) 48 cm^2 d) 9 dm

60 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^2

61 c

62 142 m^2

63 $A_{I} = A_{II} = A_{III} = 72$ cm^2;
$A_{IV} = A_{V} = 36$ cm^2; $A_{VI} = A_{VII} = 144$ cm^2

64 2.396 cm^2

65 c

66 24 cm^2

67 a

68 $150(\sqrt{3} + 4)$ cm^2

69 a) 9π cm^2 b) 18π cm^2

70 $0{,}18(\pi + 12)$ m^2 $\approx$ 2,725 m^2

71 1.250π m^3 $\approx$ 3.925 m^3

72 e

73 8π cm^2

74 a) 10π cm^2 c) 130°
b) 80° d) 5π cm^2

75 $\frac{25(\pi - 2)}{4}$ cm^2

76 $3(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2

77 4π cm^2

78 3 cm

79 a

80 54 cm^2

81 b

82 45.000 cm^2

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 a) 25° e) 55°
b) 40° f) 20°
c) 40° g) 135°
d) 45°

2 15°

3 a) 360°
b) 900°
c) 1.260°
d) 5.040°

4 60°

5 a) demonstração
b) 11

6 demonstração

7 a

8 60°

9 a

10 40°

11 $EF = 5$ cm e $AF = 4$ cm

12 65°

13 20 cm

14 $AB = 4$ cm; $BC = 12$ cm e $CD = 8$ cm

15 a) demonstração
b) $BS = 8$; $CS = 10$

16 a) demonstração
b) $\overleftrightarrow{PM}$ é paralela a $\overleftrightarrow{CB}$.
c) $PM = \frac{CB}{2}$

17 $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ cm

18 2 cm

19 13 cm

20 a) $\approx$ 18,84 cm
b) $\approx$ 22 cm
c) $\approx$ 62,8 cm

21 a) $\approx$ 56,56 cm
b) 42 cm

22 $48\sqrt{2}$ cm^2

23 d

24 $6\sqrt{3}$ m^2

25 $3\sqrt{2}$ cm

26 $\frac{3(6\sqrt{3} - \pi)}{2}$ cm^2 $\approx$ 10,59 cm^2

27 $\frac{8(9\sqrt{3} - 4\pi)}{3}$ cm^2 $\approx$ 7,3 cm^2

28 180 dm^2

29 2 cm

30 $\frac{1}{15}$

• **Exercícios contextualizados**

31 167 °F

32 0,4 m

33 62,5 m

34 e

35 c

36 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ km $\approx$ 4,9 km

37 5 m

38 25,8 m

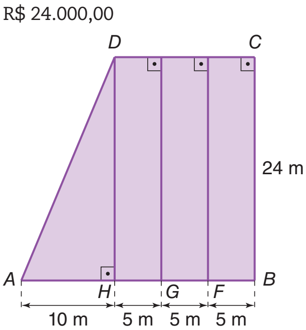
39 b

40 a) $20.000\sqrt{2}$ km
b) 21.630 km

41 c

42 b

43 a) R$ 24.000,00
b)



44 400π cm^2

45 42 m^2

Exercícios de revisão cumulativa

1 d

2 a) 5 b) 104 c) 290

3 a) 6 b) 30 c) 165

4 a) $f(x) = 2.000 \cdot 1{,}1^x$
b) $g(x) = \log_{1,1} \frac{x}{2.000}$
c) $f^{-1}(x) = \log_{1,1} \frac{x}{2.000}$

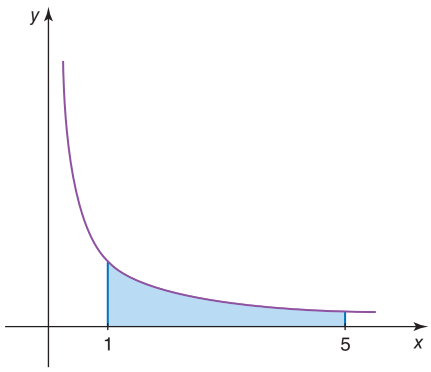
Análise da resolução

$\frac{5 - \sqrt{23}}{3}$

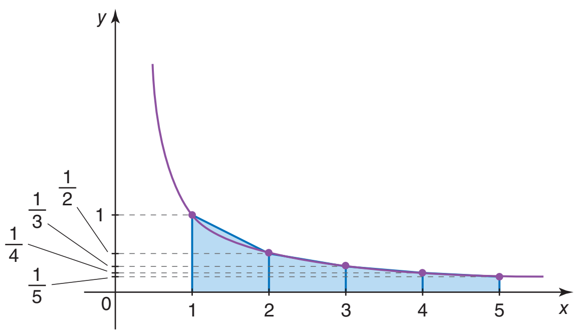
TEXTO COMPLEMENTAR

Técnica para o cálculo aproximado de um logaritmo neperiano

O valor de ln 5 é a área S limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $1 \leqslant x \leqslant 5$.



Uma técnica para obter uma aproximação da área S é subdividir o intervalo [1, 5] em intervalos menores, de preferência de mesmo comprimento, e construir trapézios cujas bases liguem os extremos desses intervalos ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Por exemplo, subdividindo o intervalo [1, 5] em quatro intervalos de mesmo comprimento e construindo os trapézios, temos:



Embora a soma T das áreas desses quatro trapézios seja um pouco maior que a área S sombreada, já temos uma boa aproximação dessa área. Calculando T, chegamos a:

$$T = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot 1}{2} = 1{,}68333...$$

Para ter uma ideia da precisão desse método, o valor de ln 5 com nove casas decimais é 1,609437912. Portanto, com quatro subdivisões do intervalo [1, 5], obtivemos a certeza da parte inteira (1) e da primeira casa decimal (6) do ln 5. Se aumentarmos o número de subdivisões do intervalo [1, 5], vamos nos aproximar mais do ln 5. Por exemplo, com quarenta subdivisões de [1, 5], em intervalos de comprimentos iguais, a soma das áreas dos trapézios passa a 1,6098, aproximadamente.

Em vez de usar trapézios para aproximar a área sob a curva, também podemos usar retângulos, como os das figuras abaixo.

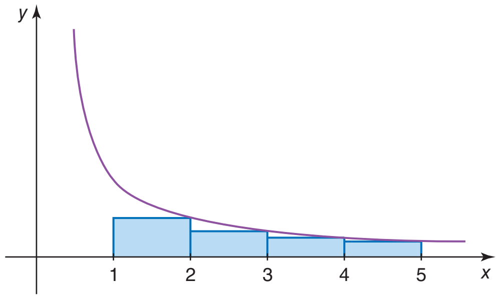


figura 1

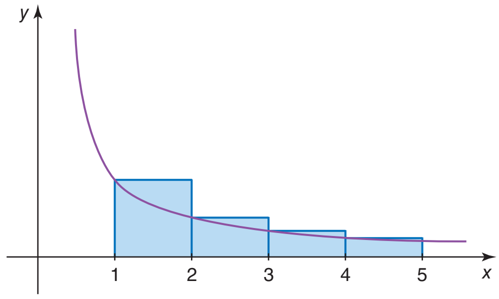


figura 2

A soma q das áreas dos quatro retângulos sob a curva da figura 1 é menor que ln 5, e a soma Q das áreas dos quatro retângulos da figura 2 é maior que ln 5. Assim, temos:

$$q < \ln 5 < Q$$

Generalizando, se efetuarmos n subdivisões de $[1, 5]$, a soma q_n das áreas dos n retângulos sob a curva, como na figura 1, será menor que ln 5, e a soma Q_n das áreas dos n retângulos, como na figura 2, será maior que ln 5. Então teremos:

$$q_n < \ln 5 < Q_n$$

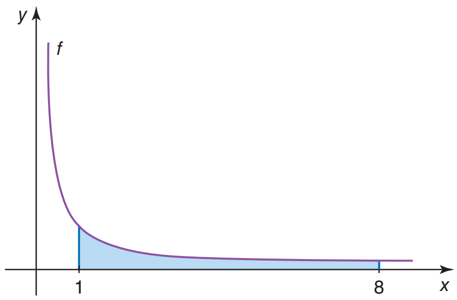
Aumentando n indefinidamente, vamos nos aproximar tanto quanto quisermos do ln 5.

A ideia de calcular a área sob a curva foi usada pelo cientista inglês Isaac Newton (1642-1727) na criação do Cálculo Diferencial e Integral, um dos mais admiráveis trabalhos intelectuais da história da humanidade.

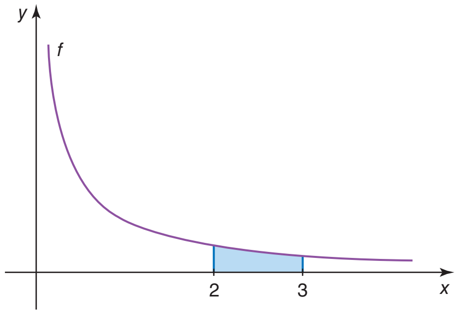
Exercício proposto

1 Nos itens a seguir, está representada a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calcule a área da região sombreada, com $1 \leq x \leq 8$, sabendo que $\ln 2 = 0{,}693$.



b) Calcule a área da região sombreada, com $2 \leq x \leq 3$, sabendo que $\ln 2 = 0{,}693$ e $\ln 3 = 1{,}099$.



TEXTO COMPLEMENTAR

Tabela dos logaritmos decimais

John Napier publicou em 1614 seu sistema de logaritmos, resultado de vinte anos de estudo. Um ano mais tarde, Napier recebeu a visita do matemático inglês Henry Briggs, um entusiasta admirador da teoria dos logaritmos. Nesse encontro, Briggs sugeriu a base dez para uma tabela de logaritmos. Napier concordou com a sugestão, deixando a cargo de Briggs a construção da tabela.


ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad 20,000: et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa perficiuntur Arithmetica problemata et Geometrica.
HOS NVMEROS PRIMVS INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES NEPERVS Baro Merchiſtonij: eos autem ex eiuſdem ſententia mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS, in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ profeſſor SAVILIANVS.
DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ, NVLLA PRÆSTITVTA DIE.
LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS IONES. 1624.

Tabela de logaritmos decimais publicada por Henry Briggs em 1624.

A propriedade básica utilizada por Briggs para a construção da tabela foi a seguinte:

"A média geométrica de dois números positivos distintos, *a* e *b*, está entre esses números", ou seja:

$$\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b \qquad \text{(I)}$$

Para calcular log 2, por exemplo, Briggs partiu da desigualdade:

$$1 < 2 < 10$$

Por (I), temos $1 < \sqrt{1 \cdot 10} < 10$, ou seja, $1 < \sqrt{10} < 10$.

Mas, como $\sqrt{10} > 2$, podemos escrever:

$$1 < 2 < \sqrt{10}$$

Repetimos então o procedimento. Por (I), temos $1 < \sqrt{1 \cdot \sqrt{10}} < \sqrt{10}$, ou seja, $1 < \sqrt[4]{10} < \sqrt{10}$. Mas, como $\sqrt[4]{10} < 2$, podemos escrever:

$$\sqrt[4]{10} < 2 < \sqrt{10}$$

Repetimos o procedimento. Por (I), temos $\sqrt[4]{10} < \sqrt{\sqrt[4]{10} \cdot \sqrt{10}} < \sqrt{10}$, ou seja, $\sqrt[4]{10} < \sqrt[8]{10^3} < \sqrt{10}$. Mas, como $2 < \sqrt[8]{10^3}$, podemos escrever:

$$\sqrt[4]{10} < 2 < \sqrt[8]{10^3}$$

Vamos interromper, por um momento, as repetições do procedimento e obter uma aproximação para log 2. Pela última desigualdade, chegamos a:

$$\log \sqrt[4]{10} < \log 2 < \log \sqrt[8]{10^3} \Rightarrow \frac{1}{4} < \log 2 < \frac{3}{8},$$

ou seja, $0{,}250 < \log 2 < 0{,}375$

Obtivemos assim uma aproximação para log 2. Repetindo o procedimento mais algumas vezes, chegamos a $0{,}300 < \log 2 < 0{,}305$, o que já dá certeza sobre duas casas decimais para log 2. Quanto mais repetições do procedimento, mais casas decimais corretas serão obtidas para log 2.

Pacientemente, Briggs construiu uma tabela dos logaritmos decimais, com catorze casas decimais, de milhares de números naturais. É importante observar que os cálculos trabalhosos se resumem apenas aos logaritmos de números primos, pois, para os de números compostos, são usadas as propriedades dos logaritmos. Por exemplo: $\log 8 = \log 23 = 3 \log 2$.

Como utilizar uma tabela de logaritmos decimais

O logaritmo de qualquer número real positivo N pode ser representado pela soma de um número inteiro c com um número decimal m, com $0 \leqslant m < 1$. O número c é chamado de **característica** do $\log N$ e o número m é chamado de **mantissa** do $\log N$.

Exemplos

a) $\log 398 = 2{,}59988 = \underbrace{2}_{\text{característica}} + \underbrace{0{,}59988}_{\text{mantissa}}$

b) $\log 0{,}0398 = -1{,}40012 = \underbrace{-2}_{\text{característica}} + \underbrace{0{,}59988}_{\text{mantissa}}$

Cálculo da característica

A notação científica do número positivo N ajuda a calcular a característica do $\log N$ de uma maneira muito simples, conforme mostra a propriedade:

> Se um número real positivo N tem notação científica $a \cdot 10^c$, então o número c é a característica do $\log N$ e $\log a$ é a mantissa.

De fato:

$\log N = \log (a \cdot 10^c) = \log a + \log 10^c =$

$= \log a + c \cdot \log 10 = c + \log a$

Como $1 \leqslant a < 10$, então $0 \leqslant \log a < 1$. Portanto, o número inteiro c é a característica e $\log a$ é a mantissa.

Exemplos

a) A notação científica do número 398 é $3{,}98 \cdot 10^2$; então, a característica do $\log 398$ é 2 e a mantissa é $\log 3{,}98$.

b) A notação científica do número 0,0398 é $3{,}98 \cdot 10^{-2}$; então, a característica do $\log 0{,}0398$ é -2 e a mantissa é $\log 3{,}98$.

Consequência

Uma consequência imediata da propriedade anterior é:

> Se dois números reais positivos, x e y, têm representações decimais que diferem entre si apenas pela posição da vírgula, então os números $\log x$ e $\log y$ têm a mesma mantissa.

Exemplo

As representações decimais 398 e 0,0398 diferem entre si apenas pela posição da vírgula, então, como mostram os exemplos anteriores, $\log 398$ e $\log 0{,}0398$ têm a mesma mantissa, que é $\log 3{,}98$.

Obtenção da mantissa

Vimos que o cálculo da característica de $\log N$ é muito simples. Assim, uma tabela de logaritmos pode apresentar apenas mantissas. Na tabela a seguir, a coluna

N apresenta logaritmandos de 1 a 200, e a coluna m apresenta as casas decimais das mantissas de log N, sendo zero a parte inteira de cada mantissa; por exemplo, o número 30103 na coluna m deve ser entendido como 0,30103.

N	***m***	***N***	***m***	***N***	***m***	***N***	***m***	***N***	***m***
		40	60206	80	90309	120	07918	160	20412
1	00000	41	61278	81	90849	121	08279	161	20683
2	30103	42	62325	82	91381	122	08636	162	20952
3	47712	43	63347	83	91908	123	08991	163	21219
4	60206	44	64345	84	92428	124	09342	164	21484
5	69897	45	65321	85	92942	125	09691	165	21748
6	77815	46	66276	86	93450	126	10037	166	22011
7	84510	47	67210	87	93952	127	10380	167	22272
8	90309	48	68124	88	94448	128	10721	168	22531
9	95424	49	69020	89	94939	129	11059	169	22789
10	00000	50	69897	90	95424	130	11394	170	23045
11	04139	51	70757	91	95904	131	11727	171	23300
12	07918	52	71600	92	96379	132	12057	172	23553
13	11394	53	72428	93	96848	133	12385	173	23805
14	14613	54	73239	94	97313	134	12710	174	24055
15	17609	55	74036	95	97772	135	13033	175	24304
16	20412	56	74819	96	98227	136	13354	176	24551
17	23045	57	75587	97	98677	137	13672	177	24797
18	25527	58	76343	98	99123	138	13988	178	25042
19	27875	59	77085	99	99564	139	14301	179	25285
20	30103	60	77815	100	00000	140	14613	180	25527
21	32222	61	78533	101	00432	141	14922	181	25768
22	34242	62	79239	102	00860	142	15229	182	26007
23	36173	63	79934	103	01284	143	15534	183	26245
24	38021	64	80618	104	01703	144	15836	184	26482
25	39794	65	81291	105	02119	145	16137	185	26717
26	41497	66	81954	106	02531	146	16435	186	26951
27	43136	67	82607	107	02938	147	16732	187	27184
28	44716	68	83251	108	03342	148	17026	188	27416
29	46240	69	83855	109	03743	149	17319	189	27646
30	47712	70	84510	110	04139	150	17609	190	27875
31	49136	71	85126	111	04532	151	17898	191	28103
32	50515	72	85733	112	04922	152	18184	192	28330
33	51851	73	86332	113	05308	153	18469	193	28556
34	53148	74	86923	114	05690	154	18752	194	28780
35	54407	75	87506	115	06070	155	19033	195	29003
36	55630	76	88081	116	06446	156	19312	196	29226
37	56820	77	88649	117	06819	157	19590	197	29447
38	57978	78	89209	118	07188	158	19866	198	29667
39	59106	79	89763	119	07555	159	20140	199	29885
40	60206	80	90309	120	07918	160	20412	200	30103

Exemplos

a) Para calcular log 195 usando a tabela, vamos obter a característica pela notação científica: $195 = 1{,}95 \cdot 10^2$; portanto, a característica do log 195 é 2. A mantissa é dada na tabela: 0,29003. Concluímos:

$$\log 195 = 2 + 0{,}29003 = 2{,}29003$$

b) O cálculo do log 76 pela tabela exige inicialmente a característica. A notação científica de 76 é $7{,}6 \cdot 10^1$; portanto, a característica do log 76 é 1. A mantissa é dada na tabela: 0,88081. Concluímos:

$$\log 76 = 1 + 0{,}88081 = 1{,}88081$$

c) Para calcular log 0,0048 com auxílio da tabela, vamos obter a característica através da notação científica: $0{,}0048 = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$; portanto, a característica do log 0,0048 é -3. A mantissa é a mesma do log 48, pois 0,0048 e 48 são representações decimais que diferem entre si apenas pela posição da vírgula; essa mantissa é 0,68124. Concluímos:

$$\log 0{,}0048 = -3 + 0{,}68124 = -2{,}31876$$

CONTEÚDO DIGITAL - PARTE 2

Animação

Resolução gráfica de equações e inequações modulares

Matemática 1 > Parte 2 > Cap. 6 > Seção 6.4

Mostra a resolução de uma equação e uma inequação modular por meio da representação e análise gráfica.

PARTE III

PARTE III

Capítulo 11

Sequências

Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, foi um matemático italiano que viveu de 1180 a 1250, aproximadamente. Em 1202, em sua obra Liber abaci *(Livro dos cálculos), ele propôs o seguinte problema:*

"Admitindo que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez exatamente 2 meses após seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal de filhotes a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, considerando-se um único casal de coelhos recém-nascidos?"

A sequência formada pelo número de coelhos em cada mês ficou conhecida como ***sequência de Fibonacci****, e passou a ser aplicada em várias áreas, como Economia, Biologia, Química etc.*

Sem perceber, lidamos com sequências em muitas situações do cotidiano; por exemplo, em um dicionário, as palavras formam uma sequência que obedece à ordem alfabética, e suas páginas são numeradas por uma sequência de números que obedece à ordem crescente. Neste capítulo, daremos ênfase ao estudo das sequências numéricas, suas leis de formação, representações gráficas e algumas de suas propriedades.

11.1 O conceito de sequência

Ao estabelecer determinada ordem para os elementos de um conjunto, estabelece-se uma sequência para eles.

11.2 Progressão aritmética (PA)

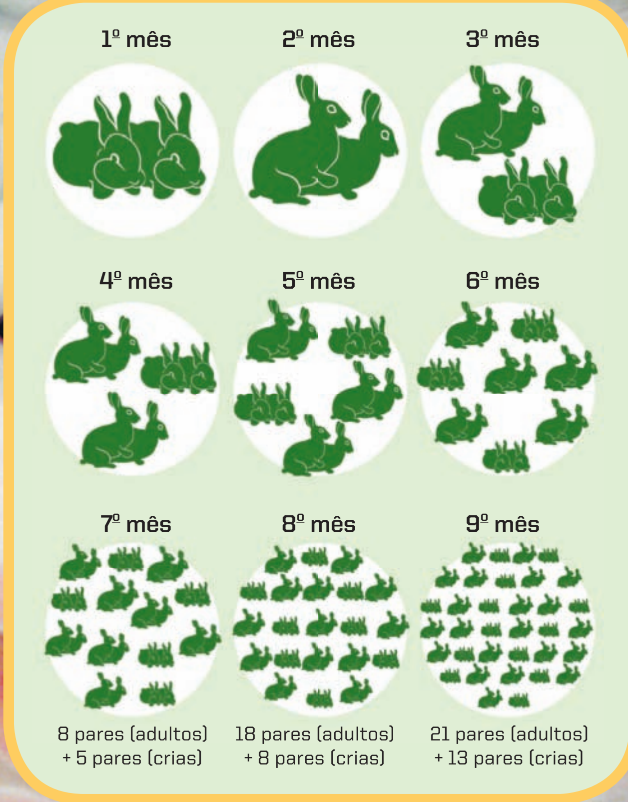
A progressão aritmética é uma importante sequência numérica na qual, ao adicionar cada termo a uma mesma constante, obtemos o termo seguinte.

11.3 Progressão geométrica (PG)

A progressão geométrica é outra importante sequência numérica na qual, ao multiplicar cada termo por uma mesma constante, obtemos o termo seguinte.

Para pensar

Leia o problema acima e escreva os 12 primeiros números da sequência de Fibonacci.



Seção 11.1

O conceito de sequência

Objetivos

- **Obter** uma sequência a partir de sua lei de formação.
- **Escrever** a lei de formação de uma sequência.
- **Resolver** problemas que envolvem sequências.

Termos e conceitos

- sequência finita
- sequência infinita
- termo de uma sequência
- lei de formação de uma sequência

Em setembro de 2009, o Brasil sediou a VI Copa América de basquete feminino, realizada na cidade de Cuiabá (MT). O time feminino do Brasil venceu essa competição, conquistando a medalha de ouro.

Oito países participaram da competição feminina de basquete, obtendo as seguintes classificações:

Classificação final da VI Copa América de basquete feminino

Posição	País
1	Brasil
2	Argentina
3	Canadá
4	Cuba
5	Porto Rico
6	Chile
7	Venezuela
8	República Dominicana

Disponível em: <http://www.cbb.com.br>. Acesso em: 13 out. 2009.

Jogadoras brasileiras na VI Copa América de basquete feminino.

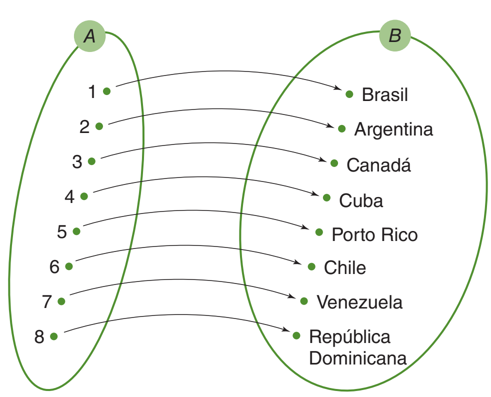
Observe que a classificação é apresentada associando-se cada número natural de 1 a 8 ao nome de um país. Essa associação determina uma **sequência**, em que:

- o número 1 corresponde ao primeiro elemento da sequência;
- o número 2 corresponde ao segundo elemento da sequência;
- o número 3 corresponde ao terceiro elemento da sequência;

...

- o número 8 corresponde ao oitavo elemento da sequência.

Vamos representar essa associação em um diagrama de flechas, indicando por *A* o conjunto de números naturais de 1 a 8 e por *B* o conjunto dos países participantes do torneio:



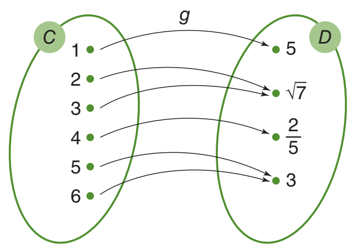
Note que cada elemento de *A* está associado a um único elemento de *B*. Dessa forma, temos uma função de *A* em *B*. Essa situação é um exemplo de sequência finita.

Sequência finita

Sequência finita é toda função de domínio $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ com $A \subset \mathbb{N}^*$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

Exemplos

a) Consideremos a função g descrita pelo diagrama:



Essa função descreve uma sequência finita, que pode ser representada simplesmente por:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

Nessa forma de representação da sequência, os parênteses indicam que a ordem em que os elementos são apresentados deve ser mantida, isto é, se trocarmos a ordem de pelo menos dois elementos, obteremos outra sequência, por exemplo:

$$\left(5, \sqrt{7}, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right) \neq \left(\sqrt{7}, 5, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, 3, 3\right)$$

b) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 40\}$, considere a função $h: A \to \mathbb{R}$ tal que $h(n) = 3n^2 - 1$. Temos:

$$h(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$$
$$h(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$$
$$h(3) = 3 \cdot 3^2 - 1 = 26$$
$$h(4) = 3 \cdot 4^2 - 1 = 47$$
$$...$$
$$h(40) = 3 \cdot 40^2 - 1 = 4.799$$

Assim, a função h representa a sequência: (2, 11, 26, 47, ..., 4.799)

Sequência infinita

Sequência infinita é toda função de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e contradomínio B, sendo B um conjunto qualquer não vazio.

Exemplos

a) Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = 2n$. Essa função é a sequência infinita dos números naturais pares não nulos e pode ser representada por:

$$(2, 4, 6, 8, ...)$$

b) Seja a função $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $g(n) = (-1)^n$. Essa é a sequência infinita:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...)$$

Termos de uma sequência

Cada elemento de uma sequência também é chamado de **termo da sequência**. Em uma sequência, o termo que ocupa a posição de número n é indicado pelo símbolo a_n, isto é:

a_1 indica o primeiro termo da sequência;
a_2 indica o segundo termo da sequência;
a_3 indica o terceiro termo da sequência;
a_4 indica o quarto termo da sequência;
...
a_n indica o n-ésimo termo da sequência.

Exemplo

Na sequência (7, 3, 8, 10, ...), temos: $a_1 = 7$, $a_2 = 3$, $a_3 = 8$, $a_4 = 10$, ...

Notas:

1. Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ pode ser representada abreviadamente por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou, simplesmente, (a_n).
2. Em uma sequência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados de **extremos da sequência**. Dois termos, a_i e a_j **são equidistantes dos extremos** se, e somente se, a quantidade de termos que precedem a_i é igual à quantidade de termos que sucedem a_j.
3. Um termo a_m é chamado de **termo médio** de uma sequência com número ímpar de termos se, e somente se, a quantidade de termos que antecedem a_m é igual à quantidade de termos que o sucedem.

   Por exemplo:

   Na sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{58}, a_{59}, a_{60}, a_{61})$, os extremos são a_1 e a_{61}. Os termos a_4 e a_{58} são equidistantes dos extremos. E o termo médio da sequência é a_{31}.

Lei de formação de uma sequência

Um conjunto de informações que determina todos os termos de uma sequência e a ordem em que eles são apresentados é chamado de **lei de formação da sequência**.

Exemplos

a) Seja (a_n) a sequência tal que: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 4 + a_n \end{cases}$

As informações acima determinam todos os elementos da sequência e a ordem em que eles são apresentados. Observe:

- o primeiro termo da sequência é 3, isto é, $a_1 = 3$;
- na igualdade $a_{n+1} = 4 + a_n$, atribuindo a n os valores 1, 2, 3, ..., obtemos os demais termos da sequência, isto é:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_2 = 4 + a_1 = 4 + 3 = 7 \\ n = 2 &\Rightarrow a_3 = 4 + a_2 = 4 + 7 = 11 \\ n = 3 &\Rightarrow a_4 = 4 + a_3 = 4 + 11 = 15 \\ n = 4 &\Rightarrow a_5 = 4 + a_4 = 4 + 15 = 19 \\ &... \end{aligned}$$

Portanto, a sequência é (3, 7, 11, 15, 19, ...).

b) Considere a sequência (a_n) tal que $a_n = n^2 - 1$. Para determinar os termos dessa sequência, basta atribuir a n os valores 1, 2, 3, 4, ... na igualdade $a_n = n^2 - 1$. Observe:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_1 = 1^2 - 1 = 0 \\ n = 2 &\Rightarrow a_2 = 2^2 - 1 = 3 \\ n = 3 &\Rightarrow a_3 = 3^2 - 1 = 8 \\ n = 4 &\Rightarrow a_4 = 4^2 - 1 = 15 \\ &... \end{aligned}$$

Portanto, a sequência é (0, 3, 8, 15, ...).

c) A sequência dos números primos positivos, em ordem crescente, é (2, 3, 5, 7, 11, ...). Observe que a lei de formação dessa sequência não foi expressa por uma equação, mas pela propriedade de que os números sejam primos positivos e estejam em ordem crescente. Esse exemplo mostra que a lei de formação de uma sequência pode não ser uma equação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Na sequência $(5, -4, 8, \sqrt{3}, 6, 6, 6, \ldots)$ identifique os termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_7.

2 Escreva sob a forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ cada uma das sequências a seguir.

a) (a_n) tal que $a_n = 2n + 5$

b) (a_n) tal que $a_n = n^2 + n$

c) (a_n) tal que $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

d) (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 5 + a_n \end{cases}$

e) (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \end{cases}$

3 A soma dos n primeiros termos de uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ é dada por $S_n = n^2 + n$, para todo número natural n não nulo.

a) Calcule a soma dos dez primeiros termos da sequência.

b) Determine o primeiro termo da sequência.

c) Determine o 5º termo da sequência.

d) Determine o n-ésimo termo, a_n, da sequência.

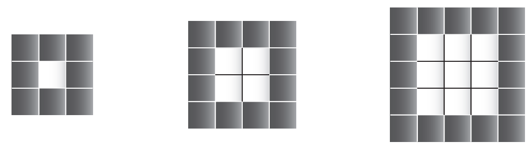
4 Uma livraria faz a seguinte promoção:

Agora, responda:

a) Um cliente que tem 23 livros e já leu todos pretende aproveitar ao máximo essa promoção. Quantos livros novos ele pode trocar pelos já lidos nessa livraria, sem nenhum custo, supondo que a promoção não termine?

b) Um cliente tem 505 livros e já leu todos e, em cada troca dessa promoção, ele retira o maior número possível de livros novos. Escreva a sequência (a_n), em que a_n é o número de livros novos retirados na n-ésima troca.

5 Com azulejos quadrados brancos e pretos, todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos:



A regra para construir esses mosaicos é a seguinte: inicialmente, formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos pretos, e assim sucessivamente.
Considerando a sequência de mosaicos com número crescente de azulejos, responda:

a) Quantos azulejos brancos terá o 15º mosaico dessa sequência?

b) Quantos azulejos brancos terá o n-ésimo mosaico dessa sequência?

c) Quantos azulejos pretos terá o 20º mosaico dessa sequência?

d) Quantos azulejos pretos terá o n-ésimo mosaico dessa sequência?

6 Faça o que se pede.

a) Releia o problema da abertura deste capítulo e reescreva os 12 primeiros números da sequência de Fibonacci.

b) Considerando infinita a sequência de Fibonacci, escreva sua lei de formação. (*Dica*: Relacione cada termo com seus dois termos anteriores.)

7 (UFPB) O total de indivíduos, na n-ésima geração, de duas populações, P e Q, é dado, respectivamente, por $P(n) = 4^n$ e $Q(n) = 2^n$. Sabe-se que, quando $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \geqslant 1.024$, a população Q estará ameaçada de extinção. Com base nessas informações, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da:

a) décima geração
b) nona geração
c) oitava geração
d) sétima geração
e) sexta geração

Resolva os exercícios complementares 1 a 7 e 89 a 94 .

Seção 11.2

Progressão aritmética (PA)

Objetivos

- **Reconhecer** e classificar uma PA.
- **Determinar** um termo qualquer de uma PA, a partir do primeiro termo e da razão.
- **Escrever** o termo geral de uma PA.
- **Calcular** a soma dos n primeiros termos de uma PA.
- **Aplicar** o conceito de PA na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- **progressão aritmética**
- **razão de uma PA**

Uma nova linha do metrô, ainda em construção, tinha 12 km no início de janeiro do ano passado. De lá para cá, construiu-se 0,5 km dessa linha ao mês.

Construção do metrô, no Rio de Janeiro.

A sequência a seguir apresenta os comprimentos, em quilômetro, dessa linha do metrô, mês a mês, a partir do início de janeiro do ano passado:

$$(12;\ 12{,}5;\ 13;\ 13{,}5;\ 14;\ 14{,}5;\ ...)$$

Essa sequência numérica é chamada de **progressão aritmética**, porque, adicionando a cada um de seus termos uma mesma constante, obtemos o termo seguinte; nesse caso, adicionamos 0,5 a cada termo.

Podemos definir, de modo geral, que:

> **Progressão aritmética (PA)** é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante r.
>
> O número r é chamado de **razão** da progressão aritmética.

Exemplos

a) A sequência (4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39) é uma PA finita de razão $r = 5$.

b) (18, 10, 2, −6, −14, ...) é uma PA infinita de razão $r = -8$.

c) (4, 4, 4, 4, 4, ...) é uma PA infinita de razão $r = 0$.

Nota:

Considere uma PA qualquer de razão r:

$$(a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} a_3 \xrightarrow{+r} a_4, ..., a_n \xrightarrow{+r} a_{n+1}, ...)$$

Observe que:

$a_2 - a_1 = r$ $\quad a_3 - a_2 = r$ $\quad a_4 - a_3 = r$ $\quad a_{n+1} - a_n = r$

Ou seja, a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante e igual à razão r.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular a razão da PA que tem termos $a_5 = \frac{3}{5}$ e $a_6 = 2$.

Resolução

A razão r da PA é dada por:

$r = a_6 - a_5 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$

2 Verificar se as sequências abaixo são progressões aritméticas ou não.

a) (5, 9, 13, 17, 21)

b) (−2, −5, −8, −12)

c) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = 1 + 3n$

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 4n + 3$

Resolução

a) Qualquer termo dessa sequência, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante (no caso, 4). Logo, a sequência é uma PA.

b) Observando que $-12-(-8) \neq -8-(-5)$, concluímos que a sequência não é PA.

c) A partir da lei de formação, vamos encontrar os 4 elementos da sequência:

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$
$$a_2 = 1 + 3 \cdot 2 = 7$$
$$a_3 = 1 + 3 \cdot 3 = 10$$
$$a_4 = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

Assim, a sequência é: (4, 7, 10, 13).

Como a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é sempre a mesma (no caso, 3), concluímos que a sequência é uma PA.

d) Devemos verificar se a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer é constante.

Temos $a_n = 4n + 3$ e $a_{n+1} = 4(n + 1) + 3$ que são termos consecutivos da sequência, para qualquer n natural não nulo. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:

$a_{n+1} - a_n = 4(n + 1) + 3 - (4n + 3) =$
$= 4n + 4 + 3 - 4n - 3 = 4$

Como essa diferença é constante, concluímos que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma PA.

Classificação de uma PA

Podemos classificar as progressões aritméticas em crescente, decrescente ou constante.

- Uma PA é **crescente** quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso só ocorre quando a **razão** é **positiva**.

Exemplo

(6, 10, 14, 18, ...) é uma PA crescente. Observe que sua razão é positiva: $r = 4$.

- Uma PA é **decrescente** quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre quando a **razão** é **negativa**.

Exemplo

(13, 8, 3, −2, −7, ...) é uma PA decrescente. Observe que sua razão é negativa: $r = -5$.

- Uma PA é **constante** quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando a **razão** é **nula**.

Exemplo

$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ é uma PA constante. Note que sua razão é nula: $r = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8 Verifique se as sequências abaixo são progressões aritméticas.

a) (7, 9, 11, 13, 15)
b) (2, 4, 8, 16, 32)
c) (30, 25, 20, 15)
d) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = 3n - 5$
e) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = n^2 + 1$
f) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ tal que $a_n = \frac{3n}{2} + 1$
g) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = \frac{3}{n}$

9 Calcule a razão de cada uma das progressões aritméticas:

a) (0, 2, 4, 6, 8, ...)
b) (10, 7, 4, 1, −2, ...)
c) $\left(\frac{13}{6}, \frac{17}{12}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$
d) (−7, −7, −7, −7, ...)
e) $\left(\frac{6}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2-\sqrt{3}}, 4, \ldots\right)$

10 Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $r = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ e $a_6 = 1 - \sqrt{2}$. Determine o termo a_7.

11 (PUC-MG) Três números naturais, a, b e c, estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão 2. Se $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, a soma $a + b + c$ é igual a:

a) 12
b) 18
c) 24
d) 32
e) 36

12 Verifique se a sequência (a_n) tal que $a_n = 3n + 5$ é uma PA.

13 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das progressões aritméticas a seguir.

a) (4, 7, 10, 13, ...)

b) (−14, −10, −6, −2, ...)

c) (28, 20, 12, 4, ...)

d) (−30, −35, −40, −45, ...)

e) (6, 6, 6, 6, ...)

f) $\left(2 - \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2}, \ldots\right)$

14 Classifique cada uma das seguintes progressões aritméticas como crescente, decrescente ou constante:

a) (a_n) tal que $a_n = 8 - 3n$

b) (a_n) tal que $a_n = \dfrac{n^2 - 9}{n + 3} - n$

c) (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 8 \end{cases}$

15 Determine o número real x, de modo que a sequência (1 − x, x − 2, 2x − 1) seja uma PA.

16 Em qualquer PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão r, os termos podem ser expressos em função de a_1 e r, observe: $\left(a_1, \underbrace{a_1 + r}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3r}_{a_4}, \ldots, \underbrace{\ ?\ }_{a_n}, \ldots\right)$. Qual é a expressão que representa o termo a_n em função de a_1 e r?

Resolva os exercícios complementares 8 a 12.

Representação genérica de uma PA

Para agilizar a resolução de certos problemas, convém representar uma PA de maneira genérica. Mostramos a seguir algumas dessas representações:

- A sequência $(x, x + r, x + 2r)$ é uma PA de três termos e razão r, para quaisquer valores de x e r.
- A sequência $(x - r, x, x + r)$ é uma PA de três termos e razão r, para quaisquer valores de x e r. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de três termos, conhecendo-se a soma deles.
- A sequência $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ é uma PA de quatro termos e razão r, para quaisquer valores de x e r.
- A sequência $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$ é uma PA de quatro termos e razão $2r$, para quaisquer valores de x e r. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PA de quatro termos, conhecendo-se a soma deles.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3 Determinar a PA decrescente de três termos, sabendo que a soma desses termos é 3 e o produto deles é $\frac{5}{9}$.

Resolução

Quando conhecemos a soma dos termos, a representação mais adequada da PA genérica é $(x - r, x, x + r)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos x = 1.
Substituímos x por 1 na segunda equação, obtendo:

$$(1 - r) \cdot 1 \cdot (1 + r) = \frac{5}{9} \Rightarrow 1 - r^2 = \frac{5}{9}$$

$$\therefore r^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm\frac{2}{3}$$

Como queremos uma PA decrescente, só nos interessa a razão negativa, isto é, $r = -\frac{2}{3}$. Assim, a PA decrescente $(x - r, x, x + r)$ é

$$\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right), 1, 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\right), \text{ ou seja, } \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3}\right).$$

4 Em uma PA crescente de quatro termos, a soma de todos os termos é 16 e o produto do segundo pelo terceiro termo é 12. Determinar essa PA.

Resolução

Como conhecemos a soma dos termos, a representação mais adequada da PA genérica é $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 16 \\ (x - r) \cdot (x + r) = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ (x - r) \cdot (x + r) = 12 \end{cases}$$

Substituímos x por 4 na segunda equação, obtendo:

$$(4 - r)(4 + r) = 12 \Rightarrow 16 - r^2 = 12$$

$$\therefore r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

Como queremos uma PA crescente, só nos interessa a razão $2r$ positiva, o que ocorre para $r = 2$. Assim, a PA crescente $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$ é

$(4 - 3 \cdot 2, 4 - 2, 4 + 2, 4 + 3 \cdot 2)$, ou seja,

(−2, 2, 6, 10).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17 Determine a PA crescente de três termos cuja soma dos três termos é 6 e o produto deles é -10.

18 Determine a PA crescente de quatro termos cuja soma dos quatro termos é 4 e o produto do terceiro pelo quarto termo é 40.

19 (Faap-SP) As medidas dos ângulos internos de um triângulo, em ordem crescente, formam uma progressão aritmética. A medida do maior desses ângulos é o dobro da medida do menor. O maior ângulo interno desse triângulo mede:

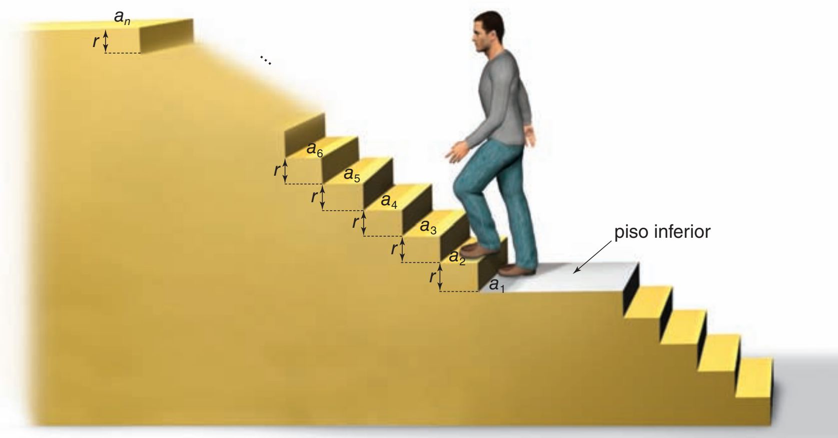
a) 68° **b)** 72° **c)** 76° **d)** 80° **e)** 82°

20 Durante três meses consecutivos, um investidor aplicou em um fundo de capitais, perfazendo um total de R$ 2.790,00 aplicados. Sabendo que as aplicações, mês a mês, formam uma progressão aritmética, qual foi o valor aplicado no segundo mês?

Resolva os exercícios complementares 13 e 14.

Fórmula do termo geral de uma PA

Numa progressão aritmética, um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (r) e do primeiro termo (a_1) por uma fórmula matemática. Para entender essa fórmula, imagine uma escada que une dois pisos de um edifício. O piso inferior tem altura a_1, em relação ao térreo do edifício, e os patamares dos degraus têm alturas a_2, a_3, a_4, a_5, ... , a_n, em relação ao térreo, conforme mostra a figura.



Sendo r a altura de cada degrau, a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...) é uma PA.

- Se uma pessoa estiver no patamar de altura a_1, quantos degraus deverá subir para atingir o patamar de altura a_6?

  Observando a figura, constatamos que a pessoa deve subir 5 degraus ($5r$). Assim, a altura a_6 é igual à soma $a_1 + 5r$.

- Generalizando, se uma pessoa estiver no patamar de altura a_1, quantos degraus deverá subir para atingir o patamar de altura a_n?

  Ora, no patamar de altura a_2, a pessoa terá subido 1 degrau; no de altura a_3, terá subido 2 degraus; no de altura a_4, terá subido 3 degraus; e assim por diante, ou seja:

$$a_1 = a_1 + \mathbf{0}r$$
$$a_2 = a_1 + \mathbf{1}r$$
$$a_3 = a_1 + \mathbf{2}r$$
$$a_4 = a_1 + \mathbf{3}r$$
$$\ldots$$

Observando que, em cada igualdade, o coeficiente de r tem uma unidade a menos que o índice do termo à esquerda da igualdade, concluímos: $a_n = a_1 + (n - 1)r$

De maneira geral:

> Numa PA (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...) de razão r, temos:
> $$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

A identidade acima é chamada de **fórmula do termo geral da PA**.

Outra fórmula do termo geral de uma PA

Voltando à figura anterior, observe que:

- se a pessoa estiver no patamar de altura a_6 e quiser se deslocar até o patamar de altura a_{10}, ela deve subir $(10 - 6)$ degraus:

$$a_{10} = a_6 + (10 - 6)r\text{, ou seja, } a_{10} = a_6 + 4r$$

- se a pessoa estiver em um patamar de altura a_k e quiser se deslocar até o patamar de altura a_n, ela deve subir $(n - k)$ degraus, ou seja: $a_n = a_k + (n - k)r$

De maneira geral:

Numa PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_k, ..., a_n, ...)$ de razão r, temos:

$$a_n = a_k + (n - k)r$$

Essa identidade é outro modo de apresentar a **fórmula do termo geral da PA**.

Note que, se $k = 1$, obtemos a fórmula anterior: $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Exemplos

a) $a_{30} = a_{10} + (30 - 10)r \Rightarrow a_{30} = a_{10} + 20r$

b) $a_6 = a_8 + (6 - 8)r \Rightarrow a_6 = a_8 - 2r$

c) $a_{40} = a_1 + (40 - 1)r \Rightarrow a_{40} = a_1 + 39r$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5 Determinar o 51º termo da PA (4, 10, 16, 22, ...).

Resolução

Devemos determinar o termo $a_n = a_1 + (n - 1)r$ dessa PA tal que: $a_1 = 4$, $r = 6$ e $n = 51$

Logo:

$a_{51} = 4 + (51 - 1) \cdot 6 \Rightarrow a_{51} = 4 + 50 \cdot 6 = 304$

Concluímos, assim, que o 51º termo da PA é 304.

6 Obter a razão da PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ tal que $a_1 = 7$ e $a_5 = 8$.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$ da PA para $n = 5$, temos:

$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow 8 = 7 + 4r$

$\therefore r = \frac{1}{4}$

Concluímos que a razão da PA é $\frac{1}{4}$.

7 Determinar o número de termos da PA (2, 10, 18, ..., 250).

Resolução

Indicando por n o número de termos, devemos obter o valor de n na expressão $a_n = a_1 + (n - 1)r$ tal que: $a_1 = 2$, $a_n = 250$ e $r = 8$

Logo:

$250 = 2 + (n - 1) \cdot 8 \Rightarrow 250 = 2 + 8n - 8$

$\therefore 256 = 8n \Rightarrow n = 32$

Concluímos, então, que a PA possui 32 termos.

8 Qual é a razão da PA (a_n) tal que $a_1 + a_5 = 26$ e $a_2 + a_9 = 46$?

Resolução

Pela fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$, podemos representar os termos a_5, a_2 e a_9 por:

$a_5 = a_1 + 4r$, $a_2 = a_1 + r$ e $a_9 = a_1 + 8r$

Assim:

$$\begin{cases} a_1 + a_5 = 26 \\ a_2 + a_9 = 46 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 4r = 26 \\ a_1 + r + a_1 + 8r = 46 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 4r = 26 \\ 2a_1 + 9r = 46 \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$-5r = -20 \Rightarrow r = 4$$

Concluímos, então, que a razão da PA é 4.

9 A partir do momento em que havia 684 pessoas em um ginásio de esportes, a contagem dos torcedores que entravam passou a ser feita por catracas que registraram o ingresso de 208 pessoas por hora, até completar a capacidade máxima do ginásio, que é de 3.180 espectadores. Ninguém saiu antes do jogo, que começou quando a capacidade máxima do ginásio foi atingida.

a) Construir a sequência em que os termos representem o número de pessoas no ginásio, hora a hora, a partir do instante em que a contagem das pessoas passou a ser feita por catracas.

b) Durante quantas horas as catracas estiveram em funcionamento?

Resolução

a) A sequência é uma progressão aritmética finita de razão 208, cujo primeiro e último termos são 684 e 3.180, respectivamente, isto é:

$$(684, 892, 1.100, 1.308, ..., 3.180)$$

b) Observe na PA do item anterior que, após 1 hora, havia a_2 pessoas; após 2 horas, havia a_3 pessoas; assim, após $n - 1$ horas, havia a_n pessoas no ginásio.
Então, vamos calcular o número n de termos da PA, em que $a_1 = 684$, $a_n = 3.180$ e $r = 208$:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 3.180 = 684 + (n - 1) \cdot 208$
$\therefore n = 13$
Logo, as catracas estiveram em funcionamento durante 12 horas.

10 Interpolar (ou seja, inserir) 4 meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem.

Resolução

Interpolar 4 meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem, significa determinar a PA de primeiro termo 1 e último termo 2, havendo entre eles quatro outros termos, isto é:

$$(\underset{a_1}{1}, \underbrace{\_\,, \_\,, \_\,, \_}_{\text{meios aritméticos}}, \underset{a_6}{2})$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow 2 = 1 + 5r$
$\therefore r = \dfrac{1}{5}$
Logo, a PA é $\left(1, \dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{9}{5}, 2\right)$.

11 Obter o 40º termo da PA de razão 3, em que $a_{21} = 62$.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral
$a_n = a_k + (n - k)r$ da PA para $n = 40$, $k = 21$ e $r = 3$, temos:
$a_{40} = a_{21} + (40 - 21)r \Rightarrow a_{40} = 62 + 19 \cdot 3 = 119$
Logo, o 40º termo da PA é 119.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21 Determine o 40º termo da PA (2, 13, 24, 35, ...).

22 Qual é o 21º termo da PA $(2k + 1, 3k, 4k - 1, ...)$?

23 Obtenha o termo geral a_n da PA (2, 8, 14, 20, ...).

24 Em uma PA (a_n) de razão $r = 7$, temos $a_{20} = 131$. Determine a_1.

25 Na PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $r = 2 - k$, temos $a_{11} = 29k - 18$, sendo k um número real. Determine a_1.

26 Obtenha a PA (a_n) de razão $r = -5$, em que $a_8 = 3a_5$.

27 Quantos termos tem a PA (3, 7, 11, ..., 99)?

28 Determine o número de termos da PA $(15b - 47, 14b - 43, 13b - 39, ..., 13)$.

29 Em uma PA (a_n), temos $a_1 = \dfrac{1}{6}$ e $a_{12} = \dfrac{17}{3}$. Determine a razão dessa PA.

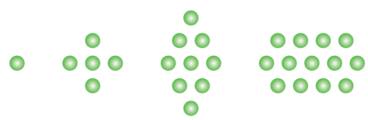
30 Interpolar 6 meios aritméticos entre 2 e 10, nessa ordem.

31 Determine a razão da PA (a_n) em que $a_2 + a_3 = 11$ e $a_4 + a_7 = 21$.

32 Determine o 23º termo da PA (a_n) de razão $r = 6$ e $a_{15} = 18$.

33 Em uma PA (a_n), temos $a_{20} = 5$ e $a_{32} = 8$. Determine a razão dessa PA.

34 (Vunesp) Num laboratório, foi feito um estudo sobre a evolução de uma população de vírus. Ao final de um minuto do início das observações, existia 1 elemento na população; ao final de dois minutos, existiam 5, e assim por diante. A seguinte sequência de figuras apresenta as populações do vírus (representado por um círculo) ao final de cada um dos quatro primeiros minutos.



Supondo que se manteve constante o ritmo de desenvolvimento da população, o número de vírus no final de 1 hora era de:
a) 241 b) 238 c) 237 d) 233 e) 232

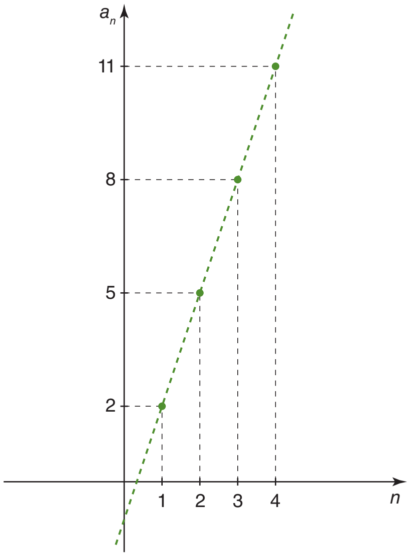
35 Um trecho de serra de 13 km de uma rodovia que liga o interior ao litoral possui duas faixas de trânsito para a descida e duas faixas para a subida. Quando o fluxo de veículos para o litoral é muito intenso, é implantada a Operação Descida. Um dos procedimentos dessa operação é limitar a apenas uma faixa de trânsito a subida de veículos e, consequentemente, permitir a descida da serra por três faixas. Para isso, são colocados 261 cones sinalizadores ao longo de toda a serra, sendo que a distância entre dois cones consecutivos quaisquer é constante e que o primeiro e o último ficam exatamente no início e no fim da serra, respectivamente. Calcule a distância entre dois cones consecutivos quaisquer.

36 Em cada região especificada pela Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel), as frequências das emissoras de rádio FM devem variar de 87,9 a 107,9 MHz, e a diferença entre duas frequências consecutivas deve ser 0,2 MHz. O número máximo de emissoras FM que podem funcionar em uma mesma região determinada pela Anatel é:
a) 99 b) 100 c) 101 d) 102 e) 103

Resolva os exercícios complementares 15 a 25 e 95 a 102.

Representação gráfica de uma PA

Considere a PA (2, 5, 8, 11, ...). Como vimos, seu termo geral é dado por $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$, ou seja, $a_n = -1 + 3n$. A representação gráfica dessa PA é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano, conforme a figura abaixo:



Observando que o termo geral $a_n = -1 + 3n$ é identificado com a função afim $y = -1 + 3x$ quando x assume apenas valores naturais não nulos, concluímos que a representação gráfica da PA (2, 5, 8, 11, ...) é formada por pontos da reta de equação $y = -1 + 3x$.

De modo geral, temos:

- A representação gráfica da PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$ é formada pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano.
- Como o termo geral é $a_n = a_1 + (n - 1)r$, a representação gráfica da PA é formada por pontos da reta de equação $y = a_1 + (x - 1)r$. Note que $y = a_1 + (x - 1)r$ é uma função afim se $r \neq 0$, e é uma função constante se $r = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

37 Represente no plano cartesiano cada uma das progressões aritméticas a seguir.

a) (−5, −1, 3, 7, 11)

b) (10, 7, 4, 1, −2, −5)

38 Considere que a_n é o termo geral de uma progressão aritmética de razão 5 e primeiro termo 8. Podemos afirmar que a representação gráfica dos pontos (n, a_n) no plano cartesiano, com $n \in \mathbb{N}^*$, está contida no gráfico da função afim:

a) $y = 3 + 5x$

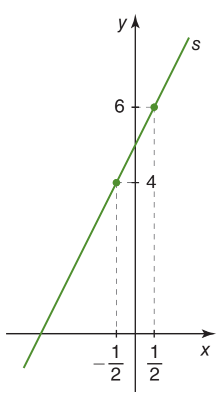
b) $y = 8 + 5x$

c) $y = 3 + 5x^2$

d) $y = 8 \cdot 5^x$

e) $y = 8 \cdot \log (x + 9)$

39 Considere a PA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cuja representação gráfica é formada pelos pontos (n, a_n) pertencentes à reta s, abaixo. Determine a razão r e o termo a_{40} dessa PA.



Propriedades das progressões aritméticas

P1. Em toda PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja a PA finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_n)$ de razão r.

Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos. Vamos demonstrar que $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$.

De fato:

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + (k + 1 - 1)r + a_1 + (n - k - 1)r = a_1 + \cancel{kr} + a_1 + (n - 1)r - \cancel{kr} =$$

$$= a_1 + a_1 + (n - 1)r = a_1 + a_n$$

Exemplo

(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63)

$28 + 38 = 66$

$23 + 43 = 66$

$18 + 48 = 66$

$13 + 53 = 66$

$8 + 58 = 66$

$3 + 63 = 66$

P2. Uma sequência de três termos é PA se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois, isto é:

$$(a, b, c) \text{ é PA } \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

Demonstração

Temos:

$$\begin{cases} (a, b, c) \text{ é PA } \Leftrightarrow b - a = c - b \\ b - a = c - b \Leftrightarrow b = \dfrac{a + c}{2} \end{cases}$$

Logo: (a, b, c) é PA $\Leftrightarrow b = \dfrac{a + c}{2}$

Consequência

Temos, como consequências das propriedades P1 e P2:

> Em uma PA com número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética entre os extremos.

Demonstração

Seja a_k o termo médio de uma PA com número ímpar de termos:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1}, ..., a_n)$$

A sequência $(a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1})$ também é uma PA; logo, pela propriedade P2:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad \text{(I)}$$

Mas os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos, portanto, por P1:

$$a_{k-1} + a_{k+1} = a_1 + a_n \quad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), concluímos que $a_k = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$.

Exemplo

(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38)

termo médio

$20 = \dfrac{2 + 38}{2}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

12 Determinar o número x de modo que a sequência (x + 3, x − 1, 1 − 2x) seja uma PA.

Resolução

A sequência (x + 3, x − 1, 1 − 2x) é PA se, e somente se, $x - 1 = \dfrac{x + 3 + 1 - 2x}{2}$, ou seja:

$2x - 2 = -x + 4 \Rightarrow x = 2$

13 Os números x + 5, 2x + 1 e 3x + 4, com $x \in \mathbb{R}$, podem ser termos consecutivos de uma PA, na ordem em que foram apresentados?

Resolução

Os termos x + 5, 2x + 1 e 3x + 4 estão em PA, nessa ordem, se, e somente se,

$2x + 1 = \dfrac{x + 5 + 3x + 4}{2}$, ou seja,

$4x + 2 = 4x + 9 \Rightarrow 0x = 7$

Como a sentença 0x = 7 é falsa para qualquer x real, concluímos que não existe número real x que torne as expressões x + 5, 2x + 1 e 3x + 4, nessa ordem, termos consecutivos de uma PA.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

40 Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é o triplo do primeiro termo. Sabendo que o último termo dessa PA é 36, determine o primeiro termo.

41 O termo médio da PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{49})$ é:

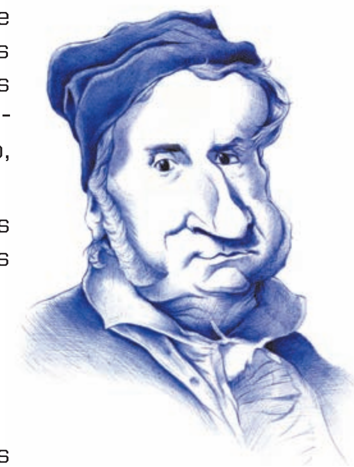
a) a_{23} b) a_{24} c) a_{25} d) a_{26} e) a_{27}

42 Em uma PA finita com número ímpar de termos, os termos $a_i = 8$ e $a_j = 12$ são equidistantes dos extremos. Determine o termo médio dessa PA.

43 Obtenha x para que a sequência (2x − 2, 3x − 1, 2x + 6) seja uma PA.

Resolva os exercícios complementares 26 a 30.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA



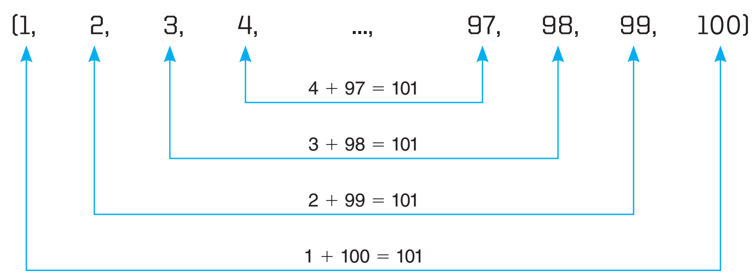
Carl Friedrich Gauss

No ano de 1785, em uma pequena escola do principado de Braunscheweig, na Alemanha, o professor Büttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um menino de 8 anos aproximou-se da mesa do professor e apresentou o resultado pedido. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto.

Aquele menino viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por Gauss foi simples. Ele percebeu que:

- a soma do primeiro número com o último é: $1 + 100 = 101$
- a soma do segundo número com o penúltimo é: $2 + 99 = 101$
- a soma do terceiro número com o antepenúltimo é: $3 + 98 = 101$

e assim por diante, ou seja, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, que é 101:



Como no total são 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5.050$$

Esse raciocínio pode ser generalizado para o cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer pelo teorema a seguir.

> A soma S_n dos *n* primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots)$ é dada por:
>
> $$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Demonstração

Vamos descrever a soma S_n duas vezes, do seguinte modo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando, membro a membro, essas igualdades, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observando que em cada expressão entre parênteses temos a soma dos extremos ou a soma de dois termos equidistantes dos extremos, podemos escrever, pela propriedade P1:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

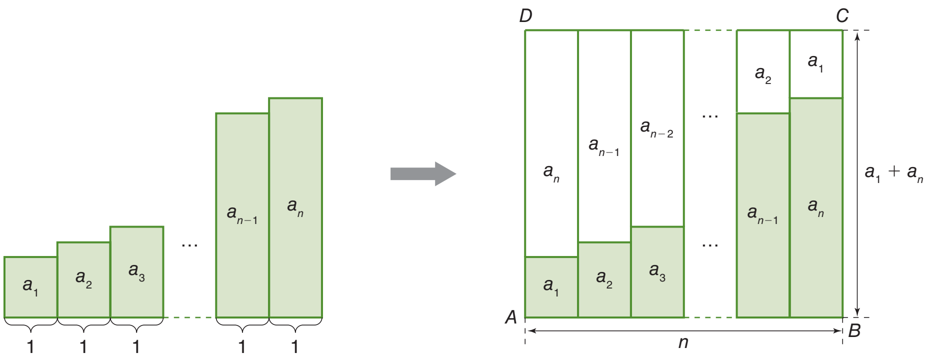
$$\therefore 2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$\therefore S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Interpretação gráfica da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Consideremos n retângulos de bases unitárias (1) cujas medidas das alturas formam a PA crescente $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n)$. Como a base de cada retângulo mede 1 unidade, as áreas desses retângulos são numericamente iguais aos termos dessa PA. Colocando lado a lado esses retângulos, com as alturas em ordem crescente, obtemos a primeira figura abaixo.

Acima de cada retângulo, construímos outro cuja soma das alturas é igual a $a_1 + a_n$, conforme mostra a segunda figura.



A área da região sombreada, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, é metade da área do retângulo $ABCD$, isto é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Calcular a soma dos 20 primeiros termos da PA (3, 7, 11, 15, ...).

Resolução

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 20$, temos:

$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$

Calculando a_{20} pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$a_{20} = a_1 + (20 - 1)r \Rightarrow a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79$

Logo: $S_{20} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$

15 Calcular a soma dos n primeiros termos da PA (6, 10, 14, 18, ...).

Resolução

Temos $a_1 = 6$ e $a_n = 6 + (n - 1) \cdot 4$, ou seja, $a_n = 4n + 2$.

Pela fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, concluímos:

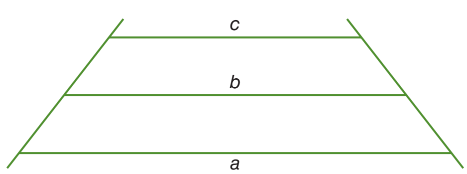
$$S_n = \frac{(6 + 4n + 2) \cdot n}{2} = \frac{(8 + 4n) \cdot n}{2} = 4n + 2n^2$$

16 Uma escada de pedreiro será construída com degraus paralelos pregados em dois caibros, que serão os suportes da escada. Os comprimentos dos degraus formarão uma sequência decrescente de primeiro termo igual a 60 cm e último igual a 40 cm, e a distância entre dois degraus consecutivos quaisquer será constante.

Sabendo que serão usados 450 cm de sarrafo na construção de todos os degraus, calcular o número de degraus que terá a escada.

Resolução

Esquematizando três degraus consecutivos quaisquer, de medidas a, b e c, em ordem decrescente, temos:



O degrau intermediário é base média de um trapézio, portanto $b = \frac{a + c}{2}$.

Assim, deduzimos que a sequência decrescente dos comprimentos dos degraus da escada é uma PA de primeiro termo 60 cm e último 40 cm. Para calcular o número n de degraus, aplicamos a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA, em que $S_n = 450$ cm, $a_1 = 60$ cm e $a_n = 40$ cm:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 450 = \frac{(60 + 40)n}{2} \therefore n = 9$

Logo, a escada terá 9 degraus.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44 Calcule a soma dos 51 primeiros termos da PA (2, 9, 16, 23, ...).

45 Calcule a soma dos 30 primeiros termos da PA (−15, −11, −7, −3, ...).

46 Calcule a soma dos múltiplos positivos de 9, menores que 100.

47 Determine a soma de todos os números naturais que sejam múltiplos de 2 e 3, simultaneamente, e que estejam compreendidos entre 100 e 700.

48 A letra grega Σ (sigma) é usada, em Ciências Exatas, para indicar uma soma. Por exemplo, a expressão $\sum_{j=1}^{5} 2j$, que lemos "somatório de $2j$, com j variando (em $\mathbb{N}$) de 1 até 5", é calculada atribuindo-se os valores 1, 2, 3, 4 e 5 à variável j da expressão $2j$ e somando-se, a seguir, os resultados obtidos. Isto é, primeiro obtemos os valores de $2j$:

$$j = 1 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 1 = 2$$
$$j = 2 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 2 = 4$$
$$j = 3 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 3 = 6$$
$$j = 4 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 4 = 8$$
$$j = 5 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 5 = 10$$

E, depois, somamos esses valores:

$$\sum_{j=1}^{5} 2j = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

De acordo com essa ideia, calcule:

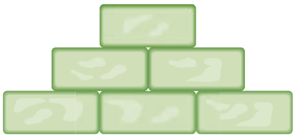
a) $\sum_{j=1}^{50} 2j$ b) $\sum_{j=1}^{40} (3j - 1)$

49 Dada a PA (2, 7, 12, 17, ...), determine:
a) o n-ésimo termo, isto é, a_n.
b) a soma dos n primeiros termos.

50 Calcule a soma dos n primeiros números naturais ímpares.

51 A soma dos termos de uma PA finita é 33, sua razão é 2 e o primeiro termo é −7. Determine o número de termos dessa PA.

52 Com o objetivo de melhorar a iluminação de um ambiente, um arquiteto projetou parte de uma parede com 820 tijolos de vidro. Esses tijolos devem ser dispostos na forma de um triângulo, de modo que, a partir da segunda fileira, cada tijolo se apoie sobre dois tijolos da fileira inferior até a última, que terá apenas um tijolo, conforme a figura que apresenta as três últimas fileiras.



O número de tijolos da primeira fileira deve ser:
a) 35 b) 38 c) 40 d) 45 e) 50

53 Estudos realizados em um município brasileiro mostraram que o desmatamento do cerrado nesse município cresce assustadoramente. A cada dia são desmatados 4 ha (hectares) a mais que a área desmatada no dia anterior.

Paisagem típica do cerrado brasileiro.

No primeiro dia de determinado mês foram desmatados 50 ha.
a) Quantos hectares foram desmatados no 20º dia desse mês?
b) Quantos hectares foram desmatados nos 20 primeiros dias desse mês?

54 No projeto de uma sala de cinema, um arquiteto desenhou a planta com a forma de um trapézio isósceles posicionando a tela sobre a base menor desse trapézio. As poltronas serão dispostas em 16 fileiras paralelas às bases do trapézio. A primeira fileira terá 20 poltronas e, a partir da segunda, cada fileira terá 2 poltronas a mais que a fileira anterior. Calcule o número de poltronas desse cinema.

Resolva os exercícios complementares 31 a 44 e 103 a 109.

Seção 11.3

Progressão geométrica (PG)

Objetivos

- **Reconhecer** e classificar uma PG.
- **Determinar** um termo qualquer de uma PG, a partir do primeiro termo e da razão.
- **Representar** o termo geral de uma PG.
- **Calcular** a soma e o produto dos n primeiros termos de uma PG.
- **Calcular** a soma dos infinitos termos de uma PG.
- **Aplicar** o conceito de PG na resolução de problemas.

Termos e conceitos

- **progressão geométrica**
- **razão de uma PG**

Problemas que envolvem grandezas que crescem ou decrescem através do produto por uma taxa constante podem ser resolvidos com o auxílio da função exponencial, conforme estudamos no capítulo 8.

Neste tópico, veremos que problemas como esses também podem ser resolvidos por meio de um tipo de sequência chamada de **progressão geométrica** (PG). Como exemplo, acompanhe a seguinte situação.

A taxa média anual de crescimento da população de um país indica o percentual médio de crescimento da população de um ano para o seguinte.

Hong Kong: densidade demográfica média de 7.900 hab/km².

Considere que em determinado ano a população de um país era de x habitantes e, a partir de então, ela tenha crescido à taxa média anual de 2%. Se essa taxa se mantiver, a sequência a seguir indica as estimativas populacionais desse país, ano a ano, a partir de x habitantes:

$$(\underbrace{x}_{1^{\text{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot 1{,}02}_{2^{\text{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot (1{,}02)^2}_{3^{\text{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot (1{,}02)^3}_{4^{\text{o}}\text{ ano}};\ \underbrace{x \cdot (1{,}02)^4}_{5^{\text{o}}\text{ ano}};\ \ldots)$$

A sequência numérica que aparece nessa situação é um exemplo de **progressão geométrica** (PG), assim chamada porque, multiplicando cada termo por uma mesma constante, obtemos o termo seguinte. Nesse caso, multiplicamos cada termo da sequência pela constante 1,02.

Podemos definir, de modo geral, que:

> **Progressão geométrica** (PG) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. O número q é chamado de **razão** da progressão geométrica.

Exemplos

a) (1, 3, 9, 27, 81, 243) é uma PG finita de razão $q = 3$.

b) $\left(6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \ldots\right)$ é uma PG infinita de razão $q = \frac{1}{3}$.

c) (5, −10, 20, −40, 80, −160) é uma PG finita de razão $q = -2$.

d) (7, 0, 0, 0, 0, ...) é uma PG infinita de razão $q = 0$.

e) (0, 0, 0, 0, 0, ...) é uma PG infinita de razão indeterminada.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

17 Determinar a razão da PG (a_n) tal que $a_{11} = 26$ e $a_{12} = 130$.

Resolução

Como $a_{11} \neq 0$, a razão q da PG é o quociente de a_{12} por a_{11}, isto é: $q = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{130}{26} = 5$

18 Verificar se é ou não uma progressão geométrica a sequência (a_n) dada pela lei de formação $a_n = 2 \cdot 3^n$, para todo n natural não nulo.

Resolução

Como a variável n deve assumir os infinitos valores do conjunto $\mathbb{N}^*$, em vez de atribuir os infinitos valores a n (o que não conseguiríamos), vamos verificar se o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante para todo valor n natural não nulo. Note que tal quociente sempre existe, pois todos os elementos da sequência (a_n) são diferentes de zero.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3^n} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{3^n}} = 3$$

Como o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é a constante 3, concluímos que a sequência é uma PG de razão $q = 3$.

Classificação de uma PG

As progressões geométricas podem ser classificadas como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula.

- Uma PG é **crescente** quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso só ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Exemplos

a) $(1, 2, 4, 8, ...)$ é uma PG crescente de razão $q = 2$.

b) $\left(-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, ...\right)$ é uma PG crescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

- Uma PG é **decrescente** quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Exemplos

a) $\left(12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...\right)$ é uma PG decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

b) $(-1, -3, -9, -27, ...)$ é uma PG decrescente de razão $q = 3$.

- Uma PG é **constante** quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando sua razão é 1 ou quando todos os seus termos são nulos.

Exemplos

a) $(6, 6, 6, 6, 6, ...)$ é uma PG constante de razão $q = 1$.

b) $(0, 0, 0, 0, ...)$ é uma PG constante de razão indeterminada.

- Uma PG é **oscilante** quando todos os seus termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos. Isso só ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplos

a) $(1, -2, 4, -8, 16, -32, ...)$ é uma PG oscilante de razão $q = -2$.

b) $\left(-8, 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$ é uma PG oscilante de razão $q = -\frac{1}{2}$.

- Uma PG é **quase nula** quando o primeiro termo é diferente de zero e os demais são iguais a zero. Isso só ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

Exemplo

$(4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$ é uma PG quase nula.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

55 Verifique se as sequências abaixo são progressões geométricas.

a) (5, 25, 125, 625)

b) (3, 6, 9, 12, 15, ...)

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}\right)$

d) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

e) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = (n-1)^2$

f) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 5^{2-n}$

g) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = (-1)^n \cdot 2^{n-4}$

56 Calcule a razão de cada uma das progressões geométricas abaixo.

a) (1, 2, 4, 8, 16, ...)

b) (−3, 9, −27, 81, ...)

c) $\left(\frac{4}{3}, 2, 3, \frac{9}{2}, \ldots\right)$

d) $\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}, \frac{5}{9}, \frac{5\sqrt{2}}{27}, \ldots\right)$

e) $\left(\frac{3}{\sqrt{5}-2}, \frac{6}{5-2\sqrt{5}}, \frac{12}{5\sqrt{5}-10}, \ldots\right)$

57 Determine a razão da PG (a_n) tal que $a_{38} = 15$ e $a_{39} = 5$.

58 Na PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $q = \sqrt{3} + 1$, temos $a_{10} = \sqrt{3} - 1$. Determine o termo a_{11}.

59 (Furg-RS) Dada a progressão geométrica $\left(\ldots, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \ldots\right)$, o termo que precede imediatamente o 1 é:

a) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

b) $1-\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}-1$

d) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

e) $1+\sqrt{3}$

60 Três números reais não nulos a, b e c estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão 3 tal que $b = ac$. Calcule a soma $a + b + c$.

61 Verifique se é progressão geométrica a sequência (a_n), tal que $a_n = 5 \cdot 2^n$.

62 Classifique como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) (3, 6, 18, 54, ...)

b) (−16, −8, −4, −2, ...)

c) $\left(6, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots\right)$

d) (−5, 10, −20, 40, ...)

e) (0, 0, 0, 0, ...)

f) (9, 9, 9, 9, 9, ...)

g) (−5, 0, 0, 0, 0, ...)

h) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, \ldots\right)$

i) $\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}, 2+\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}}, \ldots\right)$

63 (UFRGS) A cada balanço, uma firma tem apresentado um aumento de 10% em seu capital. A razão da progressão formada pelos capitais nos balanços é:

a) 10

b) $\frac{11}{10}$

c) $\frac{10}{11}$

d) $\frac{9}{10}$

e) $\frac{1}{10}$

Resolva os exercícios complementares 45 a 50.

Representação genérica de uma PG

Do mesmo modo que vimos no estudo da PA, é importante saber representar uma PG genericamente. Mostramos a seguir algumas representações.

- A sequência (x, xq, xq^2) é uma PG de três termos e razão q, para quaisquer valores de x e q.
- A sequência $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ é uma PG de três termos e razão q, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PG de três termos, conhecendo o produto deles.
- A sequência (x, xq, xq^2, xq^3) é uma PG de quatro termos e razão q, para quaisquer valores de x e q.
- A sequência $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$ é uma PG de quatro termos e razão q^2, para quaisquer valores de x e q, com $q \neq 0$. Essa representação é mais adequada quando se pretende determinar uma PG de quatro termos, conhecendo-se o produto deles.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

19 Determinar a PG de três termos, sabendo que o produto dos três termos é 8 e a soma do segundo com o terceiro é 18.

Resolução

Quando se conhece o produto dos três termos, a representação mais adequada é $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 8 \\ x + xq = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 8 \\ x + xq = 18 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 \\ x + xq = 18 \end{cases}$$

Substituindo x por 2 na equação $x + xq = 18$, obtemos:

$$2 + 2q = 18 \Rightarrow q = 8$$

Assim, a PG $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ para $x = 2$ e $q = 8$, é igual a $\left(\frac{1}{4}, 2, 16\right)$.

20 Em uma PG de quatro termos positivos, o produto do segundo pelo terceiro termo é 4 e a soma do primeiro com o quarto termo é 5. Determinar essa PG.

Resolução

Representando a PG por $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot xq = 4 \\ \frac{x}{q^3} + xq^3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q^3} + xq^3 = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos $x = \pm 2$; mas só nos interessa $x = 2$, pois a PG deve ter os termos positivos. Substituindo x por 2 na equação (II), obtemos:

$$\frac{2}{q^3} + 2q^3 = 5$$

Multiplicamos por q^3 ambos os membros dessa equação:

$$\left(\frac{2}{q^3} + 2q^3\right) \cdot q^3 = 5q^3 \Rightarrow 2 + 2q^6 = 5q^3$$

$\therefore 2q^6 - 5q^3 + 2 = 0$

Fazendo a mudança de variável, $q^3 = y$, temos:

$2y^2 - 5y + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$\therefore y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow y = 2$ ou $y = \frac{1}{2}$

Retornando à variável original:

$q^3 = 2$ ou $q^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \sqrt[3]{2}$ ou $q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Assim, temos as duas possibilidades a seguir.

- Para $x = 2$ e $q = \sqrt[3]{2}$:

$$\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right) = \left(\frac{2}{(\sqrt[3]{2})^3}, \frac{2}{\sqrt[3]{2}}, 2\sqrt[3]{2}, 2(\sqrt[3]{2})^3\right) =$$

$$= \left(1, \sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{2}, 4\right)$$

- Para $x = 2$ e $q = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$:

$$\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right) = \left(\frac{2}{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3}, \frac{2}{\frac{\sqrt[3]{4}}{2}}, 2 \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{2}, 2\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \left(4, 2\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, 1\right)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

64 Determine a PG crescente de três termos tal que a soma dos três termos é 14 e o produto deles é 64.

65 Determine a PG crescente de quatro termos tal que o produto dos quatro termos é 81 e a soma do segundo com o terceiro termo é $\frac{15}{2}$.

66 Em um triângulo retângulo, as medidas, numa mesma unidade de comprimento, do cateto menor, do cateto maior e da hipotenusa, formam uma progressão geométrica, nessa ordem. A razão q dessa PG satisfaz a condição:

a) $0{,}7 < q < 0{,}9$
b) $0{,}9 < q < 1$
c) $1 < q < 2$
d) $2 < q < 3$
e) $3 < q < 3{,}2$

Resolva os exercícios complementares 51 e 52.

Fórmula do termo geral de uma PG

Em toda progressão geométrica, um termo qualquer pode ser expresso em função do primeiro termo e da razão da PG, por meio de uma fórmula matemática. Para entender tal fórmula, considere a PG cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é q:

$$(a_1, \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2}, \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5}, ..., \underbrace{?}_{a_n}, ...)$$

Note que qualquer termo da PG é o produto do primeiro termo a_1 por uma potência de q:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 \\ &\vdots \\ a_n &= ? \end{aligned}$$

Observando que, em cada igualdade, o expoente de q tem uma unidade a menos que o índice do termo à esquerda da igualdade, concluímos: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Ou seja:

> Numa PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:
>
> $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Essa identidade é chamada de **fórmula do termo geral** da PG.

Outra fórmula do termo geral de uma PG

Podemos, ainda, expressar um termo a_n da PG em função de outro termo qualquer a_k e da razão q. Por exemplo, observando a PG:

$$(a_1, \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2}, \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5}, \underbrace{a_1 \cdot q^5}_{a_6}, ...)$$

temos:

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 \cdot q^5 \\ a_6 &= a_2 \cdot q^4 \\ a_6 &= a_3 \cdot q^3 \\ a_6 &= a_4 \cdot q^2 \\ a_6 &= a_5 \cdot q \end{aligned}$$

Generalizando, podemos escrever:

> Numa PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:
>
> $$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

Essa identidade é outra forma de apresentar o termo geral da PG. Note que, para $k = 1$, obtém-se a fórmula anterior.

Exemplos

a) $a_{40} = a_1 \cdot q^{40-1}$, ou seja, $a_{40} = a_1 \cdot q^{39}$

b) $a_{40} = a_{10} \cdot q^{40-10}$, ou seja, $a_{40} = a_{10} \cdot q^{30}$

c) $a_{18} = a_8 \cdot q^{18-8}$, ou seja, $a_{18} = a_8 \cdot q^{10}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21 Determinar o 13º termo da PG (64, 32, 16, ...)

Resolução

Devemos determinar o termo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ dessa PG tal que $a_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$ e $n = 13$.

$$a_{13} = a_1 \cdot q^{12} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

22 Determinar a razão da PG (a_n) em que $a_1 = \frac{1}{5^{30}}$ e $a_{12} = \frac{1}{5^8}$.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$ para $n = 12$, temos:

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{11} \Rightarrow \frac{1}{5^8} = \frac{1}{5^{30}} \cdot q^{11}$$

$$\therefore q^{11} = \frac{5^{30}}{5^8} = 5^{22} \Rightarrow q = \sqrt[11]{5^{22}} = 5^2 = 25$$

Logo, a razão da PG é 25.

23 Determinar o número de termos da PG $\left(k^{53}, k^{50}, k^{47}, \dots, \frac{1}{k^{28}}\right)$, sendo k um número real não nulo.

Resolução

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para $a_1 = k^{53}$, $a_n = \frac{1}{k^{28}} = k^{-28}$ e $q = k^{-3}$, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow k^{-28} = k^{53} \cdot (k^{-3})^{n-1}$$

$$\therefore k^{-28} = k^{53} \cdot k^{-3n+3} \Rightarrow k^{-28} = k^{53-3n+3}$$

$$\therefore k^{-28} = k^{56-3n} \Rightarrow -28 = 56 - 3n$$

$$\therefore n = 28$$

Logo, a PG possui 28 termos.

24 Uma estimativa prevê crescimento anual de 0,2% na população de uma cidade. Supondo que essa estimativa esteja correta, calcular a população dessa cidade daqui a 14 anos, sabendo que a população atual é de 480.000 habitantes.

Resolução

A sequência crescente da população, ano a ano, dessa cidade, a partir do momento atual é a progressão geométrica de razão 1,002 e primeiro termo 480.000. O termo a_{15} dessa PG é a população da cidade daqui a 14 anos, isto é:

$$a_{15} = 480.000 \cdot (1{,}002)^{14}$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos $(1{,}002)^{14} \approx 1{,}02837$, portanto:

$$a_{15} \approx 480.000 \cdot 1{,}02837 \Rightarrow a_{15} \approx 493.618$$

Logo, daqui a 14 anos a população da cidade será de 493.618 habitantes, aproximadamente.

25 Um estudo mostrou que a área desertificada de um município dobra a cada década e atualmente essa área representa $\frac{1}{1.024}$ do município. Considerando que a conclusão desse estudo está correta e não será tomada nenhuma providência, daqui a exatamente k décadas todo o município terá se transformado em deserto. Determinar k.

Resolução

Sendo A a área total do município, a sequência das áreas desertificadas desse município, década a década, a partir do momento atual até a desertificação total, é a progressão geométrica de razão 2, primeiro termo igual a $\frac{A}{1.024}$ e último termo A:

$$\left(\frac{A}{1.024}, \frac{A}{512}, \frac{A}{256}, \dots, A\right)$$

O número n de termos dessa PG pode ser determinado pela fórmula do termo geral, em que $a_n = A$, $a_1 = \frac{1}{1.024}$ e $q = 2$, isto é:

$$A = \frac{A}{1.024} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^{n-1} = 1.024$$

$$\therefore 2^{n-1} = 2^{10} \Rightarrow n - 1 = 10$$

$$\therefore n = 11$$

Como a sequência tem 11 termos, concluímos que daqui a 10 décadas, ou 100 anos, toda a área do município terá se transformado em deserto.

26 Calcular a razão da PG (a_n) tal que $a_3 + a_6 = 36$ e $a_1 + a_4 = 144$.

Resolução

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$, temos: $a_3 = a_1q^2$, $a_6 = a_1q^5$ e $a_4 = a_1q^3$; logo:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 36 \\ a_1 + a_4 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2 + a_1q^5 = 36 \\ a_1 + a_1q^3 = 144 \end{cases}$$

Fatorando o 1º membro de cada uma das equações, obtemos:

$$\begin{cases} a_1q^2(1 + q^3) = 36 \\ a_1(1 + q^3) = 144 \end{cases}$$

Dividimos, membro a membro, as duas igualdades anteriores:

$$\frac{\cancel{a_1}q^2\cancel{(1 + q^3)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1 + q^3)}} = \frac{36}{144} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore q = \pm\frac{1}{2}$$

Observe, portanto, que existem duas progressões geométricas que satisfazem as condições desse problema: uma de razão positiva, $q = \frac{1}{2}$, e outra de razão negativa, $q = -\frac{1}{2}$.

27 Interpolar 5 meios geométricos entre 1 e 64, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a PG de sete termos, com $a_1 = 1$ e $a_7 = 64$.

$$(\underset{a_1}{1}, \underbrace{\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_}_{\text{meios geométricos}}, \underset{a_7}{64})$$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1q^{n-1}$, temos:

$a_7 = a_1q^6 \Rightarrow 64 = 1 \cdot q^6$

$\therefore q = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2$

Chegamos, portanto, a duas interpolações possíveis:

- para $q = 2$, temos a PG (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64)
- para $q = -2$, temos a PG (1, −2, 4, −8, 16, −32, 64)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

67 Determine o 14º termo da PG (1.536, 768, 384, 192, ...).

68 O 30º termo da PG $\left(\frac{k-1}{k+1}, k-1, k^2-1, ...\right)$ é:

a) $(k^2 - 1)(k + 1)^{29}$
b) $(k + 1)^{29}$
c) $(k - 1)(k + 1)^{28}$
d) $(k + 1)^{28}$
e) $\frac{(k+1)^{29}}{k-1}$

69 Obtenha o n-ésimo termo, a_n, da PG (3, 6, 12, 24, ...).

70 Considere a PG (a_n) de razão $q = \sqrt[7]{3}$ e $a_{15} = 5$. Determine a_1.

71 Obtenha a PG (a_n) de termos não nulos e razão $q = \frac{2}{3}$ tal que $a_6 = a_1 \cdot a_4$.

72 Quantos termos tem a PG $\left(243, 81, 27, ..., \frac{1}{3^{10}}\right)$?

73 Em uma PG (a_n) temos $a_1 = \frac{1}{243}$ e $a_{10} = 81$. Determine a razão da PG.

74 Interpolar 4 meios geométricos entre 1 e 7, nessa ordem.

75 Determine a razão da PG oscilante (a_n) em que $a_5 + a_8 = 9$ e $a_7 + a_{10} = 1$.

76 Determine o 19º termo da PG (a_n) de razão $q = \sqrt[6]{2}$ e $a_7 = 10$.

77 Em uma PG (a_n), $a_{16} = 1$ e $a_{22} = 4$. Determine a razão dessa PG.

78 (Cefet-PR) Os pontos médios dos lados de um quadrado com 24 cm de perímetro são vértices de um segundo quadrado. Os pontos médios dos lados desse segundo quadrado são vértices de um terceiro quadrado e assim, sucessivamente, até o décimo quadrado. A área do décimo quadrado assim obtido, em centímetro quadrado, é igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{512}$
c) $\frac{105}{1.024}$
d) $\frac{7}{128}$
e) $\frac{9}{128}$

79 (Fuvest-SP) Um biólogo está analisando a reprodução de uma população de bactérias, que se iniciou com 100 indivíduos. Admite-se que a taxa de mortalidade das bactérias é nula. Os resultados obtidos, na primeira hora, são:

Tempo decorrido (em minuto)	Número de bactérias
0	100
20	200
40	400
60	800

Supondo-se que as condições de reprodução continuem válidas nas horas que se seguem, após 4 horas do início do experimento, a população de bactérias será de:

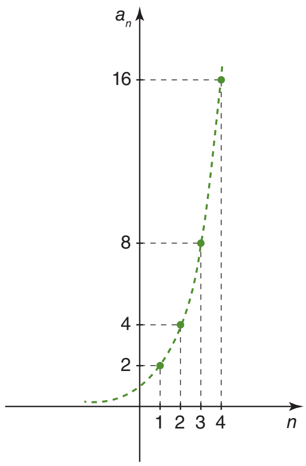
a) 51.200
b) 102.400
c) 409.600
d) 819.200
e) 1.638.400

80 Cinco amigos resolveram trabalhar na campanha eleitoral de um candidato a deputado federal. Para isso, cada um enviou 10 e-mails a 10 outros amigos exaltando as qualidades do candidato e pedindo a cada destinatário que enviasse 10 e-mails com os mesmos dizeres a 10 novos destinatários. Suponha que cada destinatário tenha recebido um único e-mail e tenha atendido ao pedido. Denominando de: 1ª geração de destinatários as pessoas que receberam os e-mails desses 5 amigos; 2ª geração de destinatários as pessoas que receberam e-mails da 1ª geração; e assim por diante, calcule o número de destinatários da 6ª geração.

Resolva os exercícios complementares 53 a 62 e 110 a 113.

Representação gráfica de uma PG

Do mesmo modo que fizemos com as progressões aritméticas, representamos graficamente uma PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pelos pontos (n, a_n) do plano cartesiano. Por exemplo, a PG (2, 4, 8, 16, ...), cujo termo geral é $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$, ou seja, $a_n = 2^n$, é representada graficamente pelos pontos $(n, 2^n)$ do plano cartesiano:



Observando que o termo geral $a_n = 2^n$ é identificado com a função exponencial $y = 2^x$, quando x assume apenas valores naturais não nulos, concluímos que a representação gráfica da PG (2, 4, 8, 16, ...) é formada por pontos do gráfico da função exponencial $y = 2^x$.

Generalizando:

> Consideremos a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$. Seu termo geral $a_n = a_1 q^{n-1}$ é equivalente a $a_n = \dfrac{a_1}{q} \cdot q^n$, portanto, a representação gráfica dessa PG é formada por pontos do gráfico da função exponencial $y = \dfrac{a_1}{q} \cdot q^x$.

Nota:

Se a razão q de uma PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ for negativa ou igual a 1, a representação gráfica dessa PG é formada pelos pontos (n, a_n), que não pertencem ao gráfico de uma função exponencial.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

81 Represente no plano cartesiano cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16\right)$ b) $\left(16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}\right)$

82 Considere que a_n é o termo geral de uma progressão geométrica de razão 3 e primeiro termo 7. Podemos afirmar que a representação gráfica, no plano cartesiano, dos pontos (n, a_n), com $n \in \mathbb{N}^*$, está contida no gráfico da função:

a) $y = 7 + 3\log x$

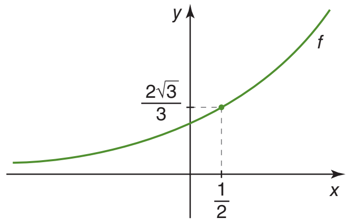
b) $y = \dfrac{3^x}{7}$

c) $y = 3^x$

d) $y = 7^x$

e) $y = \dfrac{7}{3} \cdot 3^x$

83 Considere a PG $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cuja representação gráfica é formada pelos pontos (n, a_n) pertencentes ao gráfico da função exponencial $f(x) = k^x$, representado abaixo, em que k é uma constante real positiva e diferente de 1. Determine a razão q e o termo a_{30} dessa PG.



Resolva o exercício complementar 63.

Propriedades das progressões geométricas

P1. Em toda PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração

Seja a PG finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{n-k}, \ldots, a_n)$ de razão q.

Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, pois antes de a_{k+1} existem k termos e depois de a_{n-k} existem, também, k termos. Vamos demonstrar que $a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$.

$$a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1q^k \cdot a_1q^{n-k-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{k+n-k-1} = a_1 \cdot a_1q^{n-1} = a_1 \cdot a_n$$

Exemplo

(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)

$16 \cdot 64 = 1.024$

$8 \cdot 128 = 1.024$

$4 \cdot 256 = 1.024$

$2 \cdot 512 = 1.024$

P2. Uma sequência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é uma PG se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois, isto é, sendo $a \neq 0$, temos:

$$(a, b, c) \text{ é PG} \Leftrightarrow b^2 = ac$$

Demonstração

Vamos analisar cada uma das hipóteses: $b \neq 0$ ou $b = 0$.

- 1ª hipótese: $b \neq 0$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos: $\begin{cases} (a, b, c) \text{ é PG} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac \end{cases}$

- 2ª hipótese: $b = 0$

Como $a \neq 0$ e $b = 0$, a PG (a, b, c) é $(a, 0, 0)$, portanto o quadrado do termo médio (0^2) é igual ao produto dos outros dois termos $(a \cdot 0)$.

Logo, (a, b, c) é PG $\Leftrightarrow b^2 = ac$

Consequência

Temos, como consequência das propriedades P1 e P2:

Em uma PG com número ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Demonstração

Seja a_k o termo médio de uma PG com número ímpar de termos:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1}, ..., a_n)$$

A sequência $(a_{k-1}, \boldsymbol{a_k}, a_{k+1})$ também é uma PG; logo, pela propriedade P2, temos:

$$(a_k)^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \qquad \text{(I)}$$

Mas os termos a_{k-1} e a_{k+1} são equidistantes dos extremos, portanto, por P1:

$$a_{k-1} \cdot a_{k+1} = a_1 \cdot a_n \qquad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), concluímos que $(a_k)^2 = a_1 \cdot a_n$

Exemplo

(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512)

termo médio: $32^2 = 1.024$

extremos: $2 \cdot 512 = 1.024$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

28 Determinar x de modo que a sequência $(3, x + 2, 3x)$ seja uma PG crescente.

Resolução

A sequência de três termos tem o primeiro termo não nulo (3). Logo, pela propriedade P2, essa sequência é PG se, e somente se, $(x + 2)^2 = 3 \cdot 3x$, ou seja:

$x^2 + 4x + 4 = 9x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1$$

- Para $x = 1$ temos a PG $(3, 1 + 2, 3 \cdot 1)$, que é a PG constante $(3, 3, 3)$.
- Para $x = 4$ temos a PG $(3, 4 + 2, 3 \cdot 4)$, que é a PG crescente $(3, 6, 12)$.

Como queremos que a PG seja crescente, concluímos que $x = 4$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

84 Em uma PG de dez termos $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{10})$, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é o quádruplo do primeiro termo. Sabendo que o primeiro termo dessa PG é 3, determine a razão da PG.

85 Em uma PG finita, com número ímpar de termos, os termos $a_i = 2$ e $a_j = 72$ são equidistantes dos extremos. Determine o termo médio dessa PG.

86 Obtenha x para que a sequência $(-1, x - 1, 4x - 1)$ seja uma PG.

87 Determine x de modo que a sequência $(x + 1, 3x - 2, 5x)$ seja uma PG crescente.

88 Para dois números positivos a e c, a sequência $(a, 4, c)$ é PA e a sequência $(c + 2, 4, a)$ é PG. Determine a e c.

89 Em uma PG finita e crescente, o termo médio é a raiz quadrada do primeiro termo. Determine o último termo dessa PG.

90 A valorização percentual anual de um apartamento foi a mesma em dois anos consecutivos. A tabela abaixo mostra o valor do imóvel, em função do tempo, em que o tempo zero corresponde ao início desse período. Qual era o valor do apartamento ao final desse período?

Tempo (ano)	Valor do imóvel (milhares de reais)
0	100
1	$x + 30$
2	$2x - 39$

91 (Fuvest-SP) Três números positivos, cuja soma é 30, estão em progressão aritmética. Somando-se, respectivamente, 4, -4 e -9 ao primeiro, segundo e terceiro termos dessa progressão aritmética, obtemos três números em progressão geométrica. Então, um dos termos da progressão aritmética é:

a) 9 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 13 **e)** 15

Resolva os exercícios complementares 64 a 72.

Soma dos n primeiros termos de uma PG

Considere a PG (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1.536, ...). Para calcular a soma (S) dos dez primeiros termos dessa PG, podemos adotar o procedimento a seguir.

Primeiro, escrevemos a adição de todas as parcelas:

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1.536$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pela razão da PG ($q = 2$), obtemos:

$$2S = 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 + 768 + 1.536 + 3.072$$

Subtraímos essas duas igualdades, membro a membro:

$$S - 2S = 3 - 3.072 \Rightarrow S = 3.069$$

Logo, a soma (S) dos dez primeiros termos da PG é 3.069.

Podemos generalizar esse procedimento para qualquer PG não constante, como mostra o teorema a seguir.

A soma S_n dos n primeiros termos da PG não constante $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

Demonstração

Indicando por S_n a soma dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n\text{, ou ainda,}$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} \quad \text{(I)}$$

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade pela razão q da PG, obtemos:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo as igualdades (I) e (II), membro a membro, temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Como $q \neq 1$, pois a PG não é constante, podemos dividir ambos os membros dessa última igualdade por $1 - q$, concluindo:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

29 Calcular a soma dos 11 primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, ...\right)$.

Resolução

Aplicamos a fórmula $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$ para $a_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$ e $n = 11$:

$$S_{11} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (-2.047)}{-1}$$

$$\therefore S_{11} = \frac{2.047}{4}$$

30 Calcular a soma dos 30 primeiros termos da PG (4, 4, 4, 4, 4, ...)

Resolução

Como a PG é constante ($q = 1$), a soma dos 30 primeiros termos é dada por:

$S_{30} = 30 \cdot a_1 \Rightarrow S_{30} = 30 \cdot 4 = 120$

31 Desde a sua fundação, uma empresa já pagou um total de R$ 46.410,00 de impostos. Sabendo que, a cada ano, os impostos pagos pela empresa têm aumentado 10%, em relação ao ano anterior, e no primeiro ano de funcionamento a empresa pagou R$ 10.000,00 de impostos, calcular o tempo de existência dessa empresa.

Resolução

A sequência dos impostos pagos por essa empresa, ano a ano, é uma progressão geométrica de primeiro termo 10.000 e razão 1,1. O tempo de existência da empresa, em ano, é o número n de termos dessa PG, e pode ser obtido pela fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG não constante, em que: $S_n = 46.410{,}00$, $a_1 = 10.000$ e $q = 1{,}1$, isto é:

$$46.410 = \frac{10.000 \cdot [1 - (1{,}1)^n]}{1 - 1{,}1} \Rightarrow 4{,}641 = \frac{1 - (1{,}1)^n}{-0{,}1}$$

$$\therefore -0{,}4641 = 1 - (1{,}1)^n \Rightarrow (1{,}1)^n = 1{,}4641$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{14.641}{10.000}\right)$$

Decompondo em fatores primos o número 14.641, obtemos 11^4, portanto:

$$\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left(\frac{11}{10}\right)^4 \Rightarrow n = 4$$

Logo, a empresa tem quatro anos de existência.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

92 Calcule a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 2, 4, 8, 16, ...).

93 Calcule a soma dos 11 primeiros termos da PG $\left(2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$.

94 Dada a PG (1, −1, 1, −1, 1, −1, ...):

a) calcule a soma dos 50 primeiros termos.

b) calcule a soma dos 51 primeiros termos.

95 Em uma PG de razão 2, a soma dos 8 primeiros termos é 765. Determine o primeiro termo dessa PG.

96 Calcule, em função da variável real k, a soma dos 30 primeiros termos da PG $(1, k, k^2, k^3, ...)$.

97 A soma dos n primeiros termos da PG (5, 10, 20, 40, ...) é:

a) $2^n - 5$

b) $5 - 2^n$

c) $5(2^n - 1)$

d) $5(1 - 2^n)$

e) $5(2^n - 5)$

98 A soma dos n primeiros termos de uma PG é 12.285. Determine n sabendo que $a_1 = 3$ e $q = 2$.

99 Considerando seus pais como primeira geração anterior à sua, os pais deles como segunda geração, os pais dos pais deles como terceira geração e assim por diante, o número dos seus antepassados até a 20ª geração anterior à sua é:

a) maior que 2.000.000.

b) maior que 1.900.000 e menor que 2.000.000.

c) maior que 1.800.000 e menor que 1.900.000.

d) maior que 1.700.000 e menor que 1.800.000.

e) menor que 1.800.000.

100 Uma gravadora lançou no mercado um CD de música popular brasileira. Para conhecer a aceitação do produto, o departamento de vendas fez uma pesquisa nas distribuidoras para verificar o número de cópias vendidas. Na primeira semana, foram vendidas 20 cópias; na segunda semana, a venda dobrou em relação à primeira semana; e, na terceira, dobrou em relação à segunda semana. A diretora acredita que as vendas continuarão dobrando a cada semana.

Agora, responda:

a) Em que semana serão vendidas 10.240 cópias?

b) Até o final da semana indicada no item **a**, quantas cópias terão sido vendidas desde o lançamento do CD?

Resolva os exercícios complementares 73 a 78 e 114 a 117.

Produto dos n primeiros termos de uma PG

O produto dos n primeiros termos de uma PG também pode ser obtido por meio de uma fórmula matemática.

Para entender essa fórmula, vamos multiplicar os 30 primeiros termos da PG $(a_1q^0, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ..., a_1q^{29}, ...)$.

Indicando por P_{30} esse produto, temos: $P_{30} = a_1q^0 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot ... \cdot a_1q^{29}$

Pelas propriedades comutativa e associativa da multiplicação, podemos representar esse produto por:

$$P_{30} = \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_1)}_{\text{30 fatores}} \cdot \underbrace{(q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot ... \cdot q^{29})}_{\text{30 fatores}}$$

Conservando a base e adicionando os expoentes das potências de mesma base, temos:

$$P_{30} = (a_1)^{30} \cdot q^{0+1+2+3+...+29}$$

O expoente de q é a soma dos 30 termos da PA (0, 1, 2, 3, ..., 29), que é igual a $\frac{(0+29) \cdot 30}{2} = 435$; logo, $P_{30} = (a_1)^{30} \cdot q^{435}$.

Generalizando esse procedimento, obtemos o teorema:

> O produto P_n dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q é dado por:
>
> $$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Demonstração

Indicando por P_n o produto dos n primeiros termos da PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos: $P_n = a_1q^0 \cdot a_1q \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot ... \cdot a_1q^{n-1}$

Pelas propriedades comutativa e associativa da multiplicação, podemos representar esse produto por:

$$P_n = \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_1)}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot ... \cdot q^{n-1})}_{n \text{ fatores}}$$

Conservando a base e adicionando os expoentes das potências de mesma base, temos:

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{0+1+2+3+...+(n-1)}$$

O expoente de q é a soma dos n termos da PA $(0, 1, 2, 3, ..., n-1)$, que é igual a $\frac{(0+n-1) \cdot n}{2}$; logo: $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

32 Calcular o produto dos 10 primeiros termos da PG (2, 6, 18, 54, ...), deixando indicado o resultado sob a forma de potências.

Resolução

Aplicamos a fórmula $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ para $a_1 = 2$, $n = 10$ e $q = 3$, obtendo:

$P_{10} = (2)^{10} \cdot 3^{\frac{(10-1) \cdot 10}{2}} \Rightarrow P_{10} = 2^{10} \cdot 3^{45}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

101 Calcule o produto dos 18 primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$.

102 Calcule o produto dos 14 primeiros termos da PG $\left(\frac{1}{7^{12}}, \frac{1}{7^{10}}, \frac{1}{7^{8}}, \ldots\right)$, deixando indicado o resultado na forma de uma potência.

103 Qual é a PG crescente em que $a_1 = 1$ e o produto dos 8 primeiros termos é 81?

Resolva os exercícios complementares 79 a 82 e 118.

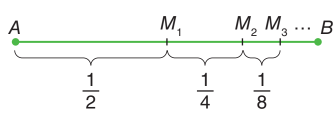
Soma dos infinitos termos de uma PG

O segmento de reta $\overline{AB}$, representado a seguir, tem 1 unidade de comprimento, e os infinitos pontos M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, ... são tais que:

- M_1 é o ponto médio de $\overline{AB}$
- M_2 é o ponto médio de $\overline{M_1B}$
- M_3 é o ponto médio de $\overline{M_2B}$

...

- M_{n+1} é o ponto médio de $\overline{M_nB}$



A sequência decrescente infinita formada pelas medidas dos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, ... é a progressão geométrica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$.

Note que:

- somando as medidas dos três primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$ e $\overline{M_2M_3}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

- somando as medidas dos quatro primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ e $\overline{M_3M_4}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

- somando as medidas dos cinco primeiros segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, e $\overline{M_4M_5}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$$

E assim, sucessivamente: somando uma quantidade cada vez maior de parcelas AM_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., nos aproximaremos "tanto quanto quisermos" da medida 1 do segmento $\overline{AB}$. Por isso dizemos que o limite da soma dos infinitos termos da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ é 1.

Indicando esse limite pelo símbolo S_∞, temos $S_\infty = 1$. Para abreviar, chamaremos esse limite simplesmente de **soma dos infinitos termos** da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$ e escrevemos:

$$S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... = 1$$

Generalizando esse procedimento, obtemos o teorema:

A soma S_∞ dos infinitos termos de uma PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Demonstração

Consideremos a PG infinita $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$. Admitindo que, sob essa condição, existe a soma S_∞ dos infinitos termos da PG, temos:

$$S_\infty = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando por q ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$qS_\infty = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5 + ... \qquad \text{(II)}$$

Subtraímos, membro a membro, as igualdades (I) e (II):

$$S_\infty - qS_\infty = a_1$$

Fatoramos o primeiro membro e concluímos:

$$S_\infty(1 - q) = a_1 \Rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Nota:

Demonstra-se que existe soma dos infinitos termos de uma PG de razão q se, e somente se, for satisfeita a condição $-1 < q < 1$, fato que foi admitido nessa demonstração. Caso a condição $-1 < q < 1$ não seja satisfeita, não será possível aplicar os procedimentos usados nessa demonstração, pois estaríamos admitindo a existência da soma S_∞, o que é falso.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

33 Calcular a soma dos infinitos termos da PG $\left(7, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}, ...\right)$.

Resolução

Como a razão da PG é $q = \frac{1}{3}$, a condição $-1 < q < 1$ é obedecida. Logo, existe a soma S_∞ dos infinitos termos da PG, que é dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S_\infty = \frac{7}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{2}{3}} = \frac{21}{2}$$

34 Determinar a geratriz da dízima periódica $D = 5,4444...$

Resolução

$$D = 5 + \underbrace{0,4 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + ...}_{\text{PG infinita de razão } 0,1}$$

$$\therefore D = 5 + \frac{0,4}{1 - 0,1}$$

$$\therefore D = 5 + \frac{4}{9}$$

$$\therefore D = \frac{49}{9}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

104 Calcule a soma dos infinitos termos das progressões geométricas a seguir.

a) (63, 21, 7, ...)

b) (40, -20, 10, -5, ...)

c) (0,4; 0,04; 0,004; ...)

105 Considere a PG oscilante, (a_n), com $a_1 = 3$ e $a_5 = \dfrac{16}{27}$. Calcule a soma dos infinitos termos dessa PG.

106 Calcule a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

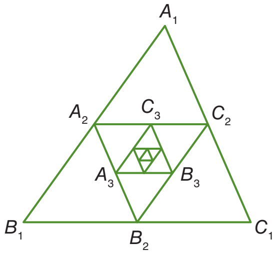
a) 5,2222...

b) 4,53333...

107 A soma dos infinitos termos da sequência $\left(x, \dfrac{2x}{5}, \dfrac{4x}{25}, ...\right)$ é $\dfrac{25}{3}$. Determine o número real x.

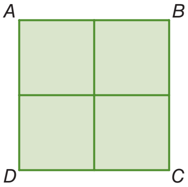
108 Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio de uma estrada e aciona os freios a 100 m de distância da pedra. Após a freada, o veículo percorre 20 m no primeiro segundo e, por mais alguns instantes, percorre em cada segundo $\dfrac{1}{4}$ da distância percorrida no segundo anterior. O caminhão conseguirá parar antes ou se chocará contra a pedra? Justifique a sua resposta.

109 Considere a sequência de infinitos triângulos ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, ...) e que os vértices de cada triângulo, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo anterior, conforme mostra a figura. Sendo 20 cm o perímetro do triângulo $A_1B_1C_1$, calcule a soma dos perímetros desses infinitos triângulos.

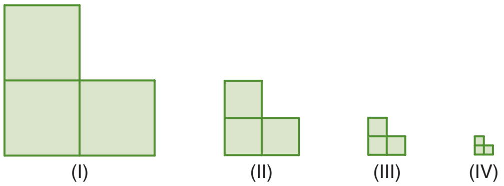


(*Dica*: Lembre-se de que cada base média de um triângulo é paralela a um dos lados e mede metade desse lado.)

110 Um quadrado *ABCD* é dividido em quatro quadradinhos por dois segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados de *ABCD*, conforme mostra a figura.



Retirando o quadradinho superior direito (de vértice *B*), obtemos a figura I abaixo. Repetindo esse procedimento no quadradinho retirado, obtemos a figura II e assim sucessivamente. Repetindo o procedimento em cada quadradinho retirado, obtemos uma sequência de infinitas figuras semelhantes a I.



a) Prove que a soma das áreas dessas infinitas figuras é igual à área do quadrado *ABCD*.

b) Prove que a soma dos perímetros dessas infinitas figuras é o dobro do perímetro do quadrado *ABCD*.

111 Um barco da guarda costeira persegue um barco de contrabandistas que está a 10 km de distância. Que distância o barco da guarda costeira deverá percorrer para alcançar os contrabandistas se sua velocidade é o dobro da velocidade do barco dos criminosos, e os dois barcos navegam em linha reta? (Justifique sua resposta de dois modos diferentes, sendo um deles pela fórmula da soma dos termos de uma PG infinita.)

Resolva os exercícios complementares 83 a 88, 119 e 120.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 (UFRN) Em uma calculadora, a tecla T transforma o número x (não nulo), que está no visor, em $\frac{1}{x}$, e a tecla V duplica o número que se encontra no visor. Se o número 2 estiver no visor e forem digitadas, alternadamente, as teclas T e V, iniciando-se por T, num total de 1.999 digitações, será obtido um número igual a:

a) $2^{1.999}$ **b)** 1 **c)** 2 **d)** $\frac{1}{2^{1.999}}$

2 (UEL-PR) Tome um quadrado de lado 20 cm (figura 1) e retire sua metade (figura 2). Retire depois um terço do que restou (figura 3). Continue o mesmo procedimento, retirando um quarto do que restou, depois um quinto do novo resto e assim por diante.

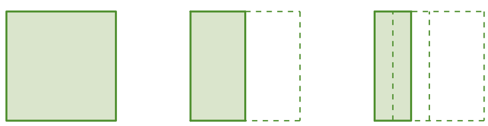


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Desse modo, qual será a área da figura 100?

a) 0 cm² **c)** 4 cm² **e)** 40 cm²
b) 2 cm² **d)** 10 cm²

3 Considere a função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, \text{ se } x \text{ é múltiplo de } 5 \\ x + 1, \text{ se } x \text{ não é múltiplo de } 5 \end{cases}, \text{ e a}$$

sequência (a_n), com $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$ para todo número natural não nulo n. Determine o 123º termo dessa sequência.

4 A partir de um ponto P_1 de uma circunferência, percorre-se no sentido horário um arco de medida α, com $0° < \alpha < 360°$, até um ponto P_2. A partir de P_2, percorre-se no sentido horário um arco de medida α até um ponto P_3 e assim por diante, repete-se esse procedimento para cada ponto P_i até se obter o ponto P_n coincidindo com P_1.

a) Calcule o valor de n para $\alpha = 30°$.
b) Calcule o valor de n em função da medida α.

5 (OBM) O primeiro número de uma sequência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira: calculamos o quadrado do número anterior $7^2 = 49$ e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é $4 + 9 + 1 = 14$. Repetimos este processo, obtendo $14^2 = 196$ e o terceiro número da sequência é $1 + 9 + 6 + 1 = 17$ e assim sucessivamente. Qual o 2.002º elemento desta sequência?

6 Em uma sequência de n termos, os termos a_i e a_j são equidistantes dos extremos. Então:

a) $i + j = n + 1$ **d)** $i + j = 2n - 1$
b) $i + j = n$ **e)** $i + j = 2n + 1$
c) $i + j = n - 1$

7 Em uma sequência de 20 termos, os termos a_k e a_{k+7} são equidistantes dos extremos. Determine k.

8 Calcule a razão de cada uma das progressões aritméticas apresentadas a seguir.

a) (a_n) tal que $a_9 = 6$ e $a_{10} = 15$
b) (b_n) tal que $b_k = 8$ e $b_{k+1} = 5$
c) (c_n) tal que $c_1 = \frac{k}{k - 1}$ e $c_2 = \frac{2k^2}{k^2 - 1}$

9 Na PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $r = \frac{5}{2 - \sqrt{3}}$, temos $a_9 = 5\sqrt{3} - 1$. Determine o termo a_8.

10 Verifique se é PA a sequência (a_n) tal que $a_n = n^2 + 1$.

11 Em uma sequência (a_n), temos $a_n = \frac{2n + 7}{3}$ para qualquer número natural não nulo n. Essa sequência é uma PA? Justifique.

12 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das progressões aritméticas a seguir.

a) $(1 - k^2, 2, k^2 + 3, ...)$, sendo k um número real.
b) $\left(h + 1, \frac{h^2 - 1}{h - 1}, \frac{h^2 + h}{h}, ...\right)$, sendo h um número real não nulo e diferente de 1.
c) $(5 + a^2, 5, 5 - a^2)$, sendo a um número real não nulo.

13 Em uma PA de três termos, a soma do primeiro com o terceiro termo é 10 e o produto do segundo pelo terceiro termo é -40.
Determine essa PA.

14 Em uma PA de quatro termos, a soma do primeiro com o quarto termo é 10 e o produto dos dois primeiros termos é -3. Determine essa PA.

15 (Ufam) Na PA $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, ...\right)$, o n-ésimo termo é igual a:

a) $\frac{n - 5}{4}$ **c)** $\frac{n + 3}{4}$ **e)** $\frac{3n + 1}{4}$
b) $\frac{n + 5}{4}$ **d)** $\frac{5n + 1}{4}$

16 (UFSCar-SP) Uma função f é definida recursivamente como $f(n + 1) = \frac{5f(n) + 2}{5}$. Sendo $f(1) = 5$, o valor de $f(101)$ é:

a) 45 **b)** 50 **c)** 55 **d)** 60 **e)** 65

17 Qual é o número de termos da PA $(-10, -7, -4, ..., 47)$?

18 Em uma PA de razão $\frac{2}{3}$, o primeiro termo é 2 e o último é $\frac{164}{3}$. Quantos termos tem essa PA?

19 Existem infinitos números inteiros que resultam da soma de três números inteiros consecutivos; por exemplo, o número 99 é resultado da expressão $32 + 33 + 34$. Considere todos os números inteiros n, com $3 \leqslant n < 1.000$, que resultam da soma de três números inteiros consecutivos. Quantos são esses números?

a) 333 **b)** 334 **c)** 335 **d)** 336 **e)** 337

20 Em uma PA de 20 termos, o primeiro termo é 5 e o último é 8. Qual é a razão dessa PA?

21 Inserir 5 meios aritméticos entre 1 e 20, nessa ordem.

22 Obtenha o primeiro termo da PA (a_n) em que $a_5 + a_7 = -20$ e $a_3 - a_6 = 12$.

23 Determine o primeiro termo da PA (a_n) em que $a_{10} = -51$ e $a_{18} = -91$.

24 Em uma PA (a_n) temos $a_7 = 2k - 6$ e $a_{18} = k - 1$. Determine a razão dessa PA, em função de k.

25 Na PA (a_n), com $a_1 = 37$ e razão $r = 2$, determine o maior valor possível a_k que seja múltiplo de k.

26 O termo médio da PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, com n ímpar, é a_k. Então:

a) $k = \dfrac{n+1}{2}$
c) $k = \dfrac{n+2}{2}$
e) $k = \dfrac{n}{2}$
b) $k = \dfrac{n-1}{2}$
d) $k = \dfrac{n-2}{2}$

27 Em uma PA finita, o termo médio é o quádruplo do primeiro termo. Sabendo que o último termo dessa PA é 42, determine o primeiro termo.

28 Determine x de modo que a sequência $(x - 1, x^2 - 4, 3x - 1)$ seja uma PA crescente.

29 Mostre que a sequência $(2x + 5, 3x - 1, 4x - 7)$ é PA para qualquer valor real de x.

30 Mostre que não existe valor real de x tal que a sequência $(3x + 6, 2x + 1, x + 4)$ seja PA.

31 Qual é a soma dos 20 primeiros termos da PA $\left(2, \dfrac{11}{4}, \dfrac{7}{2}, ...\right)$?

32 O termo geral de uma sequência é $a_n = 2n + 5$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Calcule a soma dos 18 primeiros termos dessa sequência.

33 Dada a PA (12, 19, 26, ...), calcule a soma do 30º até o 42º termo.

34 Calcule a soma dos múltiplos de 13 compreendidos entre 100 e 1.000.

35 Calcule a soma dos múltiplos positivos de 2 ou 3, menores que 300.

36 Determine o número natural n tal que

$$\sum_{j=1}^{n} (2j + 1) = 143.$$

37 Calcule a soma dos n primeiros números naturais pares.

38 Calcule a soma dos n primeiros números naturais pares diferentes de zero.

39 (FGV) A soma de todos os inteiros entre 50 e 350 que possuem o algarismo das unidades igual a 1 é:
a) 4.566
c) 5.208
e) 5.880
b) 4.877
d) 5.539

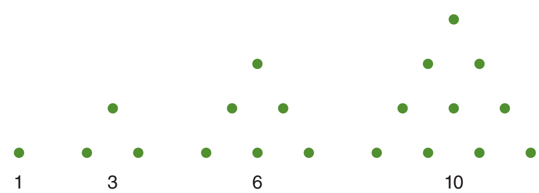
40 (UFC-CE) A soma dos 15 primeiros termos de uma progressão aritmética é 150. O 8º termo dessa PA é:
a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

41 (UEG) Um ângulo de um triângulo equilátero foi dividido em 10 ângulos cujas medidas em grau formam uma sequência que está em progressão aritmética. A soma dos dois termos extremos dessa progressão é:
a) 15 graus.
c) 14 graus.
b) 10 graus.
d) 12 graus.

42 (Fuvest-SP) Em uma progressão aritmética $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = bn^2 + n$, sendo b um número real. Sabendo-se que $a_3 = 7$, determine:
a) o valor de b e a razão da progressão aritmética.
b) o 20º termo da progressão.
c) a soma dos 20 primeiros termos da progressão.

43 Uma progressão aritmética infinita de razão 3 tem primeiro termo igual a 5.
a) Qual é o valor de n para que a soma dos n primeiros termos dessa PA seja igual a 185?
b) Quais os possíveis valores de n para que a soma dos n primeiros termos dessa PA seja maior que 98?

44 (Unifesp) "Números triangulares" são números que podem ser representados por pontos arranjados na forma de triângulos equiláteros. É conveniente definir 1 como o primeiro número triangular. Apresentamos a seguir os primeiros números triangulares.



Se T_n representa o n-ésimo número triangular, então $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, e assim por diante. Dado que T_n satisfaz a relação $T_n = T_{n-1} + n$, para $n = 2, 3, 4, ...$, pode-se deduzir que T_{100} é igual a:
a) 5.050
c) 2.187
e) 729
b) 4.950
d) 1.458

45 Calcule a razão de cada uma das progressões geométricas apresentadas a seguir.
a) (a_n) tal que $a_6 = \dfrac{8}{3}$ e $a_7 = 4$
b) (b_n) tal que $b_k = 3$ e $b_{k+1} = \dfrac{2}{5}$
c) (c_n) tal que $c_1 = k - 1$ e $c_2 = k^2 - 1$

46 Na PG $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q = k + 1$, temos $a_{15} = k^3 + 1$. Determine o termo a_{14}.

47 (Fuvest-SP) A sequência a_n é uma PA estritamente crescente, de termos positivos. Então, a sequência $b_n = 3^{a_n}$, $n > 0$, é uma:
a) PG crescente.
b) PA crescente.
c) PG decrescente.
d) PA decrescente.
e) sequência que não é uma PA e não é uma PG.

48 Verifique se é PG a sequência (a_n) tal que $a_n = 5n$.

49 Considere uma sequência (a_n) tal que $a_n = \dfrac{2^{n+3}}{27 \cdot 3^n}$ para qualquer número natural não nulo n. Essa sequência é PG? Justifique.

50 Classifique como crescente, decrescente, constante ou oscilante cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) $\left(\frac{2}{k}, \frac{2}{3}, \frac{2k}{9}, \ldots\right)$, sendo k um número real maior que 3.

b) $(a, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots)$ sendo a um número real maior que 1.

c) $\left(t - 3, \frac{t^2 - 9}{t + 3}, \frac{t^3 - 3t^2}{t^2}, \ldots\right)$, sendo t um número real não nulo e diferente de -3.

d) $(5a^2, 5a^5, 5a^8, 5a^{11}, \ldots)$, sendo a um número real negativo.

51 Em uma PG decrescente de três termos, a soma do primeiro com o segundo termo é 15 e o produto do primeiro pelo terceiro termo é 9. Determine essa PG.

52 Em uma PG crescente de quatro termos, o produto dos quatro termos é 256 e a soma do segundo com o terceiro termo é 10. Determine essa PG.

53 Na PG $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $q = k + 2$, temos $a_{10} = (k + 2)^7$, sendo k um número real. Determine a_1, em função de k.

54 Determine o número de termos da PG $\left(\frac{1}{2^{15}}, \frac{1}{2^{14}}, \frac{1}{2^{13}}, \ldots, 256\right)$.

55 Em uma PG de razão $\frac{1}{5}$, o primeiro termo é 625 e o último é $\frac{1}{5^{20}}$. Quantos termos tem essa PG?

56 Em uma PG de 20 termos, o primeiro termo é 512 e o último é $\frac{1}{1.024}$. Qual é a razão dessa PG?

57 Inserir 5 meios geométricos entre 10 e 20, nessa ordem.

58 Obtenha o primeiro termo da PG crescente (a_n) em que $a_2 \cdot a_4 = 3$ e $a_5 \cdot a_6 = 96$.

59 Determine o primeiro termo da PG (a_n) em que $a_6 = 2$ e $a_{11} = 4$.

60 Em uma PG (a_n) temos $a_5 = 3k$ e $a_{12} = k^2$. Determine a razão dessa PG, em função de k.

61 (UFPB) Considere a PA (2, 5, 8, 11, ...) e a PG (3, 6, 12, 24, ...). Na sequência (2, 3, 5, 6, 8, 12, 11, 24, 14, 48, ...) onde os termos da PA ocupam as posições ímpares e os da PG, as posições pares, o seu 25º termo é:

a) 602 b) 38 c) 224 d) 49 e) 25

62 (UFSC) Sejam (a_n) uma progressão geométrica e (b_n) uma progressão aritmética cuja razão é $\frac{3}{10}$ da razão da progressão geométrica (a_n). Sabendo que $a_1 = b_1 = 2$ e que $a_2 = b_7$ calcule a soma $b_1 + b_2 + \ldots + b_7$.

63 A representação gráfica da PG (a_n) está contida no gráfico da função $y = 4 \cdot 3^x$. Qual é o menor valor possível de n tal que $a_n > 36$?

64 Em uma PG finita e crescente, o termo médio é a raiz quadrada do segundo termo. Determine o penúltimo termo dessa PG.

65 Determine x de modo que a sequência $(x - 1, x + 1, 3x - 1)$ seja uma PG crescente.

66 Mostre que a sequência $\left(x - 2, 5, \frac{25}{x - 2}\right)$ é PG para qualquer valor real de x, com $x \neq 2$.

67 Mostre que não existe valor real de x tal que a sequência $(-4, x - 1, x + 1)$ seja PG.

68 (UFF-RJ) São dadas duas progressões: uma aritmética (PA) e outra geométrica (PG). Sabe-se que:

- a razão da PG é 2;
- em ambas o primeiro termo é igual a 1;
- a soma dos termos da PA é igual à soma dos termos da PG;
- ambas têm 4 termos.

Pode-se afirmar que a razão da PA é:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{9}{6}$ e) $\frac{11}{6}$

69 (UFPB) Seja (x, y, z) uma progressão geométrica de razão q, com $x \neq y$ e $x \neq 0$. Se (x, 2y, 3z) é uma progressão aritmética, então q é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 2 e) 4

70 (Fuvest-SP) Sejam a e b números reais tais que:

I. a, b e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA;

II. 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.

Então o valor de a é:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{8}{3}$

71 (UFMA) O número 38 é dividido em três parcelas positivas, formando uma progressão geométrica de tal modo que, se for adicionada uma unidade à segunda parcela, obtém-se uma progressão aritmética. Qual é a maior das parcelas?

a) 10 b) 15 c) 18 d) 20 e) 22

72 (Mackenzie-SP) Em uma sequência de quatro números, o primeiro é igual ao último; os três primeiros, em progressão geométrica, têm soma 6, e os três últimos estão em progressão aritmética. Um possível valor da soma dos quatro termos dessa sequência é:

a) 10 b) 18 c) 12 d) 14 e) 20

73 A soma dos 15 primeiros termos da PG $(3^1, 3^2, 3^3, \ldots)$ é:

a) $\frac{3 - 3^{16}}{2}$ c) $\frac{3^{16} - 3}{2}$ e) $\frac{3^{16} - 1}{2}$

b) $\frac{3^{15}}{2}$ d) $3^{16} - 3$

74 Calcule a soma dos 18 primeiros termos da PG $(3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, 12, \ldots)$.

75 Calcule o resultado de cada uma das expressões abaixo. (Deixe as potências indicadas.)

a) $\sum_{j=1}^{40} 5^j$ b) $\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j$

76 Determine n, com $n \in \mathbb{N}^*$, tal que $\sum_{j=1}^{n} 2^j = 4.094$.

77 Dado que $2^{16} = 65.536$, calcule a soma $S = \sum_{j=1}^{15} (j + 2^j)$.

78 (UFC-CE) A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tem razão $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = 1$. Determine o menor inteiro positivo n tal que S_n, a soma dos n primeiros termos da progressão, satisfaça a desigualdade $S_n > \frac{8.191}{4.096}$.

79 O termo geral de uma sequência é $a_n = 5^{n-10}$, $\forall n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. O produto dos 30 primeiros termos dessa sequência é:

a) 5^{165} **b)** 5^{110} **c)** 5^{235} **d)** 5^{205} **e)** 5^{180}

80 Determine o número de termos da PG $(7, 7^2, 7^3, ..., 7^n)$ sabendo que o produto de todos esses termos é 7^{630}.

81 Determine o produto dos n primeiros termos da PG (5, 25, 125, ...).

82 O produto dos n primeiros termos de uma PG (a_n) é $P_n = 3^{\frac{n^2+n}{2}}$. Determine:

a) a_1

b) a razão da PG

c) a_4

d) o produto $a_3 a_4 a_5$

83 Calcule a soma dos infinitos termos de cada uma das progressões geométricas a seguir.

a) $\left(1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, ...\right)$

b) $\left(-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, ...\right)$

c) (1; 0,2; 0,04; ...)

84 Calcule a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

a) 7,48484848...

b) 2,5466666...

85 Sejam: O_1 o ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com $AB = 8$ cm; O_2 o ponto médio do segmento $\overline{O_1B}$; O_3 o ponto médio do segmento $\overline{O_2B}$; O_4 o ponto médio do segmento $\overline{O_3B}$; e assim por diante, O_{n+1} o ponto médio do segmento $\overline{O_nB}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. A soma dos perímetros dos infinitos círculos de diâmetros $\overline{AB}, \overline{O_1B}, \overline{O_2B}, \overline{O_3B}, ..., \overline{O_nB}$, ... é:

a) 4π cm **b)** 8π cm **c)** 16π cm **d)** 20π cm **e)** 24π cm

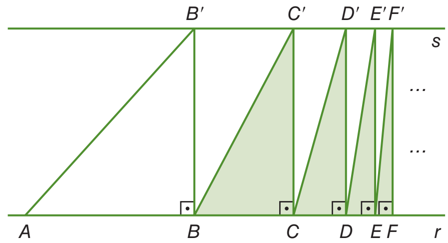
86 Calcule o produto dos infinitos termos da sequência determinada pela lei de formação:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt[3]{2^5} \\ a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}}, \forall n, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

87 (FGV) Um círculo é inscrito em um quadrado de lado m. Em seguida, um novo quadrado é inscrito nesse círculo, e um novo círculo é inscrito nesse quadrado, e assim sucessivamente. A soma das áreas dos infinitos círculos descritos nesse processo é igual a:

a) $\frac{\pi m^2}{2}$ **b)** $\frac{3\pi m^2}{8}$ **c)** $\frac{\pi m^2}{3}$ **d)** $\frac{\pi m^2}{4}$ **e)** $\frac{\pi m^2}{8}$

88 (UFSM-RS) A figura representa uma sequência infinita de triângulos retângulos com um lado sobre a reta r e com o vértice oposto a esse lado sobre a reta s, paralela a r.



Sabendo que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = ... = 2$, pode-se afirmar que a soma das áreas de todos os triângulos coloridos, BCC', CDD', DEE', ..., é igual:

a) à área do triângulo ABB'.

b) ao dobro da área do triângulo ABB'.

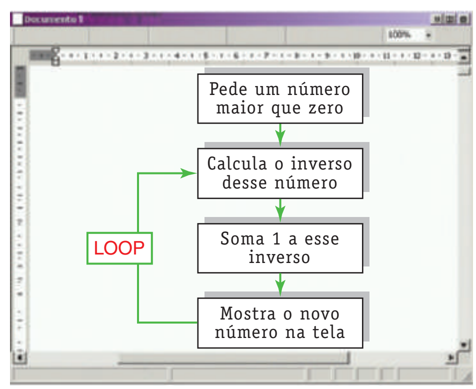
c) ao triplo da área do triângulo ABB'.

d) à metade da área do triângulo ABB'.

e) a um terço da área do triângulo ABB'.

Exercícios contextualizados

89 Um computador executa um pequeno programa de cálculo seguindo o fluxograma abaixo.



Em computação, a palavra *loop* significa "operações realizadas repetidas vezes".

Qual é o 5º número que aparecerá na tela, considerando que o primeiro número seja x?

90 (UFJF-MG) José decidiu nadar, regularmente, de quatro em quatro dias. Começou a fazê-lo em um sábado; nadou pela segunda vez na quarta-feira seguinte e assim por diante.
Nesse caso, na centésima vez em que José for nadar, será:

a) terça-feira. **b)** quarta-feira. **c)** quinta-feira. **d)** sexta-feira.

91 Uma escadaria de 280 degraus une o piso térreo ao último piso de um prédio de apartamentos. Cada degrau tem 10 cm de altura e o piso térreo está a 48 cm de altura em relação ao nível da rua.

a) Escreva a sequência crescente formada pelas alturas, em relação ao nível da rua, do piso térreo e dos patamares dos degraus.

b) Dê a lei de formação dessa sequência.

92 Uma pessoa aplicou R$ 10.000,00 em um fundo de investimento, em regime de juro composto, durante 20 meses. O fundo rendeu 2% ao mês.

a) Escreva a sequência crescente formada pelo capital inicial e pelos montantes acumulados nesses meses.

b) Dê a lei de formação dessa sequência.

93 Um pedreiro realizou uma tarefa em 4 dias, totalizando t horas de trabalho. No primeiro dia, o pedreiro trabalhou metade do total t de horas mais meia hora. Em cada um dos dias seguintes, ele trabalhou metade do tempo que faltava para completar a tarefa mais meia hora. E assim completou a tarefa no quarto dia.

a) Dê a sequência formada pelas horas de trabalho nesses quatro dias.

b) Qual foi o total de horas trabalhadas?

94 Em um jogo entre duas pessoas A e B, os participantes tiram, alternadamente, 1, 2, 3 ou 4 bolinhas de uma caixa que, inicialmente, tem exatamente 100 bolinhas. Ganha o jogador que tirar a última bolinha da caixa. O jogador A começa o jogo, tirando 2 bolinhas da caixa. O jogador B adota a seguinte estratégia: tira $5 - n$ bolinhas da caixa, sendo n o número de bolinhas tiradas por A na jogada anterior (cada jogada é uma retirada de uma ou mais bolinhas da caixa por um dos participantes). Se nenhum dos jogadores cometer engano em sua jogada:

a) Quem vencerá o jogo? Justifique a sua resposta.

b) Quantas jogadas vão compor esse jogo?

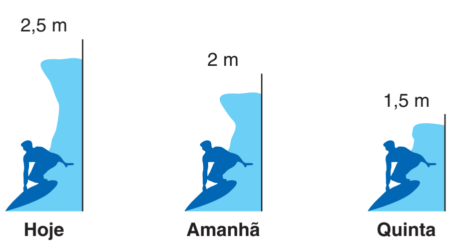
95 (Vunesp) Em 05 de junho de 2008, foi inaugurada uma pizzaria que só abre aos sábados. No dia da inauguração, a pizzaria recebeu 40 fregueses. A partir daí, o número de fregueses que passaram a frequentar a pizzaria cresceu em progressão aritmética de razão 6, até que atingiu a cota máxima de 136 pessoas, a qual tem se mantido. O número de sábados que se passaram, excluindo-se o sábado de inauguração, para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez, foi:

a) 15 b) 16 c) 17 d) 18 e) 26

96 (Ufal) Um atleta fez vários lançamentos de dardo e um fato interessante foi que a cada vez a distância alcançada pelo dardo aumentou 2 cm. Se ele fez 30 lançamentos e o alcance do último deles foi 15 m, quantos metros foram alcançados no terceiro lançamento?

a) 14,40 c) 14,46 e) 14,54
b) 14,44 d) 14,52

97 (Unirio-RJ) A figura abaixo foi publicada em jornal de grande circulação, terça-feira, 25 de setembro. Trata da previsão da altura das ondas no Rio de Janeiro para os três próximos dias, que representa uma progressão aritmética decrescente.



Fonte: http://www.oglobo.com

Analisando esta figura, um surfista ficou imaginando a possibilidade de ocorrência de ondas gigantescas. Se isso fosse possível, considerando esta mesma progressão, qual teria sido a altura das ondas no dia 01 de setembro do mesmo ano?

a) 14,5 m c) 15,5 m e) 16,5 m
b) 15,0 m d) 16,0 m

98 (UFG-GO) Uma indústria consome mensalmente 150 m^3 de um certo reagente. Uma unidade dessa indústria passou a produzir esse reagente e, no primeiro mês de produção, produziu 10% do seu consumo mensal. Se a unidade aumenta a produção do reagente em 3 m^3 por mês, quantos meses serão necessários, a partir do início da produção, para que a unidade produza, em um único mês, 70% do volume mensal desse reagente consumido pela indústria?

a) 21 b) 24 c) 28 d) 31 e) 36

99 (UFSCar-SP) Um determinado corpo celeste é visível da Terra a olho nu de 63 em 63 anos, tendo sido visto pela última vez no ano de 1968. De acordo com o calendário atualmente em uso, o primeiro ano da era Cristã em que esse corpo celeste esteve visível a olho nu da Terra foi o ano:

a) 15 b) 19 c) 23 d) 27 e) 31

100 (Unifal-MG) Uma empresa de entrega de mercadorias possui várias filiais em uma cidade. A fim de maximizar a distribuição, a empresa dividiu a cidade em 305 setores, designando um número natural a cada setor. A tabela abaixo mostra parte do quadro de distribuição de uma das filiais desta empresa, sendo que os demais setores seguem a forma de distribuição apresentada.

Dias da semana	Setor				
Segunda	1		7		13
Terça		6		12	
Quarta	2		8		14
Quinta		5		11	
Sexta	3		9		15
Sábado		4		10	

O dia da semana em que essa filial atenderá o setor 275 é:

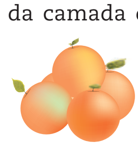
a) sábado. c) segunda. e) quarta.
b) quinta d) sexta.

101 (PUC-PR) Há dois tipos de anos bissextos: os que são múltiplos de 4, mas não de 100, e os que são múltiplos de 400. O número de anos bissextos que o século XXI irá ter é:

a) 23 b) 24 c) 25 d) 26 e) 27

102 Em uma barraca de frutas, um feirante empilhou as laranjas formando uma pirâmide de base quadrada. A base era formada por 10 fileiras de 10 laranjas cada uma, e cada laranja tangenciava as vizinhas. Acima da base vinha a segunda camada de laranjas, e cada uma delas tangenciava quatro laranjas da camada inferior, conforme a figura. O mesmo ocorria nas demais camadas, até a última, que era formada por uma única laranja. Considerando a base como 1ª camada, o número de laranjas da camada de número n dessa pilha era:

a) n^2 d) $(9 - n)^2$
b) $(10 - n)^2$ e) $(11 - n)^2$
c) $(9 + n)^2$



103 Uma pedra caiu do alto de um edifício. No primeiro segundo da queda, a pedra percorreu 10 m e, em cada um dos segundos restantes, até atingir o solo, ela percorreu 10 m a mais que no segundo anterior. Sabendo que o tempo total de queda foi de n segundos, calcule, em função de n:

a) a altura do edifício.

b) a velocidade, em metro por segundo, com que a pedra atingiu o solo.

104 (Unicamp-SP) Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir. Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.

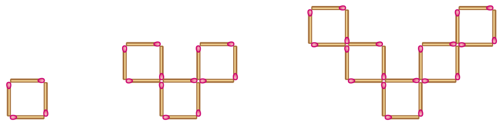
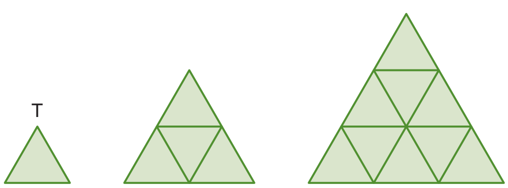


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Suponha que essas figuras representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Suponha também que F_1, F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as figuras 1, 2, 3, e que o número de fósforos utilizados para formar a figura n seja F_n. Calcule F_{10} e escreva a expressão geral de F_n.

b) Determine o número de fósforos necessários para que seja possível exibir concomitantemente todas as primeiras 50 figuras.

105 (OBM) O triângulo equilátero T a seguir tem lado 1. Juntando triângulos congruentes a esse, podemos formar outros triângulos equiláteros maiores, conforme indicado no desenho abaixo.



Qual é a medida do lado do triângulo equilátero formado por 49 dos triângulos T.

a) 7

b) 49

c) 13

d) 21

e) É impossível formar um triângulo equilátero com esse número de triângulos T.

106 (Uespi) Do dia primeiro ao dia vinte e um de junho do ano passado, o número de pessoas com gripe socorridas num posto médico aumentou segundo uma progressão aritmética. Só nos 10 primeiros dias do mês, 290 pessoas gripadas foram atendidas e, no dia vinte e um, o número de atendimentos diário alcançou seu valor máximo de 91 pacientes gripados. Entretanto, no dia vinte e dois, o número de atendimentos diminuiu de 10 pacientes gripados em relação ao dia anterior e, dessa forma, prosseguiu a diminuição diária dos atendimentos de pacientes gripados, até o final de junho. Nessas condições, é correto afirmar que o total de pacientes com gripe que foram atendidos nesse posto médico, durante todo o mês de junho, foi de:

a) 1.220 **c)** 1.520 **e)** 1.660

b) 1.440 **d)** 1.560

107 No dia 1º de janeiro, um site de compras foi acessado por 1.800 internautas. A cada um dos próximos dias de janeiro houve um aumento de 100 unidades no número de acessos.

a) Em que dia de janeiro houve exatamente 3.700 acessos a esse site?

b) Quantos acessos houve no mês de janeiro até o dia mencionado no item **a**?

108 (UFS-SE) Dispunha-se de 280 fichas para distribuir a três pessoas, X, Y e Z. O quadro abaixo mostra as quantidades diárias de fichas dadas a cada pessoa, obedecendo a uma determinada sequência.

	X	Y	Z
1º dia	1	2	3
2º dia	4	5	6
3º dia	7	8	9
...	...	...	...

Utilize as informações na página anterior para analisar cada uma das afirmativas seguintes.

a) Nas condições acima, no último dia, terminada a distribuição, sobraram 4 fichas.

b) Nas condições acima, a última entrega de fichas ocorreu no sétimo dia.

c) O total de fichas recebidas por Z foi 84.

d) No quinto dia, X recebeu 14 fichas.

e) Ao terminar a distribuição do sexto dia, Y havia recebido um total de 57 fichas.

[*Nota*: Analisar as afirmativas significa classificá-las como verdadeira (V) ou falsa (F).]

109 (Unifesp) Uma pessoa resolveu fazer sua caminhada matinal passando a percorrer, a cada dia, 100 metros mais do que no dia anterior. Ao completar o 21º dia de caminhada, observou ter percorrido, nesse dia, 6.000 metros. A distância total percorrida nos 21 dias foi de:

a) 125.500 m **c)** 90.000 m **e)** 80.000 m

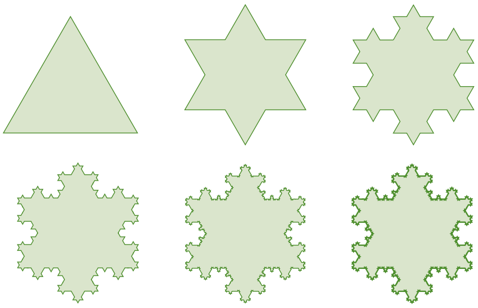
b) 105.000 m **d)** 87.500 m

110 (Uespi) Certo dia um botânico descobriu que 8 km² dos 472.392 km² de uma reserva florestal haviam sido infestados por um fungo que danificava as folhas das árvores. Sabe-se que o estudo sobre a proliferação desse tipo de fungo indica que, a cada mês, ele triplica sua área de contaminação. Nessas condições, caso não seja tomada nenhuma providência para debelar a proliferação desse fungo, em quantos meses, a partir do instante da descoberta da contaminação, somente $\frac{2}{3}$ da área dessa reserva florestal ainda não estará infestada?

a) 8 **c)** 10 **e)** 12

b) 9 **d)** 11

111 O termo "fractal" foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, pesquisador da IBM e autor de trabalhos pioneiros sobre fractais. A característica principal de um fractal é a repetição de padrões. Por exemplo, partindo de um triângulo equilátero, dividimos cada lado em três partes iguais e desenhamos, externamente ao triângulo original, um novo triângulo equilátero em que um dos lados é o segmento central obtido dessa divisão; a seguir, apagamos o segmento central. Repetimos esse procedimento para cada lado do polígono obtido com o primeiro procedimento, e assim por diante. Consideremos todos os infinitos polígonos obtidos dessa maneira, tal que a sequência formada pelos números de lados seja crescente.



O número de lados do 6º polígono dessa sequência é:

a) 192
b) 768
c) 1.264
d) 2.288
e) 3.072

112 (UEL-PR) A figura construída segundo a sequência a seguir é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtemos outros cubos menores, com arestas iguais a $\frac{1}{3}$ da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja. Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a 1 m, e considerando uma face do cubo original, qual é a área remanescente dessa face, em metro quadrado, na figura 30?

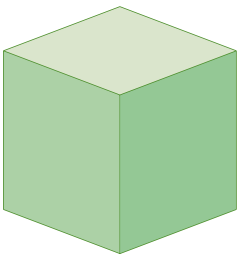


fig. 1

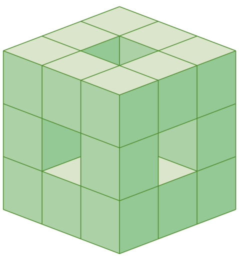


fig. 2

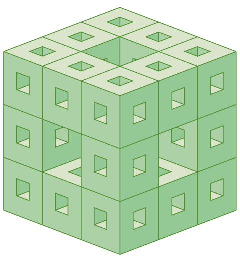


fig. 3

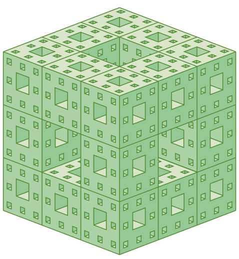


fig. 4

a) $\left(\frac{8}{9}\right)^{30}$
b) $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$
c) $\left(\frac{9}{8}\right)^{30}$
d) $\left(\frac{20}{27}\right)^{19}$
e) $\left(\frac{27}{20}\right)^{19}$

113 (Uenf-RJ) Numa reserva florestal foram computados 3.645 coelhos. Uma determinada infecção alastrou-se de modo que, ao final do primeiro dia, há cinco coelhos infectados e, a cada cinco dias, o número total de coelhos infectados triplica.

a) Determine a quantidade de coelhos infectados ao final do 21º dia.
b) Calcule o número mínimo de dias necessário para que toda a população de coelhos esteja infectada.

114 (Vunesp) "Devido ao aquecimento das águas, a ocorrência de furacões das categorias 4 e 5 — os mais intensos da escala Saffir-Simpson — dobrou nos últimos 35 anos". (*Veja*, 21 jun. 2006.)
Seja *x* o número de furacões dessas categorias ocorridos no período 1971-2005. Vamos supor que a quantidade de furacões a cada 35 anos continue dobrando em relação aos 35 anos anteriores, isto é, de 2006 a 2040 ocorrerão 2*x* furacões, de 2041 a 2075 ocorrerão 4*x* furacões, e assim por diante. Baseado nesta suposição, determine, em função de *x*, o número total de furacões que terão ocorrido no período de 1971 a 2320.

115 (UFPB) Hélio comprou, em uma loja, uma máquina de lavar roupas, no seguinte plano de pagamento: 10 parcelas, sendo a primeira de R$ 256,00 e o valor de cada parcela, a partir da segunda, correspondendo a 50% do valor da anterior. Hélio pagou pela máquina de lavar o valor total de:

a) R$ 511,75
b) R$ 511,50
c) R$ 511,00
d) R$ 510,50
e) R$ 510,00

116 (PUC-PR) O efeito em aumentar o volume da massa de pão por determinado fermento pode ser associado a uma sequência de unidades de tempo (minutos). Consideramos o efeito como a contribuição no instante de tempo.

Tempo (min)	Efeito na unidade de tempo
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125
6	0,015625
7	0,007813
...	...

Após 20 minutos sob atuação do fermento, qual é o volume máximo do pão?

a) 3 vezes o tamanho original
b) 4 vezes o tamanho original
c) 2 vezes o tamanho original
d) 1,8 vezes o tamanho original
e) 1,5 vezes o tamanho original

117 (UFPB) Um estudo, feito a partir do ano de 2001, mostrou que uma indústria produziu 74.400 unidades de um determinado produto, no período de janeiro de 2001 a dezembro de 2005, isto é, num período de 5 anos, e que sua produção dobra a cada ano. Com base nesse estudo, pode-se afirmar que a produção anual dessa indústria seria superior a 76.800 unidades, a partir do ano de:

a) 2006
b) 2007
c) 2015
d) 2023
e) 2031

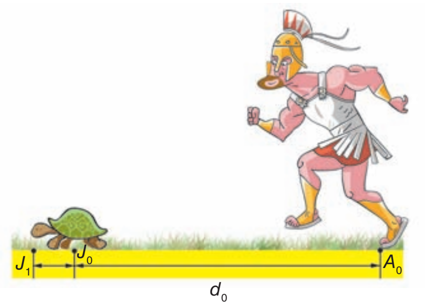
118 Digitando em uma calculadora um número y, depois a tecla $\boxed{y^x}$, a seguir um número x e, finalmente, a tecla $\boxed{=}$, obtemos como resultado o número y^x.
Um estudante necessita calcular o produto de todas as potências de base 2 e expoente natural n, com $1 \leqslant n \leqslant 20$, isto é, $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot ... \cdot 2^{20}$. Qual das alternativas a seguir apresenta uma sequência de teclas que devem ser acionadas na calculadora para se obter esse resultado?

a) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{6}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$
b) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$
c) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$
d) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$
e) $\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{8}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

119 (Ufes) O governo federal, ao efetuar a restituição de impostos, permite que os contribuintes consumam mais. O gasto de cada contribuinte torna-se receita para outros contribuintes, que, por sua vez, fazem novos gastos. Cada contribuinte poupa 10% de suas receitas, gastando todo o resto.
O valor global, em bilhões de reais, do consumo dos contribuintes a ser gerado por uma restituição de impostos de 40 bilhões de reais é:

a) 36
b) 40
c) 180
d) 360
e) 450

120 (UFRJ) Um dos paradoxos atribuídos ao filósofo grego Zenão (que viveu por volta de 450 a.C.) é o de Aquiles e a tartaruga. Zenão teria afirmado que, por mais rápido que fosse, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga.



Para fixar as ideias, vamos dar uma formulação teórica e simplificada da questão. Admitiremos que Aquiles é representado por um ponto A e a tartaruga, por um ponto J, que se movem sobre a mesma reta e no mesmo sentido, com velocidades constantes, sendo a velocidade de Aquiles igual a dez vezes à da tartaruga.
Suponhamos ainda que, no instante inicial, a distância entre Aquiles e a tartaruga seja d_0 e que Aquiles leve um tempo t_0 para percorrê-la. O argumento de Zenão é o seguinte: quando Aquiles chega ao ponto J_0 em que estava a tartaruga no instante inicial, esta já se moveu para um ponto J_1; quando Aquiles chega a J_1, a tartaruga já se moveu para um ponto J_2, e assim sucessivamente, de forma que Aquiles e a tartaruga jamais estarão no mesmo ponto simultaneamente.
Com base nos dados acima, é verdadeira esta última afirmação? Justifique rigorosamente sua resposta.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Um vendedor gastou R$ 600,00 na compra de x unidades de certo produto e vendeu todas por R$ 4,00 cada uma. Sabendo que seu lucro foi uma quantia entre R$ 160,00 e R$ 220,00, pode-se concluir que:

a) $x \in]190, 205[$
b) $x \in [190, 205]$
c) $x = 150$
d) $x \neq 150$
e) para qualquer número natural não nulo menor que 150, o lucro foi uma quantia entre R$ 160,00 e R$ 220,00.

2 (UFMT) Num acidente no litoral brasileiro, o navio Virgínia II sofreu uma fissura no casco atingindo um dos tanques que continha óleo cru. Considere que a mancha provocada pelo vazamento tenha a forma de um disco circular de raio R e que o raio, em metro, cresce em função do tempo t, em minuto, obedecendo à relação $R(t) = 16t + 1$. Sendo A a área ocupada pela mancha após 5 minutos do início do vazamento, calcule A.

3 Na China está em vigor desde 1979 a política de um filho por casal, com o objetivo de reduzir a população. Sabendo que no ano 2000 o número de habitantes desse país era 1,2 bilhão e supondo que a população decresça à taxa de 0,5% por ano, pode-se afirmar, adotando a aproximação $(0{,}995)^{25} = 0{,}9$, que no ano de 2050 a população da China será:

a) $9{,}72 \cdot 10^8$
b) $9{,}72 \cdot 10^9$
c) $1{,}08 \cdot 10^9$
d) $1{,}08 \cdot 10^6$
e) $8{,}1 \cdot 10^9$

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = 6 - 4x$, em que o primeiro membro é a soma das infinitas parcelas da forma $\frac{x^n}{2^{n-1}}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

$$\underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots}_{\text{soma } S_\infty \text{ de uma PG}} = 6 - 4x$$

Cálculo da soma S_∞:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = x \\ \text{razão}: \frac{x}{2} \\ S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \end{array}\right\} S_\infty = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{\frac{2-x}{2}} = \frac{2x}{2-x}$$

Substituindo S_∞ na equação inicial:

$$\frac{2x}{2-x} = 6 - 4x$$

$$(2-x)(6-4x) = 2x$$

$$12 - 8x - 6x + 4x^2 = 2x$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Logo, $S = \{1, 3\}$.

ERRADO!

Comentário

O aluno se esqueceu de considerar a condição de existência da soma dos infinitos termos de uma PG.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

12

Trigonometria no triângulo retângulo

O cálculo de medidas de ângulos e de distâncias, algumas inacessíveis, é frequente em muitas profissões, por exemplo: calcular a largura de um rio para o projeto de construção de uma ponte; a medida do ângulo que uma rampa deve formar com o piso para a construção de uma escada e outras medidas e distâncias. Neste capítulo, mostraremos que cálculos como esses podem ser efetuados por meio da Trigonometria.

12.1 Estudo da Trigonometria no triângulo retângulo

As razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, que são razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, permitem o cálculo indireto de distâncias e de ângulos.

12.2 Transformações trigonométricas

As transformações de razões trigonométricas podem simplificar os cálculos envolvendo seno, cosseno e tangente.

Para pensar

- Um teleférico deve unir os topos A e B de dois morros de 108 m e 144 m de altura, respectivamente. Conhecendo a medida do ângulo formado entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o plano horizontal, como você calcularia a distância entre os pontos A e B?

Seção 12.1

Estudo da Trigonometria no triângulo retângulo

Objetivos

- **Calcular** os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo agudo.
- **Calcular** a medida de um lado de um triângulo retângulo.
- **Aplicar** conceitos de seno, cosseno e tangente.

Termos e conceitos

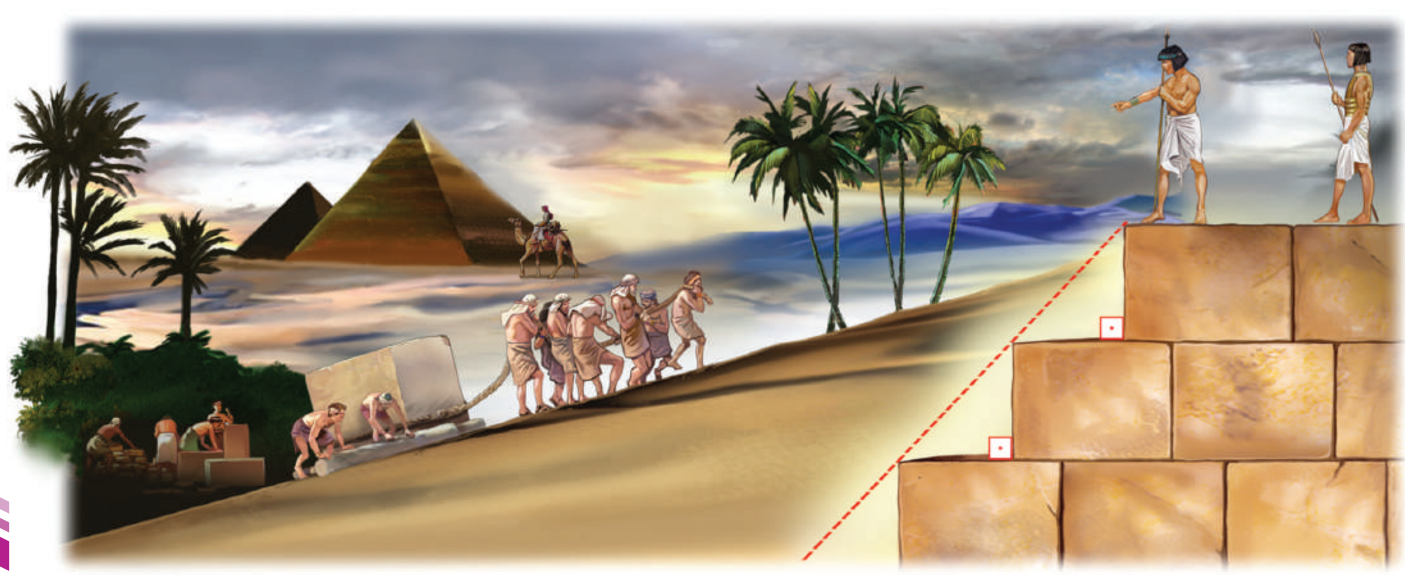
- seno de um ângulo agudo
- cosseno de um ângulo agudo
- tangente de um ângulo agudo

A origem da Trigonometria

O termo **Trigonometria** (do grego *trígónon*, que significa triângulo, e *métron*, que significa medida) foi criado em 1595 pelo matemático Bartholomeus Pitiscus para designar o ramo da Matemática que estuda as relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos de um triângulo, mas a origem desse campo de estudo é muito mais antiga.

O papiro Rhind, escrito no Egito por volta de 1650 a.C., apresenta um texto matemático com 85 problemas, sendo o de número 56 um dos mais antigos registros conhecidos sobre Trigonometria. Esse problema trata da construção de pirâmides, tipo de construção em que era essencial manter a mesma inclinação nas faces – requisito que levou os construtores a manter constantes as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos, cujos catetos eram determinados pela sobreposição de blocos de pedra. Atualmente, essas razões entre os lados de um triângulo retângulo são chamadas de **razões trigonométricas**.

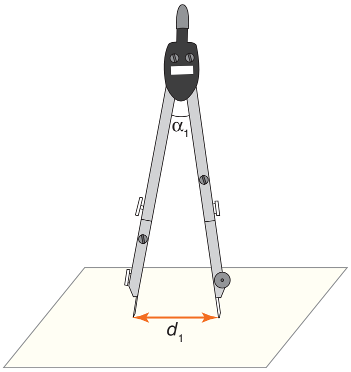
Problema 56 do papiro Rhind.



A ideia central da Trigonometria

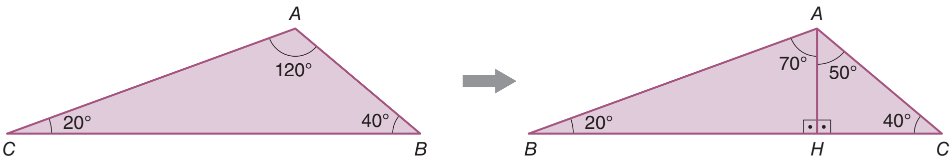
As figuras abaixo mostram o mesmo compasso com duas aberturas diferentes. Cada medida α do ângulo formado pelas hastes determina uma distância d entre as pontas do compasso. Que relação numérica podemos estabelecer entre a medida α e a distância d?

Essa situação apresenta um dos objetivos do estudo da Trigonometria, que é estabelecer relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um triângulo. Essas relações permitem, entre outras aplicações, o cálculo indireto de distâncias, como a distância entre a Terra e o Sol.



O triângulo fundamental

Qualquer triângulo pode ser separado, por uma de suas alturas, em dois triângulos retângulos. Por exemplo:

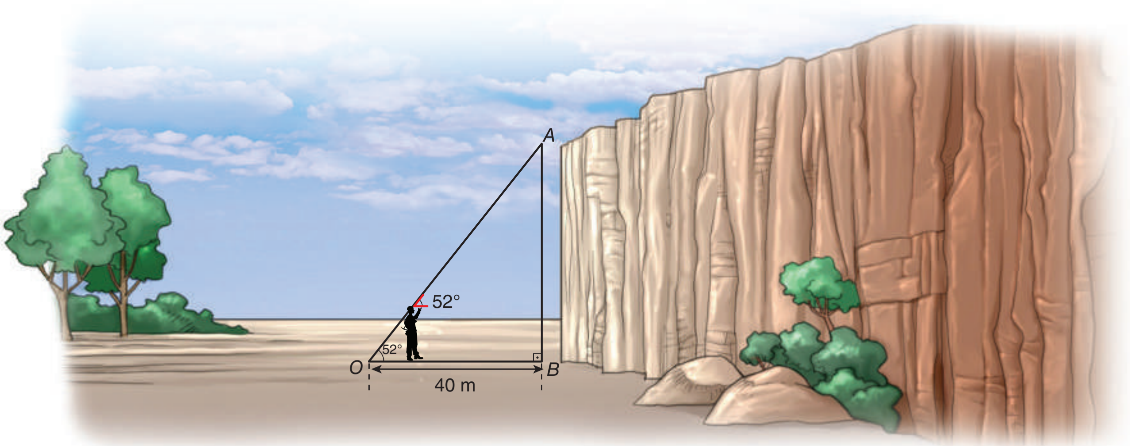


Assim, se conhecermos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um **triângulo retângulo**, conheceremos as relações entre as medidas dos ângulos internos e as medidas dos lados de um **triângulo qualquer**.

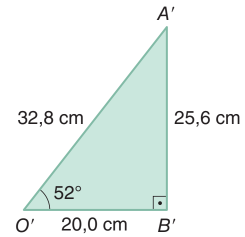
Por isso, daremos início ao estudo dessas relações em triângulos retângulos, consideradas relações fundamentais pela Trigonometria.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Para medir a altura AB de uma encosta vertical, cuja base está em um terreno plano e horizontal, um topógrafo fixou um ponto O do terreno, conforme o esquema abaixo, e mediu o ângulo $A\hat{O}B$ e a distância OB, obtendo 52° e 40 m, respectivamente.



A seguir, o topógrafo desenhou um triângulo $O'A'B'$ qualquer, retângulo em B' e com o ângulo agudo $A'\hat{O}'B'$ medindo 52°. Então, com uma régua graduada, mediu os lados desse triângulo, obtendo os valores indicados ao lado.

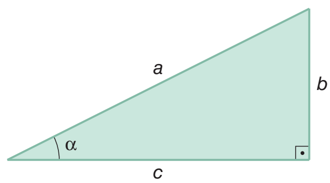


Como os triângulos AOB e $A'O'B'$ são semelhantes (pelo caso AA), seus lados correspondentes são proporcionais. Assim, o topógrafo calculou a altura h da encosta pela proporção a seguir, em que 40 m foi substituído por 4.000 cm:

$$\frac{h}{25{,}6} = \frac{4.000}{20} \Rightarrow h = 5.120 \text{ cm}$$

Dessa forma, ele descobriu que a encosta tinha 5.120 cm de altura, ou 51,20 m.

A ideia de relacionar as medidas dos lados com as medidas dos ângulos internos de triângulos retângulos por meio da semelhança de triângulos, levou alguns matemáticos a construir tabelas com as razões entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos para várias medidas α de ângulos agudos, como os da tabela abaixo. Note que se o topógrafo tivesse a seu dispor essa tabela, não precisaria desenhar o triângulo semelhante ao triângulo AOB.



α	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$
40°	0,642788	0,766044	0,839010
41°	0,656059	0,754710	0,869287
42°	0,669131	0,743145	0,900404
43°	0,681998	0,731354	0,932515
44°	0,694658	0,719340	0,965689
45°	0,707107	0,707107	1,000000
46°	0,719340	0,694658	1,035530
47°	0,731354	0,681998	1,072369
48°	0,743145	0,669131	1,110613
49°	0,754710	0,656059	1,150368
50°	0,766044	0,642788	1,191754
51°	0,777146	0,629320	1,234897
52°	0,788011	0,615661	1,279942

Atualmente, as tabelas das razões trigonométricas são substituídas pelas calculadoras eletrônicas.

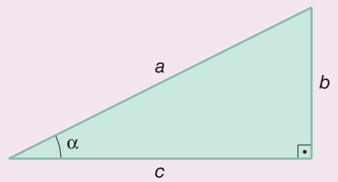
Para facilitar a identificação dessas razões, chamadas de **razões trigonométricas**, foi adotada a seguinte nomenclatura:

- a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa foi chamada de **seno de** α;
- a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa foi chamada de **cosseno de** α;
- a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente a α foi chamada de **tangente de** α.

Usamos **sen** α, **cos** α e **tg** α para abreviar seno, cosseno e tangente de α, respectivamente.

Resumindo:

Sendo α a medida de um ângulo agudo em um triângulo retângulo qualquer, temos:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

Quando dizemos "cateto oposto a α", estamos nos referindo ao "cateto oposto ao ângulo de medida α". Isso também vale para o cateto adjacente.

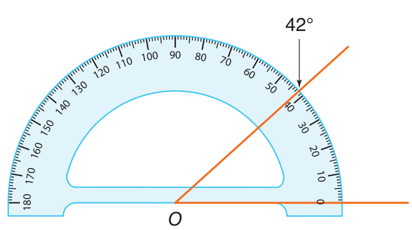
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Razões trigonométricas*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

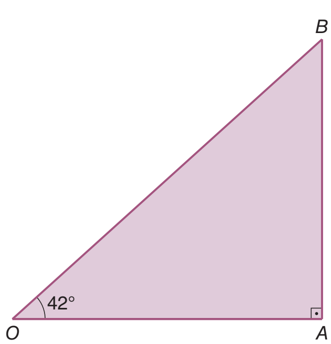
1 Com auxílio de uma régua graduada e de um transferidor, calcular sen 42°, cos 42° e tg 42°.

Resolução

Construímos, com auxílio do transferidor, um ângulo de 42°.



Traçamos uma perpendicular a um dos lados desse ângulo, obtendo um triângulo retângulo. Quanto maior o triângulo retângulo desenhado, mais precisos serão os valores obtidos para as razões seno, cosseno e tangente.



Com a régua graduada, medimos os lados do triângulo retângulo *ABO*. Nesse desenho, obtemos: $AB = 3{,}7$ cm, $AO = 4{,}1$ cm e $BO = 5{,}5$ cm.

Finalmente, calculamos as razões trigonométricas:

$$\text{sen } 42° = \frac{3{,}7}{5{,}5} \approx 0{,}67$$

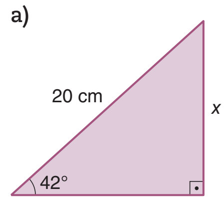
$$\cos 42° = \frac{4{,}1}{5{,}5} \approx 0{,}74$$

$$\text{tg } 42° = \frac{3{,}7}{4{,}1} \approx 0{,}90$$

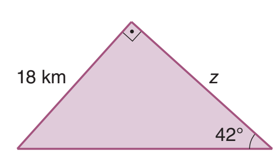
(*Nota*: Quando medimos um segmento de reta com régua graduada, inevitavelmente cometemos erros de aproximação. Por isso, os resultados obtidos nesse exercício são valores aproximados.)

2 Adotando sen 42° = 0,67, cos 42° = 0,74 e tg 42° = 0,90, determinar as medidas indicadas por x, y e z nas figuras a seguir.

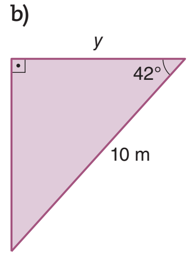
a)



c)



b)



Resolução

a) A razão trigonométrica que deve ser aplicada é aquela que relaciona os elementos:

- ângulo agudo (42°);
- cateto oposto a esse ângulo (x);
- hipotenusa (20 cm).

Tal razão é o seno. Assim:

$$\text{sen } 42° = \frac{x}{20} \Rightarrow 0{,}67 = \frac{x}{20}$$

$\therefore x = 13{,}4$ cm

b) As medidas relacionadas no triângulo retângulo são:

- ângulo agudo (42°);
- cateto adjacente a esse ângulo (y);
- hipotenusa (10 m).

Nesse caso, a razão trigonométrica adequada é o cosseno. Temos, então:

$$\cos 42° = \frac{y}{10} \Rightarrow 0{,}74 = \frac{y}{10}$$

$\therefore y = 7{,}4$ m

c) Temos:

- ângulo agudo (42°);
- cateto oposto a esse ângulo (18 km);
- cateto adjacente a esse ângulo (z).

A razão trigonométrica que relaciona esses elementos é a tangente. Assim:

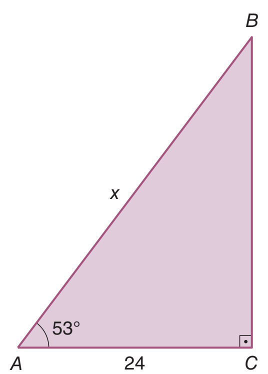
$$\text{tg } 42° = \frac{18}{z} \Rightarrow 0{,}90 = \frac{18}{z}$$

$\therefore z = 20$ km

3 Uma corda, completamente esticada, liga um ponto *A* de um terreno plano e horizontal a um balão *B* de gás, suspenso no ar. No instante em que os raios solares eram perpendiculares ao terreno, um forte vento fez a corda se inclinar, formando um ângulo de 53° com o terreno. Nesse mesmo instante, a sombra *C* do balão era tal que *AC* = 24 m.
Calcular o comprimento da corda, adotando:
sen 53° = 0,80; cos 53° = 0,60; tg 53° = 1,33

Resolução

Indicando por *x* o comprimento da corda, em metro, esquematizamos:



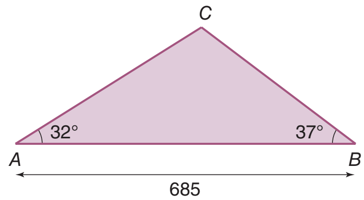
Como no triângulo retângulo *ABC* estão relacionadas as medidas de um ângulo agudo, do cateto adjacente a esse ângulo e da hipotenusa, deduzimos que a razão trigonométrica adequada para o cálculo de *x* é o cosseno:

$$\cos 53° = \frac{24}{x} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{24}{x}$$

$\therefore x = 40$

Logo, a corda que prende o balão ao terreno tem 40 m de comprimento.

4 Em um porto, o cais reto *AB* tem 685 m de comprimento e pode ser considerado no mesmo nível do mar. Dos pontos *A* e *B*, vê-se uma ilhota *C* tal que m($C\hat{A}B$) = 32° e m($C\hat{B}A$) = 37°, conforme a figura:

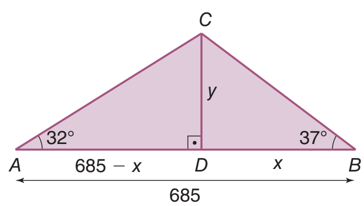


Adotando os valores apresentados na tabela abaixo, calcular a distância entre a ilhota e o cais.

	32°	37°
sen	0,53	0,60
cos	0,85	0,80
tg	0,62	0,75

Resolução

Sendo *D* o ponto do cais em que $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ e indicando por *x* e *y* as distâncias *DB* e *CD*, em metro, respectivamente, temos:



$$\begin{cases} \text{tg } 32° = \dfrac{y}{685 - x} \\ \text{tg } 37° = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

De acordo com os valores da tabela, obtemos:

$$\begin{cases} 0{,}62 = \dfrac{y}{685 - x} \\ 0{,}75 = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 424{,}7 - 0{,}62x & \text{(I)} \\ y = 0{,}75x & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (II) em (I):

$0{,}75x = 424{,}7 - 0{,}62x \Rightarrow 1{,}37x = 424{,}7$

$\therefore x = 310$

Substituindo *x* por 310 em (II), concluímos:

$y = 0{,}75 \cdot 310 = 232{,}5$

Logo, a distância entre a ilhota e o cais é 232,5 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

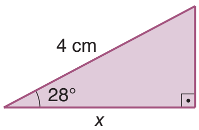
1 Neste exercício, você vai calcular alguns valores aproximados de razões trigonométricas.

a) Com o auxílio de régua e transferidor, construa um triângulo retângulo com um ângulo de 35°.

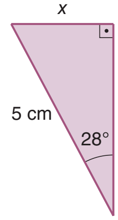
b) Usando uma régua graduada, meça os lados do triângulo e calcule sen 35°, cos 35°, tg 35°, sen 55°, cos 55° e tg 55°, com aproximação de duas casas decimais.

2 Sabendo que sen 28° = 0,46, cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53, calcule o valor de x em cada figura.

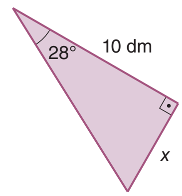
a)



b)

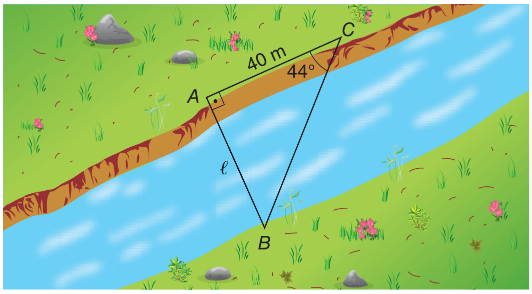


c)



(*Nota*: Os valores das razões trigonométricas apresentados nesse exercício são aproximados. Com o intuito de simplificar os enunciados e as resoluções, em outros exercícios também adotaremos valores aproximados como se fossem valores exatos das razões trigonométricas.)

3 Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta (conforme a figura). A seguir, ele se desloca 40 m perpendicularmente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44°. Dados: sen 44° = 0,69, cos 44° = 0,71 e tg 44° = 0,96, calcule a largura do rio.



4 Um teleférico deve unir os topos A e B de dois morros. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária, um engenheiro mediu as alturas dos morros em relação a um mesmo plano horizontal, obtendo 108 m e 144 m. A seguir, mediu o ângulo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forma com a horizontal, obtendo 32°.

a) Faça um esquema da situação proposta no texto.

b) Calcule a distância entre os pontos A e B, sabendo que sen 32° = 0,52, cos 32° = 0,84 e tg 32° = 0,62.

Resolva os exercícios complementares 1 a 3 e 13 a 21.

Transformações trigonométricas

Objetivos

- **Relacionar** a tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo com o seno e o cosseno desse ângulo.
- **Relacionar** ângulos complementares através do seno e do cosseno.

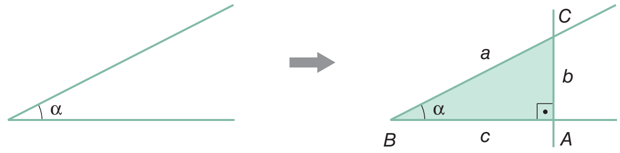
Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo

Uma importante relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo é enunciada no teorema a seguir.

Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$

Demonstração

Construímos um ângulo agudo de medida α e traçamos uma perpendicular a um dos lados do ângulo, obtendo um triângulo retângulo com lados de medidas a, b e c, conforme figura:

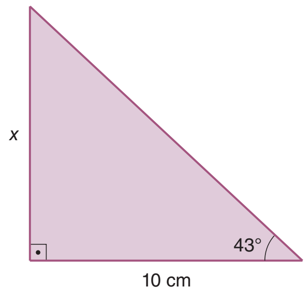


Calculando sen α e cos α, e efetuando $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$, concluímos que:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\ \alpha$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5 Obter a medida indicada por x na figura abaixo, adotando sen $43° = 0{,}68$ e cos $43° = 0{,}73$.



Resolução

Pela figura, temos: $\text{tg}\ 43° = \dfrac{x}{10}$

Calculamos a tg 43° como o quociente do sen 43° pelo cos 43°, isto é:

$\text{tg}\ 43° = \dfrac{\text{sen}\ 43°}{\cos 43°} = \dfrac{0{,}68}{0{,}73} \approx 0{,}93$

Logo: $0{,}93 \approx \dfrac{x}{10} \Rightarrow x \approx 9{,}3$

Concluímos que x vale aproximadamente 9,3 cm.

Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

Vamos lembrar o conceito de ângulos complementares.

Dois ângulos agudos de medidas α e β são complementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 90°$.

Dizemos também que as medidas α e β são complementares.

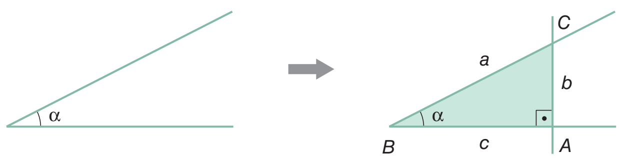
Neste tópico, vamos relacionar o seno e o cosseno de dois ângulos complementares por meio do seguinte teorema:

> Se α é a medida em grau de um ângulo agudo, então:
> - $\text{sen}\ \alpha = \cos\ (90° - \alpha)$
> - $\cos\ \alpha = \text{sen}\ (90° - \alpha)$

Observe que α e $(90° - \alpha)$ são medidas complementares.

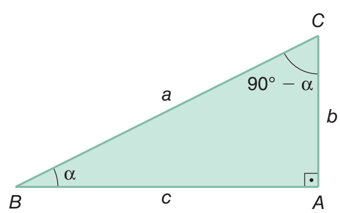
Demonstração

Construímos um ângulo agudo de medida α e traçamos uma perpendicular a um dos lados do ângulo, obtendo o triângulo retângulo com lados de medidas *a*, *b* e *c*, conforme a figura:



Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar do ângulo $\hat{B}$, pois:

$$\alpha + m(\hat{C}) = 90° \Rightarrow m(\hat{C}) = 90° - \alpha$$



Assim:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{a} \\ \cos\ (90° - \alpha) = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \cos\ (90° - \alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\ \alpha = \dfrac{c}{a} \\ \text{sen}\ (90° - \alpha) = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\ \alpha = \text{sen}\ (90° - \alpha)$$

Desse modo, provamos que:

> Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Exemplos

a) 30° é o complemento de 60°; logo, sen 30° = cos 60° e sen 60° = cos 30°.

b) 12° é o complemento de 78°; logo, sen 12° = cos 78° e sen 78° = cos 12°.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 Sabendo que cos 23° = 0,92, calcular o valor da expressão: $E = \dfrac{\text{sen } 23° + \cos 67°}{4 \cdot \text{tg } 23°}$

Resolução

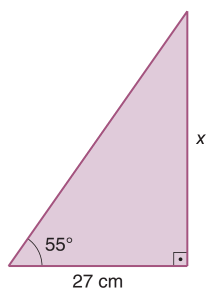
Como 23° é o complemento de 67°, temos cos 67° = sen 23°, logo:

$$E = \frac{\text{sen } 23° + \text{sen } 23°}{4 \cdot \dfrac{\text{sen } 23°}{\cos 23°}} = \frac{2 \text{ sen } 23°}{\dfrac{4 \text{ sen } 23°}{\cos 23°}} = 2 \text{ sen } 23° \cdot \frac{\cos 23°}{4 \text{ sen } 23°}$$

ou seja: $E = \dfrac{\cos 23°}{2} = \dfrac{0{,}92}{2} = 0{,}46$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

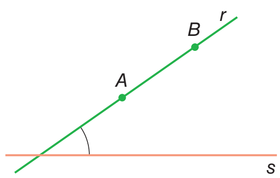
5 Sabendo que sen 55° = 0,81 e cos 55° = 0,57, determine o valor de x na figura.



6 Considerando sen 10° = 0,17 e sen 80° = 0,98, calcule cos 10°, cos 80°, tg 10° e tg 80°.

7 Na figura abaixo, as retas r e s formam entre si um ângulo de 37°, e o segmento $\overline{AB}$, contido em r, mede 18 cm.

Calcule a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta s, dado sen 53° = 0,79.



8 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$, calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } (90° - \alpha)}{\cos \alpha \cdot \cos (90° - \alpha)} + \cos (90° - \alpha)$$

Resolva os exercícios complementares 4 a 8 e 22 a 24.

A Trigonometria e o teorema de Pitágoras

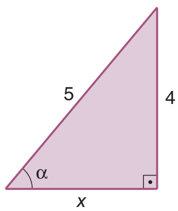
Dado um dos valores de sen α, cos α ou tg α, em que α é a medida de um ângulo agudo, é possível determinar os outros dois valores com o auxílio do teorema de Pitágoras, conforme veremos nos exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5}$, calcular cos α e tg α.

Resolução

Se α é a medida de um ângulo agudo e $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 4 e a hipotenusa mede 5, conforme a figura ao lado.



Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x do cateto adjacente a α:

$$x^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow x = 3$$

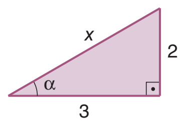
Assim, concluímos:

$$\cos \alpha = \frac{x}{5} = \frac{3}{5} \text{ e } \text{tg } \alpha = \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$$

8 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{3}$, calcular sen α e cos α.

Resolução

Se α é a medida de um ângulo agudo e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{3}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 2 e o cateto adjacente mede 3, conforme a figura:



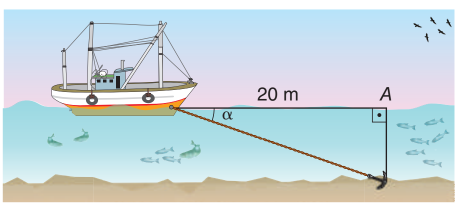
Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x da hipotenusa:

$$x^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow x = \sqrt{13}$$

Assim, concluímos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ e } \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{x} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

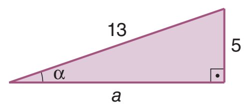
9 A âncora de um barco pesqueiro, depois de lançada, atingiu o fundo do rio. Como a profundidade do rio nesse ponto é menor que o comprimento da corda que prende a âncora ao barco, este se moveu 20 m em relação ao ponto A, de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corda, que formou um ângulo agudo de medida α com a superfície do rio tal que $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{5}{13}$. Calcular a profundidade do rio nesse ponto.



Resolução

No triângulo retângulo destacado na figura, observamos que 20 m é a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo de medida α e pretendemos calcular a medida x do cateto oposto a α; logo, a razão trigonométrica que relaciona essas medidas é a tangente. Necessitamos, então, calcular tg α.

Como $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{5}{13}$, deduzimos que existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 5 unidades e a hipotenusa mede 13 unidades:



Assim, a medida *a* do cateto adjacente a α pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

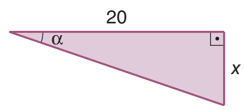
$a^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow a^2 = 144$

$\therefore\ a = 12$

Assim, obtemos:

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{5}{12}$

Retornando ao triângulo retângulo do enunciado do problema, temos:



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore\ x \approx 8{,}3$$

Portanto, a profundidade do rio é 8,3 m, aproximadamente.

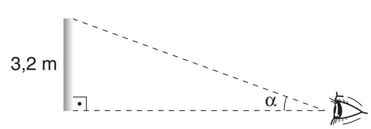
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Demonstração do teorema de Pitágoras*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{12}{13}$, calcule cos α e tg α.

10 Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{4}{3}$, calcule sen α e cos α.

11 Em um cinema, os olhos de um espectador estão no mesmo plano horizontal que contém a base da tela vertical de 3,2 m de altura, conforme mostra a figura ao lado.
O espectador vê toda a extensão vertical da tela sob um ângulo agudo de medida α tal que $\cos \alpha = \dfrac{15}{17}$.



a) Calcule tg α.
b) Calcule a distância entre os olhos do espectador e a base da tela.

Resolva os exercícios complementares 9 a 11.

Ângulos notáveis

Para estudos posteriores de Trigonometria, convém conhecer o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos, pela facilidade das demonstrações, os ângulos de medidas 30°, 45° e 60°, que chamaremos de **ângulos notáveis**.

Ângulo de 45°

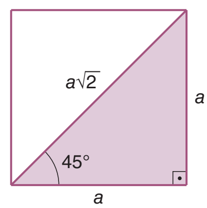
Vimos que a medida de cada diagonal de um quadrado de lado a é $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido por uma diagonal em dois ângulos de 45°.

Assim, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

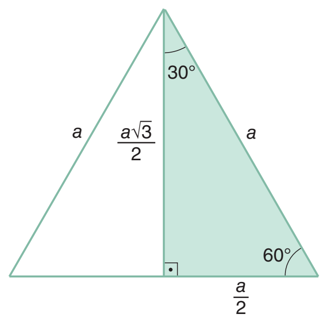
$$\cos 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$$



Ângulos de 30° e 60°

Conforme já estudamos, a medida de cada altura de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vimos que cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana.



Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2}}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 30° = \frac{\frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Temos, ainda, que 60° é o complemento de 30°. Logo:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

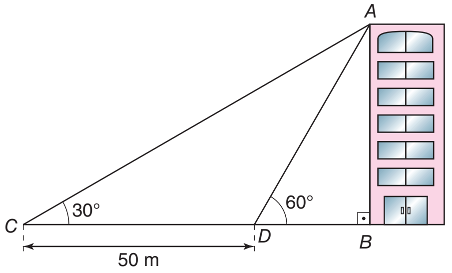
	30°	**45°**	**60°**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

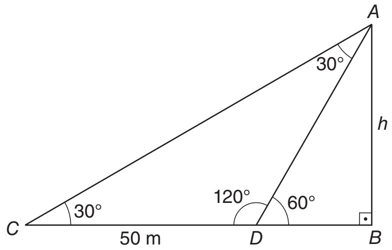
10 A base de um edifício está localizada em um terreno plano e horizontal. Para medir a altura desse edifício, um engenheiro fixou-se em um ponto do terreno e mirou o topo do prédio sob um ângulo de 30° com o solo. Depois, andou 50 metros em direção ao prédio e mirou novamente seu topo, mas, agora, sob um ângulo de 60°. Desconsiderando a altura do engenheiro, calcular a altura do edifício.

Resolução

Primeiro, vamos fazer um esquema da situação:



Indicando por h a altura do edifício, calculamos as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD:



O triângulo ACD é isósceles, pois tem dois ângulos internos congruentes (30°); logo, os lados opostos a esses ângulos são congruentes, isto é, $DA = DC = 50$ m.

Assim, do triângulo ABD, temos:

- ângulo agudo (60°);
- hipotenusa (50 m);
- cateto oposto (h).

Relacionando esses valores ao seno de 60°, concluímos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{50} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{50}$$

$$\therefore 2h = 50\sqrt{3}$$

$$\therefore h = 25\sqrt{3}$$

Logo, a altura do edifício é $25\sqrt{3}$ m, ou seja, aproximadamente 43,3 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}^2 45° + \cos^4 60°}{\text{tg}^4 60°}$$

(*Nota*: Expressões do tipo $\text{sen}^n \alpha$, $\cos^n \alpha$ e $\text{tg}^n \alpha$ devem ser interpretadas como $(\text{sen } \alpha)^n$, $(\cos \alpha)^n$ e $(\text{tg } \alpha)^n$, respectivamente.)

13 Sendo $x = 10°$, determine o valor da expressão:

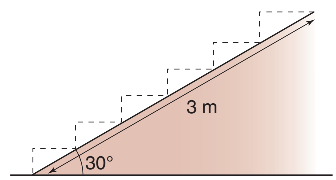
$$E = \frac{\text{sen } 3x + \cos \frac{3x}{2} - \text{sen } \frac{15x}{2}}{\text{tg}^2\, 6x}$$

(*Nota*: Expressões do tipo sen kx, cos kx e tg kx devem ser interpretadas como sen (kx), cos (kx) e tg (kx), respectivamente.)

14 A torre Eiffel tem sua base em um piso plano e horizontal. De um ponto A desse piso, distante $108\sqrt{3}$ m do centro da base, vê-se o ponto mais alto da torre sob um ângulo de 60° com o piso. Calcule a altura da torre.

15 Em certo instante, o capitão de um navio vê o topo de um *iceberg* sob um ângulo de 30° com a superfície do mar. Navegando 100 m no sentido do *iceberg*, o capitão vê o topo sob um ângulo de 45° com a superfície do mar. Calcule a altura da parte emersa do *iceberg*, em relação ao nível do mar, desconsiderando a altura do navio.

16 (UFPI) Dois níveis de uma praça estão ligados por uma rampa de 3 m de comprimento e 30° de inclinação, conforme a figura abaixo.



Devem-se construir sobre a rampa 6 degraus de mesma altura. A altura de cada degrau será:

a) 0,20 m
b) 0,23 m
c) 0,25 m
d) 0,27 m
e) 0,28 m

Resolva os exercícios complementares 12 e 25 a 31.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Com auxílio de transferidor e de uma régua graduada, calcule os valores abaixo com aproximação de duas casas decimais. Lembre que, quanto maior o triângulo desenhado em seu caderno, mais precisos serão os valores do seno, do cosseno e da tangente.

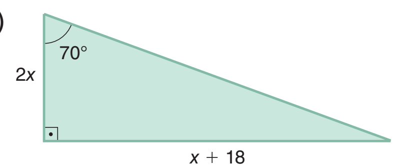
a) sen 35°, cos 35° e tg 35°

b) sen 44°, cos 44° e tg 44°

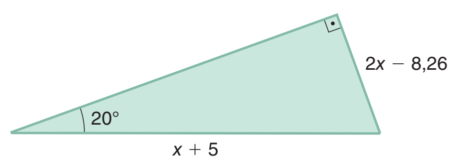
2 Calcule a medida desconhecida x, em cada um dos triângulos a seguir, usando a tabela:

	70°
sen	0,94
cos	0,34
tg	2,75

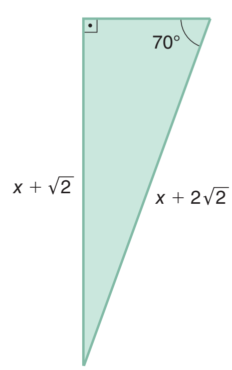
a)



b)

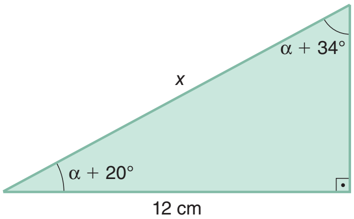


c)

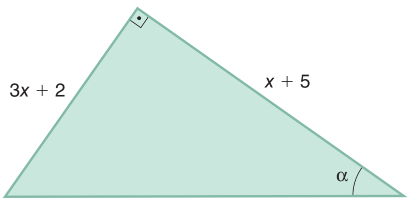


3 Na figura abaixo, α é uma medida em grau. Determine a medida x, em centímetro, usando, se necessário, os valores da tabela:

	52°
sen	0,79
cos	0,62
tg	1,28



4 Obtenha o valor de x na figura sabendo que $\text{sen}\ \alpha = 0{,}6$ e $\cos \alpha = 0{,}8$.



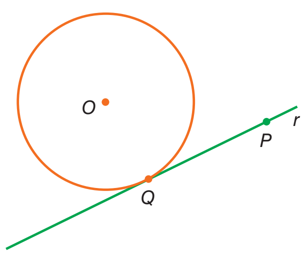
5 Demonstre que: "Se α é a medida de um ângulo agudo tal que $\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha = \cos^2 \alpha$ então $\text{tg}\ \alpha + 1 = \cos \alpha$".

6 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{4\ \text{tg}\ \alpha - 2}{\text{tg}^2\ \alpha}$ sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e $4\ \text{sen}\ \alpha = 3 \cos \alpha$.

7 Determine os valores x e y na tabela:

	72°	18°
sen	0,95	0,31
cos	x	y

8 Uma reta r passa por um ponto P e é tangente em Q a uma circunferência de centro O, conforme a figura abaixo. Calcule a medida do raio dessa circunferência sabendo que o ângulo $O\hat{P}Q$ mede α, com $\cos(90° - \alpha) = 0{,}3$ e $PO = 15$ cm.

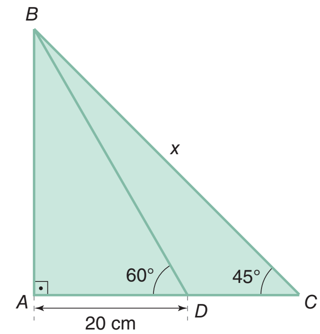


9 Calcule os valores de $\text{sen}\ \theta$ e $\text{tg}\ \theta$ sabendo que θ é a medida de um ângulo agudo e que $\cos \theta = \dfrac{1}{3}$.

10 A medida α de um ângulo agudo é tal que $\text{sen}\ \alpha = 0{,}6$. Calcule $\cos \alpha$ e $\text{tg}\ \alpha$.

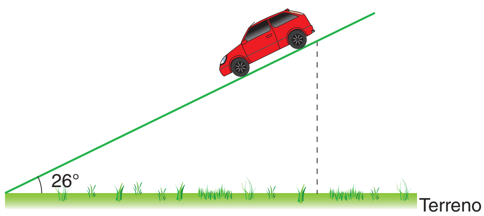
11 Um ângulo agudo tem medida β com $\text{tg}\ \beta = 3$. Calcule $\text{sen}\ \beta$ e $\cos \beta$.

12 Determine a medida x na figura:



Exercícios contextualizados

13 Um carro desce uma rampa plana que forma um ângulo de 26° com o terreno plano e horizontal.



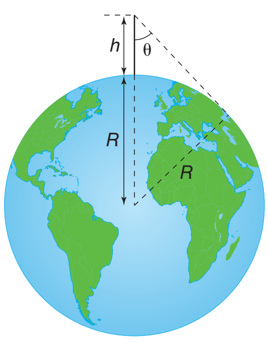
Responda às questões seguintes.

a) Quando o carro estiver a 2 m de altura em relação ao terreno, que distância percorrerá até o final da descida?

b) Quando o carro percorrer 4 m da rampa, quais serão os seus deslocamentos horizontal e vertical, em metro?

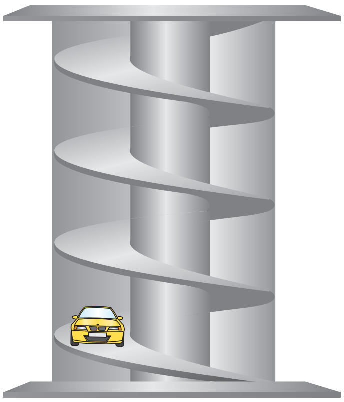
(Adote: $\text{sen}\ 26° = 0{,}43$; $\cos 26° = 0{,}89$ e $\text{tg}\ 26° = 0{,}48$.)

14 (FEI-SP) Um observador, do alto de uma torre vertical, de altura h, enxerga a linha do horizonte. Sabendo que o raio visual forma com a vertical da torre um ângulo de medida θ, determine, em função de h e θ, a medida do raio da Terra.

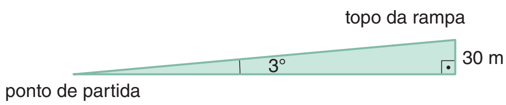


(*Sugestão*: O raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.)

15 No estacionamento de um *shopping center*, uma rampa espiralada de 50 m de comprimento liga o piso térreo ao piso superior. Sabendo que a rampa tem inclinação constante de 25° com a horizontal, em toda a sua extensão, determine a altura do piso superior em relação ao piso térreo.
(Adote: sen 25° = 0,42; cos 25° = 0,91; tg 25° = 0,47.)



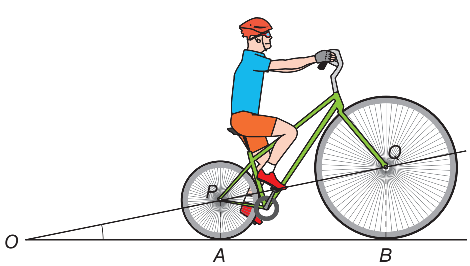
16 (Vunesp) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus à velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda. O tempo, em minuto, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é:

a) 2,5
b) 7,5
c) 10
d) 15
e) 30

17 (Uerj) Observe a bicicleta e a tabela trigonométrica.

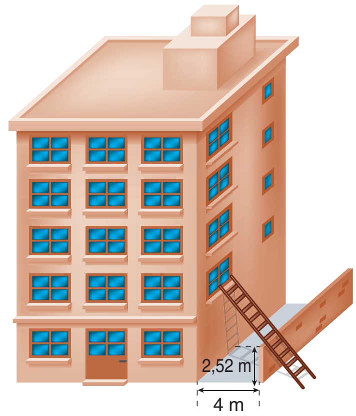


Ângulo (grau)	Seno	Cosseno	Tangente
10	0,174	0,985	0,176
11	0,191	0,982	0,194
12	0,208	0,978	0,213
13	0,225	0,974	0,231
14	0,242	0,970	0,249

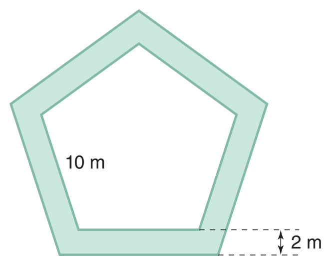
Os centros das rodas estão a uma distância *PQ* igual a 120 cm, e os raios *PA* e *QB* medem, respectivamente, 25 cm e 52 cm. De acordo com a tabela, o ângulo $A\hat{O}P$ tem o seguinte valor:

a) 10°
b) 12°
c) 13°
d) 14°

18 Um muro com 2,52 metros de altura está a 4 metros de uma parede de um edifício. Uma escada que está tocando a parede e apoiada no muro forma um ângulo de 40° com o chão plano e horizontal. Supondo que o muro e a parede sejam perpendiculares ao chão, determine o comprimento da escada.
(Adote: sen 40° = 0,64; cos 40° = 0,77; tg 40° = 0,84.)



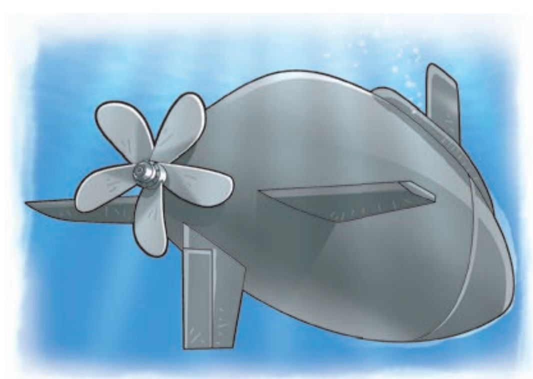
19 Uma praça tem a forma de um pentágono regular com 10 m de lado. Em volta dessa praça, foi construída uma calçada de largura constante 2 m, conforme mostra a figura:



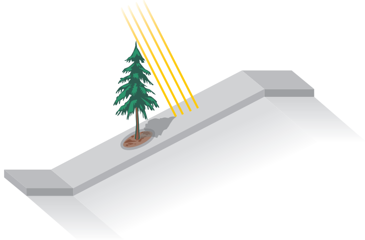
O perímetro externo dessa calçada é:

a) 9(6 + tg 54°)
b) 3(20 − 3 cos 54°)
c) 20(3 + 2 sen 36°)
d) 10(5 + 2 tg 36°)
e) 10(5 + 2 tg 54°)

20 A hélice de um submarino foi projetada com cinco pás de mesmo comprimento de modo que a distância entre os extremos móveis de duas pás consecutivas quaisquer seja 2 m. Calcule o comprimento de cada pá, ou seja, a distância do centro da hélice ao ponto extremo móvel da pá.
(Adote: sen 36° = 0,588, cos 36° = 0,809 e tg 36° = 0,727.)



21 Em uma calçada com 28° de inclinação em relação a um plano horizontal, há um pinheiro vertical de 3,80 m de altura. Calcule o comprimento da sombra do pinheiro projetada sobre a calçada, no instante em que os raios solares são perpendiculares à calçada.
(Adote: sen 28° = 0,47.)

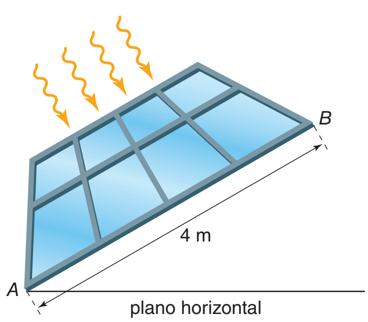


22 Um avião decolou em linha reta formando um ângulo de medida 28° com a pista plana e horizontal do aeroporto. Quando estava exatamente na vertical que contém a cabeceira da pista, sua altura era de 300 m em relação à pista. Calcule a distância entre a cabeceira da pista e o ponto do qual o avião decolou.
(Adote: sen 28° = 0,47; cos 28° = 0,88.)

23 Uma diagonal de um campo (retangular) de futebol forma 38° com uma linha lateral. Sabendo que essa linha lateral mede 100 m, calcule o comprimento da linha de fundo, isto é, a largura do campo.
(Adote: sen 38° = 0,65; cos 38° = 0,79.)

24 Um telhado plano, com 23° de inclinação em relação ao plano horizontal do piso, apoia-se em duas paredes verticais e paralelas. A parede maior tem 5,1 m de altura em relação ao plano do piso, e a menor tem 3 m de altura. Calcule a distância entre essas paredes. (Adote: sen 23° = 0,39; cos 23° = 0,92.)

25 Um painel solar *AB* de 4 m de comprimento inclina-se no máximo 30° em torno de um eixo horizontal que passa por *A*, conforme mostra a figura abaixo. Calcule a altura do ponto *B* em relação ao plano horizontal que passa por *A* quando a inclinação é máxima.



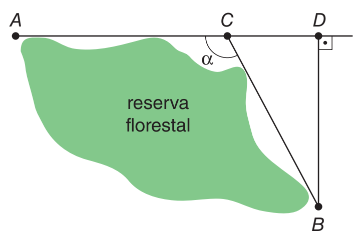
26 (UEPB) Duas avenidas retilíneas, *r* e *s*, cruzam-se segundo um ângulo de 30°. Um posto de gasolina A, situado na avenida s a 400 m do ponto de encontro das avenidas, encontra-se a que distância da avenida *r*?
a) 300 m
b) 250 m
c) 150 m
d) 250 m
e) 200 m

27 (Uerj) Um foguete é lançado com velocidade igual a 180 m/s e com ângulo de inclinação de 60° em relação ao solo. Suponha que sua trajetória seja retilínea e que sua velocidade seja constante ao longo de todo o percurso. Após 5 segundos, o foguete se encontra à altura de *x* metros, exatamente acima de um ponto no solo horizontal, a y metros do ponto de lançamento.
Os valores de *x* e y são, respectivamente:
a) 90 e $90\sqrt{3}$
b) $90\sqrt{3}$ e 90
c) 450 e $450\sqrt{3}$
d) $450\sqrt{3}$ e 450

28 Um penhasco tem sua base sobre uma planície horizontal. Sobre essa planície, tomam-se dois pontos, *D* e *C*, pertencentes a uma mesma semirreta de origem *B* na base do penhasco. Do ponto *D* vê-se o topo *T* do penhasco sob um ângulo de 30° com a planície; e do ponto *C* vê-se *T* sob um ângulo de 60° com a planície. Calcule a altura do penhasco sabendo que a distância *CD* é 100 m.

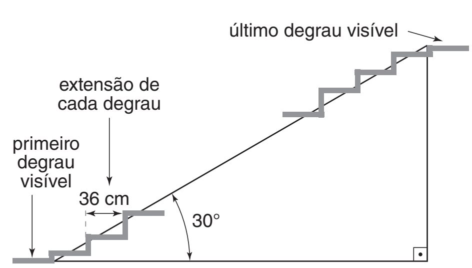
29 Um balão meteorológico sobe verticalmente a partir de um ponto *A* do solo plano e horizontal. A 20 m de altura, o balão é visto de um ponto *B* do chão sob um ângulo de 30° com o solo, e pouco depois é visto do mesmo ponto *B* sob um ângulo de 60°. Calcule a altura em que estava o balão quando foi visto sob o ângulo de 60°.

30 (UFG-GO) Uma empresa de engenharia deseja construir uma estrada ligando os pontos *A* e *B*, que estão situados em lados opostos de uma reserva florestal, como mostra a figura abaixo.



A empresa optou por construir dois trechos retilíneos, denotados pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, ambos com o mesmo comprimento. Considerando que a distância de *A* até *B*, em linha reta, é igual ao dobro da distância de *B* a *D*, o ângulo α, formado pelos dois trechos retilíneos da estrada, mede:
a) 110° b) 120° c) 130° d) 140° e) 150°

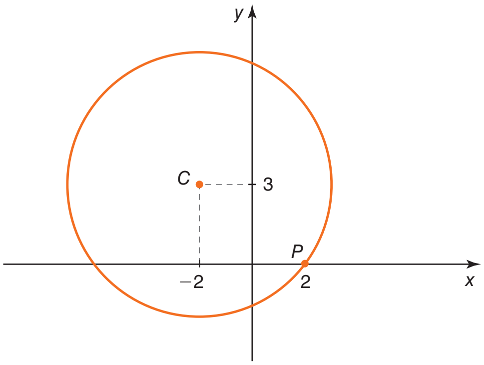
31 Uma escada rolante desliza sobre uma rampa que forma um ângulo de 30° com o plano horizontal. Quando toda a extensão do primeiro degrau visível aparece no plano do piso inferior, toda a extensão do último degrau é visível e está no plano do piso superior, conforme a figura abaixo. Sabendo que a extensão de cada degrau é 36 cm e que o tempo para um degrau se deslocar do piso inferior ao superior é de 1,2 min (à velocidade de 0,2 metro por segundo), calcule o número máximo possível de degraus visíveis que mostram toda a sua extensão. (Adote: $\sqrt{3} = 1{,}7$.)



Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 As quatro teclas reproduzidas ao lado movimentam um ponto na tela de um computador. A cada digitação das teclas 1 ou 3, o ponto se movimenta verticalmente 6 mm, para cima ou para baixo, respectivamente; e a cada digitação das teclas 2 ou 4, o ponto se movimenta horizontalmente 1,6 mm, para a esquerda ou para a direita, respectivamente. Indicando por P a posição inicial do ponto na tela e por Q a posição do ponto após digitar dez vezes a tecla 4 e duas vezes a tecla 1, calcule a distância, em milímetro, entre os pontos P e Q.

2 No plano cartesiano abaixo está representada a circunferência que passa pelo ponto P e tem centro C. Calcule o comprimento do raio dessa circunferência.



3 Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado durante 5 meses à taxa de juro composto de 2,2% ao mês. Com auxílio de uma calculadora científica, determine:

a) o montante acumulado ao final da aplicação;

b) o juro produzido por essa aplicação.

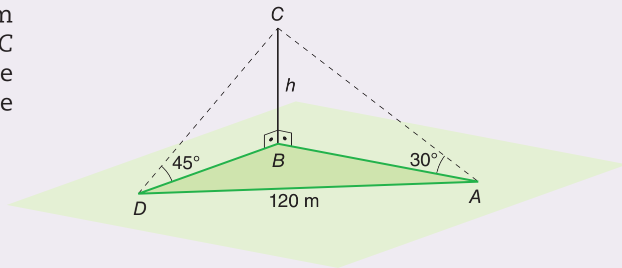
4 Sendo f uma função tal que $f(x + 4) = 3x - 1$, determine:

a) $f(10)$ **b)** $f(x)$

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

Uma torre BC tem sua base B em um terreno plano e horizontal. O ponto C é visto a partir dos pontos A e D desse terreno sob os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ de 30° e 45°, respectivamente.

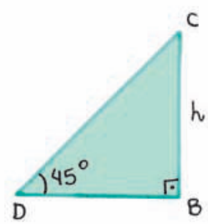


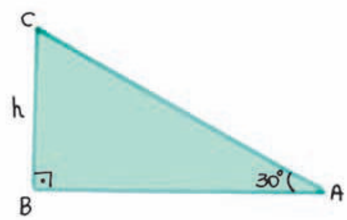
Sabendo que a distância entre A e D é 120 m, pode-se concluir que a altura da torre:

a) é igual a 60 m. **b)** pode ser menor que 40 m. **c)** pode ser maior que 60 m.

Resolução

Altura da torre: h





$tg\ 45° = \frac{h}{BD} \Rightarrow 1 = \frac{h}{BD}$

$\therefore BD = h$

$tg\ 30° = \frac{h}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{AB}$

$\therefore AB = h\sqrt{3}$

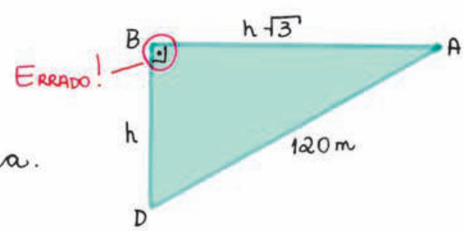
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD: ERRADO!

$(BD)^2 + (AB)^2 = (AD)^2 \Rightarrow h^2 + (h\sqrt{3})^2 = 120^2$

$\therefore 4h^2 = 14.400$

$h^2 = 3.600$

$h = 60$



Logo, a torre tem 60 m de altura.

Alternativa a.

Comentário

Os dados do enunciado do problema não permitem concluir que o triângulo ABD é retângulo, portanto, a resolução está incorreta.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

13

A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente

Neste capítulo, estudaremos a generalização das definições de seno, cosseno e tangente para ângulos de qualquer medida.

13.1 Radiano

Além do grau, existem outras medidas de ângulos e arcos, como o radiano.

13.2 Circunferência trigonométrica

Com base na circunferência trigonométrica, desenvolveremos os conceitos de Trigonometria deste capítulo.

13.3 Seno e cosseno de um arco trigonométrico

A partir da circunferência trigonométrica, estenderemos os conceitos de seno e cosseno para ângulos não agudos.

13.4 Tangente de um arco trigonométrico

Assim como fizemos para o seno e o cosseno, estenderemos o conceito de tangente para ângulos não agudos.

13.5 Equações trigonométricas

Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica, resolveremos equações trigonométricas em $\mathbb{R}$.

13.6 Inequações trigonométricas

Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica, resolveremos inequações trigonométricas em $\mathbb{R}$.

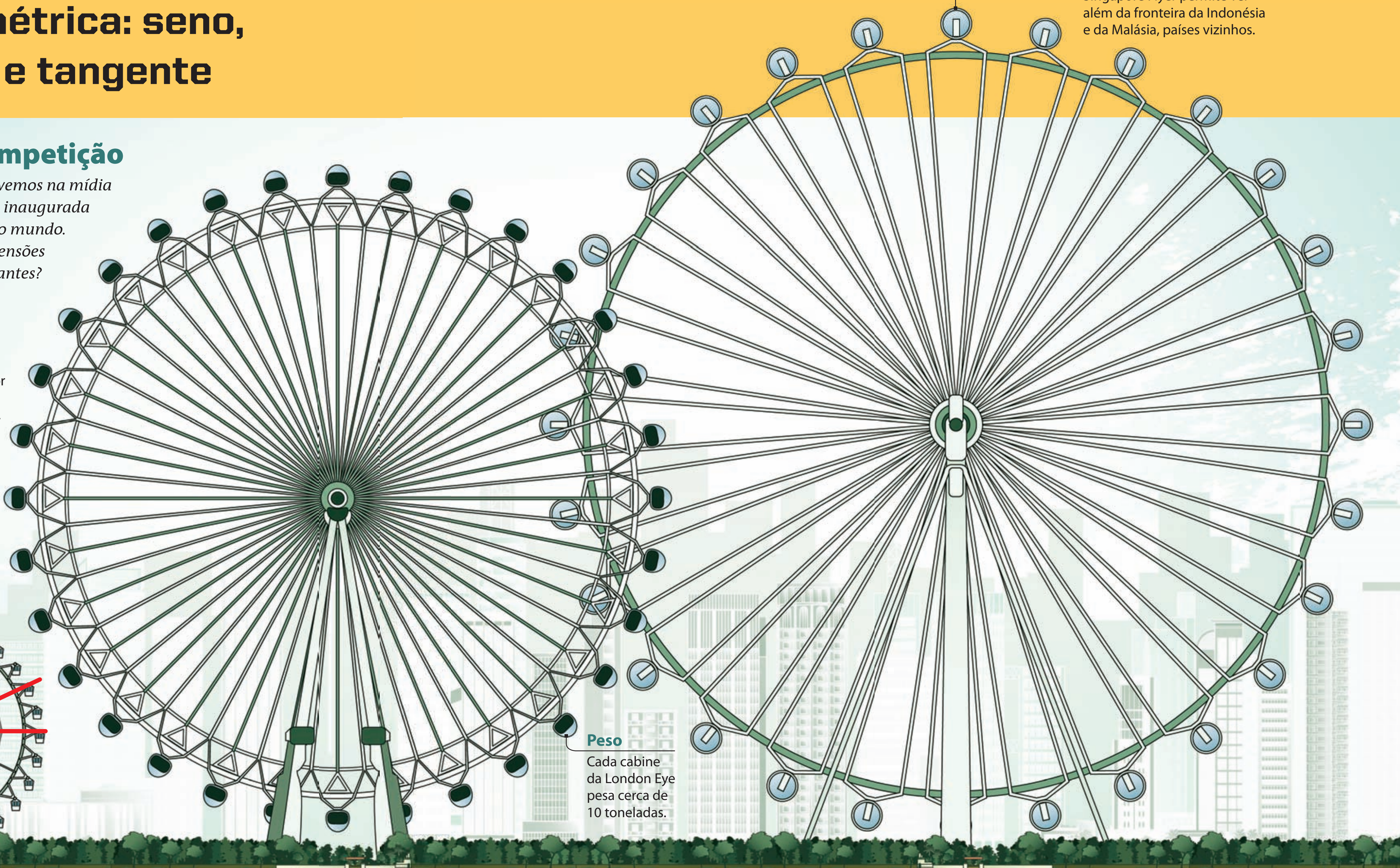
A roda da competição

De tempos em tempos, vemos na mídia que, mais uma vez, será inaugurada a maior roda-gigante do mundo. Você já pensou nas dimensões dessas arquiteturas gigantes? E em suas propriedades físicas e geométricas?

Já imaginou?

Pela Geometria, quanto maior o diâmetro da roda-gigante, maior será seu comprimento. Será que pela Física, quanto maior o comprimento da circunferência da roda-gigante, menor será a velocidade de giro?

Se a Singapore Flyer completasse uma volta em 4 minutos, como a Giranda Mundi, será que as pessoas sairiam pela tangente?



Giranda Mundi

- Localização: **São Paulo, Brasil**
- Altura: **40 metros**
- Ciclo: **4 minutos**
- Inauguração: **1997**
- Fabricação: **Holanda**
- Capacidade: **168** passageiros (28 cabines para 6 pessoas)

London Eye

- Localização: **Londres, Inglaterra**
- Altura: **135 metros**
- Ciclo: **30 minutos**
- Inauguração: **2000**
- Fabricação: **Holanda**
- Capacidade: **800 passageiros** (32 cabines para 25 pessoas)

Para pensar

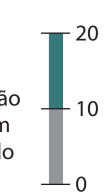
1. Na Giranda Mundi, qual é a medida α do ângulo central?
2. Calcule o comprimento da circunferência da London Eye.
3. A Singapore Flyer gira em que velocidade?

Singapore Flyer

- Localização: **Cingapura**
- Altura: **165 metros**
- Ciclo: **37 minutos**
- Inauguração: **2008**
- Fabricação: **China**
- Capacidade: **784 passageiros** (28 cabines para 28 pessoas)

1.000x

As rodas-gigantes nesta imagem estão representadas com cerca de 1/1.000 do seu tamanho real.



Seção 13.1

Radiano

Objetivos

- **Calcular** a medida de um arco em radiano.
- **Transformar** a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.

Termo e conceito

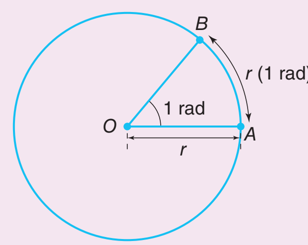
- radiano

No estudo da Geometria plana, é comum utilizar o **grau** como unidade de medida de ângulo e de arco de circunferência. Neste capítulo, vamos estudar outra unidade para medir arco e ângulo: o **radiano**, definido a seguir.

Seja $\widehat{AB}$ um arco contido em uma circunferência de raio r e centro O tal que o comprimento de $\widehat{AB}$ seja igual a r.

- Define-se a medida do arco $\widehat{AB}$ como **um radiano** (1 rad).
- Define-se a medida do ângulo $A\hat{O}B$ como 1 rad.

$$\text{m}(\widehat{AB}) = \text{m}(A\hat{O}B) = 1 \text{ rad}$$



Ou seja, um radiano (1 rad) é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

A medida da circunferência em radiano

Sabemos que uma circunferência mede 360°. Qual será sua medida em radiano?

Para responder a essa pergunta, consideremos uma circunferência cujo raio tenha medida r. Como o comprimento dessa circunferência é $2\pi r$, podemos obter sua medida x, em radiano, por meio de uma regra de três:

Medida do arco		Comprimento do arco
1 rad	——	r
x	——	$2\pi r$

Logo: $x = \dfrac{2\pi r}{r} \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$

Assim, concluímos:

A medida de uma circunferência é 2π rad.

Como $\pi \approx 3{,}14$, essa conclusão nos diz que o raio da circunferência cabe, aproximadamente, 6,28 vezes no comprimento da circunferência.

Transformações de unidades

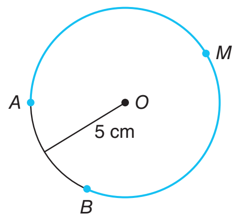
Dizemos que uma medida em radiano é equivalente a uma medida em grau se ambas forem medidas de um mesmo arco; por exemplo, 2π rad é equivalente a 360°, pois são medidas de um arco de uma volta completa. Consequentemente, temos:

π rad é equivalente a 180°

Essa equivalência permite transformar unidades, ou seja, se tivermos a medida de um arco em grau, podemos obter a medida desse arco em radiano e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Determinar a medida em radiano do arco $\widehat{AMB}$, de 20 cm, contido na circunferência de raio 5 cm, representados abaixo.



Resolução

Pela definição, nessa circunferência, cada arco de 1 rad tem 5 cm de comprimento. Assim, por meio de uma regra de três, determinamos a medida x, em rad, do arco $\widehat{AMB}$:

Medida do arco (rad)		Comprimento do arco (cm)
1	———	5
x	———	20

Logo: $x = \frac{20}{5}$ rad $= 4$ rad

(*Nota*: Dizer que o arco $\widehat{AMB}$ mede 4 rad é o mesmo que dizer que o comprimento do arco é o quádruplo do comprimento do raio.)

2 Determinar a medida, em radiano, equivalente a 150°.

Resolução

Lembrando que π rad é equivalente a 180°, basta resolver a regra de três:

radiano		grau
π	———	180
x	———	150

$\therefore\ x = \frac{150\pi}{180}$ radianos $\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ rad

Logo: $\frac{5\pi}{6}$ rad equivalem a 150°

3 Determinar a medida, em grau, equivalente a $\frac{\pi}{3}$ rad.

Resolução

radiano		grau
π	———	180
$\frac{\pi}{3}$	———	x

$\therefore\ x = \dfrac{180 \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi}$ graus $\Rightarrow x = 60°$

Logo: 60° equivalem a $\frac{\pi}{3}$ rad

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Calcule a medida, em radiano, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio.

2 Um ponto P da superfície terrestre está localizado a $\frac{\pi}{7}$ rad de latitude norte. Considerando que o raio da Terra mede 6.370 km, o menor arco que une o ponto P à linha do equador tem comprimento igual a:

a) 750π km
b) 910π km
c) 450π km
d) 623π km
e) 597π km

(*Nota*: Latitude de um ponto da superfície terrestre é a medida do menor arco de circunferência que liga esse ponto à linha do equador.)

3 (UFMA) No relógio da torre de uma igreja, o ponteiro maior mede 2 m.
Em quanto tempo a ponta móvel desse ponteiro percorre 5π metros?

a) 1 hora e 15 minutos
b) 1 hora e meia
c) 1 hora
d) meia hora
e) 45 minutos

4 Determine a medida, em radiano, equivalente a:
a) 30° b) 120° c) 225° d) 300° e) 240° f) 330°

5 Determine a medida, em grau, equivalente a:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad
b) $\frac{3\pi}{2}$ rad
c) $\frac{7\pi}{6}$ rad
d) $\frac{2\pi}{5}$ rad
e) $\frac{5\pi}{3}$ rad

6 Uma correia faz girar duas polias de raios 4 cm e 12 cm.

Quando a polia maior gira 240°, a menor gira:

a) $\frac{7\pi}{4}$ rad
b) $\frac{7\pi}{6}$ rad
c) $\frac{4\pi}{3}$ rad
d) 4π rad
e) 6π rad

Resolva os exercícios complementares 1, 2 e 87 a 98.

Circunferência trigonométrica

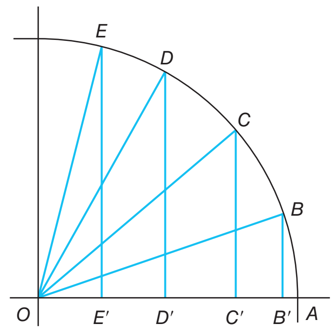
Objetivos

- **Associar** os pontos da circunferência trigonométrica a medidas de arcos.
- **Determinar** as medidas dos arcos côngruos a outro arco.
- **Associar** números reais aos pontos da circunferência trigonométrica.
- **Determinar** os pontos simétricos de um ponto dado, na circunferência trigonométrica.

Termos e conceitos

- **circunferência trigonométrica**
- **quadrante**
- **origem dos arcos**
- **arco trigonométrico**
- **arcos côngruos**

As razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo, não dependem do tamanho do triângulo, mas sim da medida do ângulo. Por isso, para construir uma tabela com essas razões, para vários ângulos, podemos considerar triângulos retângulos que tenham **hipotenusas de mesma medida** e fazer variar a medida do ângulo agudo. Assim, teremos tantos triângulos retângulos quantos quisermos. Na figura ao lado, estão representados alguns desses triângulos.



Note que:

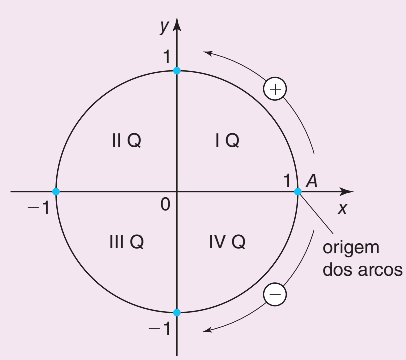
- Os vértices B, C, D e E pertencem a uma mesma circunferência, cujo raio é a medida da hipotenusa dos triângulos.
- Se adotarmos a medida da hipotenusa como unidade (1), o seno e o cosseno de um ângulo agudo de vértice O, em cada um desses triângulos, serão, respectivamente, a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo. Por exemplo, no triângulo retângulo BOB', com $m(B\hat{O}B') = \alpha$, temos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{BB'}{OB} = \frac{BB'}{1} = BB' \qquad \cos \alpha = \frac{OB'}{OB} = \frac{OB'}{1} = OB'$$

Ou seja, o seno e o cosseno do ângulo de medida α são o cateto oposto a α (BB') e o cateto adjacente a α (OB'), respectivamente, quando a hipotenusa é adotada como unidade (1).

Essas ideias levaram os matemáticos a definir as razões trigonométricas em uma circunferência, chamada de **circunferência trigonométrica**, na qual os conceitos de seno, cosseno e tangente são estendidos também para ângulos não agudos.

Em um plano, considere uma circunferência de raio r unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal. Essa estrutura, com as convenções a seguir, é chamada de **circunferência trigonométrica**.

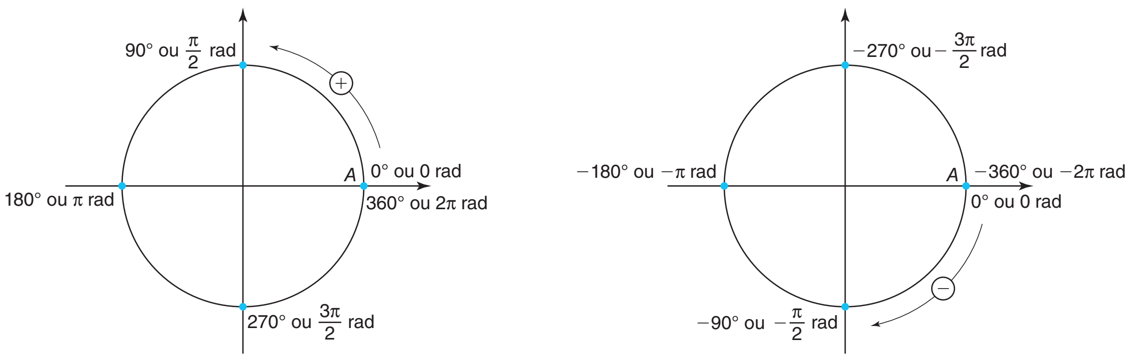


- O ponto $A(1, 0)$ é a **origem dos arcos** a serem medidos na circunferência.
- Se um arco for medido no sentido **horário**, então, ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal **negativo** ($-$).
- Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então, ao valor absoluto dessa medida, será atribuído o sinal **positivo** ($+$).
- Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas **quadrantes** (Q); esses quadrantes são numerados no sentido anti-horário, a partir do ponto A, conforme a figura.
- Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.

Arcos trigonométricos

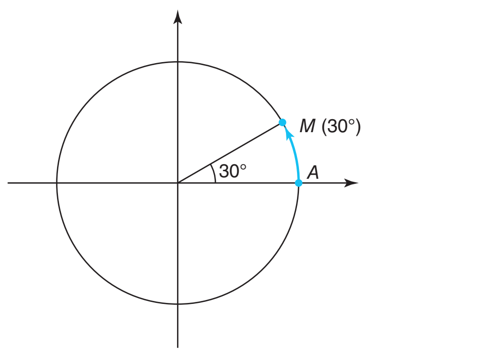
Aos pontos da circunferência trigonométrica associamos medidas em grau ou em radiano. Cada medida associada a um ponto M indica a medida do arco $\overset{\frown}{AM}$.

Exemplos



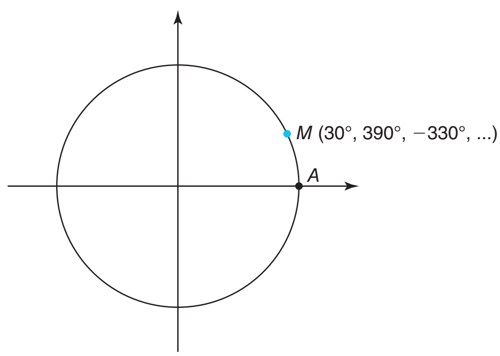
Arcos côngruos

Girando 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto A da circunferência trigonométrica abaixo, paramos no ponto M; logo, 30° é uma medida associada ao ponto M.



Há, porém, infinitas outras medidas associadas ao ponto M. Por exemplo:

- Girando uma volta completa mais 30°, no sentido anti-horário, a partir do ponto A, também paramos no ponto M. Logo, $360° + 30°$, isto é, 390° também é uma medida associada ao ponto M.
- Girando 330°, no sentido horário, a partir do ponto A, paramos no ponto M. Logo, $-330°$ também é uma medida associada ao ponto M.

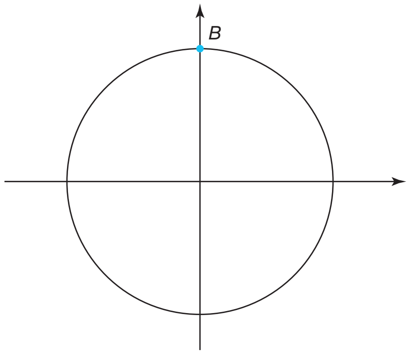


Arcos trigonométricos que têm a mesma extremidade são chamados de **arcos côngruos**.

Se α e β são medidas de arcos côngruos, indicamos: $\alpha \equiv \beta$ (lemos: "α é côngruo a β").

Assim, no exemplo anterior, temos: $30° \equiv 390° \equiv -330°$.

4 Calcular as medidas x, em grau, associadas ao ponto B da circunferência trigonométrica abaixo, nas quatro primeiras voltas positivas ($0° \leqslant x < 1.440°$).



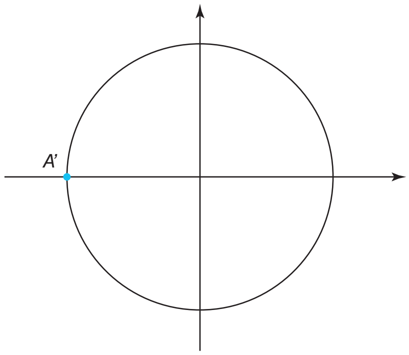
Resolução

A medida em grau associada ao ponto B na 1ª volta positiva é 90°. Assim, as outras medidas associadas ao ponto B são:

- na 2ª volta positiva:
  $90° + 360° = 450°$
- na 3ª volta positiva:
  $90° + 2 \cdot 360° = 810°$
- na 4ª volta positiva:
  $90° + 3 \cdot 360° = 1.170°$

Logo, as medidas dos arcos côngruos procuradas são: 90°, 450°, 810° e 1.170°

5 Determinar as medidas x, em radiano, associadas ao ponto A' da circunferência trigonométrica a seguir, nas quatro primeiras voltas positivas ($0 \leqslant x < 8\pi$).



Resolução

A medida em radiano associada ao ponto A' na 1ª volta positiva é π. Assim, as outras medidas associadas ao ponto A' são:

- na 2ª volta positiva:
  $\pi + 2\pi = 3\pi$
- na 3ª volta positiva:
  $\pi + 2 \cdot 2\pi = 5\pi$
- na 4ª volta positiva:
  $\pi + 3 \cdot 2\pi = 7\pi$

Logo, as medidas dos arcos côngruos procurados são: π, 3π, 5π e 7π

(*Nota*: Ao indicar a medida de um arco trigonométrico em radiano, não é preciso explicitar a unidade rad; basta escrever o número real associado ao ponto extremo do arco. Explicaremos o porquê dessa convenção na página 455.)

6 Calcular a medida x do arco da 1ª volta positiva ($0° \leqslant x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.140°.

Resolução

Basta desconsiderar do arco de 1.140° todas as voltas completas. Para isso, dividimos 1.140° por 360°:

$$\begin{array}{r|l} 1.140° & 360° \\ \hline 60° & 3 \end{array}$$

Assim, $1.140° = 3 \cdot 360° + 60°$, ou seja, o arco de 1.140° tem três voltas completas e mais 60°. Logo, desconsiderando as voltas completas, obtemos a medida x do arco côngruo ao arco de 1.140° na 1ª volta positiva: $x = 60°$.

7 Determinar a medida x do arco da 1ª volta positiva ($0 \leqslant x < 2\pi$) que possui a mesma extremidade dos arcos abaixo:

a) $\dfrac{17\pi}{2}$ rad

b) $\dfrac{19\pi}{3}$ rad

Resolução

Como no exercício anterior, basta desconsiderar todas as voltas completas de cada arco. Para isso, vamos transformar a medida de cada arco em uma soma de duas parcelas tal que uma delas represente o total de voltas completas contidas no arco. Isto é:

a) $$\frac{17\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underbrace{8\pi}_{\text{quatro voltas completas}} + \frac{\pi}{2}$$

Desconsiderando as voltas completas, concluímos que $\dfrac{17\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Assim, a medida x procurada é $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \underbrace{6\pi}_{\text{três voltas completas}} + \frac{\pi}{3}$$

Desconsiderando as voltas completas, concluímos que $\dfrac{19\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}$. Assim, a medida x procurada é $\dfrac{\pi}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7 A medida de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ é 50°. Determine todas as medidas *x* associadas à extremidade *M*, sob cada uma das condições:

a) $0° \leq x < 1.080°$ **b)** $-720° \leq x < 0°$

8 A medida de um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ é $\frac{6\pi}{7}$ rad.

Encontre todas as medidas *x* associadas à extremidade *M*, sob cada uma das condições:

a) $0 \leq x < 6\pi$ **b)** $-4\pi \leq x < 0$

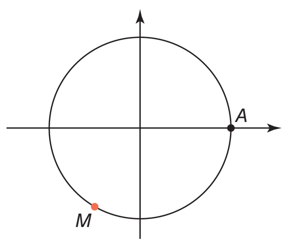
9 Calcule a medida do arco trigonométrico, da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de medida:

a) 2.923° **d)** $-400°$ **g)** $-\frac{\pi}{13}$ rad

b) 1.972° **e)** $\frac{45\pi}{11}$ rad **h)** $-\frac{18\pi}{5}$ rad

c) $-40°$ **f)** $\frac{38\pi}{5}$ rad

10 O ponto *M*, representado abaixo, é extremidade de um arco trigonométrico de 2.040°.



Determine a medida *x* associada ao ponto *M*:

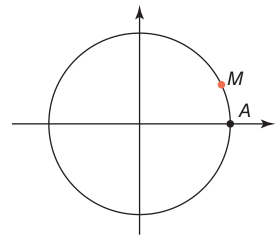
a) com $0° \leq x < 360°$, isto é, na 1ª volta do sentido positivo.

b) com $360° \leq x < 720°$, isto é, na 2ª volta do sentido positivo.

c) com $720° \leq x < 1.080°$, isto é, na 3ª volta do sentido positivo.

d) com $-360° \leq x < 0°$, isto é, na 1ª volta do sentido negativo.

11 O ponto *M*, representado abaixo, é extremidade de um arco trigonométrico de $\frac{121\pi}{6}$ rad.



Encontre a medida *x* associada ao ponto *M*:

a) com $x \in [0, 2\pi[$ **c)** com $x \in [4\pi, 6\pi[$

b) com $x \in [2\pi, 4\pi[$ **d)** com $x \in [-2\pi, 0[$

12 (Unicamp-SP) O ponteiro de um relógio de medição funciona acoplado a uma engrenagem de modo que, a cada volta completa da engrenagem, o ponteiro dá $\frac{1}{4}$ de volta em um mostrador graduado de 0° a 360°. No início da medição, o ponteiro encontra-se na posição 0°. Quantos graus indicará o ponteiro quando a engrenagem tiver completado 4.135 voltas?

a) 270° **b)** 160° **c)** 220° **d)** 140° **e)** 20°

Resolva os exercícios complementares 3 a 5.

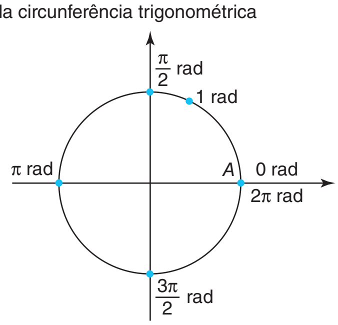
Associando números reais aos pontos da circunferência trigonométrica

Vamos considerar a correspondência que associa cada medida em radiano ao número real que a representa. Por exemplo, associamos:

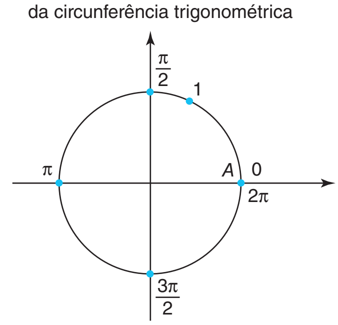
- à medida 0 rad o número real 0;
- à medida 1 rad o número real 1;
- à medida $\frac{\pi}{2}$ rad o número real $\frac{\pi}{2}$;
- à medida π rad o número real π;
- à medida *x* rad o número real *x*.

Dessa forma, associamos a cada número real um ponto da circunferência trigonométrica:

Medidas em radiano associadas a pontos da circunferência trigonométrica



Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica



Note que a cada ponto da circunferência trigonométrica estão associados infinitos números reais. Por exemplo, considerando as infinitas voltas que podemos girar nos dois sentidos, horário e anti-horário, o ponto A da circunferência trigonométrica anterior é extremidade dos arcos de medidas:

$$\dots\ -4\pi \text{ rad},\ -2\pi \text{ rad},\ 0 \text{ rad},\ 2\pi \text{ rad},\ 4\pi \text{ rad},\ 6\pi \text{ rad},\ 8\pi \text{ rad},\ \dots$$

Logo, ao ponto A estão associados os infinitos números reais:

$$\dots\ -4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi,\ \dots$$

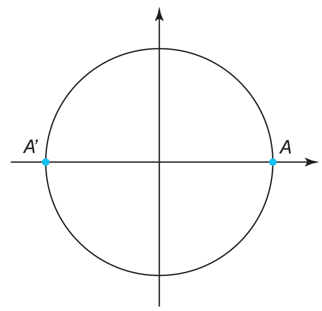
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:

$$x = 0 + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ ou, simplesmente, } x = k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

É importante ressaltar que existem infinitas expressões diferentes que podem representar os números reais associados ao ponto A. Basta adicionar a qualquer termo da sequência ... -4π, -2π, 0, 2π, 4π, 6π, 8π, ... um múltiplo de 2π; por exemplo: $x = 6\pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8 Obter uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos A ou A' da circunferência trigonométrica ao lado.



Resolução

As medidas algébricas, em radiano, dos infinitos arcos com extremidades em A ou A' são:

$$\dots,\ -3\pi \text{ rad},\ -2\pi \text{ rad},\ -\pi \text{ rad},\ 0 \text{ rad},\ \pi \text{ rad},\ 2\pi \text{ rad},\ 3\pi \text{ rad},\ \dots$$

Logo, os infinitos números reais associados a A ou A' são:

$$\dots,\ -3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \dots$$

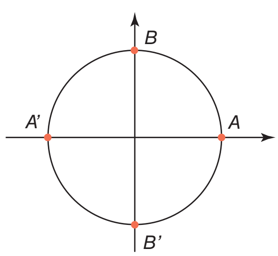
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é π, podemos representar todos esses números reais por:

$$x = 0 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}, \text{ ou, simplesmente, } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Qualquer expressão que represente a soma de um termo dessa sequência com um múltiplo de π pode ser dada como resposta; por exemplo, $x = \pi + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 A circunferência trigonométrica abaixo está dividida em quatro arcos congruentes pelos pontos A, B, A' e B'.



Obtenha:

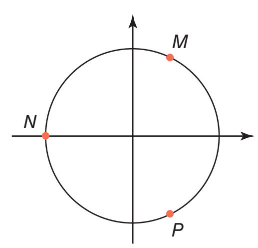
a) uma expressão que represente todos os números reais associados ao ponto A';

b) uma expressão que represente todos os números reais associados ao ponto B;

c) uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos B ou B';

d) uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos A, B, A' ou B'.

14 A circunferência trigonométrica a seguir está dividida em três arcos congruentes pelos pontos M, N e P.



a) Obtenha uma expressão que represente todos os números reais associados aos pontos M, N ou P.

b) Existe outra expressão, além daquela apresentada no item **a**, que represente todos os números reais associados aos pontos M, N ou P? Se existir, apresente uma.

15 A bateria de um relógio analógico durou 2.400 horas e 20 minutos. Nesse período:

a) quantos graus girou o ponteiro das horas?

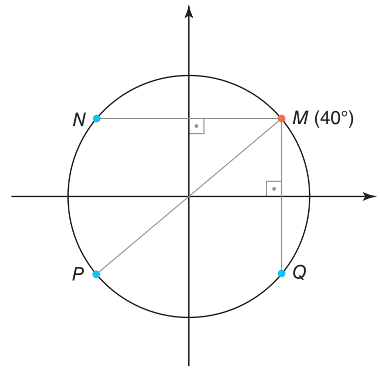
b) quantos radianos girou o ponteiro dos minutos?

c) se o relógio começou a funcionar à meia-noite, que horas estava marcando quando parou de funcionar?

Resolva o exercício complementar 6.

Simetrias

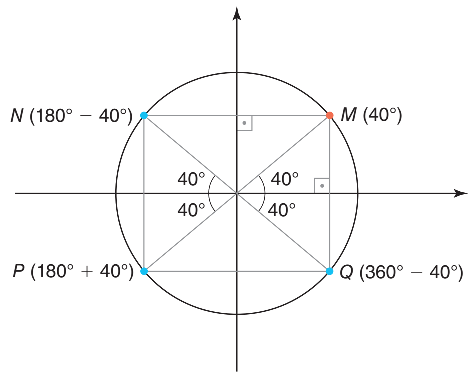
É de grande utilidade saber relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso ajudará, mais adiante, a calcular senos, cossenos, tangentes etc. desses arcos.



Para exemplificar, consideremos o ponto *M* da circunferência trigonométrica associado à medida 40°. Pelo ponto *M*, vamos traçar três retas: as perpendiculares aos eixos das ordenadas e das abscissas e a que passa pela origem do sistema, conforme mostra a figura ao lado.

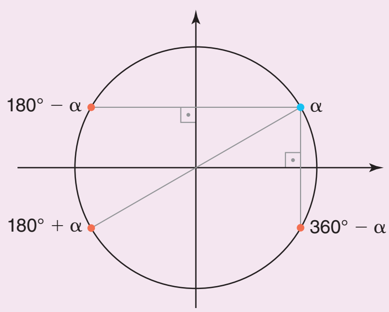
Os pontos *N*, *P* e *Q* são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto *M*. Vamos determinar as medidas associadas a esses pontos considerando apenas a 1ª volta no sentido anti-horário. Para isso, desenhamos o retângulo *MNPQ* e suas diagonais, conforme a figura ao lado. Por congruência de triângulos, obtemos:

- medida associada ao ponto *N*: $180° - 40° = 140°$;
- medida associada ao ponto *P*: $180° + 40° = 220°$;
- medida associada ao ponto *Q*: $360° - 40° = 320°$.

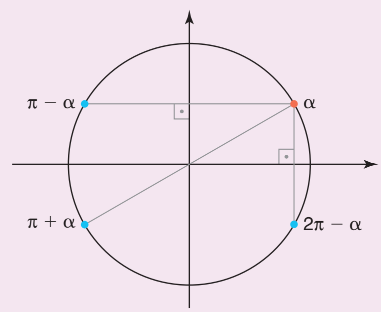


Raciocinando de maneira análoga para qualquer arco trigonométrico de medida α do primeiro quadrante, temos:

Sendo α uma medida em grau:

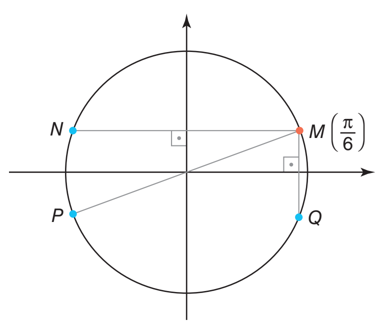


Sendo α uma medida em radiano:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

9 O ponto M da circunferência trigonométrica ao lado está associado à medida $\frac{\pi}{6}$ rad. Determinar as medidas associadas aos pontos N, P e Q na 1ª volta positiva.



Resolução

Pelas relações anteriores, temos:

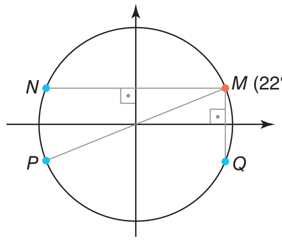
- medida associada ao ponto N: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
- medida associada ao ponto P: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
- medida associada ao ponto Q: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Logo: $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

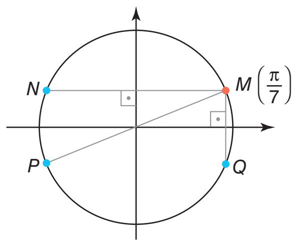
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Em cada um dos itens abaixo, encontre as medidas associadas aos pontos N, P e Q na 1ª volta positiva da circunferência trigonométrica.

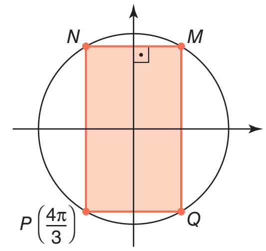
a)



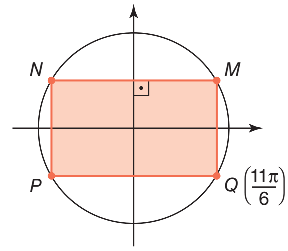
b)



e)

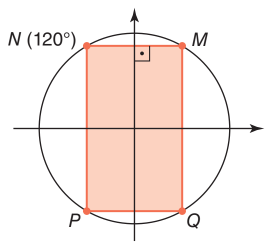


f)

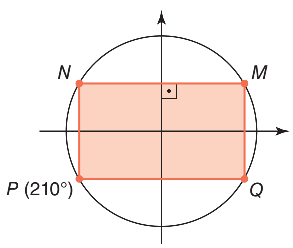


17 Determine as medidas associadas aos vértices dos retângulos inscritos nas circunferências trigonométricas na 1ª volta positiva.

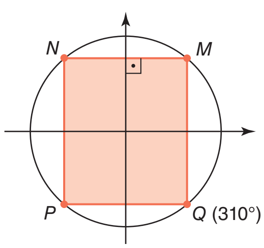
a)



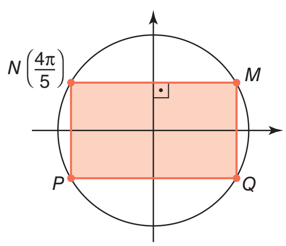
b)



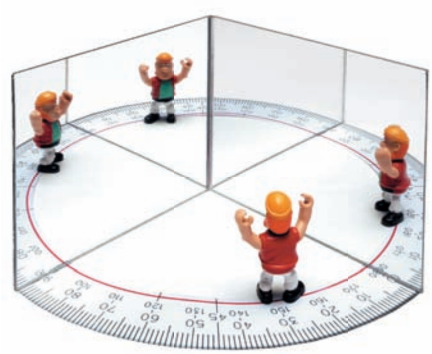
c)



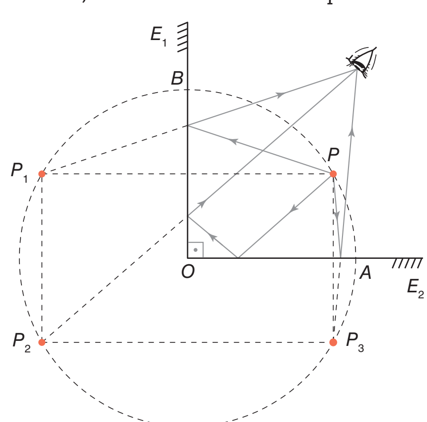
d)



18 Considere dois espelhos planos adjacentes, E_1 e E_2, cujas superfícies refletoras formam entre si um ângulo de 90°.



Quando um ponto P, luminoso ou iluminado, é colocado no interior do ângulo de 90°, as várias reflexões da luz proveniente de P dão origem à formação de três imagens, P_1, P_2 e P_3, tal que P e suas imagens pertencem a uma mesma circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$, conforme mostra o esquema a seguir.



Sabendo que a medida do arco $\overset{\frown}{AP_1}$, no sentido anti-horário, é 148°, calcule a medida dos arcos $\overset{\frown}{AP}$, $\overset{\frown}{AP_2}$ e $\overset{\frown}{AP_3}$, nesse mesmo sentido.

Resolva os exercícios complementares 7 e 8.

Seno e cosseno de um arco trigonométrico

Objetivos

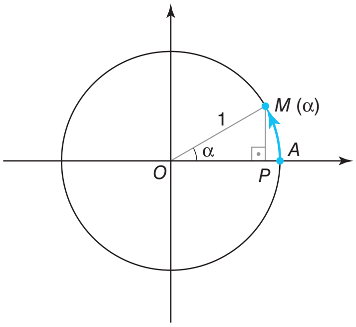
- **Determinar** o seno e o cosseno de um arco trigonométrico de qualquer quadrante.
- **Relacionar** o seno e o cosseno de um arco com o seno e o cosseno de seus arcos correspondentes.
- **Aplicar** a relação fundamental da Trigonometria.

Termos e conceitos

- seno
- cosseno

Com base na ideia de seno e cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, vamos estender o conceito de seno e cosseno para um arco trigonométrico.

Para entender a transição do triângulo retângulo para a circunferência trigonométrica, considere um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$.



Como o raio da circunferência trigonométrica mede 1 e a medida do ângulo central $M\hat{O}A$ é igual à medida do arco $\overset{\frown}{AM}$, em grau, temos no triângulo retângulo *OMP*:

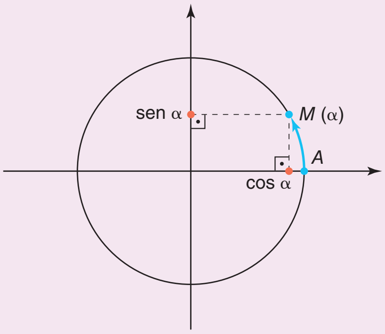
$$\cos\alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{PM}{1} = PM$$

Portanto, cos α e sen α são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto *M*.

Ampliamos esse conceito para qualquer arco trigonométrico pela definição a seguir.

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, chamam-se **cosseno** e **seno** de α a abscissa e a ordenada do ponto *M*, respectivamente.



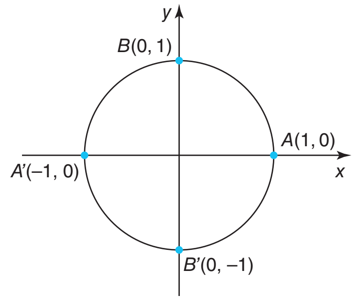
cos α = abscissa de *M*

sen α = ordenada de *M*

Assim, na circunferência trigonométrica, podemos nos referir ao eixo das abscissas como eixo dos cossenos e ao eixo das ordenadas como eixo dos senos.

Exemplo

Vamos determinar o cosseno e o seno de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°. Para isso, marcamos na circunferência trigonométrica os pontos A, B, A' e B' associados a essas medidas, conforme a figura ao lado.



Como a abscissa e a ordenada de cada ponto da circunferência trigonométrica representam, respectivamente, o cosseno e o seno do arco com extremidade no ponto, temos:

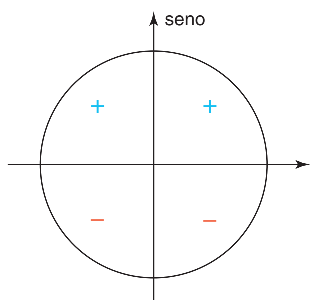
$\cos 0° = 1$	$\text{sen } 0° = 0$
$\cos 90° = 0$	$\text{sen } 90° = 1$
$\cos 180° = -1$	$\text{sen } 180° = 0$
$\cos 270° = 0$	$\text{sen } 270° = -1$
$\cos 360° = 1$	$\text{sen } 360° = 0$

Como qualquer coordenada de um ponto da circunferência trigonométrica é no máximo 1 e no mínimo −1, concluímos:

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$$

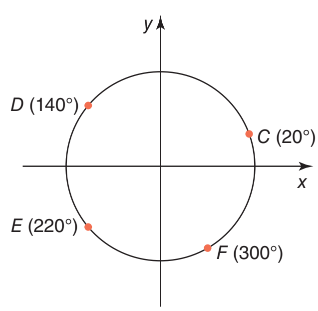
Variação de sinal do seno

Vimos que o seno de um arco é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e os do 4º quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o seno:



Exemplo

Os arcos trigonométricos de 20°, 140°, 220° e 300° têm extremidades nos pontos C, D, E e F, respectivamente, conforme mostra a figura:

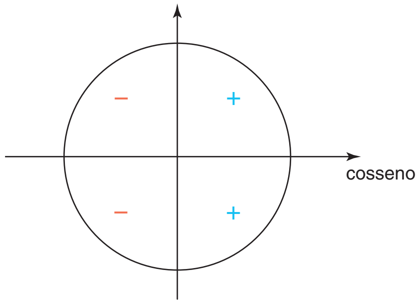


Observando que:

- C e D são pontos do 1º e do 2º quadrante e sen 20° e sen 140° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 20° e sen 140° positivos;
- E e F são pontos do 3º e do 4º quadrante e sen 220° e sen 300° são as ordenadas desses pontos, respectivamente, temos sen 220° e sen 300° negativos.

Variação de sinal do cosseno

Vimos que o cosseno de um arco é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e os do 3º quadrante, temos o seguinte esquema de sinais para o cosseno:



Exemplo

Na figura do exemplo anterior, observando que:

- *C* e *F* são pontos do 1º e do 4º quadrante e cos 20° e cos 300° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 20° e cos 300° positivos;
- *D* e *E* são pontos do 2º e do 3º quadrante e cos 140° e cos 220° são as abscissas desses pontos, respectivamente, temos cos 140° e cos 220° negativos.

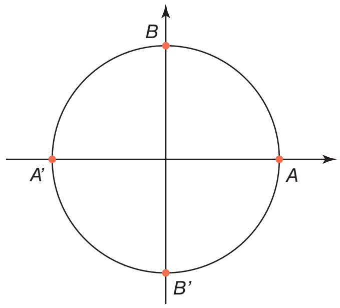
Tabela trigonométrica dos arcos notáveis

Pela igualdade entre as medidas do arco e do ângulo central que determina esse arco na circunferência trigonométrica, concluímos que o seno (ou cosseno) de um ângulo central é igual ao seno (ou cosseno) do arco determinado por esse ângulo na circunferência trigonométrica. Assim, a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) continua válida se considerarmos essas medidas como medidas de arcos trigonométricos.

	30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad	45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad	60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

19 A figura abaixo representa a circunferência trigonométrica.



Calcule:

a) cos 0

b) sen 0

c) $\cos \frac{\pi}{2}$

d) $\text{sen} \frac{\pi}{2}$

e) $\cos \pi$

f) $\text{sen}\ \pi$

g) $\cos \frac{3\pi}{2}$

h) $\text{sen} \frac{3\pi}{2}$

i) $\cos 2\pi$

j) $\text{sen}\ 2\pi$

k) cos 720°

l) sen 450°

m) sen 990°

n) cos 810°

o) sen (−270°)

p) cos (−180°)

q) $\cos 12\pi$

r) $\cos 11\pi$

s) $\text{sen} \frac{21\pi}{2}$

t) $\text{sen} \frac{23\pi}{2}$

u) $\text{sen}(-\pi)$

v) $\cos(-3\pi)$

20 Calcule o valor numérico da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}\ x - \cos 2x + \cos 3x}{\text{sen}\ 3x - \cos x} \text{ para } x = 90°$$

21 Sendo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen } 2x + \cos 3x$, calcule:

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) $f(\pi)$

c) $\dfrac{f(0) + f(2\pi)}{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

22 Calcule o valor numérico da expressão:

$E = \dfrac{\text{sen } x + \cos 2x}{\text{sen } 3x}$ para $x = \dfrac{\pi}{6}$ rad

23 Sendo a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$, determine o valor máximo e o valor mínimo de f.

24 (Uece) Assinale a opção verdadeira:

a) $\text{sen } 17° < \cos 74°$

b) $\text{sen } 74° < \cos 17°$

c) $\cos 37° = \cos 143°$

d) $\text{sen } 31° > \text{sen } 150°$

25 Uma partícula se move sobre uma circunferência de centro O e raio de 5 centímetros, no sentido anti-horário e com velocidade constante, completando uma volta a cada 3 segundos. Um sistema cartesiano ortogonal de origem O é fixado no plano da trajetória dessa partícula, e a unidade adotada nos eixos é o centímetro. Considerando que no instante inicial $(t = 0)$ a partícula passa pelo ponto $(5, 0)$, a função que expressa a abscissa da posição da partícula em cada instante t, em segundo, é:

a) $f(t) = 3 \cos \dfrac{5\pi t}{3}$

b) $f(t) = 5 \cos \dfrac{2\pi t}{3}$

c) $f(t) = 3 \cos \dfrac{3\pi t}{2}$

d) $f(t) = 2 \cos \dfrac{5\pi t}{3}$

e) $f(t) = 5 \cos \dfrac{3\pi t}{2}$

26 Na questão anterior, qual das funções abaixo expressa a ordenada da posição da partícula em cada instante t, em segundo?

a) $g(t) = 2 \text{ sen } \dfrac{5\pi t}{3}$

b) $g(t) = \text{sen } \dfrac{7\pi t}{4}$

c) $g(t) = \text{sen } 2\pi t$

d) $g(t) = 5 \text{ sen } \dfrac{2\pi t}{3}$

Resolva os exercícios complementares 9 a 13.

Redução ao 1º quadrante

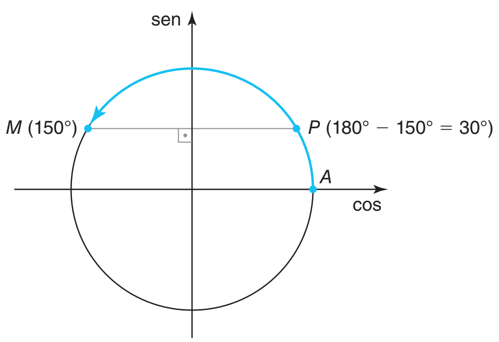
A partir do seno ou cosseno de um arco do 1º quadrante, podemos determinar o seno ou o cosseno de um arco simétrico do 2º, do 3º ou do 4º quadrante. Nos exercícios resolvidos a seguir, utilizaremos a tabela trigonométrica dos arcos notáveis para determinar senos e cossenos desses arcos simétricos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, calcular sen 150° e cos 150°.

Resolução

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2º quadrante. Traçando por M a reta perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º quadrante, conforme mostra a figura:



Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas. Logo:

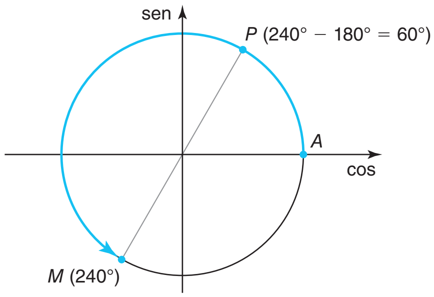
$\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar sen 240° e cos 240°.

Resolução

A extremidade M do arco de 240° pertence ao 3º quadrante. Traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º quadrante:



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas. Logo:

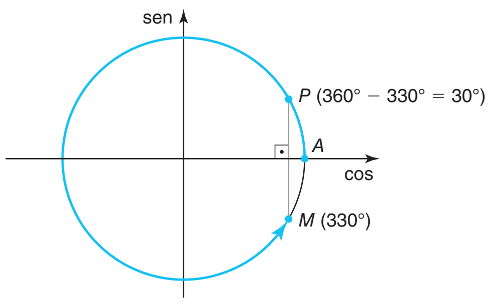
$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

12 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar sen 330° e cos 330°.

Resolução

A extremidade M do arco de 330° pertence ao 4º quadrante. Traçando por M a perpendicular ao eixo dos cossenos, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º quadrante:



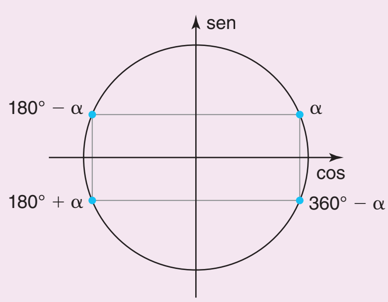
Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais. Logo:

$$\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

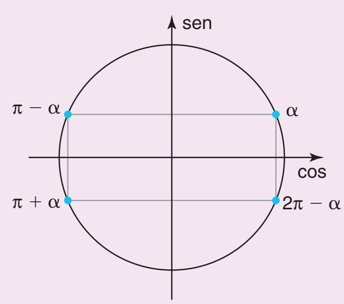
Raciocinando de maneira análoga para qualquer arco trigonométrico de medida α do 1º quadrante, temos as seguintes relações:

Se α é uma medida em grau:



$$\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha$$
$$\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\text{sen } (180° + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$
$$\cos (180° + \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\text{sen } (360° - \alpha) = -\text{sen } \alpha$$
$$\cos (360° - \alpha) = \cos \alpha$$

Se α é uma medida em radiano:



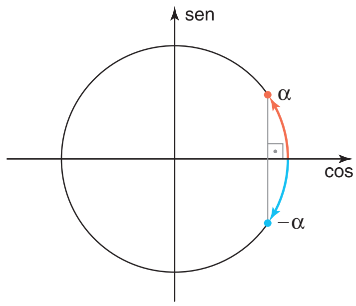
$$\text{sen } (\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$$
$$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\text{sen } (\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$
$$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha$$
$$\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

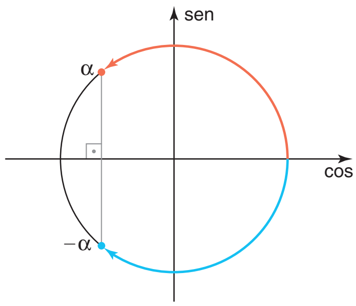
Nota:

Essas relações continuam válidas mesmo que α não seja uma medida do 1º quadrante. Verifique você mesmo.

Arcos de medidas opostas

Arcos de medidas opostas, α e $-\alpha$, têm extremidades simétricas em relação ao eixo das abscissas, como mostra cada uma das figuras abaixo.





Dessa simetria, concluímos que:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$$

Exemplos

a) $\cos(-60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen}(-135°) = -\operatorname{sen} 135° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

13 Sendo α uma medida em grau, com $\cos\alpha \neq 0$, simplificar a expressão:

$$E = \frac{\cos(360° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)}{\cos(180° + \alpha)}$$

Resolução

Sabemos que $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ e $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$.
Logo:

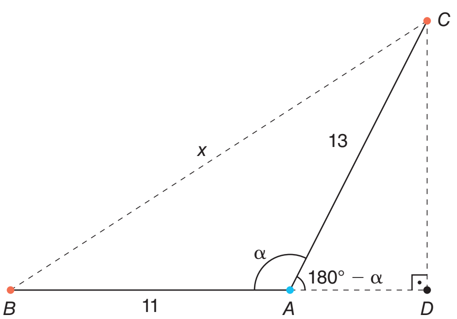
$$E = \frac{\cos(360° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - (-\cos\alpha)}{-\cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{-\cos\alpha} = -2$$

14 De um observatório astronômico A da Terra, um astrônomo estuda duas estrelas, B e C, constatando que o ângulo obtuso $B\hat{A}C$ mede α, com $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$, que $AB = 11$ anos-luz e $AC = 13$ anos-luz. Com esses dados, o cientista calculou a distância entre as estrelas B e C. Qual é essa distância em ano-luz?

Resolução

Indicando por x a distância procurada e por D a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, esquematizamos:



Assim, temos:

$$\begin{cases} \cos(180° - \alpha) = \dfrac{AD}{13} \\ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{5}{13} \end{cases}$$

Logo: $\dfrac{AD}{13} = \dfrac{5}{13} \Rightarrow AD = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos ACD e BCD, obtemos:

$13^2 = 5^2 + (CD)^2 \Rightarrow CD = 12$

e

$x^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow x = 20$

Portanto, a distância entre as estrelas B e C é igual a 20 anos-luz.

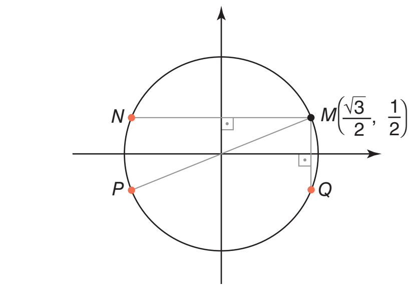
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, calcule:

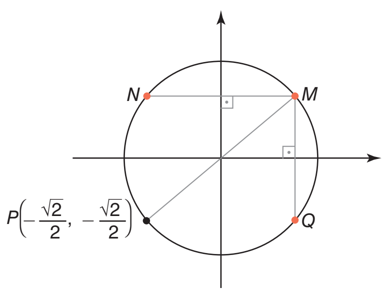
a) sen 120°
b) cos 120°
c) sen 210°
d) cos 210°
e) sen 300°
f) cos 300°

28 Em cada um dos itens a seguir, determine as coordenadas dos pontos assinalados.

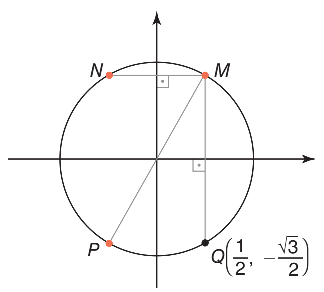
a)



b)



c)



29 Consultando o exercício anterior, calcule:

a) sen $\frac{2\pi}{3}$
b) cos $\frac{2\pi}{3}$
c) sen $\frac{7\pi}{6}$
d) cos $\frac{7\pi}{6}$
e) sen $\frac{5\pi}{3}$
f) sen $\frac{3\pi}{4}$
g) cos $\frac{3\pi}{4}$
h) sen $\frac{5\pi}{4}$
i) cos $\frac{5\pi}{4}$
j) sen $\frac{7\pi}{4}$

30 Calcule o valor de:

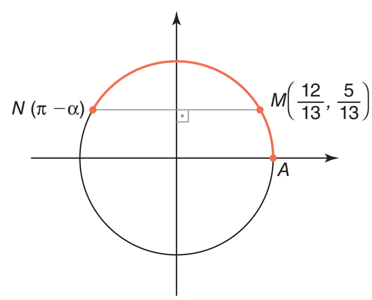
a) sen (−30°)
b) cos (−30°)
c) sen (−300°)
d) cos (−300°)
e) sen (−1.485°)
f) cos (−1.230°)
g) sen $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
h) cos $\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$
i) sen $\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$
j) cos $\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$
k) cos $\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$
l) sen $\frac{25\pi}{6}$
m) sen $\frac{33\pi}{4}$

31 Simplifique a expressão:

$$E = \frac{\cos(180° + x) + \text{sen}(180° + x) + \text{sen}(180° - x)}{\cos(360° - x)},$$

com cos x ≠ 0.

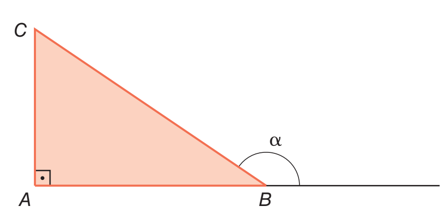
32 Na circunferência trigonométrica abaixo, as coordenadas do ponto M são $\frac{12}{13}$ e $\frac{5}{13}$, e a medida do arco $\overset{\frown}{AN}$ na 1ª volta positiva é $\pi - \alpha$.



Calcule:

a) sen α
b) cos α
c) cos (π + α)
d) sen (−α)
e) cos (2π − α)

33 Calcule a medida do cateto $\overline{AB}$ do triângulo retângulo ABC, abaixo, sabendo que $BC = 12$ cm e que $\cos \alpha = -\frac{4}{7}$.



34 Uma rampa reta e plana, de 8 m de comprimento, une dois pisos de uma garagem e forma um ângulo obtuso de medida α com o piso plano e horizontal inferior tal que $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$. Calcule a altura do piso superior em relação ao inferior.

Resolva os exercícios complementares 14 a 20, 97 e 98.

Relação fundamental da Trigonometria

Para qualquer arco trigonométrico de medida α, temos:

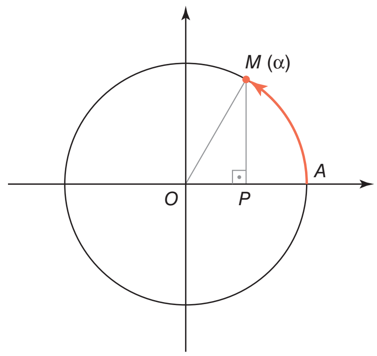
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Demonstração

Seria possível demonstrar essa relação por um único caso. Porém, para entendê-la melhor, vamos separá-la em três casos.

1º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico do 1º quadrante.



Pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo *OMP*, temos:

$$(MP)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$$

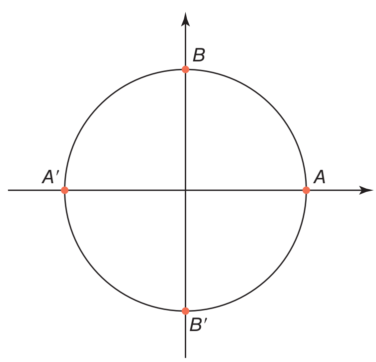
Como a ordenada *MP* e a abscissa *OP* são, respectivamente, o seno e o cosseno de α e $OM = 1$, concluímos:

$$(\operatorname{sen} \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = (1)^2$$

$$\therefore \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

2º caso

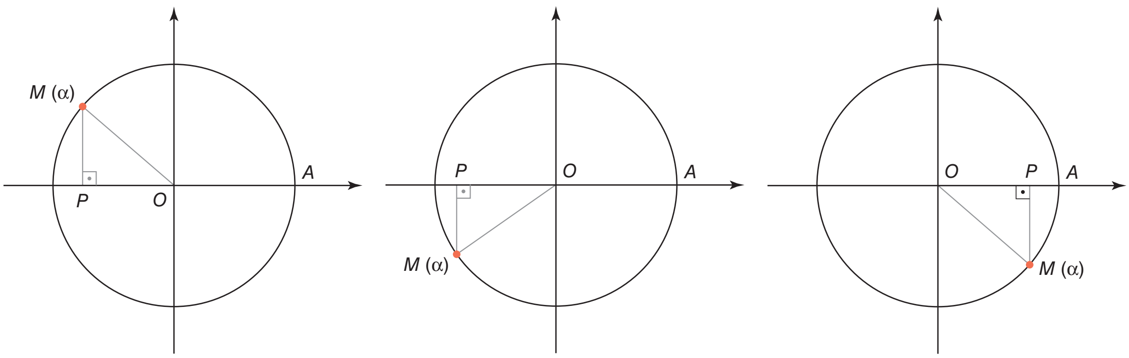
Seja α a medida de um arco trigonométrico com extremidade sobre um dos eixos coordenados.



- No ponto *A*, em que $\operatorname{sen} \alpha = 0$ e $\cos \alpha = 1$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $0^2 + 1^2 = 1$.
- No ponto *B*, em que $\operatorname{sen} \alpha = 1$ e $\cos \alpha = 0$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $1^2 + 0^2 = 1$.
- No ponto *A′*, em que $\operatorname{sen} \alpha = 0$ e $\cos \alpha = -1$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $0^2 + (-1)^2 = 1$.
- No ponto *B′*, em que $\operatorname{sen} \alpha = -1$ e $\cos \alpha = 0$, constatamos a validade da relação fundamental, pois $(-1)^2 + 0^2 = 1$.

3º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico do 2º, do 3º ou do 4º quadrante.



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo *OMP* de cada figura, temos:

$$(MP)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$$

Em cada um dos triângulos *OMP*, podemos afirmar que: $MP = |\text{sen}\ \alpha|$, $OP = |\cos \alpha|$ e $OM = 1$ (raio). Logo:

$$|\text{sen}\ \alpha|^2 + |\cos \alpha|^2 = 1$$

Lembrando a propriedade $|x|^2 = x^2$, do módulo de um número real *x*, concluímos:

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Note que, com base nessa relação, podemos expressar o seno em função do cosseno e vice-versa:

$$\boxed{\text{sen}^2\ \alpha = 1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2\ \alpha}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

15 Dado que $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{3}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular o valor de cos α.

Resolução

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como α é uma medida do 2º quadrante, concluímos que $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

16 Determinar os valores de sen *x* e de cos *x* sabendo que $\text{sen}\ x = 3 \cos x$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{sen}\ x = 3 \cos x & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\ x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(3 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 10 \cos^2 x = 1$

$\therefore \cos^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

Como *x* é uma medida do 3º quadrante, temos:

$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Substituindo cos *x* por $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ em (I), obtemos:

$\text{sen}\ x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

17 Determinar *m*, com $m \in \mathbb{R}$, tal que $\text{sen}\ \beta = \frac{m}{6}$ e $\cos \beta = \frac{\sqrt{4m}}{3}$.

Resolução

$\text{sen}^2\ \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \left(\frac{m}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4m}}{3}\right)^2 = 1$

$\therefore \frac{m^2}{36} + \frac{4m}{9} = 1 \Rightarrow m^2 + 16m - 36 = 0$

$\Delta = (16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 400$

$\therefore m = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \frac{-16 \pm 20}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 2$ ou $m = -18$

Observe que a igualdade $\cos \beta = \frac{\sqrt{4m}}{3}$ é absurda para $m = -18$, pois no conjunto $\mathbb{R}$ não existe raiz quadrada de número negativo; logo, -18 não pode ser admitido como valor de *m*. Concluímos, então, que $m = 2$.

18 Resolver, na variável x, a equação:
$x^2 - 2x + \text{sen}^2\,\alpha = 0$

Resolução

Na variável x, a equação é do 2º grau. Então:
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{sen}^2\,\alpha$
$\therefore \Delta = 4 - 4\,\text{sen}^2\,\alpha = 4(1 - \text{sen}^2\,\alpha)$
Pela relação fundamental, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$; temos $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$ e, portanto, $\Delta = 4\cos^2\alpha$.

Assim:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4\cos^2\alpha}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\cos\alpha}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 1 + \cos\alpha$ ou $x = 1 - \cos\alpha$

Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é:
$S = \{1 + \cos\alpha, 1 - \cos\alpha\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

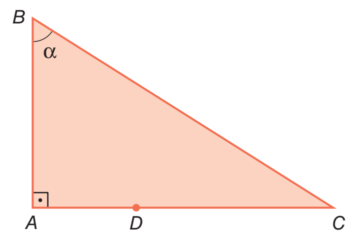
35 Dado que $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule o valor de $\cos\alpha$.

36 Sendo $\text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule o valor de $\cos\alpha$.

37 Determine $\text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta$ sabendo que $\text{sen}\,\beta = 2\cos\beta$ e $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

38 Obtenha m, com $m \in \mathbb{R}$, tal que: $\text{sen}\,x = \frac{m}{4}$ e $\cos x = \frac{\sqrt{m+1}}{2}$

39 No triângulo retângulo *ABC* abaixo, a hipotenusa $\overline{BC}$ mede 51 cm, $\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$ e a distância do ponto *D* ao vértice *C* é 30,6 cm.
Calcule a distância do ponto *D* à hipotenusa $\overline{BC}$.

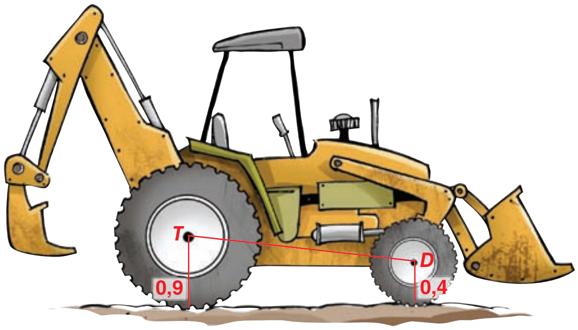


40 Dado que $3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine o valor de $\text{sen}\,x$.
(*Sugestão*: Substitua $\cos x$ por y.)

41 Determine o valor de $\cos x$ sabendo que $4\cos^2 x + 9\,\text{sen}\,x - 6 = 0$.
(*Sugestão*: Substitua $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2\,x$.)

42 (Vunesp) A expressão $1 - 2\,\text{sen}^2\,x + \text{sen}^4\,x + \text{sen}^2\,x \cdot \cos^2 x$ é equivalente a:
a) $\cos^2 x$ **b)** $2\cos^2 x$ **c)** $\cos^3 x$ **d)** $\cos^4 x + 1$ **e)** $\cos^4 x$

43 Cada pneu traseiro de um trator tem raio de 0,9 m e cada pneu dianteiro tem raio de 0,4 m.
Calcule a distância entre os centros *T* e *D* de dois pneus de um mesmo lado do trator, sabendo que a reta $\overleftrightarrow{TD}$ forma um ângulo obtuso de medida α com o solo plano tal que $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.



Resolva os exercícios complementares 21 a 27.

Tangente de um arco trigonométrico

Objetivos

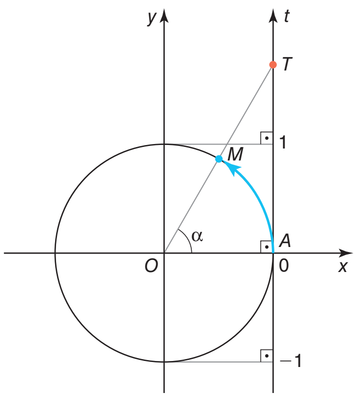
- **Determinar** a tangente de um arco trigonométrico de qualquer quadrante.
- **Relacionar** a tangente de um arco com a tangente de seus arcos correspondentes.

Termo e conceito

- **eixo das tangentes**
- **tangente**

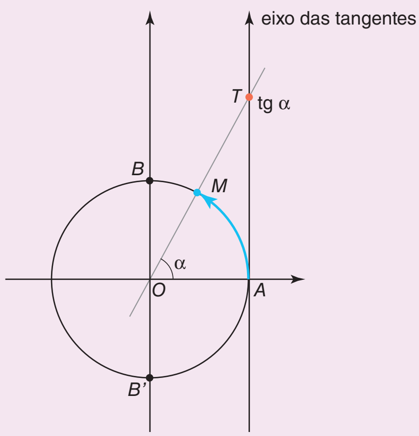
Assim como fizemos para o seno e o cosseno, vamos estender o conceito de tangente para um arco trigonométrico tomando por base a ideia de tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo. Para compreender essa extensão, considere o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$, e o eixo real t de origem A, com a mesma direção e a mesma orientação do eixo Oy e com a mesma unidade adotada nos eixos coordenados. Para determinar a tangente do arco $\overset{\frown}{AM}$, traçamos a reta $\overleftrightarrow{OM}$ até sua intersecção T com o eixo t.

No triângulo retângulo AOT, temos:



$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Portanto, a tangente de α é a medida do segmento de reta $\overline{AT}$ contido no eixo real t, que será chamado, de agora em diante, de **eixo das tangentes**. Ampliando essa ideia, vamos definir a tangente para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das ordenadas.

> Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das ordenadas, chama-se **tangente de α** a ordenada do ponto T, que é a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo das tangentes.
>
> 
>

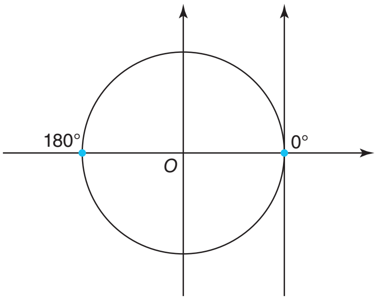
Observe que se o ponto M coincidir com B ou com B', as retas $\overleftrightarrow{OB}$ e $\overleftrightarrow{OB'}$ não interceptam o eixo das tangentes. Por isso dizemos que **não existe** tangente de um arco com extremidade em B ou em B'; ou seja, na 1ª volta da circunferência trigonométrica, não existe tg 90° nem tg 270°.

Exemplo

Para determinar tg 0° e tg 180°, marcamos na circunferência trigonométrica os pontos associados a 0° e a 180°, conforme a figura ao lado.

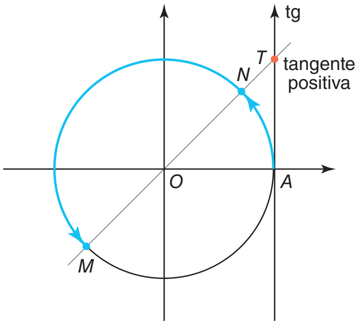
Como as retas que passam por esses pontos e pelo centro da circunferência interceptam o eixo das tangentes no ponto de ordenada zero, concluímos:

$$\text{tg } 0° = 0 \text{ e tg } 180° = 0$$

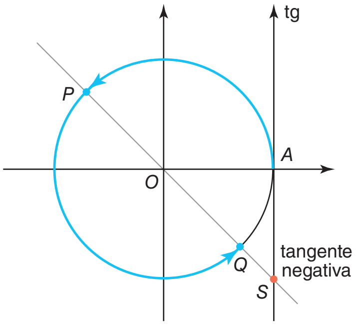


Variação de sinal da tangente

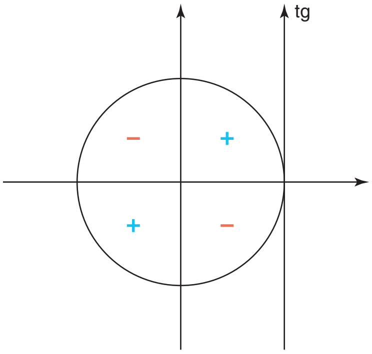
Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 1º ou no 3º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto *T* de ordenada positiva.



Se um arco trigonométrico tiver a extremidade no 2º ou no 4º quadrante, o prolongamento do raio que passa por essa extremidade interceptará o eixo das tangentes em um ponto *S* de ordenada negativa.



Ou seja, a tangente é positiva para os arcos do 1º e do 3º quadrante e negativa para os arcos do 2º e do 4º quadrante. Em resumo, essa variação de sinal pode ser assim representada:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

19 Determinar o sinal do produto: $P = \text{tg } 13° \cdot \text{tg } 190° \cdot \text{tg } 352°$

Resolução

Os arcos de medidas 13°, 190° e 352° têm extremidades no 1º, no 3º e no 4º quadrante, respectivamente. Logo: $\text{tg } 13° > 0$; $\text{tg } 190° > 0$; $\text{tg } 352° < 0$

Assim:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\text{tg } 13°}_{\text{positivo}} \cdot \underbrace{\text{tg } 190°}_{\text{positivo}}}_{\text{positivo}} \cdot \underbrace{\text{tg } 352°}_{\text{negativo}}}_{\text{negativo}}$$

Então, P é negativo.

A tangente como razão do seno pelo cosseno

No estudo do triângulo retângulo, vimos que a tangente de um ângulo agudo pode ser obtida pela razão do seno pelo cosseno desse ângulo. É possível generalizar essa propriedade para a tangente de qualquer arco trigonométrico de medida α, com $\cos \alpha \neq 0$, conforme o teorema a seguir.

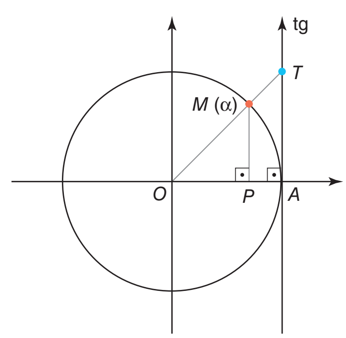
> Se um arco trigonométrico tem medida α, com $\cos \alpha \neq 0$, então $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$.

Demonstração

Para facilitar, vamos separar a demonstração em dois casos.

1º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ com extremidade em M no 1º quadrante, ou seja, $0° < \alpha < 90°$. Traçando a reta $\overleftrightarrow{OM}$, obtemos:



Pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos $\triangle OTA \sim \triangle OMP$. Portanto:

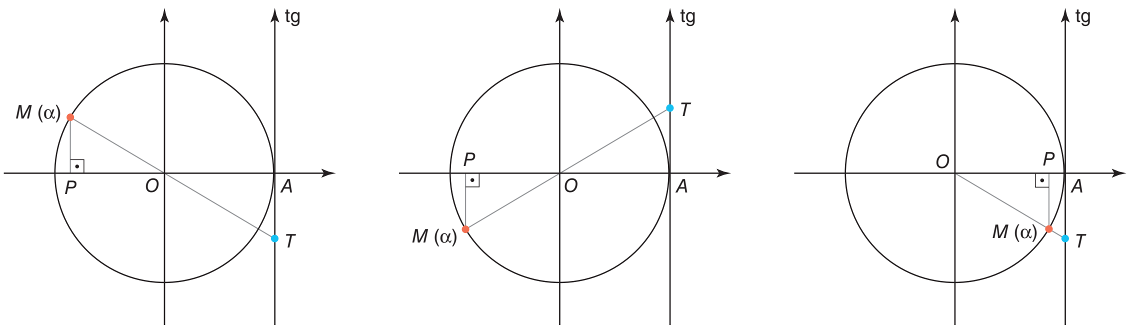
$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

Como $AT = \text{tg } \alpha$, $OA = 1$, $PM = \text{sen } \alpha$ e $OP = \cos \alpha$, concluímos:

$$\frac{\text{tg } \alpha}{1} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

2º caso

Seja α a medida de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ com extremidade em M no 2º, 3º ou 4º quadrante. Traçando a reta $\overleftrightarrow{OM}$, obtemos:



Pelo caso AA de semelhança de triângulos, temos, em cada uma das três figuras, $\triangle OTA \sim \triangle OMP$. Portanto:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

Como $AT = |\text{tg}\ \alpha|$, $OA = 1$, $PM = |\text{sen}\ \alpha|$ e $OP = |\cos\alpha|$, temos:

$$\frac{|\text{tg}\ \alpha|}{1} = \frac{|\text{sen}\ \alpha|}{|\cos\alpha|} \quad \text{(I)}$$

Observamos que:

- no 2º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ e $\text{tg}\ \alpha < 0$;
- no 3º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$ e $\text{tg}\ \alpha > 0$;
- no 4º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ e $\text{tg}\ \alpha < 0$.

Pelas observações acima, concluímos que, em todos os casos, a identidade (I) também é verificada sem os módulos, ou seja:

$$\frac{\text{tg}\ \alpha}{1} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

20 Dado $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular $\text{tg}\ \alpha$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{11}}{6} & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{11}{36} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2\alpha = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{5}{6}$$

Como α é uma medida associada a um ponto do 2º quadrante, temos:

$$\cos\alpha = -\frac{5}{6}$$

Logo: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{11}}{6}}{-\frac{5}{6}} = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}$

21 Dado $\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{2}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcular $\text{sen}\ \alpha$ e $\cos\alpha$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{2} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\text{sen}^2\alpha + (2\ \text{sen}\ \alpha)^2 = 1 \Rightarrow 5\ \text{sen}^2\alpha = 1$$

$$\therefore \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como α é medida associada a um ponto do 3º quadrante, temos: $\text{sen}\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Substituindo $\text{sen}\ \alpha$ por $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ em (I), obtemos:

$$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44 Calcule:

a) $\text{tg } 2\pi$ b) $\text{tg } \frac{3\pi}{2}$ c) $\text{tg } 3\pi$ d) $\text{tg } (-\pi)$

45 Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

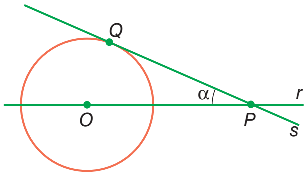
a) $\text{tg } \frac{\pi}{5} \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{2} > 0$ b) $\frac{\text{tg } \frac{5\pi}{9}}{\text{tg } \frac{2\pi}{9}} < 0$ c) $\text{tg } \frac{13\pi}{18} + \text{tg } \frac{4\pi}{15} < 0$

46 Sabendo que $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $\text{tg } \alpha$.

47 Calcule o valor de $\text{tg } \alpha$ sabendo que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{7}$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

48 Quais são os valores de $\text{sen } \alpha$ e $\cos \alpha$ tal que $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

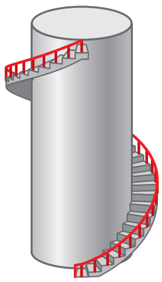
49 Uma reta *r* passa pelo centro de uma circunferência cujo raio mede 2 cm. Essa circunferência tangencia a reta *s* em Q, conforme mostra a figura.



A medida α do ângulo agudo formado por *r* e *s* é tal que $\cos \alpha = \frac{15}{17}$. Calcule a medida do segmento $\overline{PQ}$.

50 Uma escada em espiral será construída em torno de um reservatório cilíndrico de 15 m de altura, dando exatamente uma volta ao redor do reservatório, desde um ponto da base inferior até um ponto da base superior. O engenheiro responsável pelo projeto calculou que a inclinação da escada em relação ao plano horizontal deve ser α rad, em toda a sua extensão, com $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Calcule a medida do raio da base do reservatório.



Resolva os exercícios complementares 28 a 35.

Tabela trigonométrica dos arcos notáveis

A tabela apresentada na página 461 pode ser completada com os valores da tangente dos arcos notáveis, bastando para isso dividir o seno pelo cosseno de cada arco.

	30° ou $\frac{\pi}{6}$ rad	45° ou $\frac{\pi}{4}$ rad	60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Redução ao 1º quadrante

Conhecida a tangente de um arco trigonométrico do 1º quadrante, podemos calcular a tangente do correspondente desse arco em qualquer quadrante, conforme veremos no exercício resolvido a seguir.

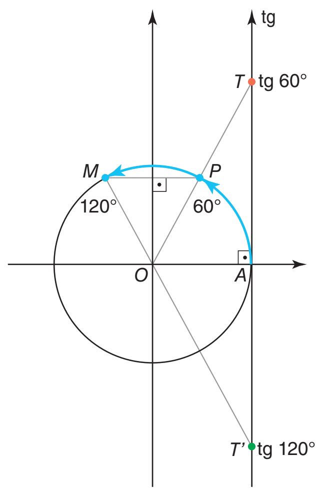
EXERCÍCIO RESOLVIDO

22 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar o valor de:

a) tg 120° **b)** tg 210° **c)** tg 300°

Resolução

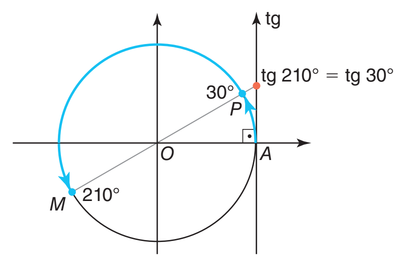
a) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade M do arco de 120° é o ponto P, extremidade do arco de 60°.



Como os triângulos OTA e $OT'A$ são congruentes, temos que os pontos T e T' têm ordenadas opostas. Assim, concluímos:

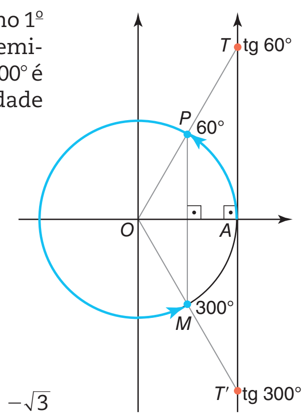
tg 120° = −tg 60° = $-\sqrt{3}$

b) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade M do arco de 210° é o ponto P, extremidade do arco de 30°.



Assim: tg 210° = tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade M do arco de 300° é o ponto P, extremidade do arco de 60°.



Assim:

tg 300° = −tg 60° = $-\sqrt{3}$

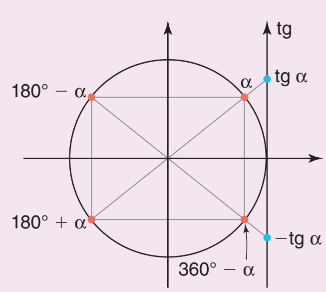
Resumindo:

Sendo α a medida, em grau, associada a um ponto do 1º quadrante, temos:

tg (180° − α) = −tg α

tg (180° + α) = tg α

tg (360° − α) = −tg α



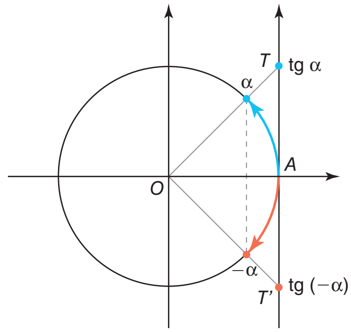
Se α for uma medida em radiano, essas relações devem ser expressas por:

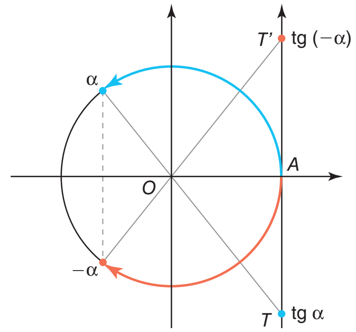
- tg (π − α) = −tg α
- tg (π + α) = tg α
- tg (2π − α) = −tg α

Essas igualdades se mantêm, mesmo que α esteja associado a um ponto de outro quadrante. Verifique.

Arcos de medidas opostas

Considere dois arcos trigonométricos de medidas opostas α e $-\alpha$. Os prolongamentos dos raios que passam pelas extremidades desses arcos interceptam o eixo das tangentes nos pontos T e T', conforme as figuras abaixo.





Como os triângulos OTA e $OT'A$ são congruentes, concluímos que os pontos T e T' têm ordenadas opostas, portanto:

$$\boxed{\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha}$$

Exemplos

a) $\text{tg}\,(-60°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{4} = -1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

51 Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, calcule:

a) $\text{tg}\,120°$
b) $\text{tg}\,135°$
c) $\text{tg}\,210°$
d) $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{3}$
e) $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4}$
f) $\text{tg}\,\dfrac{11\pi}{4}$
g) $\text{tg}\,\dfrac{20\pi}{3}$
h) $\text{tg}\,\dfrac{17\pi}{6}$

52 Calcule o valor da expressão:

$$E = \text{tg}^2\,\frac{25\pi}{3} + \text{tg}\,\frac{51\pi}{4} - \text{tg}\,\frac{45\pi}{4}$$

53 Simplifique as expressões:

a) $E = \dfrac{\text{tg}\,(\pi + \alpha) - \text{tg}\,(2\pi - \alpha)}{\text{tg}\,(\pi - \alpha) + \text{tg}\,(-\alpha)}$, em que $\text{tg}\,\alpha \neq 0$

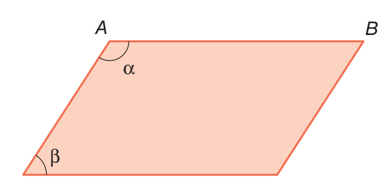
b) $E = \dfrac{\text{tg}\,(180° + x) + \text{tg}\,(180° - x) + \text{tg}\,(360° - x)}{\text{sen}\,(360° - x)}$,

com $\text{sen}\,x \neq 0$

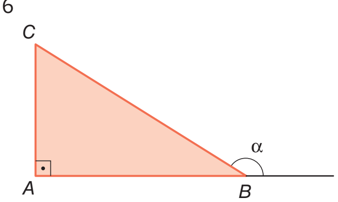
54 No paralelogramo representado abaixo, sabe-se que $\text{tg}\,\alpha = -2{,}6$.

Calcule:

a) $\text{tg}\,\beta$
b) $\text{tg}\,(\alpha + \beta)$
c) $\text{tg}\,(2\alpha + \beta)$



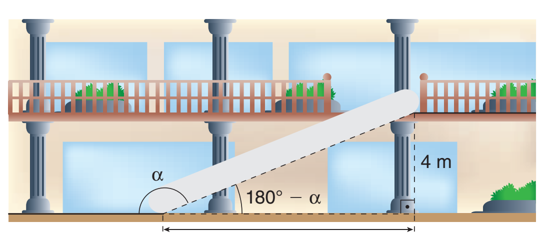
55 Calcule a medida do cateto $\overline{AB}$ do triângulo retângulo ABC a seguir sabendo que $AC = 10$ cm e que $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{5}{6}$



56 Calcule:

a) $\text{tg}\,(-45°)$
b) $\text{tg}\,(-120°)$
c) $\text{tg}\,(-300°)$

57 Em um *shopping center*, uma rampa plana e reta une dois pisos horizontais e forma um ângulo obtuso de medida α com o piso inferior, tal que $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{2}{5}$.



Uma pessoa que percorre toda essa rampa desloca-se verticalmente 4 m. Qual é o deslocamento horizontal dessa pessoa?

Resolva os exercícios complementares 36 a 42.

Seção 13.5

Equações trigonométricas

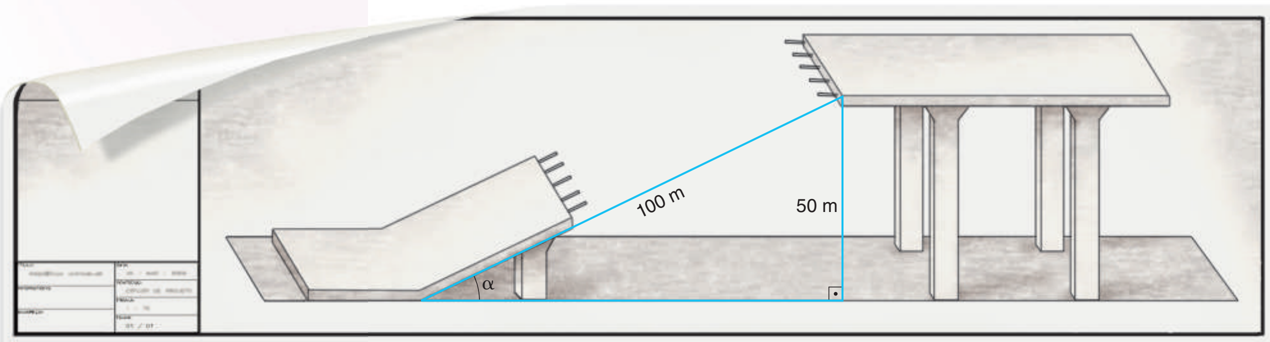
Objetivo

- **Resolver** equações trigonométricas.

Várias situações do cotidiano envolvem questões sobre distâncias e ângulos. Alguns desses problemas necessitam da resolução de equações trigonométricas, como ilustra a situação a seguir.

Um engenheiro projetou uma rampa reta e plana, com 100 m de comprimento, que vai unir dois patamares horizontais entre os quais há um desnível vertical de 50 m. Iniciada a construção a partir do patamar inferior, determine a inclinação da rampa, ou seja, a medida do ângulo agudo que deve ser mantida constante, entre o plano da rampa e o plano horizontal, para que a construção termine exatamente no nível do patamar superior.

Esquematizando essa situação, temos:



Pelo triângulo formado, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{50}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $\alpha = 30°$.

Note que, ao determinar o valor de α, obtivemos uma solução da equação $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$.

Equações do tipo $\text{sen } x = k$, $\cos x = k$ ou $\text{tg } x = k$, sendo k uma constante real, são chamadas de **equações trigonométricas imediatas**.

Resolução de uma equação trigonométrica imediata

Resolver, em um universo U, uma equação do tipo $\text{sen } x = k$ (ou $\cos x = k$ ou $\text{tg } x = k$), sendo k uma constante real, significa obter o conjunto solução S formado por todos os valores pertencentes a U que, atribuídos à variável x, tornam verdadeira a sentença $\text{sen } x = k$ (ou $\cos x = k$ ou $\text{tg } x = k$).

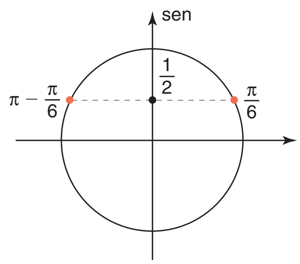
Resolveremos esse tipo de equação pelo método gráfico e, para isso, vamos aplicar alguns tópicos já vistos neste capítulo, como a tabela trigonométrica dos arcos notáveis e as simetrias de pontos na circunferência trigonométrica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

23 Resolver a equação sen $x = \frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Para determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada $\frac{1}{2}$, considerando apenas a 1ª volta positiva, adotamos o esquema abaixo.



Observe que os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais sen $x = \frac{1}{2}$ são:

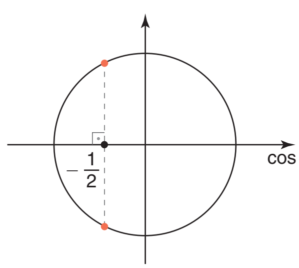
$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

24 Resolver a equação cos $x = -\frac{1}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

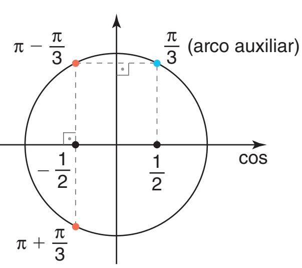
Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm abscissa $-\frac{1}{2}$ considerando apenas a 1ª volta positiva.



Observe, na figura acima, que esses pontos pertencem ao 2º e ao 3º quadrantes e que, portanto, as medidas dos arcos com extremidades nesses pontos não estão na tabela dos arcos notáveis. Para usar a tabela, vamos buscar no 1º quadrante um **arco auxiliar**, isto é, um arco cujo cosseno seja igual a $\frac{1}{2}$.

Nesse caso, o arco auxiliar é $\frac{\pi}{3}$, pois $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Pelas simetrias, transportamos o arco auxiliar para o 2º e o 3º quadrantes, obtendo:



Assim, os valores de x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, para os quais cos $x = -\frac{1}{2}$ são:

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

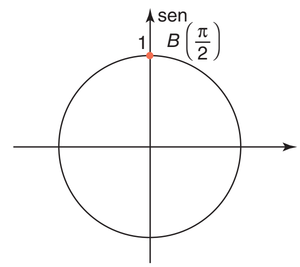
Logo: $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

25 Resolver a equação sen $x = 1$:

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$. **b)** em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Precisamos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada igual a 1 considerando apenas a 1ª volta positiva. O único ponto que satisfaz essa condição é o ponto B, representado na circunferência trigonométrica a seguir.



Assim, para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

sen $x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

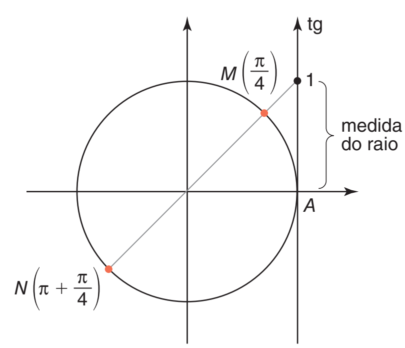
b) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é formado pelos números reais associados ao ponto B, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

26 Resolver a equação tg $x = 1$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada igual a 1 e traçamos por ele a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Essa reta intercepta a circunferência em dois pontos, M e N, aos quais estão associadas as raízes da equação.



O ponto M está associado à medida $\frac{\pi}{4}$, pois sabemos, pela tabela trigonométrica dos arcos notáveis, que $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$. Para encontrar a medida associada ao ponto N, que é o simétrico de $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ em relação à origem, efetuamos $\pi - \frac{\pi}{4}$, obtendo $N\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

Assim, considerando apenas a 1ª volta positiva da circunferência, que é o universo da equação, temos:

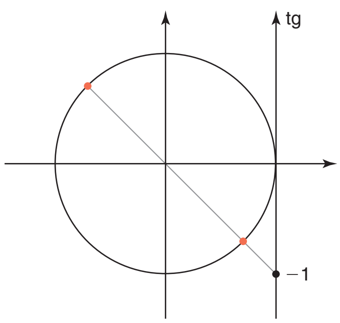
$x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$. Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

27 Resolver a equação $\text{tg}\,x = -1$:

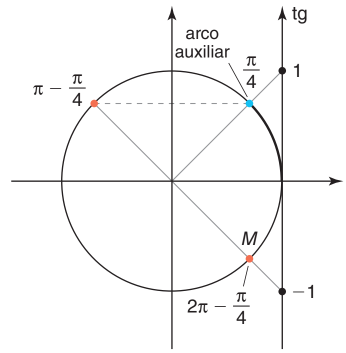
a) para $0 \leqslant x < 2\pi$. **b)** em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Marcamos no eixo das tangentes o ponto de ordenada -1 e traçamos por ele a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Essa reta intercepta a circunferência em dois pontos, conforme a figura abaixo, aos quais estão associadas as raízes da equação.



Como esses pontos estão fora do 1º quadrante, devemos buscar o arco auxiliar nesse quadrante, de modo que possamos usar a tabela trigonométrica dos arcos notáveis:



Pelas simetrias, considerando o universo $[0, 2\pi[$, encontramos as soluções:

$x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo: $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação é formado pelos números reais associados aos pontos obtidos no item **a**, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica; logo:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

58 Resolva as equações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos x = \frac{1}{2}$

f) $\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$

g) $\text{sen}\,x = -1$

h) $\cos x = 1$

i) $\text{sen}\,x = 0$

j) $\text{sen}\,x = 3$

k) $\cos x = -2$

l) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$

m) $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

n) $\text{tg}\,x = -\sqrt{3}$

o) $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

59 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **a**, **e**, **i**, **m** e **n** do exercício anterior.

60 Resolva as equações:

a) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ no intervalo $[0, 2\pi[$

b) $\cos^2 x = 1$ no intervalo $[0, 2\pi[$

c) $\cos^2 x = 1$ no intervalo $[0, 2\pi]$

d) $\text{sen}^2\,x = \frac{1}{4}$ no intervalo $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$

e) $|\text{sen}\,x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ em $\mathbb{R}$

61 Resolva a equação $\text{sen}^2\,x = \frac{3}{4}$ para $0° \leqslant x < 720°$.

62 Quantas raízes possui a equação $\text{tg}\,x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 6\pi[$?

63 Determine o conjunto solução da equação $\text{sen}\,x = \cos x$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.
(*Sugestão*: Procure na circunferência trigonométrica os pontos que têm abscissa igual à ordenada.)

64 Resolva as equações abaixo para $0 \leqslant x < 2\pi$.

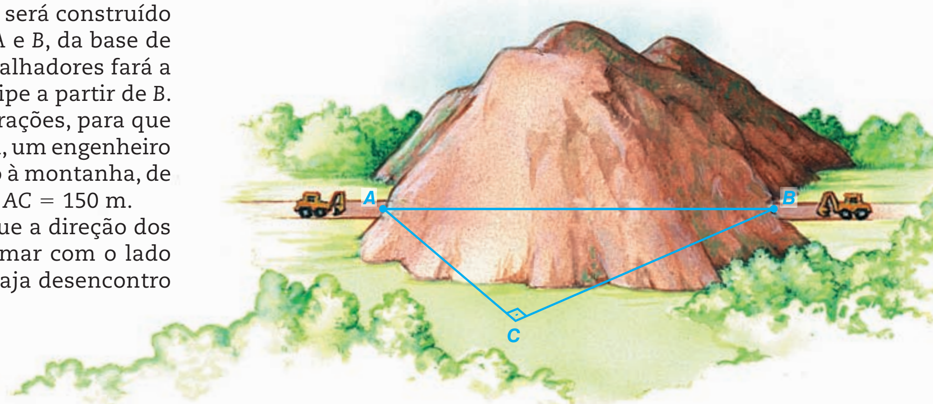
a) $\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{5}$ b) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$ c) $\text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{5}$

65 A soma das raízes da equação $\cos x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$, com $0 \leqslant x < 4\pi$, é:

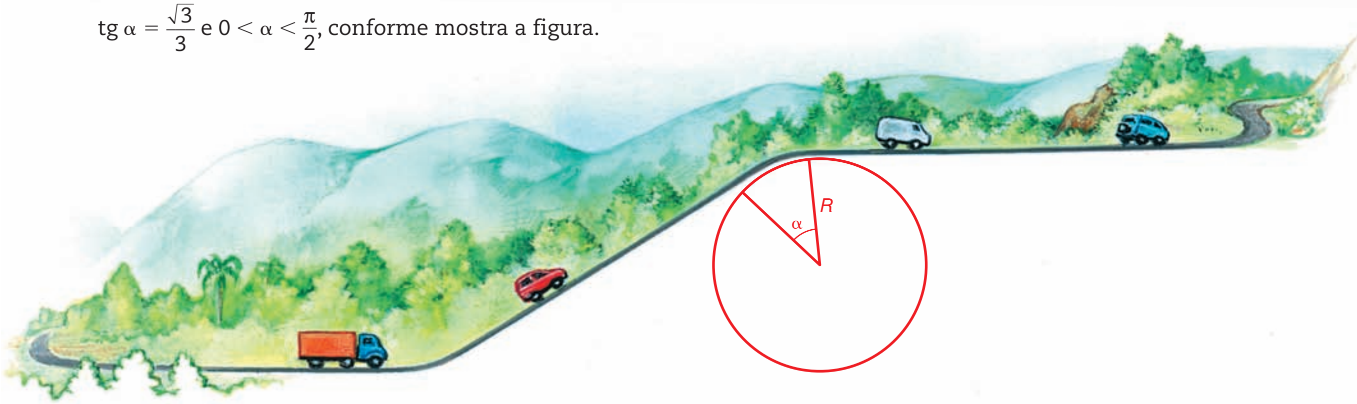
a) $\frac{15\pi}{3}$ b) 2π c) $\frac{17\pi}{3}$ d) 8π e) 6π

66 Em um retângulo, a medida de cada diagonal é o dobro da medida de um dos lados. Determine a medida dos ângulos que cada diagonal forma com os lados desse retângulo.

67 Um túnel de 300 m de comprimento será construído em linha reta, unindo dois pontos, A e B, da base de uma montanha. Uma equipe de trabalhadores fará a perfuração a partir de A, e outra equipe a partir de B. Para determinar a direção das perfurações, para que os dois trechos cavados se encontrem, um engenheiro fixou um ponto C no terreno próximo à montanha, de modo que o ângulo $A\hat{C}B$ fosse reto e $AC = 150$ m. Qual deve ser a medida do ângulo que a direção dos dois trechos da perfuração deve formar com o lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC para que não haja desencontro desses trechos?



68 Para suavizar o início e o final de um trecho em aclive de uma estrada, um engenheiro projetou--os com bordas em arcos de circunferência de 20 m de comprimento e ângulo central de α rad tal que $\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, conforme mostra a figura.



Calcule a medida do raio de curvatura desses arcos.
(*Nota*: O raio de curvatura de um arco é o raio da circunferência que contém esse arco.)

Resolva os exercícios complementares 43 a 54.

Resolução de uma equação trigonométrica na forma fatorada

Certas equações podem ser representadas como um produto de duas ou mais expressões igualado a zero. Essa representação é chamada de forma fatorada da equação. Por exemplo, a equação $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x = 0$ pode ser representada na forma fatorada, pondo em evidência o fator comum aos termos do primeiro membro:

$$\text{sen } x\,(2\cos x - 1) = 0$$

Para resolver equações como essa, usamos a **propriedade do produto nulo**, que garante que o produto de números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores for igual a zero, ou seja, $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$. Veja os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

28 Resolver a equação $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

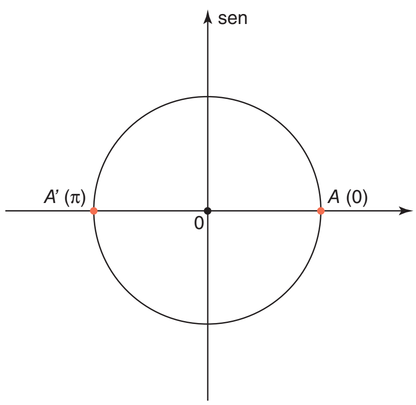
Inicialmente, fatoramos o 1º membro da equação pelo caso do fator comum:

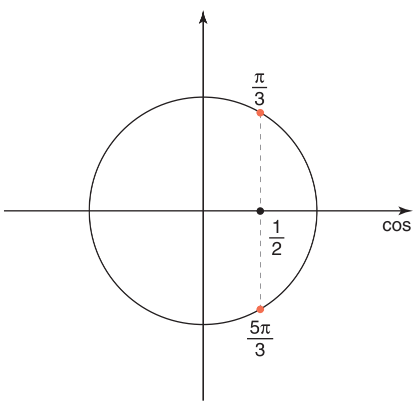
$\text{sen } x \cdot (2 \cos x - 1) = 0$

Portanto, pela propriedade do produto nulo: $\text{sen } x = 0$ ou $2 \cos x - 1 = 0$

Resolvendo cada uma dessas equações, na primeira volta positiva, temos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$





Logo: $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

29 Resolver a equação $(\text{tg } x - 1)(2 \text{ sen } x - 1) = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

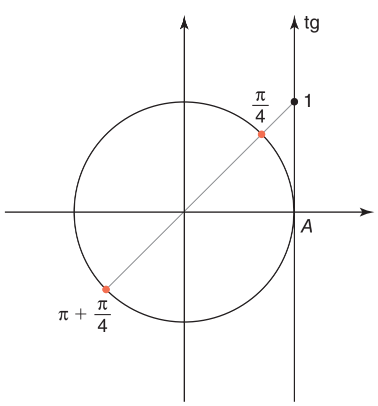
Pela propriedade do produto nulo, temos:

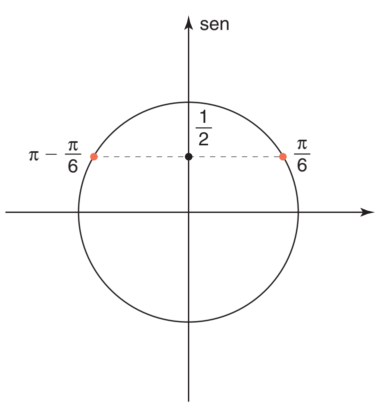
$$(\text{tg } x - 1)(2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \text{tg } x - 1 = 0 \text{ ou } 2 \text{ sen } x - 1 = 0$$

$$\therefore \text{tg } x = 1 \text{ ou sen } x = \frac{1}{2}$$

Resolvendo cada uma dessas equações na 1ª volta positiva, temos:

- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$





Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é: $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

69 Resolva as equações para $0 \leqslant x < 2\pi$:

a) $\left(2 \text{ sen } x - \sqrt{3}\right)\left(2 \cos x - \sqrt{2}\right) = 0$

b) $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x = 0$

c) $\text{tg}^2\, x - \text{tg}\, x = 0$

d) $\left(\text{tg}\, x - \sqrt{3}\right)\left(\text{tg}^2\, x - 1\right) = 0$

70 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **a**, **b** e **c** do exercício anterior.

71 (UFSC) Resolva a equação $\text{tg}\, x \cdot \text{sen } x = \text{sen } x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Resolva os exercícios complementares 55 a 65.

Resolução de uma equação trigonométrica por meio de equações polinomiais

Equação polinomial é toda equação que pode ser representada por um polinômio igualado a zero. Por exemplo: $-2x + 3 = 0$ ou $7t^2 - 2t - 5 = 0$.

Certas equações trigonométricas podem ser resolvidas com o auxílio de uma equação polinomial, bastando para isso uma mudança de variável, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

30 Resolver a equação $3\,\text{tg}^2\, x - 4\sqrt{3}\,\text{tg}\, x + 3 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Essa equação pode ser resolvida com o auxílio de uma equação polinomial, bastando para isso efetuar a mudança de variável: $\text{tg}\, x = t$. Com essa mudança, obtemos a equação do 2º grau:

$3t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$

$\Delta = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 12$

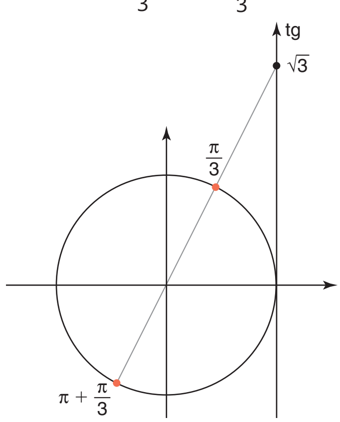
$\therefore t = \dfrac{-\left(-4\sqrt{3}\right) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 3} = \dfrac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} \Rightarrow t = \sqrt{3} \text{ ou } t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Lembrando que $\text{tg}\, x = t$, retornamos à variável original:

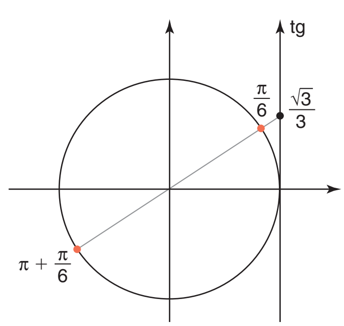
$\text{tg}\, x = \sqrt{3} \text{ ou } \text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Resolvendo cada uma dessas equações na 1ª volta positiva, temos:

- $\text{tg}\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } x = \dfrac{4\pi}{3}$



- $\text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{6}$



Concluímos, então, que o conjunto solução da equação é: $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

31 Resolver a equação $2\,\text{sen}^2 x + \cos x - 1 = 0$:

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$.

b) em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Quando uma equação apresenta seno e cosseno, um recurso muito útil para transformá-la em uma equação equivalente, que apresente somente seno ou somente cosseno, é aplicar uma das identidades: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ ou $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$.

Na equação proposta, vamos substituir $\text{sen}^2 x$ por $(1 - \cos^2 x)$, obtendo:

$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\therefore -2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$

Efetuando a mudança de variável $\cos x = t$:

$-2t^2 + t + 1 = 0$

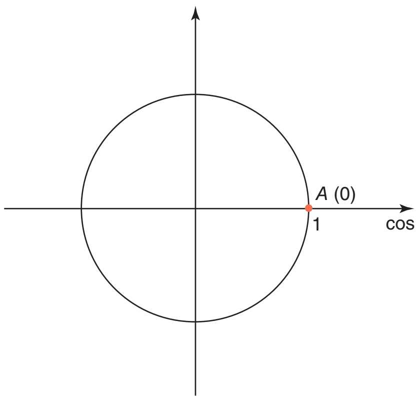
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9$

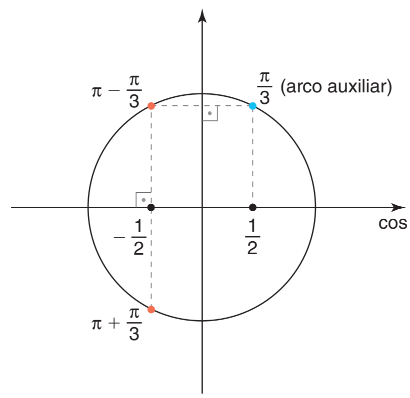
$\therefore t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{-1 \pm 3}{-4} \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = -\dfrac{1}{2}$

Como $\cos x = t$, temos $\cos x = 1$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Resolvendo essas equações na 1ª volta positiva, temos:

- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$
- $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$





Logo: $S = \left\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

b) Observando que as raízes obtidas no item **a** estão associadas a pontos que dividem a circunferência trigonométrica em três arcos congruentes, temos, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução S da equação:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + \dfrac{k \cdot 2\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

72 Resolva as equações a seguir no universo $U = [0, 2\pi[$.

a) $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$

b) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

c) $4\,\text{tg}^2 x + \sqrt{3}\,\text{tg}\, x = \text{tg}^2 x + 3\sqrt{3}\,\text{tg}\, x + 3$

73 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $\cos^2 x - 4\,\text{sen}\, x + 4 = 0$

Resolva os exercícios complementares 66 a 76.

Seção 13.6

Inequações trigonométricas

Objetivo

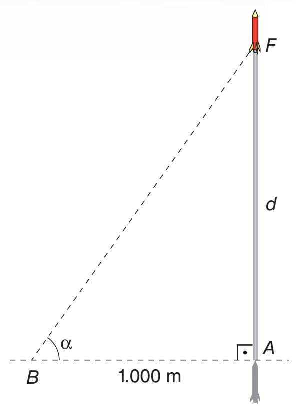
- **Resolver** inequações trigonométricas.

Um foguete F, lançado em trajetória vertical de um ponto A do solo plano e horizontal, é monitorado a partir de um ponto B do solo, distante 1.000 m de A. Quais serão as possíveis medidas do ângulo $A\hat{B}F$, quando a distância AF for superior a 1.000 m?

Indicando por α a medida do ângulo $A\hat{B}F$ e por d a distância AF, esquematizamos:

$$\begin{cases} \text{tg}\ \alpha = \dfrac{d}{1.000} \\ d > 1.000 \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha > 1$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $45° < \alpha < 90°$.



Note que, ao determinar os possíveis valores de α, obtivemos as soluções da inequação $\text{tg}\ \alpha > 1$, em que α é a medida de um ângulo agudo. Inequações do tipo $\text{tg}\ \alpha > k$, $\text{sen}\ \alpha > k$ ou $\cos \alpha > k$ (ou com as relações $\leq$, $<$, $\geq$ ou $\neq$), sendo k uma constante real, são chamadas de **inequações trigonométricas imediatas**.

Resolução de uma inequação trigonométrica imediata

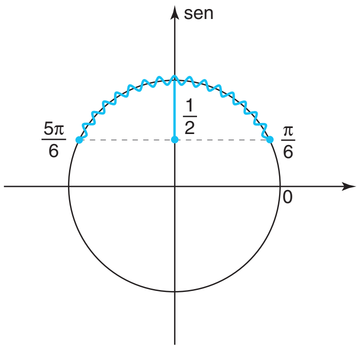
Resolver, em um universo U, uma inequação trigonométrica significa obter o conjunto solução S formado por todos os valores pertencentes a U que, atribuídos à variável da inequação, tornam verdadeira a sentença assim obtida. Resolveremos as inequações trigonométricas imediatas pelo método gráfico, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

32 Resolver a inequação sen $x \geqslant \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Precisamos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada maior ou igual a $\frac{1}{2}$, considerando apenas a 1ª volta positiva. A figura a seguir esquematiza a situação.



Os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada $\frac{1}{2}$ são os associados às medidas $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$; os pontos que têm ordenada maior que $\frac{1}{2}$ são os associados às medidas entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\right\}$

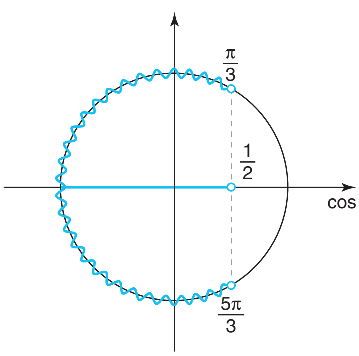
33 Resolver a inequação cos $x < \frac{1}{2}$

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$

b) em $\mathbb{R}$

Resolução

a) Esquematizamos:



Considerando a 1ª volta positiva, os pontos da circunferência trigonométrica que têm cosseno menor que $\frac{1}{2}$ são aqueles associados às medidas entre $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) Para obter uma expressão que represente as soluções da inequação nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, basta adicionar a cada extremo do intervalo obtido no item anterior a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, o conjunto solução S da inequação é dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

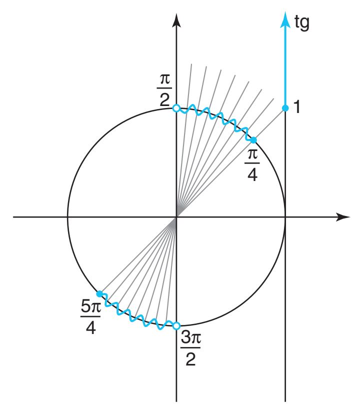
34 Resolver a inequação tg $x \geqslant 1$.

a) para $0 \leqslant x < 2\pi$.

b) em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) Em um esquema, determinamos os arcos trigonométricos que têm tangente igual a 1. A seguir, consideramos todas as retas que passam pelo centro da circunferência e pelos pontos de ordenada maior ou igual a 1 no eixo das tangentes. As medidas associadas aos pontos de intersecção dessas retas com a circunferência trigonométrica formam o conjunto solução da inequação.



Considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

b) Para obter as expressões que representam as soluções da inequação, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, basta adicionar $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **a**, obtendo:

$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ou

$\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

Notando, porém, que os arcos determinados por essas expressões na circunferência trigonométrica são simétricos em relação à origem do sistema, podemos substituí-las por uma única expressão:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

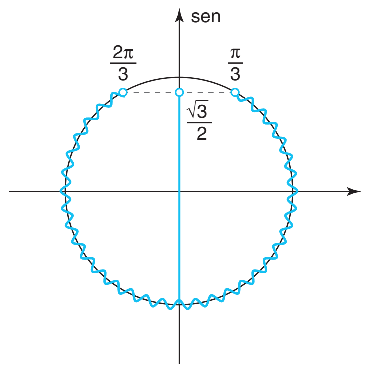
Assim, uma das formas de apresentar o conjunto solução S da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

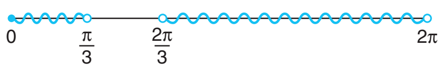
35 Resolver a inequação sen $x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos encontrar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada menor que $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ considerando apenas a 1ª volta positiva. Esses pontos são:



A maior dificuldade dessa resolução é a maneira de escrever a resposta. Para entender o porquê da forma da resposta, vamos "esticar" (retificar) a circunferência:



Assim, percebemos que o conjunto solução é a reunião de dois intervalos:

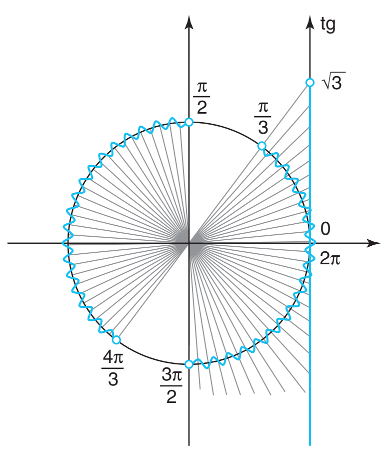
$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right[$$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

36 Resolver a inequação tg $x < \sqrt{3}$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Esquematizamos:



Considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

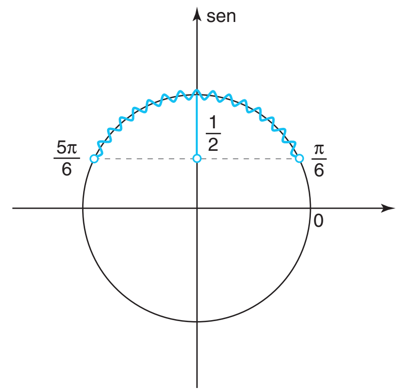
37 Resolver o sistema de inequações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

$$\begin{cases} \text{sen } x > \dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

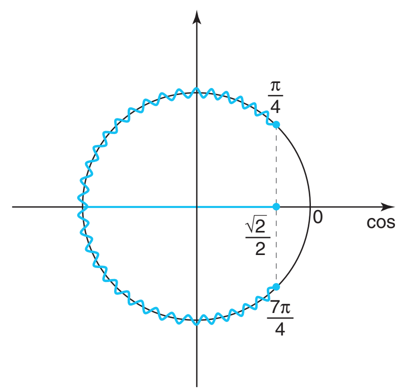
Resolução

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

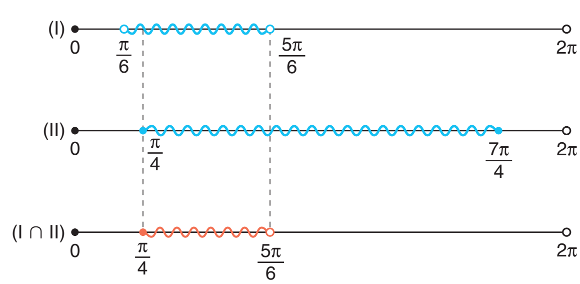
(I) sen $x > \dfrac{1}{2}$



(II) $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



O conjunto solução do sistema é a intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II). Retificando as circunferências, temos:



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

74 Resolva as inequações para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\text{sen } x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen } x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

d) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos x \leq 0$

f) $\text{sen } x < 0$

g) $\cos x > 0$

h) $\text{sen } x \leq \frac{1}{2}$

i) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\text{sen } x \leq -\frac{1}{2}$

k) $\cos x > -\frac{1}{2}$

l) $\text{sen } x > 1$

m) $\cos x < 1$

n) $\text{sen } x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

o) $\text{tg } x > \sqrt{3}$

p) $\text{tg } x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

q) $\text{tg } x < -\sqrt{3}$

75 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações dos itens **a**, **c**, **d**, **o** e **p** do exercício anterior.

76 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, obtenha o conjunto solução das inequações:

a) $\text{sen } x < \text{sen } \frac{\pi}{9}$

b) $\cos x \geq \cos \frac{\pi}{7}$

77 Resolva os sistemas de inequações a seguir para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\begin{cases} \cos x < -\frac{1}{2} \\ \text{sen } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{tg } x > 1 \\ \text{tg } x \leq \sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{tg } x \geq 1 \\ \text{sen } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

78 Resolva em $\mathbb{R}$ os sistemas dos itens **a** e **d** do exercício anterior.

79 Resolva as inequações para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $0 < \text{sen } x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{1}{2} \leq \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

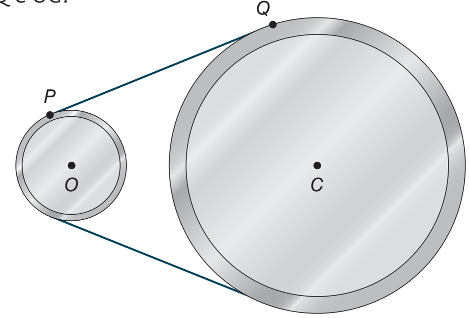
c) $|\text{sen } x| < \frac{1}{2}$

d) $1 < \text{tg } x \leq \sqrt{3}$

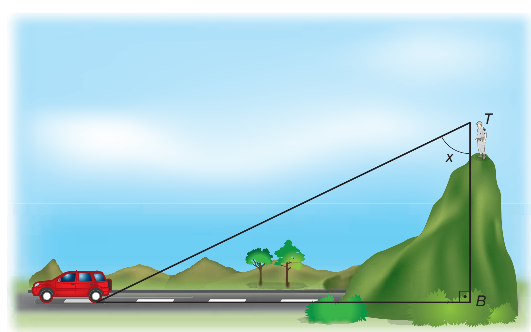
e) $0 \leq \text{tg } x < 1$

f) $-\sqrt{3} < \text{tg } x \leq 1$

80 Uma correia contorna duas polias, de 5 cm e 13 cm de raio e centros O e C, respectivamente, sendo P e Q pontos de tangência da parte reta da correia com as polias, conforme mostra a figura. Se a distância PQ deve ser maior que 16 cm, quais são as possíveis medidas de um ângulo agudo formado pelas retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OC}$?



81 De um ponto T, a 15 m de altura em relação ao plano de uma estrada horizontal, um guarda rodoviário observa um automóvel sob um ângulo de medida x, em grau, em relação à vertical $\overleftrightarrow{TB}$, sendo B um ponto do plano da estrada. Determine as possíveis medidas x para que a distância entre o automóvel e o ponto B seja maior que $5\sqrt{3}$ m.



Resolva os exercícios complementares 77 a 82, 99 e 100.

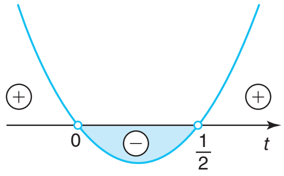
Resolução de uma inequação trigonométrica por meio de inequações polinomiais

Certas inequações trigonométricas podem ser resolvidas com o auxílio de uma inequação polinomial, bastando para isso uma mudança de variável, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

38 Resolver a inequação
$2\cos^2 x - \cos x < 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

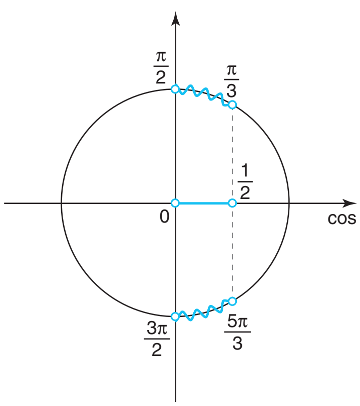
Resolução

Substituindo $\cos x$ por t na inequação, obtemos:
$2t^2 - t < 0$.
Para resolver essa inequação, devemos estudar o sinal de $f(t) = 2t^2 - t$. Para isso, encontramos as raízes de f:
$2t^2 - t = 0 \Rightarrow t \cdot (2t - 1) = 0$
$\therefore t = 0$ ou $(2t - 1) = 0$
$\therefore t = 0$ ou $t = \frac{1}{2}$
Logo, um esboço do gráfico de f é:



Observamos que $f(t) < 0$ para $0 < t < \frac{1}{2}$.

Logo, $0 < \cos x < \frac{1}{2}$, portanto:



Concluímos, então, que:

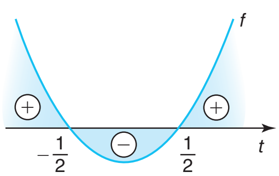
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$$

39 Resolver a inequação
$(4\,\text{sen}^2\, x - 1)(2\,\text{sen}\, x - \sqrt{3}) \leqslant 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

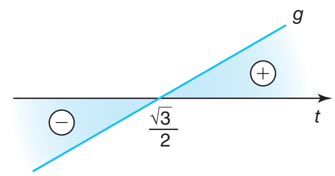
Resolução

Efetuando a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, obtemos:
$(4t^2 - 1)(2t - \sqrt{3}) \leqslant 0$
Estudamos a variação de sinal de cada uma das funções $f(t) = 4t^2 - 1$ e $g(t) = 2t - \sqrt{3}$:

- $f(t) = 4t^2 - 1$
  raízes de f:
  $4t^2 - 1 = 0$
  $\therefore t^2 = \frac{1}{4}$
  $\therefore t = \pm\frac{1}{2}$



- $g(t) = 2t - \sqrt{3}$
  raiz de g:
  $2t - \sqrt{3} = 0$
  $\therefore 2t = \sqrt{3}$
  $\therefore t = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$, temos:

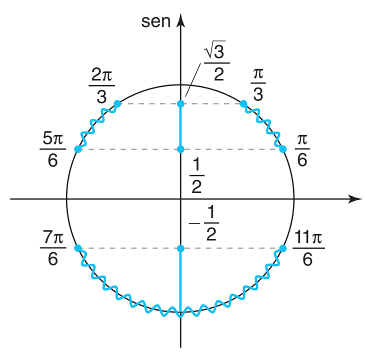
		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
f	+		−		+		+
g	−		−		−		+
$f \cdot g$	−		+		−		+

Observamos que: $f(t) \cdot g(t) \leqslant 0$ para $t \leqslant -\frac{1}{2}$

ou $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo: $\text{sen}\, x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant \text{sen}\, x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Na circunferência trigonométrica, temos:



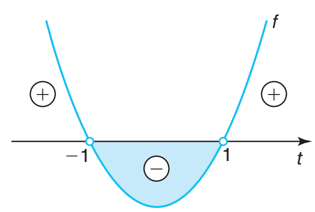
Concluímos, então:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$$

40 Resolver a inequação $\text{tg}^2\, x < 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

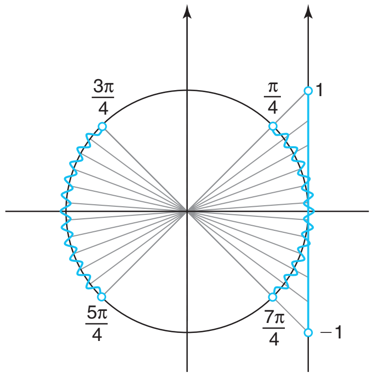
Resolução

Fazendo a mudança de variável $\text{tg}\, x = t$, temos:
$t^2 < 1 \Rightarrow t^2 - 1 < 0$
Estudamos o sinal da função $f(t) = t^2 - 1$:



Observamos que $f(t) < 0$ para $-1 < t < 1$. Portanto, $-1 < \text{tg}\, x < 1$.

Na circunferência trigonométrica, temos:



Logo, considerando apenas a 1ª volta positiva, temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

41 Resolver a inequação $\frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x + \sqrt{2}} \leqslant 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Efetuando a mudança de variável $\cos x = t$, temos:

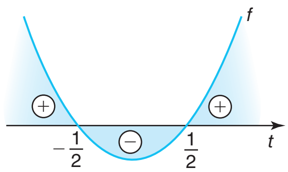
$\frac{4t^2 - 1}{2t + \sqrt{2}} \leqslant 0$

Nas inequações-quociente, devemos considerar a condição de existência:

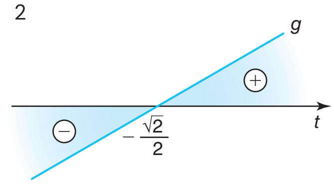
$2t + \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow t \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Estudamos a variação de sinal de cada uma das funções $f(t) = 4t^2 - 1$ e $g(t) = 2t + \sqrt{2}$:

- $f(t) = 4t^2 - 1$
  raízes de f:
  $4t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{4}$
  $\therefore t = \pm\frac{1}{2}$



- $g(t) = 2t + \sqrt{2}$
  raiz de g:
  $2t + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2t = -\sqrt{2}$
  $\therefore t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



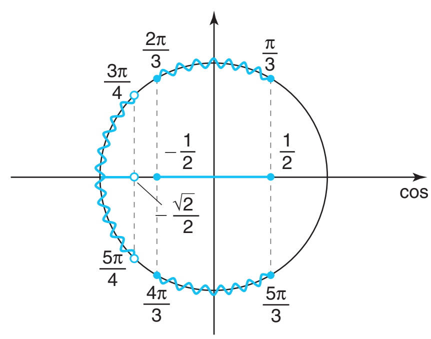
Representando no eixo real a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$, temos:

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
f	+		+		−		+
g	−		+		+		+
$\frac{f}{g}$	−		+		−		+

Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0$ para $t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$.

Logo: $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$

Na circunferência trigonométrica, obtemos:



Assim, o conjunto solução da inequação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

82 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, obtenha o conjunto solução das inequações:

a) $2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x < 0$

b) $2\,\text{sen}^2 x - \sqrt{2}\,\text{sen}\, x \geqslant 0$

c) $2\,\text{sen}^2 x + 5\cos x - 4 > 0$

d) $2\cos^2 x + 5\,\text{sen}\, x - 8 < 0$

e) $(2\cos x - 1)(2\cos x - \sqrt{2}) < 0$

f) $\frac{2\,\text{sen}\, x - 1}{2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2}} < 0$

g) $\frac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1} > 0$

h) $\text{tg}^2 x - \text{tg}\, x > 0$

i) $(\text{tg}\, x - \sqrt{3})(\text{tg}^2 x - 1) \leqslant 0$

j) $\frac{\text{tg}\, x - 1}{\text{tg}\, x - \sqrt{3}} > 0$

83 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações dos itens **a**, **f** e **j** do exercício anterior.

Resolva os exercícios complementares 83 a 86.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

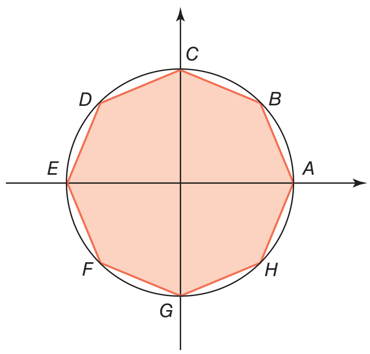
1 Qual é a medida em grau de um arco de 4π cm contido em uma circunferência com 8 cm de raio?

2 Calcule a medida em radiano de um arco de 2π cm contido em uma circunferência com 12 cm de raio.

3 (UFPA) A medida de um arco côngruo a $\frac{137\pi}{5}$ rad é:

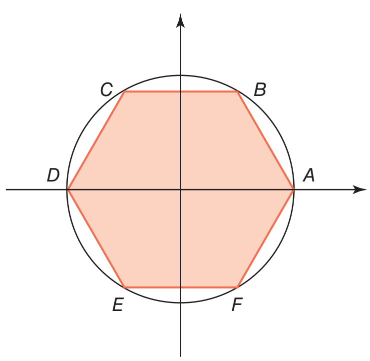
a) $\frac{2\pi}{5}$ rad
b) 3π rad
c) $\frac{\pi}{5}$ rad
d) 2π rad
e) $\frac{7\pi}{5}$ rad

4 O octógono regular *ABCDEFGH*, abaixo, está inscrito na circunferência trigonométrica.



Determine as medidas *x* associadas:
a) aos vértices desse octógono, com $0° \leqslant x < 360°$;
b) ao vértice *F*, com $360° \leqslant x < 1.080°$;
c) ao vértice *H*, com $-720° \leqslant x < 0°$.

5 O hexágono regular *ABCDEF*, abaixo, está inscrito na circunferência trigonométrica.

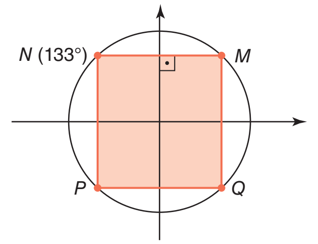


Determine as medidas *x* associadas:
a) aos vértices desse hexágono, com $0 \leqslant x < 2\pi$;
b) ao vértice *C*, com $2\pi \leqslant x < 6\pi$;
c) ao vértice *F*, com $-4\pi \leqslant x < 0$.

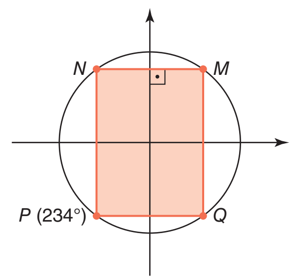
6 (UFPI) Se α é a medida de um arco côngruo a um arco de 30°, então se pode afirmar que:
a) $\alpha = 30°$
b) $\alpha = 60°$
c) $\alpha = -330°$
d) $\alpha = k \cdot 30°$, para algum $k \in \mathbb{Z}$
e) $\alpha = 30° + k \cdot 360°$, para algum $k \in \mathbb{Z}$

7 As figuras a seguir apresentam retângulos inscritos em circunferências trigonométricas. Determine as medidas associadas aos vértices desses retângulos na 1ª volta positiva.

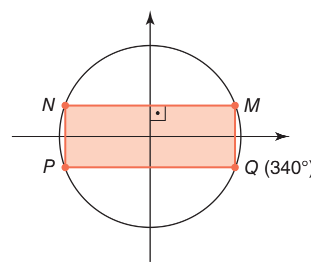
a)



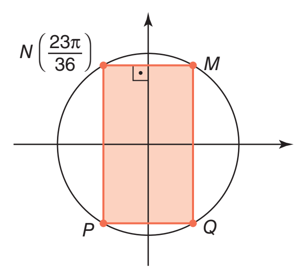
b)



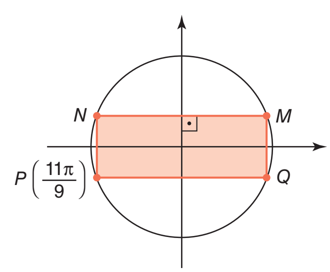
c)



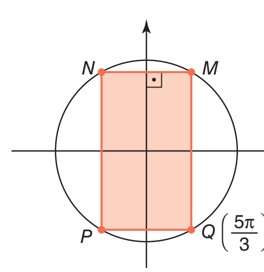
d)



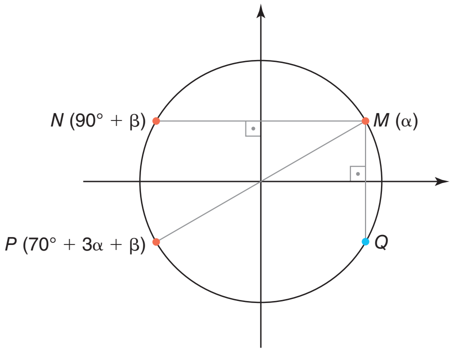
e)



f)



8 A circunferência trigonométrica abaixo apresenta as medidas em grau, na 1ª volta positiva, associadas aos pontos M, N e P.



A medida associada ao ponto Q é:

a) 330°
b) 320°
c) 335°
d) 340°
e) 350°

9 Determine o valor mínimo da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |\text{sen } x|$.

10 Se a variável x pode assumir qualquer medida de um arco trigonométrico, calcule o menor valor possível da expressão $\dfrac{1}{|\cos x|}$.

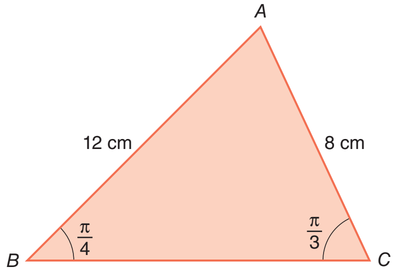
11 (UFMA) Sendo $180° < a < b < 270°$, assinale a afirmação verdadeira.

a) $\cos a = \cos b$
b) $\cos a > \cos b$
c) $\text{sen } a < \text{sen } b$
d) $\cos a \cdot \cos b < 0$
e) $\cos a \cdot \cos b > 0$

12 Sendo α e β medidas de arcos trigonométricos, com $\{\alpha, \beta\} \subset [0, 2\pi[$, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações a seguir.

a) Se α e β pertencem ao 1º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$.
b) Se α e β pertencem ao 2º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\text{sen } \alpha > \text{sen } \beta$.
c) Se α e β pertencem ao 1º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\cos \alpha > \cos \beta$.
d) Se α e β pertencem ao 3º quadrante e $\alpha > \beta$, então $\cos \alpha > \cos \beta$.

13 Calcule a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo:



14 O valor de $\cos 1.560°$ é igual ao valor de:

a) $\cos 30°$
b) $\text{sen } 30°$
c) $-\text{sen } 60°$
d) $-\cos 60°$
e) $\cos 45°$

15 (Unifor-CE) O valor de $\cos \dfrac{26\pi}{3} + \cos \dfrac{89\pi}{3}$ é igual a:

a) -1
b) 0
c) $\dfrac{1}{2}$
d) $\dfrac{3}{4}$
e) 1

16 (UFRN) A expressão $E = \dfrac{\text{sen } (\pi - x) - \text{sen } (\pi + x)}{\text{sen } (2\pi - x)}$, com $\text{sen } x \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = 2 \text{ sen } x$
b) $E = -2 \text{ sen } x$
c) $E = 2$
d) $E = -2$
e) $E = \text{sen } x$

17 Simplifique:

a) $E = \dfrac{\cos(-\alpha) + \text{sen}(-\alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + \text{sen}(\pi - \alpha)}$, em que $\cos \alpha \neq \text{sen } \alpha$.

b) $E = \dfrac{\cos 0° - \cos^2 (180° + \alpha)}{\text{sen } 90° + \cos (360° - \alpha)}$, em que $\cos \alpha \neq -1$.

18 Em relação à expressão $E = \cos (k\pi - x)$, com $k \in \mathbb{Z}$, podemos afirmar que:

a) $E = \cos x$, para qualquer valor de k.
b) $E = -\cos x$, para qualquer valor de k.
c) $E = \cos x$, se k for um número par.
d) $E = \text{sen } x$, se k for um número par.
e) $E = -\text{sen } x$, se k for um número ímpar.

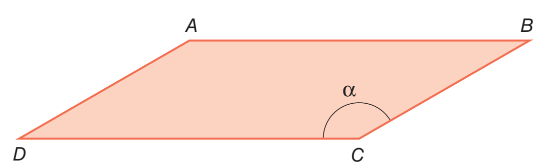
19 Calcule o valor da expressão:
$E = \text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 40° + \text{sen}^2 50° + \text{sen}^2 70°$

20 Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}^2 30° + \cos^2 60°}{\text{sen}^2 40° + \cos^2 140°}$$

21 Um triângulo tem um ângulo agudo interno de medida α, com $\text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Calcule o cosseno da soma dos outros dois ângulos.

22 No paralelogramo $ABCD$ a seguir, o lado $\overline{AD}$ mede 20 cm e $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Calcule a distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{AB}$.



23 Sabendo que $\text{sen } x + \cos x = 0{,}6$, calcule o produto $\text{sen } x \cdot \cos x$.

24 Determine o valor do sen x sabendo que
$4 \cos^2 x + 5 \text{ sen } x - 5 = 0$ e que $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

25 Resolva, na variável x, a equação
$x^2 - 4x + 4 \cos^2 \alpha = 0$.

26 Sabendo que sen $x \neq 0$, simplifique a expressão:

$$E = \frac{\cos 0 + \cos(2\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}{\text{sen}(-x) \cdot \text{sen}(\pi + x)}$$

27 (UFJF-MG) Considere a equação $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$, sendo k um número real negativo.

a) Determine a soma das raízes da equação dada em função de k.

b) Determine o produto das raízes da equação dada em função de k.

c) Determine o valor de k sabendo que as raízes da equação dada são o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

28 (Fuvest-SP) Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

a) sen 210° < cos 210° < tg 210°

b) cos 210° < sen 210° < tg 210°

c) tg 210° < sen 210° < cos 210°

d) tg 210° < cos 210° < sen 210°

e) sen 210° < tg 210° < cos 210°

29 (Ufop-MG) Se tg $\alpha = 2$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então cos α é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **e)** $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

30 Dado que tg $\alpha = -2$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule sen α e cos α.

31 Determine sen α e cos α sabendo que tg $\alpha = -7$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

32 Calcule os valores de sen α e cos α sabendo que tg $\alpha = -\frac{1}{3}$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

33 (Covest-PE) Sabendo que $\text{sen}^2 x - 3 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x = 0$, temos que os possíveis valores para tg x são:

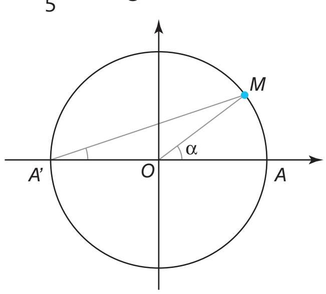
a) 0 e −1 **d)** −1 e −2

b) 0 e 1 **e)** −2 e 0

c) 1 e 2

34 Sendo $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ e sen $\alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$, calcule tg α.

35 Na circunferência trigonométrica abaixo, a ordenada do ponto M é $\frac{3}{5}$ e o ângulo AÔM mede α.



Calcule:

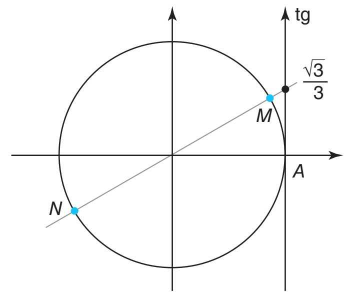
a) tg α

b) a medida do ângulo AÂ'M em função de α

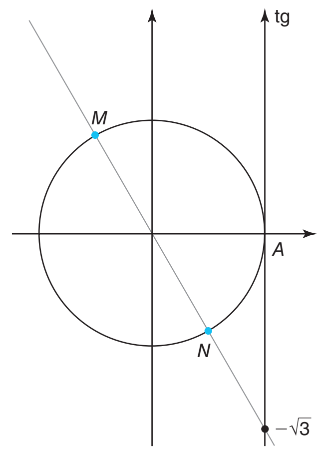
c) tg $\frac{\alpha}{2}$

36 As figuras a seguir representam a circunferência trigonométrica e o eixo das tangentes. Em cada item, determine as medidas α, com $0 \leq \alpha < 2\pi$, associadas aos pontos M e N.

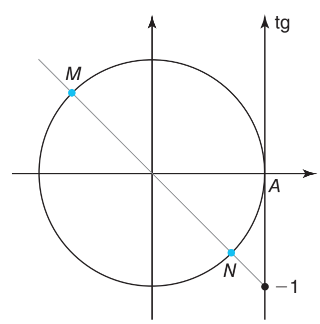
a)



b)

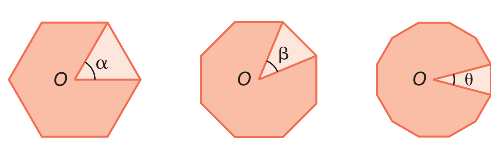


c)



37 As figuras abaixo representam três polígonos regulares: hexágono, octógono e dodecágono, sendo α, β e θ as medidas de seus ângulos centrais, respectivamente.

[*Nota*: Ângulo central de um polígono regular é o ângulo cujo vértice é o centro da circunferência circunscrita (ou inscrita) ao polígono e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.]



Calcule:

a) tg 17α **b)** tg 29β **c)** tg 16θ

38 A expressão $E = \dfrac{\text{tg}^2\,(\pi - x) - \text{tg}\,(\pi + x)}{\text{tg}\,(2\pi - x)}$, com $\text{tg}\,x \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = 1 + \text{tg}\,x$
b) $E = -\text{tg}\,x$
c) $E = -1$
d) $E = -2$
e) $E = 1 - \text{tg}\,x$

39 Calcule o valor de:

a) $\text{tg}\,(-30°)$
b) $\text{tg}\,(-120°)$
c) $\text{tg}\,(-225°)$
d) $\text{tg}\,(-300°)$
e) $\text{tg}\,(-1.110°)$
f) $\text{tg}\,(-1.860°)$

40 Calcule o valor de:

a) $\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
b) $\text{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$
c) $\text{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)$
d) $\text{tg}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$
e) $\text{tg}\left(\dfrac{33\pi}{4}\right)$
f) $\text{tg}\left(\dfrac{31\pi}{3}\right)$

41 A expressão $E = \dfrac{\text{tg}\,(-\alpha) + \text{tg}\,(\pi - \alpha)}{\text{tg}\,(\pi + \alpha) - \text{tg}\,(2\pi - \alpha)}$, em que $\text{tg}\,\alpha \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = -1$
b) $E = -2$
c) $E = \text{tg}\,\alpha$
d) $E = -\text{tg}\,\alpha$
e) $E = \text{sen}\,\alpha$

42 A expressão $E = \dfrac{\text{tg}\,(-\alpha) - \text{sen}\,(\pi + \alpha) \cdot \cos\,(-\alpha)}{\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$, em que $\cos\alpha \neq 0$, é equivalente a:

a) $E = -2$
b) $E = -1$
c) $E = -\text{tg}^3\,\alpha$
d) $E = \text{sen}^2\,\alpha$
e) $E = \cos^2\alpha$

43 Resolva as equações a seguir para $0° \leq x < 360°$.

a) $\text{sen}\,x = 1$
b) $\cos x = 0$
c) $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{2}$
d) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

44 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **a** e **b** do exercício anterior.

45 Resolva as equações para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\text{tg}^2\,x = 0$
b) $\text{tg}^2\,x = 1$
c) $\text{tg}^2\,x = 3$
d) $|\text{tg}\,x| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

46 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações dos itens **b** e **c** do exercício anterior.

47 Considerando o universo $U = [-\pi, \pi[$, resolva a equação $\text{sen}^2\,x = \dfrac{1}{2}$.

48 Resolva a equação $3\,\text{sen}\,x = \sqrt{3}\cos x$ para $0 \leq x < 2\pi$.

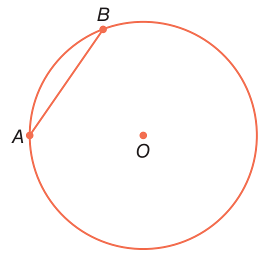
49 (Ufac) O maior valor de x, com $0 \leq x < 2\pi$, tal que $4^{3\cos x} = 8$ é:

a) $\dfrac{5\pi}{3}$
b) $\dfrac{\pi}{3}$
c) $\dfrac{7\pi}{6}$
d) $\dfrac{11\pi}{6}$
e) $\dfrac{17\pi}{3}$

50 Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AC}$ mede 16 cm e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 8 cm. A medida do ângulo $A\hat{C}B$ é:

a) 60°
b) 60° ou 120°
c) 30°
d) 30° ou 150°
e) 45°

51 A figura abaixo mostra uma corda $\overline{AB}$, de $10\sqrt{3}$ cm, em uma circunferência de centro O e 10 cm de raio. Calcule a medida do ângulo agudo que essa corda forma com o diâmetro que tem o ponto A como um dos extremos.



52 Calcule a soma das raízes da equação $\text{tg}^2\,x = 4$ para $0 \leq x < 2\pi$.

53 Obtenha o conjunto solução da equação
$5\,\text{sen}\,x - \cos x = 4\,\text{tg}\,x \cdot \cos x$ para $0 \leq x < 2\pi$
sabendo que $\cos x \neq 0$ e $\text{sen}\,x \neq 0$.
(*Sugestão*: Divida ambos os membros por $\cos x$.)

54 No universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação:

$$\frac{1}{2 + \text{tg}\,x} + \frac{1 + \text{tg}\,x}{3} = 1$$

55 Obtenha o conjunto dos valores de x, com $0 \leq x \leq 2\pi$, tais que $\text{sen}\,x \cdot \cos x = 0$.

56 Resolva a equação $\text{sen}\,x \cdot \cos x - 3\,\text{sen}\,x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

57 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x - \sqrt{2}\cos x = 0$

58 Resolva a equação $2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = \cos x$, para $0 \leq x < 2\pi$.
(*Cuidado*: Não divida os dois membros por $\cos x$, pois, se o fizer, você perderá a possibilidade de ter $\cos x$ igual a zero e, portanto, perderá raízes da equação. Obtenha uma equação equivalente com um dos membros igual a zero.)

59 (Fuvest-SP) Ache todas as soluções da equação $\text{sen}^3\,x \cdot \cos x - 3 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi[$.

60 Considerando o universo $U = [0, 2\pi]$, resolva as equações:

a) $(4\,\text{sen}^2\,x - 3)(\cos x - 1) = 0$
b) $\cos^2 x \cdot \text{sen}\,x - \text{sen}\,x = 0$
c) $4 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x + 2 \cdot \text{sen}\,x - 2 \cdot \cos x - 1 = 0$
d) $2\,\text{sen}^2\,x - \text{sen}\,x = 0$
e) $\text{tg}^2\,x - \sqrt{3}\,\text{tg}\,x = 0$
f) $\text{tg}^5\,x - \text{tg}\,x = 0$

61 (FGV-SP) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2\,x + \text{sen}\,(-x) = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) $\dfrac{7\pi}{2}$
b) $\dfrac{9\pi}{2}$
c) $\dfrac{5\pi}{2}$
d) 3π
e) $\dfrac{3\pi}{2}$

62 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $(tg^2\, x - 3)(\cos^2 x - 1) = 0$.

63 Resolva a equação $tg\, x \cdot sen\, x - tg\, x - sen\, x + 1 = 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.
(*Sugestão*: Fatore o 1º membro da equação.)

64 Resolva a equação
$sen\, x \cdot tg\, x + sen\, x - tg\, x \cdot \cos x - \cos x = 0$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

65 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $tg\, x \cdot sen\, x = tg\, x$.

66 Resolva as equações a seguir para $x \in [0, 2\pi[$.
a) $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$
b) $sen^2\, x - 3\, sen\, x + 2 = 0$
c) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

67 Quantas raízes possui a equação $tg^2\, x + tg\, x - 6 = 0$ no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$?

68 Qual é a maior raiz da equação
$tg^2\, x - \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot tg\, x + \sqrt{3} = 0$ no intervalo $[0, 2\pi[$?

69 (UFPB) O número de soluções da equação
$2\, sen^2\, x - 3\, sen\, x + 1 = 0$ no intervalo $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ é:
a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

70 Obtenha o conjunto solução da equação
$sen^2\, x - 2\cos x - 2 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

71 (UFC-CE) Encontre as soluções da equação
$9 - 2\cos^2 x = 15\, sen\, x$, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

72 (UFPB) Dê o conjunto solução da equação:
$3\, sen^2\, x + sen\, x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 3$, para $x \in [0, \pi]$

73 Resolva equação $8\, sen^4\, x + 2\cos^2 x = 3$, para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

74 (UFRJ) A equação $x^2 - 2x \cdot \cos\theta + sen^2\, \theta = 0$, na variável x, possui raízes reais e iguais. Determine θ, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

75 (PUC-PR) Todo x, com $0° \leqslant x \leqslant 360°$, que satisfaz a equação $\dfrac{16^{sen^2 x}}{4^{5\, sen\, x}} = \dfrac{1}{64}$ pertence ao intervalo:
a) $0° \leqslant x \leqslant 72°$
b) $72° \leqslant x \leqslant 144°$
c) $144° \leqslant x \leqslant 216°$
d) $216° \leqslant x \leqslant 288°$
e) $288° \leqslant x \leqslant 360°$

76 O número de soluções da equação $sen^4\, x = \cos^4 x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:
a) 4 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 1 **e)** 5

77 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $sen\, x > \frac{1}{2}$
b) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$
c) $\cos x > \frac{1}{2}$
d) $tg\, x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $tg\, x > -1$
f) $tg\, x \leqslant -1$

78 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações dos itens **b**, **c** e **d** do exercício anterior.

79 Resolva os sistemas de inequações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $\begin{cases} sen\, x < \frac{1}{2} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$
b) $\begin{cases} \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sen\, x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
c) $\begin{cases} tg\, x > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$
d) $\begin{cases} tg\, x > -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

80 Resolva em $\mathbb{R}$ os sistemas dos itens **a** e **d** do exercício anterior.

81 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{2} \leqslant \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $|tg\, x| < \sqrt{3}$
e) $|tg\, x| \geqslant 1$
f) $|tg\, x| + 1 > |2\, tg\, x|$

82 (UFPA) As soluções de $\frac{1}{2} < sen\, x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi[$, são todas as medidas x, em radiano, tais que:
a) $\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}$
b) $\frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leqslant \frac{5\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x \leqslant \frac{3\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$
e) $\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3}$

83 Resolva as inequações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.
a) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 < 0$
b) $4\cos^2 x - 1 > 0$
c) $sen^2\, x < 2\, sen\, x$
d) $4\cos^2 x - \left(2\sqrt{2} + 2\right)\cos x + \sqrt{2} \leqslant 0$
e) $\frac{sen^2\, x}{3} + \frac{\cos x}{2} - \frac{1}{2} \leqslant 0$
f) $(2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1) < 0$
g) $sen\, x\left(sen\, x - \frac{1}{2}\right)\left(2\, sen\, x - \sqrt{2}\right) > 0$
h) $\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(sen^2\, x - \frac{1}{2}\right) > 0$
i) $\dfrac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}} \leqslant 0$
j) $\dfrac{4\cos^2 x - 3}{\cos x} \leqslant 0$
k) $\dfrac{-2\cos^2 x + 1}{sen\, x} > 0$

84 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $tg^2\, x - \sqrt{3}\, tg\, x \leqslant 0$ c) $tg^2\, x - 3 \geqslant 0$

b) $tg^3\, x - tg\, x > 0$

85 (Cesgranrio-RJ) O maior valor de x, com $0 \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$, tal que $2\, sen\, x \geqslant \frac{1}{sen\, x}$ é:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{4}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

86 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva as inequações:

a) $3tg^2\, x - 2\sqrt{3}\, tg\, x - 3 \leqslant 0$

b) $tg^2\, x - \left(1 + \sqrt{3}\right) tg\, x + \sqrt{3} > 0$

c) $(tg^2\, x - 3)(tg\, x - 1) \geqslant 0$

d) $\dfrac{tg^2\, x - 3}{tg\, x + 1} \leqslant 0$

Exercícios contextualizados

87 Um ciclista partiu de um ponto A de uma pista circular de 100 m de raio e percorreu $\frac{117\pi}{20}$ rad, em um mesmo sentido, estacionando em um ponto B. Adotando $\pi = 3{,}14$, concluímos que a medida, em metro, do menor arco $\widehat{AB}$ dessa pista é:

a) 67,6 m c) 534,6 m e) 47,1 m

b) 38,9 m d) 24,2 m

88 A Lua gira ao redor da Terra em uma órbita quase circular, com raio médio de 384.000 km, percorrendo aproximadamente $\frac{\pi}{15}$ rad por dia, para leste, em relação ao Sol. Admitindo que essa órbita seja uma circunferência, concluímos que a velocidade da Lua em volta da Terra é:

a) $\frac{1.300\pi}{3}$ km/h d) $\frac{2.203\pi}{5}$ km/h

b) 25.600π km/h e) $\frac{3.200\pi}{3}$ km/h

c) 12.800π km/h

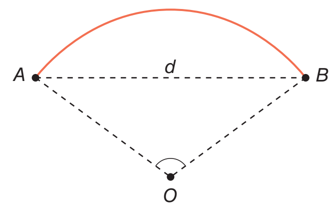
89 Se um ponto gira *n* radianos em um tempo *t* sobre uma circunferência, dizemos que a velocidade angular média ω_a do ponto é dada por $\omega_a = \frac{n}{t}$. Se essa velocidade for sempre a mesma para quaisquer valores correspondentes de *n* e *t*, dizemos que a velocidade angular do ponto é constante.

a) Com velocidade angular constante, um ponto *P* leva 2 min para percorrer um arco de 30 cm sobre uma circunferência com 10 cm de raio. Qual é a velocidade angular do ponto *P* em rad/min?

b) A velocidade angular constante de um ponto *Q* sobre uma circunferência é 3,6 rad/s. Se esse ponto leva 3 s para percorrer um arco de 54 cm, qual é a medida do raio dessa circunferência?

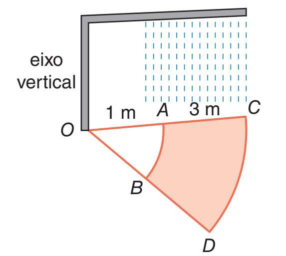
90 Um ponto *P* gira sobre uma circunferência de 6 cm de raio à velocidade angular constante de $\frac{5\pi}{8}$ rad/s. Calcule a velocidade desse ponto em cm/s.

91 (UFBA) Uma ponte, com formato de um arco de circunferência e comprimento igual a $\frac{4\pi}{3}$ km, liga dois pontos, *A* e *B*, situados em margens opostas de um rio, conforme a figura. Sabe-se que *O* é o centro da circunferência e que o ângulo $A\hat{O}B$ mede $\frac{2\pi}{3}$ rad.



Calcule a distância *d*, em quilômetro, entre os pontos *A* e *B*.

92 (Vunesp) A figura mostra um sistema rotativo de irrigação sobre uma região plana, que gira em torno de um eixo vertical perpendicular à região. Se denotarmos a medida em radiano do ângulo $A\hat{O}B$ por θ, a área irrigada, representada pela parte sombreada do setor circular, será uma função A que dependerá do valor de θ, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.



Se $OA = 1$ m e $AC = 3$ m, determine:

a) a expressão matemática para a função $A(\theta)$;

b) o valor de θ, em grau, se a área irrigada for de 8 m^2. (Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3$.)

(*Nota*: Lembre-se de que a área do setor circular é proporcional ao ângulo que o determina.)

93 Duas estrelas são vistas sob um ângulo de 2′ (dois minutos). Qual é a medida desse ângulo em radiano?

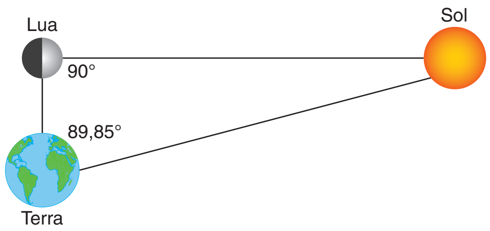
94 (Cesgranrio-RJ) Um mecanismo liga o velocímetro (marcador de velocidade) a uma das rodas dianteiras de um automóvel de tal maneira que, quando essa roda gira 72π rad, uma engrenagem que compõe o velocímetro gira 2π rad. Quando a roda gira $\frac{18\pi}{5}$ rad, essa engrenagem gira:

a) 15° b) 12° c) 34,4° d) 18° e) 9°

95 Quando o ponteiro das horas de um relógio desloca-se 48°, qual é o deslocamento, em radiano, do ponteiro dos minutos?

96 (UFPA) Aristarco de Samos, matemático que viveu por volta de 300 a.C., querendo calcular as distâncias relativas da Terra ao Sol e da Terra à Lua, utilizou o seguinte raciocínio: "No momento em que a Lua se encontra exatamente à meia-lua, os três astros formam um triângulo retângulo, com a Lua ocupando o vértice do ângulo reto. Sabendo a medida do ângulo que a visão da Lua forma com a visão do Sol, será possível determinar a relação entre as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol".

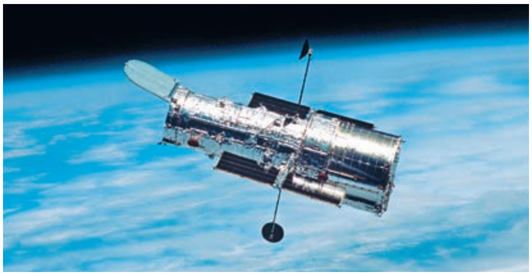
Sabe-se que o ângulo formado pelas direções Terra--Lua e Terra-Sol, na situação de meia-lua, é de, aproximadamente, 89,85° e que a distância da Terra à Lua é de, aproximadamente, 384.000 km.



Para ângulos de medidas inferiores a 1° (um grau), uma boa aproximação para o seno do ângulo é a medida do mesmo ângulo em radiano.
Utilizando esses dados e o raciocínio de Aristarco, pode-se concluir que a distância da Terra ao Sol é de aproximadamente:

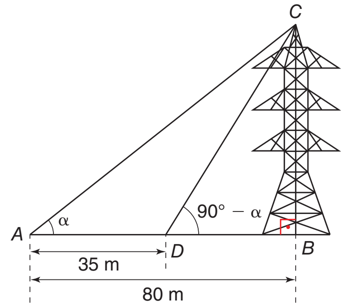
a) 2.500.000 km
b) 3.800.000 km
c) 34.600.000 km
d) 147.000.000 km
e) 7.000.000.000 km

97 Um satélite artificial gira em torno da Terra descrevendo uma circunferência cujo centro O coincide com o centro da Terra. A função $f(t) = 300 \cos \frac{4\pi t}{3}$ expressa a abscissa da posição do satélite no instante t, em hora, em relação a um sistema cartesiano ortogonal de origem O, contido no plano da órbita do satélite, em que a unidade adotada nos eixos é o quilômetro.



a) Qual é a abscissa da posição do satélite 1,5 h após o início da medição do tempo?
b) Qual é a ordenada da posição do satélite 2,5 h após o início da medição do tempo?
c) Qual é o raio da órbita do satélite?
d) Em quanto tempo o satélite completa uma volta ao redor da Terra?

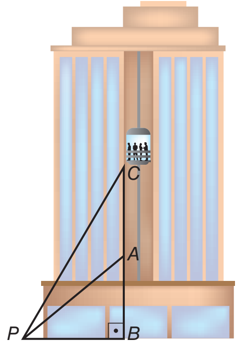
98 Dois pontos, A e D, estão alinhados com o centro B da base de uma torre de transmissão elétrica, de altura BC, tal que $AD = 35$ m, $AB = 80$ m, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto e os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ têm medidas α e $90° - \alpha$, respectivamente. Calcule a altura da torre.



99 Uma escada de 4 m de comprimento será apoiada em um ponto A de um piso plano e horizontal e em um ponto B de uma parede vertical. A distância do ponto A à parede pode variar de, no mínimo, $2\sqrt{2}$ m a, no máximo, $2\sqrt{3}$ m. As possíveis medidas α do ângulo agudo que a escada formará com o piso são tais que:

a) $30° \leqslant \alpha \leqslant 45°$
b) $30° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
c) $45° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
d) $45° \leqslant \alpha < 90°$
e) $60° \leqslant \alpha < 90°$

100 Um ponto P está no mesmo plano horizontal de um ponto B da trajetória vertical de um elevador panorâmico, com $PB = 10$ m, conforme a figura. Durante a subida, o elevador passa por dois pontos, A e C, com $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ m e $CB = 10\sqrt{3}$ m.



Enquanto o elevador E percorre a distância AC, a medida α do ângulo agudo $E\hat{P}B$ é tal que:

a) $30° \leqslant \alpha \leqslant 45°$
b) $45° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
c) $30° \leqslant \alpha \leqslant 60°$
d) $30° \leqslant \alpha < 90°$
e) $45° \leqslant \alpha < 90°$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Construa o gráfico da função $f(x) = |2x + 4| + 3$, dê seu domínio e seu conjunto imagem.

2 Uma indústria de óleo produziu 200.000 litros no seu primeiro ano de funcionamento. Em cada um dos anos seguintes, a produção aumentou 5% em relação ao ano anterior.

a) Determine o número de litros de óleo produzidos por essa empresa no n-ésimo ano de funcionamento.
b) Determine o número de litros de óleo produzidos por essa empresa desde sua inauguração até o final do n-ésimo ano de funcionamento.

Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

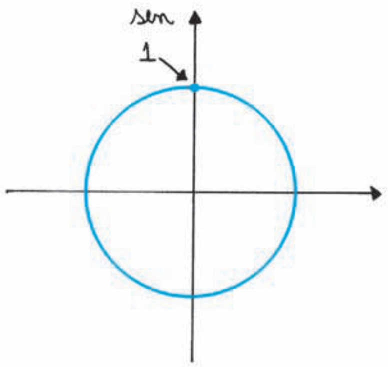
Exercício

Resolva a equação sen $2x = 1$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Substituindo $2x$ por α na equação, temos:

sen $\alpha = 1$



$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$ — Incompleto!

Assim:

$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Logo: $S = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Comentário

O aluno cometeu um erro ao admitir que α é uma medida da primeira volta positiva da circunferência trigonométrica. Para determinar o intervalo de variação de α, multiplicamos por 2 os membros da desigualdade $0 \leqslant x < 2\pi$, obtendo $0 \leqslant 2x < 4\pi$. Como $\alpha = 2x$, concluímos que $0 \leqslant \alpha < 4\pi$, ou seja, α é uma medida da primeira ou da segunda volta da circunferência trigonométrica.

Agora, refaça a resolução, corrigindo-a.

Capítulo

14

Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos

Em Astronomia, Topografia, Geografia etc., a necessidade de medir distâncias e ângulos, por meio da Trigonometria, estimulou o desenvolvimento de fórmulas auxiliares, visando a simplificação dos cálculos. Neste capítulo, estudaremos algumas dessas fórmulas.

14.1 Secante, cossecante e cotangente

Às razões inversas do cosseno, seno e tangente daremos os nomes de secante, cossecante e cotangente, respectivamente.

14.2 Identidades

Identidades trigonométricas são expressões que se igualam para qualquer valor possível atribuído à variável.

14.3 Adição de arcos

As identidades trigonométricas de adição de arcos são aplicadas no desenvolvimento de expressões trigonométricas cujos arcos são representados por uma soma ou uma diferença.

14.4 Arco duplo

As identidades trigonométricas de arco duplo são aplicadas no desenvolvimento de expressões trigonométricas cujos arcos são representados pela soma de dois valores iguais.

14.5 Resolução de triângulos

Resolver um triângulo significa determinar as medidas desconhecidas de lados ou ângulos do triângulo com base nas medidas conhecidas dos outros lados ou ângulos.

Astronauta Mark Lee flutuando perto do ônibus espacial durante missão em 1994.

Para pensar

De um ponto P do espaço, um astronauta vê a Terra sob um ângulo de medida θ, conforme mostra a figura ao lado.

Admitindo que o raio da Terra meça 6.400 km, obtenha uma equação que expresse a distância d entre o astronauta e a superfície da Terra, em função de θ.

Seção 14.1

Secante, cossecante e cotangente

Objetivo

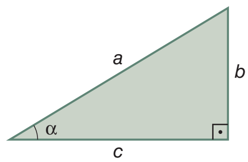
- **Aplicar** as razões inversas do seno, cosseno e tangente em cálculos numéricos e na resolução de equações e inequações.

Termos e conceitos

- secante
- cossecante
- cotangente

As razões trigonométricas inversas de um ângulo agudo

No triângulo retângulo, estudamos três razões trigonométricas: o seno, o cosseno e a tangente, que revisamos a seguir.



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

As inversas (ou recíprocas) dessas razões também são chamadas de razões trigonométricas e recebem nomes especiais, conforme as definições:

- a recíproca do cosseno é chamada de **secante** (sec):

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

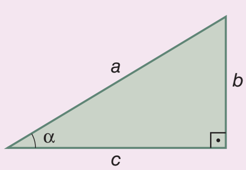
- a recíproca do seno é chamada de **cossecante** (cossec):

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

- a recíproca da tangente é chamada de **cotangente** (cotg):

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

Podemos concluir que, para qualquer ângulo agudo de medida α, temos:



$$\sec \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{\text{medida da hipotenusa}}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

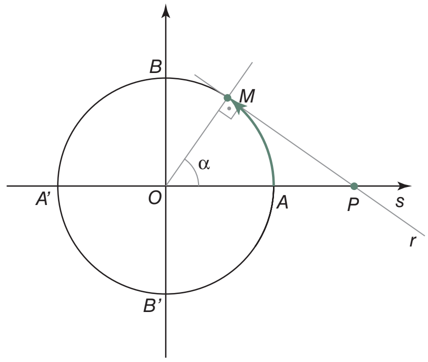
Nota:

Existem outras abreviações para cossecante (cosec ou csc) e para cotangente (cot).

Do mesmo modo que fizemos para o seno, o cosseno e a tangente, podemos representar as razões recíprocas no sistema trigonométrico. Partiremos, como sempre, da ideia de triângulo retângulo e estenderemos os conceitos para arcos trigonométricos.

Secante de um arco trigonométrico

Considere um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e a reta tangente à circunferência em M interceptando o eixo das abscissas no ponto P, conforme a figura abaixo.



No triângulo OPM temos:

$$\cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{OP} \Rightarrow OP = \frac{1}{\cos \alpha}$$

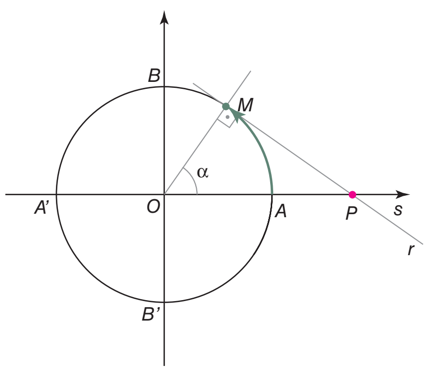
$$\therefore OP = \sec \alpha$$

Pela definição a seguir, generalizamos essa ideia para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das ordenadas.

Dado um arco trigonométrico $\widehat{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das ordenadas, define-se a **secante de α** por:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Geometricamente, a secante de α é a abscissa do ponto P, obtido pela intersecção do eixo das abscissas com a reta tangente à circunferência em M. Por isso, podemos nos referir ao eixo das abscissas como **eixo das secantes**.



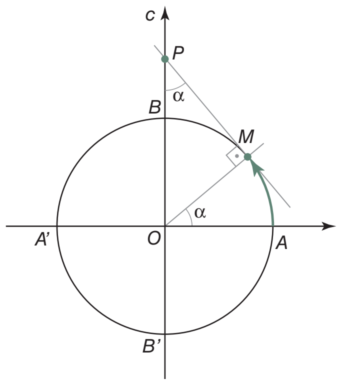
$\sec \alpha = x_P$

Essa definição permite concluir que:

- O ponto M não pode coincidir com B nem com B', pois as retas tangentes à circunferência em B ou B' não interceptam o eixo das secantes. Por isso, não existe a secante de um arco com extremidade B ou B'. Em outras palavras, existe a $\sec \alpha$ se, e somente se, $\cos \alpha \neq 0$.
- Qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 1º ou do 4º quadrante intercepta o eixo das secantes em um ponto de abscissa positiva; e qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 2º ou do 3º quadrante intercepta o eixo das secantes em um ponto de abscissa negativa. Logo, a secante é positiva no 1º e no 4º quadrante, e negativa no 2º e no 3º quadrante. Note que a secante tem o mesmo sinal que o cosseno.
- A secante assume qualquer valor no conjunto $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, e somente nesse conjunto, isto é, ela não assume valor no intervalo $]-1, 1[$.

Cossecante de um arco trigonométrico

Considere um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e a reta tangente à circunferência em M interceptando o eixo das ordenadas no ponto P, conforme a figura abaixo.



No triângulo retângulo OPM, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{OP} \Rightarrow OP = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

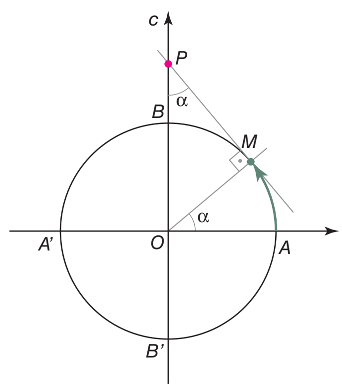
$$\therefore OP = \text{cossec}\,\alpha$$

Pela definição a seguir, generalizamos essa ideia para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das abscissas.

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das abscissas, define-se a **cossecante de α** por:

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

Geometricamente, a cossecante de α é a ordenada do ponto P, obtido pela intersecção do eixo das ordenadas com a reta tangente à circunferência em M. Por isso, podemos nos referir ao eixo das ordenadas como **eixo das cossecantes**.



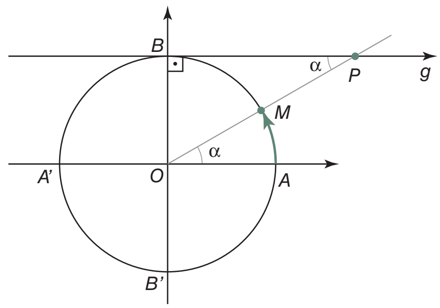
$\text{cossec}\,\alpha = y_P$

Essa definição permite concluir que:

- O ponto M não pode coincidir com A nem com A', pois as retas tangentes à circunferência em A ou A' não interceptam o eixo das cossecantes. Por isso, não existe a cossecante de um arco com extremidade A ou A'. Em outras palavras, existe a cossec α se, e somente se, sen $\alpha \neq 0$.
- Qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 1º ou do 2º quadrante intercepta o eixo das cossecantes em um ponto de ordenada positiva; e qualquer reta tangente à circunferência em um ponto do 3º ou do 4º quadrante intercepta o eixo das cossecantes em um ponto de ordenada negativa. Por isso, a cossecante é positiva no 1º e no 2º quadrante, e negativa no 3º e no 4º quadrante. Note que a cossecante tem o mesmo sinal do seno.
- A cossecante assume qualquer valor no conjunto $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, e somente nesse conjunto, isto é, ela não assume valor no intervalo $]-1, 1[$.

Cotangente de um arco trigonométrico

Na circunferência trigonométrica abaixo, considere um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Considere também o eixo real g, de origem $B(0, 1)$, tangente à circunferência em B, com a mesma unidade adotada nos eixos coordenados e a mesma orientação do eixo das abscissas. A reta $\overleftrightarrow{OM}$ intercepta o eixo g em P.



No triângulo OBP, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{OB}{BP} = \frac{1}{BP} \Rightarrow BP = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$$

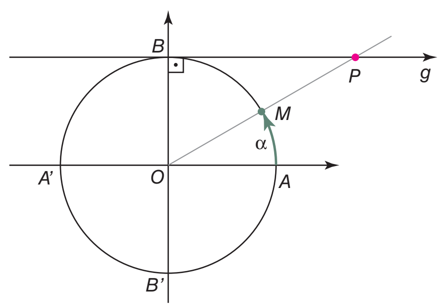
$\therefore BP = \text{cotg}\ \alpha$

Pela definição a seguir, generalizamos essa ideia para qualquer arco trigonométrico cuja extremidade não pertença ao eixo das abscissas.

Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não pertencente ao eixo das abscissas, define-se a **cotangente de α** por:

$$\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen}\ \alpha}$$

Geometricamente, a cotangente de α é a abscissa do ponto P, obtido pela intersecção da reta $\overleftrightarrow{OM}$ com o eixo das cotangentes. Por isso, o eixo g é chamado de **eixo das cotangentes**.



$\text{cotg}\ \alpha = x_P$

Essa definição permite concluir que:

- O ponto M não pode coincidir com A nem com A', pois as retas obtidas pelos prolongamentos dos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ não interceptam o eixo das cotangentes. Por isso, não existe a cotangente de um arco com extremidade A ou A'. Em outras palavras, existe a cotg α se, e somente se, sen $\alpha \neq 0$.
- Se, além de sen $\alpha \neq 0$, tivermos $\cos \alpha \neq 0$, então, $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\ \alpha}$.
- O prolongamento do raio que passa por qualquer ponto do 1º ou do 3º quadrante intercepta o eixo das cotangentes em um ponto de abscissa positiva; e o prolongamento do raio que passa por qualquer ponto do 2º ou do 4º quadrante intercepta o eixo das cotangentes em um ponto de abscissa negativa. Por isso, a cotangente é positiva no 1º e no 3º quadrante, e negativa no 2º e no 4º quadrante. Note que a cotangente tem o mesmo sinal que a tangente.
- A cotangente assume qualquer valor real.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Texto: *A origem dos nomes das razões trigonométricas.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Calcular:
a) cotg 30° b) sec 180° c) cossec 90°

Resolução

a) $\text{cotg } 30° = \dfrac{\cos 30°}{\text{sen } 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$

Veja outro modo de resolver:

$\text{cotg } 30° = \dfrac{1}{\text{tg } 30°} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$

b) $\sec 180° = \dfrac{1}{\cos 180°} = \dfrac{1}{-1} = -1$

c) $\text{cossec } 90° = \dfrac{1}{\text{sen } 90°} = \dfrac{1}{1} = 1$

2 Dado que $\text{cotg } x = 2$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcular cossec x.

Resolução
Usando a relação fundamental da Trigonometria, montamos o sistema:

$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 2 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$ que é equivalente a

$\begin{cases} \cos x = 2 \text{ sen } x & \text{(I)} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):
$\text{sen}^2 x + (2 \text{ sen } x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x + 4 \text{ sen}^2 x = 1$

$\therefore 5 \text{ sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{5}$

$\therefore \text{sen } x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como x é uma medida associada a um ponto do 3º quadrante, temos $\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Concluímos então:

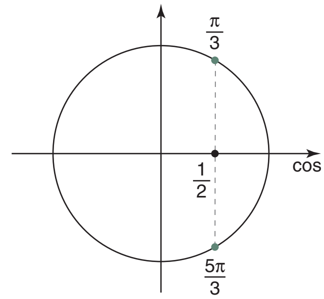
$\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = -\dfrac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

3 Resolver a equação $\sec x = 2$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução
Como $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, a condição de existência para essa equação é:
$\cos x \neq 0$
Desenvolvendo a equação, temos:

$\sec x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = 2$

$\therefore \cos x = \dfrac{1}{2}$



$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$

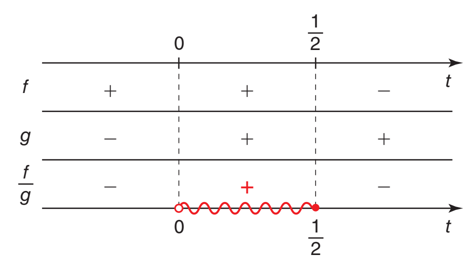
Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

4 Resolver a inequação $\text{cossec } x \geqslant 2$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução
$\text{cossec } x \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x} \geqslant 2$
Efetuando a mudança de variável $\text{sen } x = t$, obtemos:
$\dfrac{1}{t} \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{t} - 2 \geqslant 0$

$\therefore \dfrac{1 - 2t}{t} \geqslant 0$

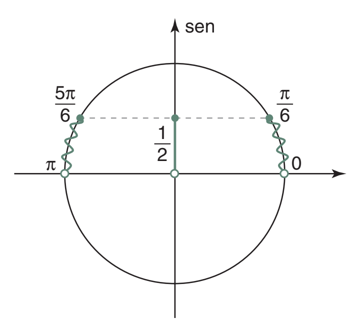
Condição de existência: $t \neq 0$
Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(t) = 1 - 2t$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{1 - 2t}{t}$, temos:



Note que $\dfrac{f(t)}{g(t)} \geqslant 0$ para $0 < t \leqslant \dfrac{1}{2}$, portanto,

$0 < \text{sen } x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Na circunferência trigonométrica, representamos:



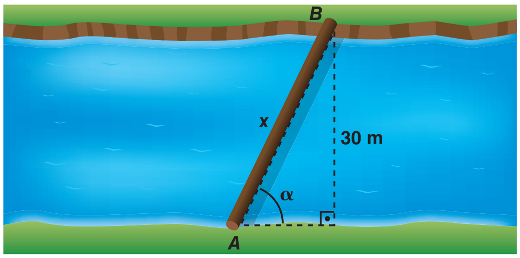
Assim, o conjunto solução da inequação é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} \leqslant x < \pi\right\}$

5 Em certo trecho de um rio, a largura é 30 m e as margens são paralelas. Uma ponte será construída em linha reta, oblíqua às margens do rio, ligando dois pontos, A e B, dessas margens. Sabe-se que $3 \sec \alpha = 4 \operatorname{tg} \alpha$, sendo α a medida do ângulo agudo que a ponte formará com cada uma das margens. Calcular a distância entre os pontos A e B.

Resolução

Indicando por x a distância entre A e B, esquematizamos:



$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{30}{x} \\ 3 \sec \alpha = 4 \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$ que é equivalente a

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{30}{x} \\ \dfrac{3}{\cos \alpha} = 4 \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{30}{x} & \text{(I)} \\ \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{4} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\frac{3}{4} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 40$$

Logo, a distância entre A e B é 40 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Calcule:

a) $\operatorname{cotg} 45°$
b) $\sec 0°$
c) $\operatorname{cossec} 270°$

2 Calcule o valor numérico da expressão: $E = \operatorname{cossec} x + \sec^2 2x + \operatorname{cotg} \frac{3x}{2}$, para $x = \frac{\pi}{6}$

3 Sendo $\sec x = 3$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{cossec} x$.

4 Dado que $\operatorname{cotg} x = 4$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\sec x$.

5 Resolva as equações para $0 < x < 2\pi$:

a) $\operatorname{cossec} x = 1$
b) $\sec x = -1$
c) $\operatorname{cossec} x = 2$
d) $\sec x = -2$
e) $\sec x = \sqrt{2}$
f) $\operatorname{cossec} x = -\sqrt{2}$

6 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação: $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x$

7 (PUC-PR) Se x pertence ao 4º quadrante e $\sec x = \sqrt{2}$, então a expressão $\dfrac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{cossec} x}{1 + \operatorname{cotg} x - \operatorname{cossec} x}$ é igual a:

a) -1
b) 0
c) 1
d) -2
e) 2

8 Resolva as inequações no universo $U = [0, 2\pi[$.

a) $\sec x \geqslant 2$
b) $\operatorname{cossec} x < 2$
c) $\sec x > -2$

9 Um cabo de aço esticado liga uma estaca P do solo, plano e horizontal, a um ponto Q de um poste vertical, com $PQ = 2{,}6$ m. Sendo α a medida do ângulo agudo que o cabo de aço forma com o solo, tem-se $\operatorname{cossec} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Calcule a distância entre a estaca e o poste.

Resolva os exercícios complementares 1 a 9, 29 e 30.

Seção 14.2

Identidades

Objetivo

- **Conceituar** identidades e apresentar algumas técnicas de demonstração.

Termo e conceito

- identidade

Vamos considerar o conjunto universo $\mathbb{R}$, dos números reais, e as igualdades:

- $3x = 6$ (I)
- $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$ (II)

A igualdade (I) torna-se uma proposição verdadeira **apenas para $x = 2$**. Já a igualdade (II) é uma proposição verdadeira para **qualquer valor real** atribuído à variável x. Por isso dizemos que a igualdade (I) não é uma identidade em $\mathbb{R}$ e que a igualdade (II) é uma identidade em $\mathbb{R}$.

Sendo f e g duas funções na variável x, dizemos que a igualdade $f(x) = g(x)$ é uma **identidade** num conjunto universo U se, e somente se, $f(\alpha) = g(\alpha)$ para qualquer α pertencente a U.

Exemplos

a) São identidades em $U = \mathbb{R}$ as seguintes igualdades:

- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $x + x = 2x$
- $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

b) Não são identidades no universo $U = \mathbb{R}$ as seguintes igualdades:

- $\frac{x}{x} = 1$, pois a sentença não se torna verdadeira para $x = 0$.
- $\sqrt{x^2} = x$, pois a sentença não se torna verdadeira para valores negativos de x, como $x = -3$.
- $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$, pois a sentença não se torna verdadeira para valores de x para os quais não existe a tangente, por exemplo, $x = \frac{\pi}{2}$.

Nota:

Uma igualdade pode não ser identidade em um universo, mas ser identidade em outro universo. Por exemplo, a igualdade $\frac{x}{x} = 1$ não é identidade em $\mathbb{R}$, porém é identidade em $\mathbb{R}^*$.

Técnicas para demonstração de identidades

Entre as várias técnicas para a demonstração de identidades, vamos estudar três.

1ª técnica

Para provar que uma igualdade $f(x) = g(x)$ é uma identidade em um conjunto universo U, podemos seguir estes passos:

Passo 1: provamos que f e g estão definidas em U, isto é, provamos que existem $f(x)$ e $g(x)$ para qualquer x do universo U.

Passo 2: escolhemos um dos membros da igualdade e, através de simplificações algébricas e de identidades já conhecidas, obtemos o outro membro.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6 Demonstrar que a igualdade $\text{tg } x + \text{cotg } x = \sec x \cdot \text{cossec } x$ é uma identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Vamos aplicar a 1ª técnica de demonstração.

Passo 1:

- Para existir a expressão $\text{tg } x + \text{cotg } x$, devemos ter $\cos x \neq 0$ e $\text{sen } x \neq 0$. Logo, o 1º membro da igualdade está definido em U.
- Para existir a expressão $\sec x \cdot \text{cossec } x$, devemos ter $\cos x \neq 0$ e $\text{sen } x \neq 0$. Portanto, o 2º membro da igualdade está definido em U.

Passo 2:

Partindo do 1º membro da igualdade, temos:

$$\overbrace{\text{tg } x + \text{cotg } x}^{1^{\text{o}} \text{ membro}} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x} = \frac{1}{\cos x \cdot \text{sen } x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\text{sen } x} = \underbrace{\sec x \cdot \text{cossec } x}_{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

Assim, pelos passos 1 e 2, provamos que a igualdade proposta é uma identidade em U.

2ª técnica

Para provar que uma igualdade $f(x) = g(x)$ é uma identidade em um conjunto universo U, podemos transformá-la na igualdade equivalente $f(x) - g(x) = 0$ e aplicar a 1ª técnica.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7 Demonstrar que a igualdade $\cos x \cdot \text{tg } x = \text{cossec } x \cdot \text{sen}^2 x$ é uma identidade no conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen } x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Pela 2ª técnica, transformamos a igualdade $\cos x \cdot \text{tg } x = \text{cossec } x \cdot \text{sen}^2 x$ na igualdade equivalente $\cos x \cdot \text{tg } x - \text{cossec } x \cdot \text{sen}^2 x = 0$. Então, aplicamos a 1ª técnica.

Passo 1:

- Para existir a expressão $\cos x \cdot \text{tg } x - \text{cossec } x \cdot \text{sen}^2 x$, devemos ter $\text{sen } x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$. Logo, o 1º membro da igualdade está definido em U.
- A expressão do 2º membro da igualdade é a constante zero; logo, está definida em U, pois não depende de x.

Passo 2:

Partindo do 1º membro da igualdade, temos:

$$\overbrace{\cos x \cdot \text{tg } x - \text{cossec } x \cdot \text{sen}^2 x}^{1^{\text{o}} \text{ membro}} = \cos x \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} - \frac{1}{\text{sen } x} \cdot \text{sen}^2 x = \text{sen } x - \text{sen } x = \underbrace{0}_{2^{\text{o}} \text{ membro}}$$

Pelos passos 1 e 2, provamos que a igualdade proposta é uma identidade em U.

3ª técnica

Para provar que uma igualdade é uma identidade em um conjunto universo U, podemos considerar outra identidade válida em U e, por meio de simplificações algébricas e de identidades já conhecidas, transformá-la na igualdade inicial.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8 Demonstrar que a igualdade $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2\, x$ é uma identidade em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Nesta demonstração, vamos aplicar a 3ª técnica.

Sabemos que $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$ é identidade em $\mathbb{R}$ e, portanto, também é identidade em U, pois $U \subset \mathbb{R}$.

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $\cos^2 x$ (podemos efetuar essa divisão, pois os elementos x de U são tais que $\cos x \neq 0$), temos:

$$\frac{\text{sen}^2\, x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \text{tg}^2\, x + 1 = \sec^2 x$$

Assim, mostramos que a igualdade proposta é uma identidade em U.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10 Verifique se as sentenças a seguir são ou não identidades nos respectivos universos U.

a) $5(x + 2) = 5x + 10$, em $U = \mathbb{R}$

b) $6x = 12$, em $U = \mathbb{R}$

c) $0 \cdot x = 0$, em $U = \mathbb{R}$

d) $\frac{0}{x} = 0$, em $U = \mathbb{R}$

e) $\frac{0}{x} = 0$, em $U = \mathbb{R}^*$

f) $1x = x$, em $U = \mathbb{R}$

g) $(x + 3)^2 = x^2 + 9$, em $U = \mathbb{R}$

h) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, em $U = \mathbb{R}$

i) $\sqrt{x^2} = |x|$, em $U = \mathbb{R}$

j) $\sqrt[3]{x^3} = x$, em $U = \mathbb{R}$

11 Assinale a única alternativa que apresenta uma identidade no respectivo conjunto universo U.

a) $\text{tg}\, x \cdot \text{cotg}\, x = 1$, em $U = \mathbb{R}$

b) $\sec x \cdot \cos x = 1$, em $U = \mathbb{R}$

c) $\cos x \cdot \text{tg}\, x = \text{sen}\, x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$

d) $\text{cossec}\, x \cdot \text{sen}\, x = 1$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$

e) $\sec^2 x \cdot \text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x = \sec x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$

12 Demonstre que cada uma das igualdades abaixo é identidade no respectivo universo U.

a) $\text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x = \sec x - \cos x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$

b) $\text{cossec}^2\, x = 1 + \text{cotg}^2\, x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0\}$

c) $\sec^2 x + \text{cossec}^2\, x = \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2\, x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \ \cos x \neq 0\}$

d) $\text{sen}^4\, x - \cos^4 x = 2\, \text{sen}^2\, x - 1$, em $U = \mathbb{R}$

Resolva os exercícios complementares 10 a 12.

Adição de arcos

Objetivo

- **Calcular** o seno, o cosseno e a tangente da soma ou da diferença de dois arcos.

Frequentemente teremos que operar com expressões trigonométricas em que os arcos são representados por adições, $a + b$, ou subtrações, $a - b$. Por isso, estudaremos neste item as identidades trigonométricas de adição de arcos. Para entender a necessidade dessas identidades, analise a sentença:

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$$

Essa sentença é uma identidade no universo U de todos os valores reais de a e b?

Para que fosse identidade em U, essa sentença deveria se tornar verdadeira para quaisquer valores reais atribuídos às variáveis a e b. Vejamos o que acontece, por exemplo, ao atribuirmos às variáveis a e b os valores π e $\frac{\pi}{2}$, respectivamente:

$$\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\pi + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1$$

$$\therefore \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \qquad \textbf{(Falso!)}$$

Essa igualdade é falsa, pois $\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$. Concluímos, então, que a sentença $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b$ não é identidade em U.

Conclusões análogas são obtidas para o cosseno e a tangente.

A seguir, apresentamos seis identidades, chamadas de **fórmulas de adição de arcos**, que nos auxiliarão no estudo de funções trigonométricas cujos arcos envolvam uma soma ou uma diferença.

I. $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$

II. $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$

III. $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

IV. $\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

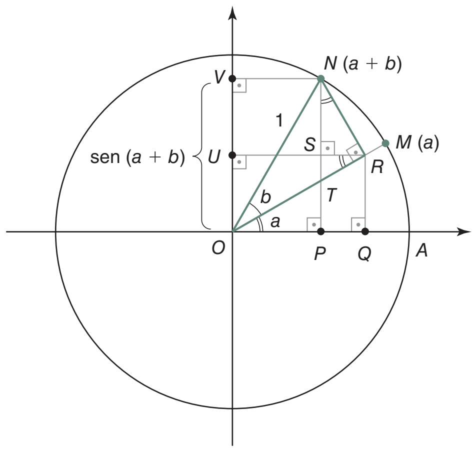
V. $\text{tg}\,(a + b) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

VI. $\text{tg}\,(a - b) = \dfrac{\text{tg}\,a - \text{tg}\,b}{1 + \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b}$

Consideramos obedecidas as condições de existência nas identidades V e VI.

Demonstração da identidade (I) no 1º quadrante

Vamos considerar no 1º quadrante os arcos trigonométricos $\widehat{AM}$ e $\widehat{AN}$, de medidas a e $a + b$ respectivamente, e traçar as perpendiculares auxiliares mostradas na figura ao lado:



Temos:

- $P\hat{O}T \cong S\hat{R}T$, pois $\overline{SR} \parallel \overline{OP}$.
- $T\hat{N}R \cong T\hat{O}P$, pois os triângulos TNR e TOP são semelhantes.

- Do triângulo ONR:

$$\begin{cases} \text{sen } b = \dfrac{RN}{ON} = \dfrac{RN}{1} \\ \cos b = \dfrac{OR}{ON} = \dfrac{OR}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RN = \text{sen } b \\ OR = \cos b \end{cases}$$

- Do triângulo RUO:

$$\text{sen } a = \frac{OU}{OR} = \frac{OU}{\cos b} \Rightarrow OU = \text{sen } a \cdot \cos b$$

- Do triângulo RSN:

$$\cos a = \frac{SN}{RN} = \frac{SN}{\text{sen } b} \Rightarrow SN = \text{sen } b \cdot \cos a$$

Como sen $(a + b) = OV = OU + UV$ e $UV = SN$, concluímos que:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

Notas:

1. Essa demonstração pode ser repetida nos demais quadrantes, considerando-se os módulos dos senos e cossenos.
2. Se a ou b for a medida de um arco com extremidade sobre um dos eixos coordenados, isto é, se a ou b for da forma $\frac{\pi}{2} \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$, constatamos a validade da fórmula substituindo diretamente a ou b por seu valor particular.

Demonstração da identidade (II)

Para essa demonstração, lembramos que a função seno é ímpar e a função cosseno é par, isto é, para qualquer número real x, temos:

$$\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$$
$$\cos (-x) = \cos x$$

Representando a expressão $a - b$ pela equivalente $a + (-b)$ e aplicando a identidade (I), temos:

$\text{sen } (a - b) = \text{sen } [a + (-b)] = \text{sen } a \cdot \cos (-b) + \text{sen } (-b) \cdot \cos a =$
$= \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$

Demonstração da identidade (III)

Lembrando que o cosseno de um arco é igual ao seno do complementar desse arco e aplicando a identidade (II), temos:

$\cos (a + b) = \text{sen} [90° - (a + b)] = \text{sen} [(90° - a) - b] =$

$= \text{sen} (90° - a) \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos (90° - a) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \text{sen}\, a =$

$= \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$

Demonstração da identidade (IV)

Representando a expressão $a - b$ pela equivalente $a + (-b)$ e aplicando a identidade (III), temos:

$\cos (a - b) = \cos [a + (-b)] = \cos a \cdot \cos (-b) - \text{sen}\, a \cdot \text{sen} (-b) =$

$= \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$

Demonstração da identidade (V)

$$\text{tg} (a + b) = \frac{\text{sen} (a + b)}{\cos (a + b)} = \frac{\text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}$$

Dividimos o numerador e o denominador dessa expressão por $\cos a \cdot \cos b$ (com $\cos a \cdot \cos b \neq 0$), obtendo:

$$\text{tg} (a + b) = \frac{\dfrac{\text{sen}\, a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} + \dfrac{\text{sen}\, b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \dfrac{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}$$

A demonstração da identidade (VI) é análoga à demonstração da identidade (V).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Calcular sen 75°.

Resolução

O arco de 75° é a soma dos arcos notáveis de 45° e 30°. Assim, temos:

$\text{sen}\, 75° = \text{sen}\, (45° + 30°) = \text{sen}\, 45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\, 30° \cdot \cos 45° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

10 Calcular cos 15°.

Resolução

O arco de 15° é a diferença entre os arcos notáveis de 45° e 30°. Então:

$\cos 15° = \cos (45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\, 45° \cdot \text{sen}\, 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Também poderíamos ter representado 15° como a diferença entre 60° e 45°.
(*Nota*: Observe que os valores obtidos nas questões 9 e 10 são iguais (sen 75° = cos 15°). Isso ocorreu porque os arcos de 75° e de 15° são complementares.)

11 Calcular o valor da expressão $E = \text{sen } 20° \cdot \cos 40° + \text{sen } 40° \cdot \cos 20°$.

Resolução

Comparando a expressão E com o 2º membro da identidade

$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$,

concluímos:

$$E = \text{sen } 20° \cdot \cos 40° + \text{sen } 40° \cdot \cos 20° = \text{sen } (20° + 40°) \Rightarrow E = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

12 Demonstrar que a sentença $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\text{sen } x$ é identidade em $\mathbb{R}$.

Resolução

Observando que os dois membros da igualdade estão definidos em $\mathbb{R}$, vamos desenvolver o 1º membro e chegar à expressão do 2º membro:

$$\overbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}^{\text{1º membro}} = \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen}\frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen } x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \text{sen } x = \underbrace{-\text{sen } x}_{\text{2º membro}}$$

13 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sqrt{3}$.

Resolução

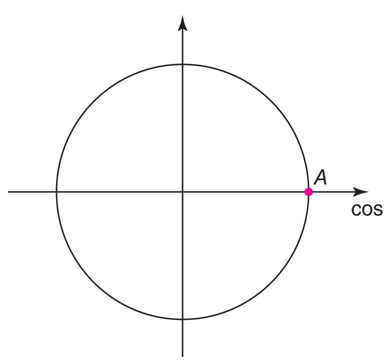
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \text{sen}\frac{\pi}{6} \cdot \text{sen } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x + \cancel{\frac{1}{2} \cdot \text{sen } x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \cancel{\frac{1}{2} \cdot \text{sen } x} = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \sqrt{3}$$

$$\therefore \cos x = 1$$

Há um único ponto da circunferência trigonométrica no qual o cosseno vale 1: é o ponto A, representado a seguir, cujos números reais associados são $x = 0 + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$$

14 Calcular tg 105°.

Resolução

O arco de 105° é a soma dos arcos notáveis de 60° e 45°. Assim, temos:

$$\text{tg } 105° = \text{tg } (60° + 45°) = \frac{\text{tg } 60° + \text{tg } 45°}{1 - \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}$$

Racionalizando o denominador, concluímos:

$$\text{tg } 105° = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

15 Demonstrar que a sentença tg $(-x) = -$tg x é uma identidade no universo

$U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{R}\right\}$.

Resolução

Passo 1: Observamos que os dois membros da igualdade estão definidos em U, pois, para que exista cada um deles, basta que cos $x \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{R}$.

Passo 2: Desenvolvemos um dos membros até obter o outro:

$$\text{tg}\,(-x) = \text{tg}\,(0 - x) = \frac{\text{tg}\,0 - \text{tg}\,x}{1 + \text{tg}\,0 \cdot \text{tg}\,x} = \frac{0 - \text{tg}\,x}{1 + 0 \cdot \text{tg}\,x} = -\text{tg}\,x$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 Calcule:

a) cos 75°

b) sen 15°

c) tg 75°

14 Demonstre que a sentença

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2\,\text{sen}\,x$$

é uma identidade em $\mathbb{R}$.

15 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

16 Calcule o valor de cada expressão.

a) sen 10° · cos 20° + sen 20° · cos 10°

b) cos 5° · cos 55° − sen 5° · sen 55°

c) $\dfrac{\text{tg}\,\frac{\pi}{3} - \text{tg}\,\frac{\pi}{12}}{1 + \text{tg}\,\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{12}}$

17 (Unifesp) A expressão

sen $(x - y) \cdot \cos y + \cos (x - y) \cdot$ sen y é equivalente a:

a) sen $(2x + y)$

b) cos $(2x)$

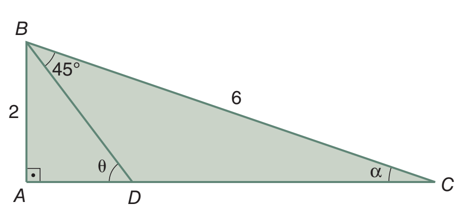
c) sen x

d) sen $(2x)$

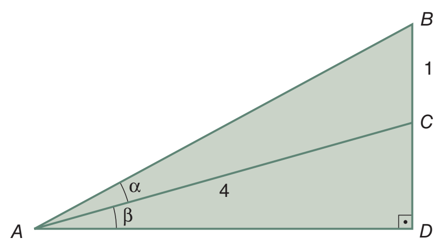
e) cos $(2x + 2y)$

18 Dado cos $x = \frac{5}{13}$, com $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule o valor de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

19 Determine a medida do segmento $\overline{BD}$ do triângulo retângulo ABC representado abaixo.



20 (UFSCar-SP) Na figura, $A\hat{D}B$ é reto, $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ medem α e β, respectivamente, $AC = 4$ dm e $BC = 1$ dm.



Sabendo que cos $(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$, o valor de sen α é:

a) $\frac{2}{3}$

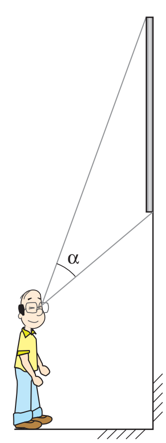
b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{6}$

21 Em um museu de arte, um visitante observa, em uma parede vertical, um quadro retangular de 2 m de altura. A base horizontal do quadro dista 2,70 m do piso, e os olhos do visitante estão a 1 m de distância da parede e a 1,70 m de altura em relação ao piso. Calcule a tangente do ângulo sob o qual o visitante vê toda a extensão vertical do quadro.



Resolva os exercícios complementares 13 a 21, 31 e 32.

Arco duplo

Objetivo

- **Estudar** as relações entre as razões trigonométricas dos arcos de medidas x e $2x$.

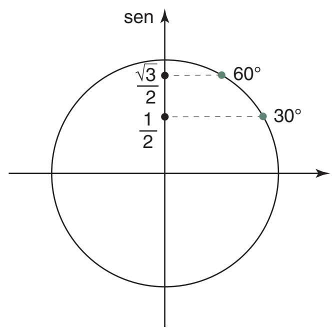
O objetivo da reflexão sobre a questão a seguir é destacar uma característica comum às funções trigonométricas:

Na função $y = \text{sen } x$, as medidas x dos arcos são diretamente proporcionais aos correspondentes valores y do seno?

Em outras palavras:

Na função $y = \text{sen } x$, podemos afirmar que $\text{sen }(kx) = k \text{ sen } x$ para qualquer constante real k?

Analisando um caso particular, vamos considerar um arco de 30° e um arco com o dobro de sua medida, isto é, um arco de 60°, e comparar os senos desses dois arcos.



Observando que $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ não é o dobro de $\text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}$, constatamos que:

$$\text{sen }(2 \cdot 30°) \neq 2 \cdot \text{sen } 30°$$

Concluímos que, na função $y = \text{sen } x$, as medidas x dos arcos **não** são diretamente proporcionais aos correspondentes valores y do **seno**.

A não proporcionalidade entre as medidas dos arcos e os correspondentes valores da função é uma característica comum a todas as funções trigonométricas. Por isso, para cada uma delas, é necessário um estudo dos **arcos múltiplos**: duplos, triplos, quádruplos etc. A seguir, apresentamos três importantes identidades envolvendo arcos duplos, sendo (I) e (II) identidades em $\mathbb{R}$ e (III) identidade em $U = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \text{ e } \mathbb{Z}\right\}$.

I. $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

II. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

III. $\text{tg } 2x = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$

Demonstrações

Substituindo $2x$ por $x + x$ e aplicando as fórmulas de adição de arcos, temos:

I. $\text{sen } 2x = \text{sen }(x + x) = \text{sen } x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$

II. $\cos 2x = \cos (x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \text{sen } x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

III. $\text{tg } 2x = \text{tg }(x + x) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } x} = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$

Como consequências de (II), temos as identidades abaixo, que serão demonstradas nos exercícios resolvidos 17 e 18.

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
- $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2\, x$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 Sendo $\text{sen}\, x = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular sen 2x.

Resolução

Sabemos que $\text{sen}\, 2x = 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$; logo, para esse cálculo, necessitamos do valor de cos x, além de $\text{sen}\, x = \frac{1}{3}$.

Pela relação fundamental, temos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\therefore \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, deduzimos que o cosseno é negativo, ou seja, $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Assim, concluímos:

$$\text{sen}\, 2x = 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\therefore \text{sen}\, 2x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

17 Dado que $\cos x = -\frac{2}{7}$, calcular cos 2x.

Resolução

Para o cálculo de cos 2x, que é dado por $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$, poderíamos determinar o valor de sen x, além de $\cos x = -\frac{2}{7}$. Porém, isso não é necessário, pois podemos expressar cos 2x em função de cos x, usando a identidade $\text{sen}^2\, x = 1 - \cos^2 x$. Observe:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Assim, concluímos:

$$\cos 2x = 2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^2 - 1 = -\frac{41}{49}$$

18 Dado que $\text{sen}\, x = -\frac{5}{6}$, calcular cos 2x.

Resolução

Vamos expressar cos 2x em função de sen x, do seguinte modo:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x = (1 - \text{sen}^2\, x) - \text{sen}^2\, x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2\, x$$

Assim, concluímos:

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{7}{18}$$

19 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\, 2x = 2\,\text{sen}\, x$.

Resolução

Substituímos sen 2x por $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$:

$2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x = 2\,\text{sen}\, x \Rightarrow \text{sen}\, x \cdot \cos x = \text{sen}\, x$

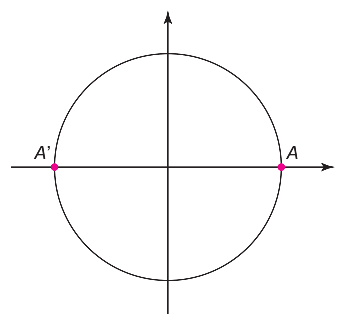
$\therefore \text{sen}\, x \cdot \cos x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x \cdot (\cos x - 1) = 0$

$\therefore \text{sen}\, x = 0$ ou $\cos x - 1 = 0$

(*Cuidado*: Na igualdade $\text{sen}\, x \cdot \cos x = \text{sen}\, x$ não podemos dividir ambos os membros por sen x, pois estaríamos supondo que $\text{sen}\, x \neq 0$ e, portanto, perderíamos a possibilidade $\text{sen}\, x = 0$.)

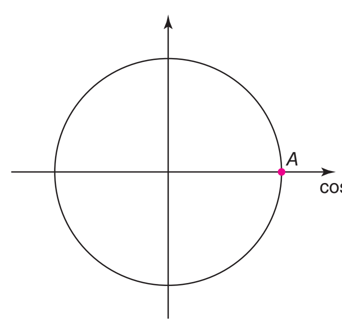
- $\text{sen}\, x = 0$

  Os pontos da circunferência trigonométrica nos quais o seno é nulo são A e A′, representados a seguir, cujos números reais associados são da forma $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (I).



- $\cos x = 1$

  Há um único ponto da circunferência trigonométrica no qual o cosseno é 1; é o ponto A, representado a seguir, cujos números reais associados são: $x = k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (II).



Observe que o conjunto (II) dos números reais da forma $x = k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, está contido no conjunto (I) dos números reais da forma $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Como o conjunto solução S da equação proposta deve ser a união de (I) e (II), concluímos que: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

20 Expressar sen $3x$ em função de sen x.

Resolução

Substituindo $3x$ por $(x + 2x)$ e aplicando as fórmulas de adição de arcos e de arco duplo, temos:

$\text{sen } 3x = \text{sen } (x + 2x) =$
$= \text{sen } x \cdot \cos 2x + \text{sen } 2x \cdot \cos x =$
$= \text{sen } x (\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x \cdot \cos x =$
$= \text{sen } x (1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x \cdot \cos^2 x =$
$= \text{sen } x (1 - 2 \text{ sen}^2 x) + 2 \text{ sen } x (1 - \text{sen}^2 x) =$
$= \text{sen } x - 2 \text{ sen}^3 x + 2 \text{ sen } x - 2 \text{ sen}^3 x \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen } 3x = 3 \text{ sen } x - 4 \text{ sen}^3 x$

21 Resolver a equação $\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$:

a) em $\mathbb{R}$. **b)** para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

a) Multiplicando por 2 ambos os membros da igualdade, obtemos:

$2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \text{sen } 2x = 1$

Para facilitar, efetuamos a mudança de variável: $2x = \alpha$. Feito isso, resolvemos a equação $\text{sen } \alpha = 1$ nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica, obtendo:

$\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Finalmente, retornamos à variável original x. Para isso, substituímos α por $2x$ na igualdade anterior:

$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Concluímos apresentando o conjunto solução:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Para obter as raízes da equação na 1ª volta positiva da circunferência trigonométrica, basta atribuir à variável k, na solução do item **a**, valores inteiros de modo que $0 \leqslant x < 2\pi$:

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

Nenhum outro valor de k nos interessa, pois, para qualquer outro inteiro k, teremos um valor de x fora do intervalo $[0, 2\pi[$. Portanto, o conjunto solução nesse intervalo é:

$S' = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

22 Aplicando as fórmulas de arco duplo, expressar:

a) $\cos x$ em função de $\text{sen } \frac{x}{2}$

b) $\cos x$ em função de $\cos \frac{x}{2}$

Resolução

a) Observando que a medida x é o dobro da medida $\frac{x}{2}$, temos:

$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} =$

$= 1 - \text{sen}^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \text{ sen}^2 \frac{x}{2}$

b) $\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen}^2 \frac{x}{2} =$

$= \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

Notas:

- Isolando $\text{sen } \frac{x}{2}$ e $\cos \frac{x}{2}$, nos itens **a** e **b**, respectivamente, obtemos as identidades a seguir, conhecidas como **fórmulas do arco metade**:

$\text{sen } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ e $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

- Dividindo membro a membro as identidades acima, obtemos a **fórmula do arco metade** para a tangente, considerando obedecidas as condições de existência:

$\text{tg } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

23 Calcular sen 22°30′.

Resolução

Pelo item **a** do exercício resolvido anterior, temos

$\cos x = 1 - 2 \text{ sen}^2 \frac{x}{2}$. Substituindo x por 45°, obtemos:

$\cos 45° = 1 - 2 \text{ sen}^2 22°30' \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2 \text{ sen}^2 22°30'$

$\therefore \text{sen}^2 22°30' = \dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

$\therefore \text{sen } 22°30' = \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

Como 22°30′ é medida de um arco do 1º quadrante, concluímos:

$\text{sen } 22°30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

24 Dado que $\cos x = \frac{5}{8}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $\cos \frac{x}{2}$.

Resolução

Pelo item **b** do exercício resolvido 22, temos

$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$. Logo:

$\frac{5}{8} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \dfrac{\frac{5}{8} + 1}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$

$\therefore \frac{13}{16} = \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{16}} = \pm\frac{\sqrt{13}}{4}$

Como x é um arco do 1º quadrante, $\frac{x}{2}$ também é um arco do 1º quadrante. Assim, concluímos que $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

25 Sabendo que $\cos \frac{x}{2} = \frac{4}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular sen x.

Resolução

Pelo item **b** do exercício resolvido 22, temos

$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$.

Logo:

$\cos x = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 \Rightarrow \cos x = \frac{7}{25}$

Substituindo cos x por $\frac{7}{25}$ na relação fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos:

$$\text{sen}^2 x + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \frac{49}{625}$$

$$\therefore \text{sen}^2 x = \frac{576}{625} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\sqrt{\frac{576}{625}} = \pm\frac{24}{25}$$

Como x é a medida de um arco do 1º quadrante, concluímos que sen $x = \frac{24}{25}$.

(*Nota*: Essa questão também pode ser resolvida pela fórmula de arco duplo: $\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$. Basta observar que, se $2\alpha = x$, então $\alpha = \frac{x}{2}$ e, portanto, $\text{sen } x = 2 \cdot \text{sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$. Resolva-a dessa maneira.)

26 Dado que tg $x = 6$, calcular tg $2x$.

Resolução

$$\text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot 6}{1 - 6^2} = -\frac{12}{35}$$

27 Dado que tg $3x = 4$, calcular tg $6x$.

Resolução

Substituindo $6x$ por $(2 \cdot 3x)$ e aplicando a fórmula de arco duplo, temos:

$$\text{tg } 6x = \text{tg } (2 \cdot 3x) = \frac{2 \text{ tg } 3x}{1 - \text{tg}^2 3x} = \frac{2 \cdot 4}{1 - 4^2} = -\frac{8}{15}$$

28 Sabendo que tg $x = 5$, calcular tg $3x$.

Resolução

Substituindo $3x$ por $(x + 2x)$ e aplicando as fórmulas de adição de arcos e de arco duplo, temos:

$$\text{tg } 3x = \text{tg } (x + 2x) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } 2x}{1 - \text{tg } x \cdot \text{tg } 2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg } 3x = \frac{\text{tg } x + \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}}{1 - \text{tg } x \cdot \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}}$$

Substituindo tg x por 5, concluímos:

$$\text{tg } 3x = \frac{5 + \dfrac{2 \cdot 5}{1 - 5^2}}{1 - 5 \cdot \dfrac{2 \cdot 5}{1 - 5^2}} = \frac{5 - \dfrac{5}{12}}{1 + \dfrac{25}{12}} = \frac{\dfrac{55}{12}}{\dfrac{37}{12}} = \frac{55}{37}$$

29 Aplicando a fórmula de arco duplo, expressar tg x em função de tg $\frac{x}{2}$.

Resolução

Observando que a medida x é o dobro da medida $\frac{x}{2}$, temos:

$$\text{tg } x = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{2 \text{ tg } \dfrac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$$

30 Dado que tg $\frac{x}{2} = 3$, calcular tg x.

Resolução

Pela questão resolvida anterior, temos:

$$\text{tg } x = \frac{2 \text{ tg } \dfrac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$$

Logo: $\text{tg } x = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 Calcule sen $2x$ e cos $2x$ sabendo que sen $x = \frac{1}{3}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

23 Dado que sen $x = 2 \cos x$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule sen $2x$.

24 Calcule cos $10x$ sabendo que cos $5x = \frac{5}{6}$.

25 O valor da expressão $\frac{\text{sen } 27°}{\text{sen } 9°} - \frac{\cos 27°}{\cos 9°}$ é:

a) sen 9°
b) sen 9° · cos 27°
c) cos 27°
d) 1
e) 2

26 (PUC-MG) Sendo $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$, o valor de $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ é:

a) 1
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{1}{4}$

27 Dado cos $x = k$, calcule cos $3x$ em função de k.

28 Sabendo que sen $x = a$, calcule sen $3x$ em função de a.

29 (Ufac) O número de soluções da equação sen $2x = \cos x$, no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

30 (Fuvest-SP) Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \text{sen}^2\, x$.

31 (PUC-RS) A expressão

$\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$ é idêntica a:

a) $2 \cos 2\alpha$

b) $2\, \text{sen}\, 2\alpha$

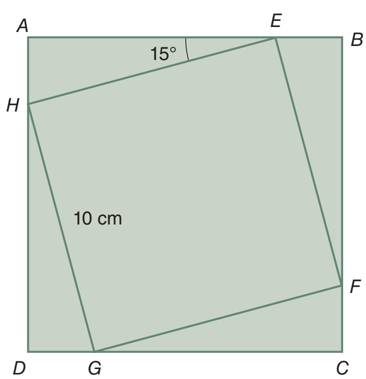
c) $\cos 2\alpha$

d) $\text{sen}\, 2\alpha$

e) $\cos 2\alpha - \text{sen}\, 2\alpha$

32 Um arco de medida x tem a extremidade no 3º quadrante da circunferência trigonométrica e verifica a equação $10 \cos 2x + \text{sen}\, x = 9$. Determine os valores de sen x e cos x.

33 A figura mostra um quadrado *EFGH* inscrito em um quadrado *ABCD*. Sabendo que o lado do quadrado menor mede 10 cm e que o ângulo $A\hat{E}H$ mede 15°, calcule a área do quadrado maior.



34 (Fuvest-SP) Se $\text{tg}\, \theta = 2$, o valor de $\dfrac{\cos 2\theta}{1 + \text{sen}\, 2\theta}$ é:

a) -3

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{3}{4}$

35 Dado que $\text{sen}\, \frac{x}{2} = 0{,}6$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule sen x.

36 Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{12}{13}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos \frac{x}{2}$ e $\text{sen}\, \frac{x}{2}$.

37 Calcule o valor de $\cos 22°30'$.

38 (Ufam) Dado $\text{tg}\, \frac{x}{2} = 2$. Então, tg x é igual a:

a) $-\frac{3}{5}$

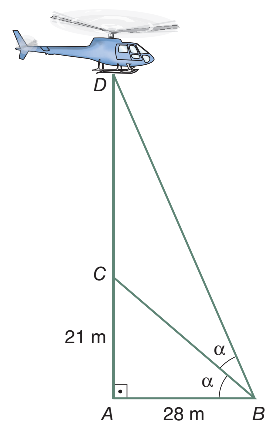
b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{4}{3}$

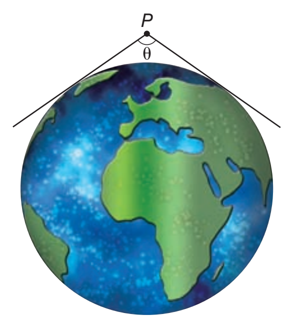
d) $\frac{4}{3}$

e) $-\frac{5}{3}$

39 Um helicóptero, que decola verticalmente a partir de um ponto *A* de uma pista plana e horizontal, é observado de um ponto *B* da pista, localizado a 28 m de *A*. Ao subir 21 m, até um ponto *C*, o aparelho é visto sob um ângulo de medida α com a pista; e, quando atinge um ponto *D*, é visto sob um ângulo de medida 2α, conforme a figura. A que altura, em relação à pista, está o helicóptero ao atingir o ponto *D*?



40 De um ponto *P* do espaço, um astronauta vê a Terra sob um ângulo de medida θ, conforme a figura:



Admitindo-se que o raio da Terra meça 6.400 km e que $\cos \theta = -0{,}62$, conclui-se que o ponto *P* está, em relação à superfície da Terra, a uma altura aproximada de:

a) 300 km

b) 530 km

c) 580 km

d) 623 km

e) 711 km

Resolva os exercícios complementares 33 e 34.

Resolução de triângulos

Objetivo

- **Determinar** as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo com base em elementos conhecidos.

Embora as razões trigonométricas sejam definidas apenas em triângulos retângulos, é possível aplicá-las em situações que envolvem triângulos não retângulos, considerando que podemos tanto decompor um triângulo não retângulo em dois triângulos retângulos quanto compor triângulos retângulos a partir de um triângulo não retângulo.

Exemplos

a)

O triângulo não retângulo *ABC* pode ser decomposto nos triângulos retângulos *HBC* e *HAC*.

b)

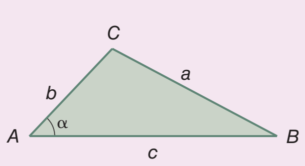
Com o triângulo não retângulo *ABC*, podemos compor os triângulos retângulos *HBC* e *HBA*.

Pelos processos de composição ou decomposição mostrados nesses exemplos, podemos relacionar as medidas dos ângulos internos com as medidas dos lados de um triângulo não retângulo através das razões trigonométricas, como comprovam os teoremas a seguir.

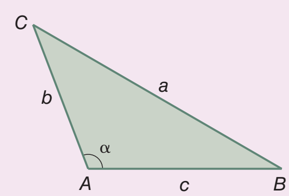
Lei dos cossenos

Sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo qualquer e α a medida do ângulo oposto ao lado de medida a, temos:

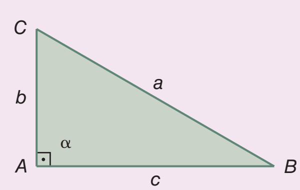
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$



$\alpha < 90°$



$\alpha > 90°$



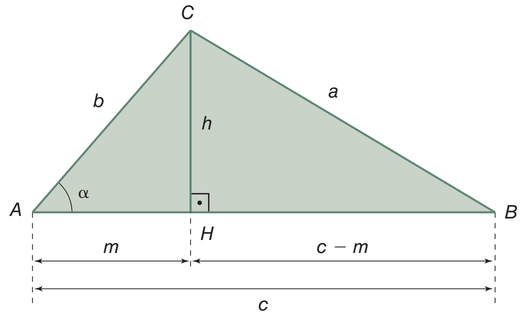
$\alpha = 90°$

Demonstração

1º caso: $\alpha < 90°$

Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, com $CH = h$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{AB}$, com $AH = m$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AB}$, com $BH = c - m$.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *HBC* e *HAC*, temos:

$h^2 + (c - m)^2 = a^2$ (I)

$h^2 + m^2 = b^2$ (II)

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$(c - m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 - 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$ (III)

Do triângulo *HAC*, temos: $\cos \alpha = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \alpha$ (IV)

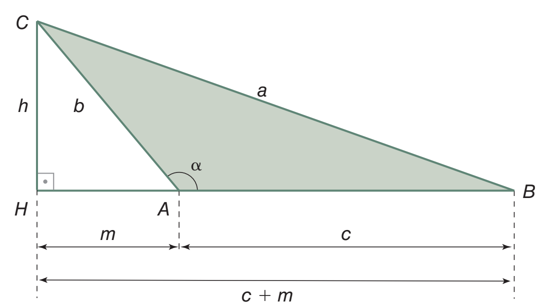
Substituindo (IV) em (III), concluímos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

2º caso: $\alpha > 90°$

Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, com $CH = h$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre a reta que contém o lado $\overline{AB}$, com $AH = m$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre a reta que contém o lado $\overline{AB}$, com $BH = c + m$.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *HBC* e *HAC*, temos:

$h^2 + (c + m)^2 = a^2$ (I)

$h^2 + m^2 = b^2$ (II)

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos:

$(c + m)^2 - m^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 + 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$ (III)

No triângulo *HAC*, a medida do ângulo $H\hat{A}C$ é $180° - \alpha$, portanto:

$\cos (180° - \alpha) = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos (180° - \alpha)$

Como $\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$, essa igualdade é equivalente a: $m = -b \cdot \cos \alpha$ (IV)

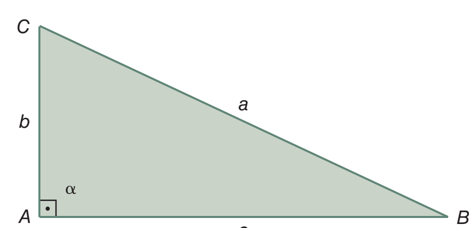
Substituindo (IV) em (III), concluímos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$

3º caso: $\alpha = 90°$

Observe que o teorema também vale para $\alpha = 90°$:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90°$

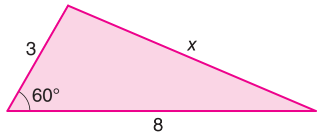
Como $\cos 90° = 0$, temos $a^2 = b^2 + c^2$, que é o teorema de Pitágoras.



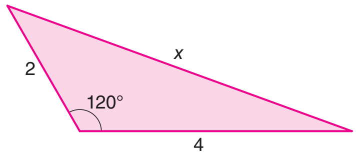
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

31 Determinar a medida x em cada figura:

a)



b)



Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

a) $x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60°$

$\therefore x^2 = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore x^2 = 49$

Logo: $x = 7$

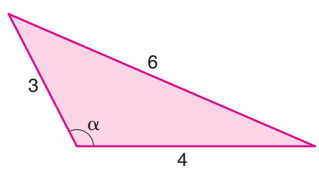
b) $x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120°$

$\therefore x^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore x^2 = 28$

Portanto: $x = 2\sqrt{7}$

32 Calcular o valor de $\cos \alpha$ na figura:



Resolução

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

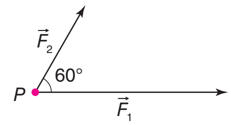
$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$

$\therefore 36 = 9 + 16 - 24 \cos \alpha$

$\therefore 24 \cos \alpha = -11$

Logo: $\cos \alpha = -\frac{11}{24}$

33 Sobre um ponto material P, são aplicadas apenas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, de intensidades $|\vec{F}_1| = 5$ N e $|\vec{F}_2| = 3$ N, conforme mostra a figura abaixo. Calcular a intensidade da força resultante que atua sobre esse ponto.



Resolução

Aprendemos em Física que a resultante $\vec{F}$ dessas forças é representada pela diagonal $\overline{PL}$ do paralelogramo $PQLM$ da figura 1 abaixo. Como dois ângulos consecutivos quaisquer de um paralelogramo são suplementares e $Q\hat{P}M$ mede 60°, deduzimos que $P\hat{Q}L$ mede 120°, conforme a figura 2.

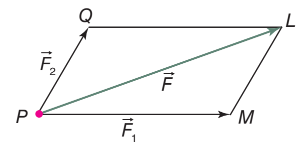


Figura 1

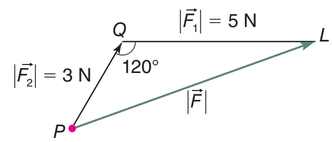


Figura 2

Pela lei dos cossenos, temos:

$|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2| \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{F}|^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 120°$

$\therefore |\vec{F}|^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow |\vec{F}|^2 = 49$

$\therefore |\vec{F}| = 7$

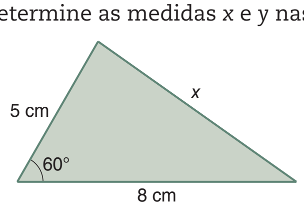
Logo, a intensidade da força resultante é 7 N.

(*Nota*: O símbolo N, que é a abreviação de newton, representa uma unidade de medida de força que expressa uma aceleração de 1 m/s^2 para um corpo de 1 kg, na direção e no sentido da força.)

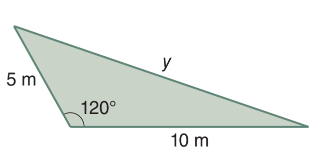
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

41 Determine as medidas x e y nas figuras:

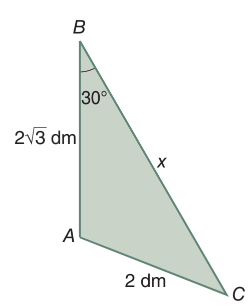
a)



b)



42 Calcule a medida x do lado $\overline{BC}$ do triângulo abaixo, observando que o ângulo $B\hat{A}C$ é obtuso.



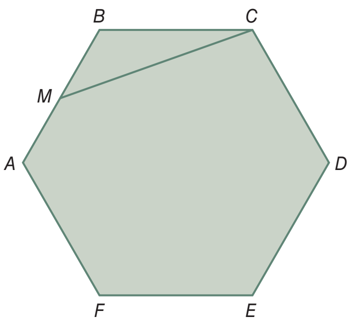
43 Os lados de um triângulo medem 4 cm, 5 cm e 7 cm.

a) Calcule o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.

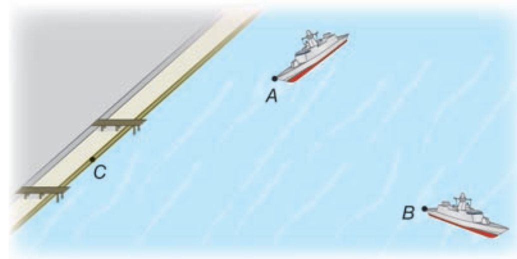
b) O maior ângulo interno desse triângulo é agudo, reto ou obtuso? Justifique sua resposta.

44 Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 5 cm e 10 cm e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule as medidas das diagonais desse paralelogramo.

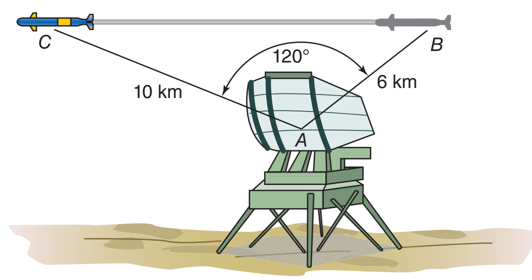
45 A figura abaixo representa um hexágono regular *ABCDEF* com 6 cm de lado. Sendo *M* o ponto médio do lado $\overline{AB}$, calcule a medida do segmento $\overline{MC}$.



46 Dois navios, *A* e *B*, estão ancorados nas proximidades de um cais. De um ponto *C* do cais observam-se os dois navios de modo que $m(A\hat{C}B) = 60°$, $CA = 5$ km e $CB = 8$ km. Calcule a distância entre os dois navios.



47 Um míssil em trajetória retilínea foi detectado por um radar *A* em dois pontos, *B* e *C*, com $AB = 6$ km, $AC = 10$ km e $m(C\hat{A}B) = 120°$. Determine a distância percorrida pelo míssil do ponto *B* ao ponto *C*.

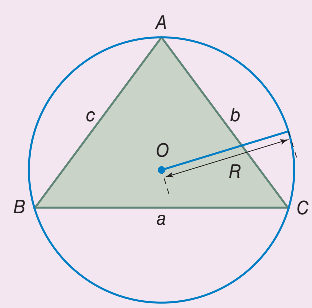


Resolva os exercícios complementares 22 a 28 e 35.

Lei dos senos

Sendo $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ as medidas dos lados de um triângulo *ABC* e *R* o raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$



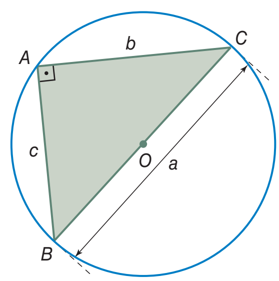
Demonstração

1º caso: O triângulo é retângulo.

Note que, nesse caso, o centro *O* da circunferência circunscrita pertence à hipotenusa do triângulo e, portanto, $a = 2R$. Assim, temos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$



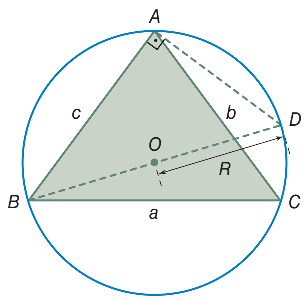
Como $a = 2R$, temos: $\dfrac{a}{2R} = 1$

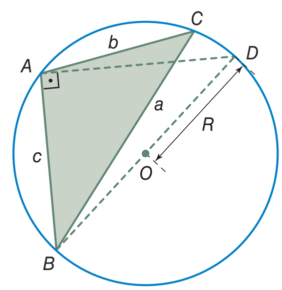
Mas $1 = \text{sen } 90° = \text{sen } \hat{A}$, logo: $\dfrac{a}{2R} = \text{sen } \hat{A} \Rightarrow 2R = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}}$

Concluímos que: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

2º caso: O triângulo não é retângulo.

Nesse caso, o centro O da circunferência circunscrita é um ponto interior ou exterior ao triângulo.





Se $\overline{BD}$ é um diâmetro dessa circunferência, o ângulo $D\hat{A}B$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Então: $\text{sen } \hat{D} = \dfrac{c}{2R}$

Os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois estão inscritos na circunferência e determinam o mesmo arco. Logo:

$$\text{sen } \hat{D} = \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

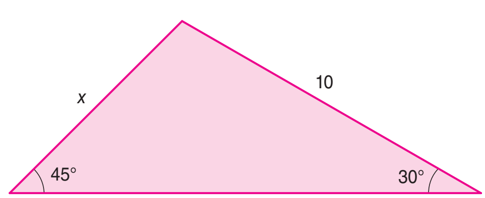
De maneira análoga, traçando por A um diâmetro $\overline{AD'}$ e por C um diâmetro $\overline{CD''}$, temos:

$$2R = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \quad \text{e} \quad 2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}}$$

Concluímos que: $2R = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

34 Determinar a medida x na figura:



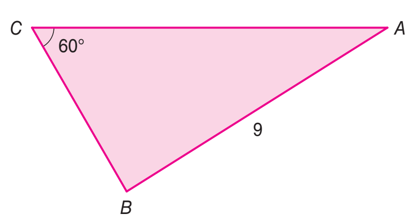
Resolução

Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{10}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\therefore x = 5\sqrt{2}$

35 Calcular a medida R do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC abaixo.



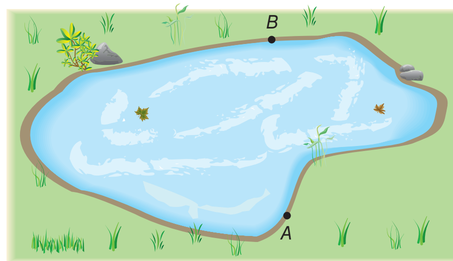
Resolução

Pela lei dos senos, a razão entre a medida de um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Logo:

$$\frac{9}{\text{sen } 60°} = 2R \Rightarrow \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

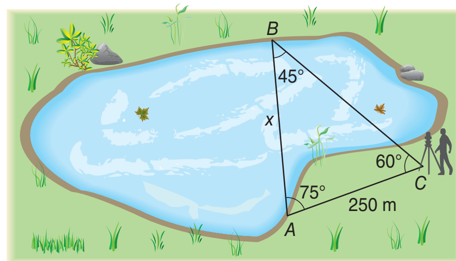
$\therefore R = 3\sqrt{3}$

36 Dois pontos, A e B, estão localizados na margem de um lago, conforme mostra a figura ao lado.
Para calcular a distância entre esses pontos, um topógrafo caminhou em linha reta 250 m a partir de A até um ponto C, com $m(B\hat{A}C) = 75°$. A seguir, mediu o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 60°. Com esses dados, obteve a distância AB. Qual é essa distância em metro?



Resolução

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°; logo, no triângulo ABC, deduzimos que $A\hat{B}C$ mede 45°. Sendo x a distância, em metro, entre os pontos A e B, temos o esquema ao lado.



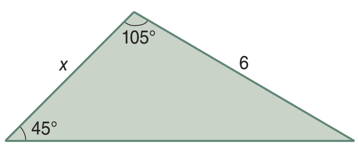
Pela lei dos senos, concluímos: $\dfrac{x}{\text{sen } 60°} = \dfrac{250}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{250}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore x = \dfrac{250\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 125\sqrt{6}$

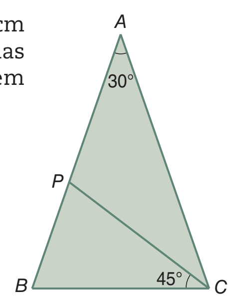
A distância AB é $125\sqrt{6}$ m ou, aproximadamente, 306 m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

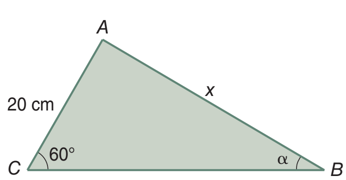
48 Determine a medida x na figura:



49 No triângulo ao lado, $BC = 2$ cm e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm medidas iguais. Calcule a medida, em centímetro, do segmento $\overline{BP}$.

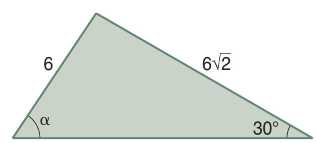


50 No triângulo ABC representado abaixo, são dados $AC = 20$ cm e $\cos \alpha = 0{,}6$. Calcule a medida x do lado $\overline{AB}$.

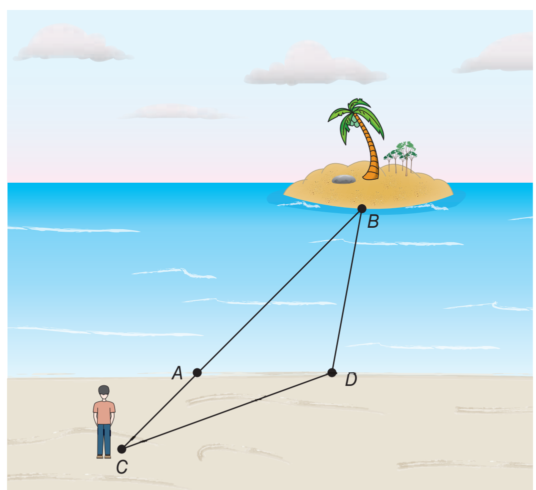


51 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo abaixo.

52 Determine a medida α do ângulo agudo no triângulo a seguir.



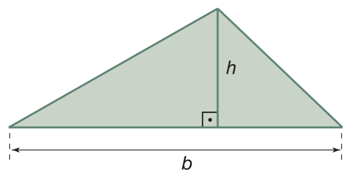
53 Para calcular a distância entre um ponto A de uma praia e uma ilhota B, um observador afastou-se 30 m de A, sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C, e depois caminhou 100 m em linha reta até o ponto D, conforme mostra a figura. A seguir, mediu os ângulos $D\hat{C}B$ e $B\hat{D}C$ obtendo, respectivamente, 40° e 110°. Adotando a aproximação sen 110° = 0,94, qual é a distância entre A e B?



Resolva os exercícios complementares 36 e 37.

Área de um triângulo em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido por eles

Sabemos que a área A de um triângulo pode ser calculada como metade do produto das medidas da base e da altura relativa a essa base:

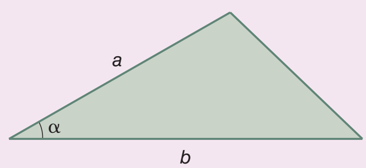


$$A = \frac{bh}{2}$$

Agora faremos o cálculo dessa área de outra maneira. Vamos calcular a área do triângulo em função das medidas de dois lados e da medida do ângulo determinado por eles, conforme o teorema a seguir.

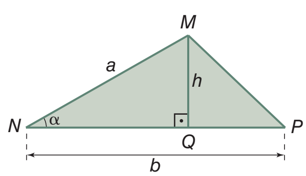
Se dois lados de um triângulo têm medidas a e b e o ângulo determinado por esses lados tem medida α, então a área A do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\ \alpha$$

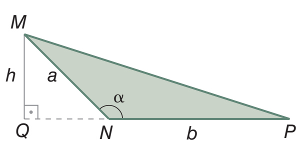


Demonstração

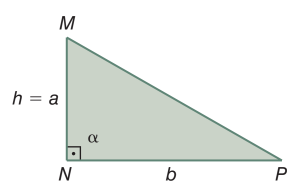
Indicando por MNP um triângulo com $NM = a$, $NP = b$ e $m(M\hat{N}P) = \alpha$, seja h a medida da altura $\overline{MQ}$ relativa ao lado $\overline{NP}$:



$\alpha < 90°$



$\alpha > 90°$



$\alpha = 90°$

Em qualquer um dos três casos, a área A do triângulo é dada por:

$$A = \frac{bh}{2} \quad \text{(I)}$$

1º caso: $\alpha < 90°$

No triângulo MNQ, $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{h}{a}$, ou ainda:

$$h = a \cdot \text{sen}\ \alpha \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos a área do triângulo em função de a, b e α:

$$A = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen}\ \alpha}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\ \alpha$$

2º caso: $\alpha > 90°$

No triângulo *MNQ*, $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \dfrac{h}{a}$, ou ainda:

$$h = a \cdot \text{sen}\,(180° - \alpha)$$

Mas sabemos que $\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$. Logo:

$$h = a \cdot \text{sen}\,\alpha \quad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I), obtemos a área do triângulo em função de a, b e α:

$$A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\,\alpha$$

3º caso: $\alpha = 90°$

Temos: $A = \dfrac{bh}{2} = \dfrac{bh \cdot 1}{2}$

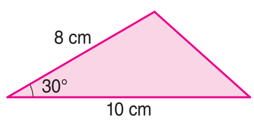
Como $h = a$, $1 = \text{sen}\,90°$, $\alpha = 90°$, concluímos:

$$A = \frac{b \cdot a \cdot \text{sen}\,90°}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \text{sen}\,\alpha$$

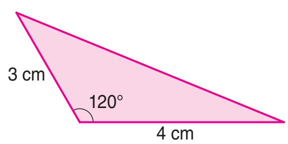
EXERCÍCIO RESOLVIDO

37 Calcular a área de cada triângulo.

a)



b)



Resolução

a) A área A, em centímetro quadrado, é dada por:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{sen}\,30° = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2}$, ou seja, $A = 20\ \text{cm}^2$.

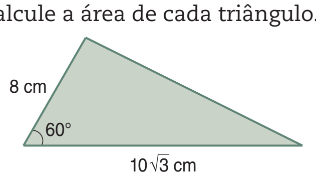
b) A área A, em centímetro quadrado, é dada por:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \text{sen}\,120° = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ou seja, $A = 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

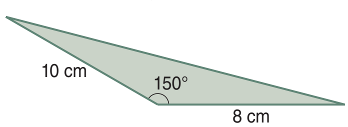
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

54 Calcule a área de cada triângulo.

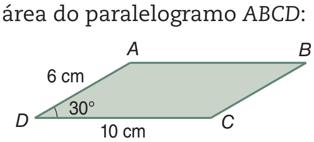
a)



b)

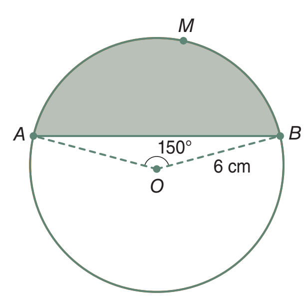


55 Calcule a área do paralelogramo *ABCD*:



56 Em um triângulo *ABC* de 5 dm^2 de área, temos $AB = 4$ dm e $AC = 5$ dm. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

57 Calcule a área do segmento circular *AMB* no círculo de centro *O* e raio igual a 6 cm:



(*Nota*: Toda corda $\overline{AB}$, com $A \neq B$, de um círculo de centro O divide-o em duas regiões chamadas de **segmentos circulares**. Se um segmento circular *AMB* é menor que o semicírculo, sua área é a diferença entre a área do setor circular *OAMB* e a área do triângulo *AOB*.)

Resolva os exercícios complementares 38 e 39.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Calcule o valor da expressão:
$E = \text{cotg}^2\, 60° + \sec 300° - \text{cossec}\, 330°$

2 Calcule cotg x sabendo que cossec x = 1,25 e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

3 Sabendo que cotg x = −2,4 e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule a soma sen x + cos x.

4 (Uece) Se $\text{cotg}\, \theta + \text{tg}\, \theta = 8$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $(\text{sen}\, \theta + \cos \theta)^2$ é igual a:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

5 (UFRR) Sabendo que $\text{tg}\, x = -\frac{1}{3}$ e sen x < 0, podemos afirmar que:

a) $\text{cossec}\, x = -\sqrt{10}$
b) $\text{cossec}\, x = \sqrt{10}$
c) $\text{cossec}\, x = -\sqrt{3}$
d) $\text{cossec}\, x = \sqrt{3}$
e) $\text{cossec}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

6 (Mackenzie-SP) A soma de todas as soluções da equação $\text{tg}\, a + \text{cotg}\, a = 2$, com $0 \leq a \leq 2\pi$, é:

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{7\pi}{4}$ e) $\frac{7\pi}{3}$

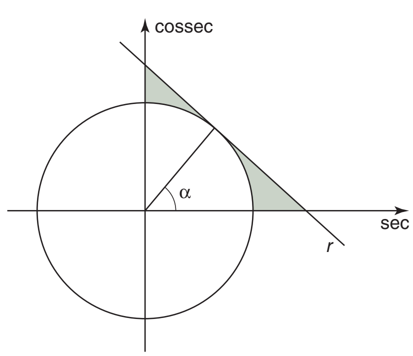
7 (UFSCar-SP) O valor de x, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tal que $4(1 - \text{sen}^2\, x)(\sec^2 x - 1) = 3$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) 0

8 Resolva as inequações no universo $U = [0, 2\pi[$.

a) $\sec x \leq \sqrt{2}$
b) $\text{cossec}\, x > -\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}\, \sec x > 1$

9 Na circunferência trigonométrica abaixo, estão representados os eixos das secantes e das cossecantes. A reta *r* tangencia a circunferência na extremidade do arco de medida α, com 0° < α < 90°. Calcule, em função de α, a área da região colorida.



10 Demonstre que cada uma das igualdades abaixo é identidade no respectivo universo *U*.

a) $(\sec x - \cos x)(\text{cossec}\, x - \text{sen}\, x)(\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x) = 1$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

b) $\frac{1 + \cos x}{\text{sen}\, x} + \frac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x} = 2\, \text{cossec}\, x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq -1\}$

c) $\frac{\text{cossec}\, (\pi - x)}{\sec\, (-x)} - \text{cotg}\, (\pi + x) = 0$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

d) $(\text{tg}\, x + \text{cotg}\, x)\, \text{sen}\, x = \sec x$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \cdot \cos x \neq 0\}$

e) $(\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2\, x - 1) = 1$, em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

11 No exercício resolvido 8 e no exercício proposto 12.b, foram demonstradas as identidades:
$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2\, x$, para $\cos x \neq 0$; e
$\text{cossec}^2\, x = 1 + \text{cotg}^2\, x$, para $\text{sen}\, x \neq 0$. Usando essas identidades, resolva os exercícios apresentados nos itens a seguir.

a) Sabendo que tg x = 3 e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule sec x e cos x.

b) Sabendo que $\text{cotg}\, x = \sqrt{15}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule cossec x e sen x.

c) Determine *a*, com $a \in \mathbb{R}$, de modo que $\sec x = a + 1$ e $\text{tg}\, x = \sqrt{a^2 + 2}$.

d) Demonstre que a igualdade $\frac{1}{1 + \text{tg}^2\, x} + \frac{1}{1 + \text{cotg}^2\, x} = 1$ é identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\, x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$.

e) Demonstre que a igualdade $\text{sen}^2\, x + \text{sen}^2\, x \cdot \text{tg}^2\, x = \text{tg}^2\, x$ é identidade em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

12 (Ufac) Seja $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$. Então, a expressão $\sec x \cdot \cos x - \text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \cos^2 x$ é igual a:

a) $1 - \text{sen}\, \pi$
b) $1 + \cos 3\pi$
c) $1 - \cos \pi$
d) $1 + 2 \cos \pi$
e) $1 - 3 \cos \pi$

13 Calcule:

a) sen 165°
b) cos 105°
c) tg 240°
d) cotg 15°
e) cossec 255°
f) sec (−15°)

14 Aplicando as fórmulas da adição de arcos, complete a tabela:

	20°	40°	45°	65°
sen	0,3		0,7	
cos	0,9		0,7	

(*Nota*: Os valores apresentados nessa tabela são aproximados.)

15 Aplicando as fórmulas de adição de arcos, complete a tabela:

	13°	22°	35°	57°	70°
tg		0,4	0,7		

(*Nota*: Os valores apresentados nessa tabela são aproximados.)

16 (UFMA) A equação $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, com $0 \leq x < 2\pi$:

a) tem infinitas soluções.
b) não tem solução.
c) admite apenas as soluções $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.
d) admite apenas as soluções $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.
e) admite apenas as soluções $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

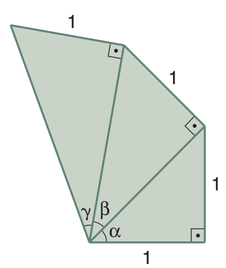
17 Obtenha o valor de $E = \text{sen } 6x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 6x$ para $x = \frac{\pi}{10}$.

18 Sendo $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x - \text{sen } x \cdot \text{sen } 3x$, calcule $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

19 (Ufam) Se $\text{sen } x = -\frac{3}{5}$, então $\text{sen }(x + \pi)$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $-\frac{3}{5}$ **c)** $\frac{5}{3}$ **d)** $-\frac{5}{3}$ **e)** $\frac{4}{5}$

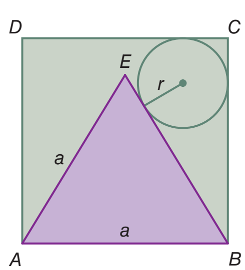
20 (UFRN) A figura abaixo é formada por três triângulos retângulos. As medidas dos catetos do primeiro triângulo são iguais a 1. Nos demais triângulos, um dos catetos é igual à hipotenusa do triângulo anterior e o outro cateto tem medida igual a 1.



Considerando os ângulos α, β e γ na figura, atenda às solicitações seguintes.

a) Calcule tg α, tg β e tg γ.
b) Calcule os valores de α e γ.
c) Justifique por que $105° < \alpha + \beta + \gamma < 120°$.

21 (UFMS) Na figura abaixo, estão representados um quadrado *ABCD*, um triângulo equilátero *ABE*, ambos de lado *a* unidades de comprimento e uma circunferência de raio *r* unidades de comprimento.



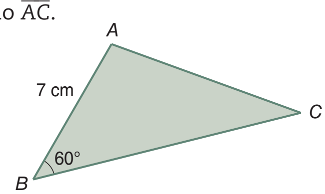
Considerando que a circunferência é tangente ao lado do triângulo e a dois lados consecutivos do quadrado, calcule a medida *r*.

22 Em um triângulo *ABC*, tem-se $m(C\hat{A}B) = 150°$, $CA = 5\sqrt{3}$ cm e $CB = 5\sqrt{7}$ cm. Determine a medida do lado $\overline{AB}$.

23 (UFMA) Um losango tem um ângulo agudo de 60° e a diagonal maior medindo $3\sqrt{2}$ m. Nessas condições, a medida do lado do losango é:

a) 2 m **c)** $\sqrt{2}$ m **e)** $\sqrt{6}$ m
b) 3 m **d)** $\sqrt{3}$ m

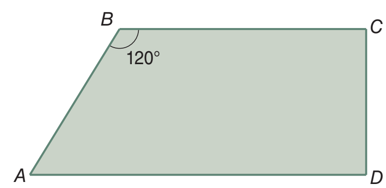
24 No triângulo *ABC*, abaixo, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 60°, o lado $\overline{AB}$ mede 7 cm e o lado $\overline{BC}$ tem 1 cm a mais que o lado $\overline{AC}$.



A medida do lado $\overline{BC}$ é:

a) 8,6 cm **c)** 8,4 cm **e)** 8,5 cm
b) 9,6 cm **d)** 9,4 cm

25 (UFMG) Esta figura representa o quadrilátero *ABCD*:



Sabe-se que

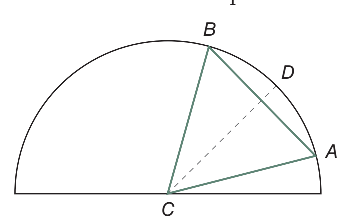
- $AB = 1$ cm e $AD = 2$ cm;
- o ângulo $A\hat{B}C$ mede 120°; e
- o segmento $\overline{CD}$ é perpendicular aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Então, é correto afirmar que o comprimento do segmento $\overline{BD}$ é:

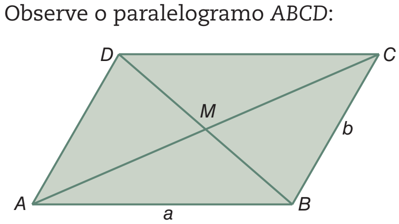
a) $\sqrt{3}$ cm **b)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm **c)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm **d)** $\sqrt{2}$ cm

26 (Fuvest-SP) Em uma semicircunferência de centro *C* e raio *R*, inscreve-se um triângulo equilátero *ABC*. Seja *D* o ponto onde a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda $\overline{AD}$ é:

a) $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
b) $R\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
c) $R\sqrt{\sqrt{2} - 1}$
d) $R\sqrt{\sqrt{3} - 1}$
e) $R\sqrt{3 - \sqrt{2}}$



27 (Uerj) Observe o paralelogramo *ABCD*:



Calcule $(AC)^2 + (BD)^2$ em função de $AB = a$ e $BC = b$.

28 A medida do lado de um dodecágono regular inscrito em uma circunferência de 4 cm de raio é:

a) 4 cm

b) $4\sqrt{3}$ cm

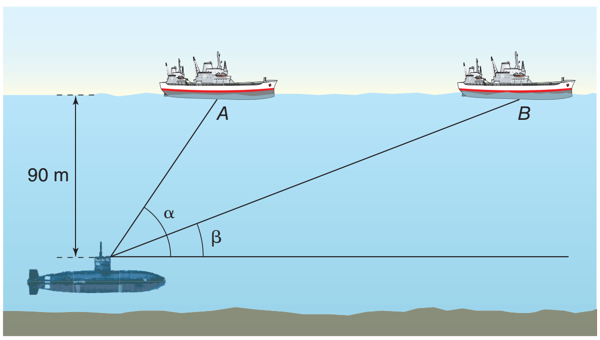
c) $4\sqrt{3 - \sqrt{2}}$ cm

d) $4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm

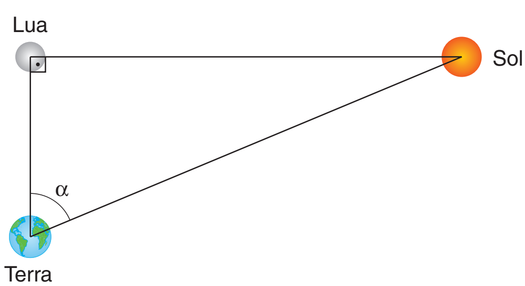
e) $4\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ cm

Exercícios contextualizados

29 Um submarino, a 90 m de profundidade, detecta à sua frente dois navios sob ângulos de medidas α e β com a horizontal, conforme a figura, tal que $\text{cotg}\ \alpha = \frac{1}{6}$ e $\sec \beta = \frac{13}{12}$. Calcule a distância entre os navios.



30 No instante em que observamos a Lua em quarto crescente, os raios solares são perpendiculares à reta que passa pelo centro da Terra e pelo centro da Lua, conforme a figura:



Considere esta tabela:

α	sec α
89,4°	95,49
89,5°	114,59
89,6°	143,24
89,7°	190,98
89,8°	286,47
89,9°	572,95

Supondo que, no momento da observação, a distância da Terra à Lua seja $3{,}85 \cdot 10^5$ km e que a distância entre a Terra e o Sol seja $1{,}5 \cdot 10^8$ km, podemos afirmar que a medida α do ângulo agudo formado pelas direções Terra-Lua e Terra-Sol obedece à condição:

a) $89{,}4° < \alpha < 89{,}5°$

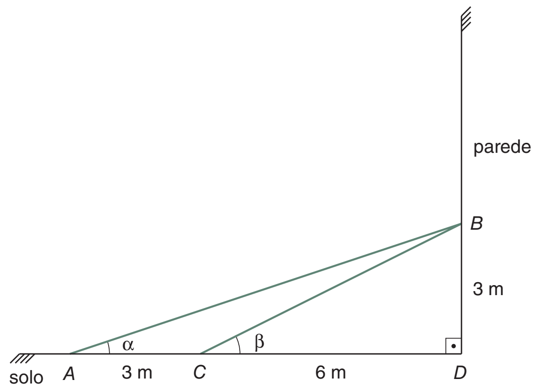
b) $89{,}5° < \alpha < 89{,}6°$

c) $89{,}6° < \alpha < 89{,}7°$

d) $89{,}7° < \alpha < 89{,}8°$

e) $89{,}8° < \alpha < 89{,}9°$

31 Duas vigas retas, AB e CB, escoram uma parede vertical, de modo que os pontos A e C do solo estão em uma reta horizontal que passa por um ponto D da parede, conforme mostra a figura a seguir.

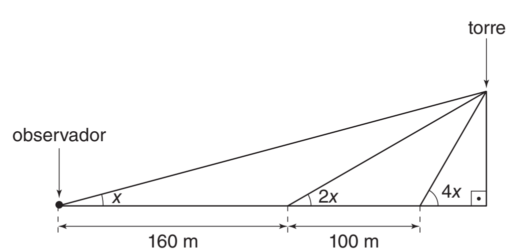


Calcule a soma das medidas α e β, em grau, dos ângulos agudos que as vigas formam com o solo.

32 Um ponto A está localizado em uma das margens de uma estrada reta com 12 m de largura, e dois pontos, B e C, estão na outra margem, com $BC < BA$, de modo que $AB = 15$ m e $AC = 20$ m. Calcule o seno do ângulo $B\hat{A}C$.

33 De um ponto C de um terreno plano e horizontal, observa-se o topo B de uma torre vertical de 30 m de altura sob um ângulo de medida α, com $\text{tg}\ \alpha = 0{,}4$. Caminhando em linha reta até um ponto D, entre o ponto C e a base da torre, constata-se que o ângulo $D\hat{B}C$ é congruente ao ângulo $D\hat{C}B$. Calcule a distância entre o ponto D e a base da torre.

34 (Uerj) Considere o ângulo segundo o qual um observador vê uma torre. Esse ângulo duplica quando ele se aproxima 160 m e quadruplica quando ele se aproxima mais 100 m, como mostra o esquema abaixo.



A altura da torre, em metro, equivale a:

a) 96

b) 98

c) 100

d) 102

35 A figura 1 representa uma folha retangular com 8 cm de comprimento por 6 cm de largura. Essa folha foi dobrada de modo que o vértice D coincidisse com o ponto médio M da diagonal $\overline{AC}$ do retângulo, conforme mostra a figura 2. Calcule a medida do segmento $\overline{EM}$.

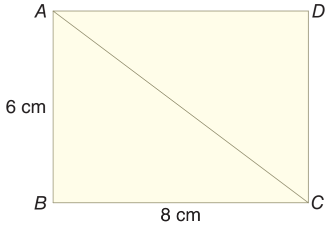


Figura 1

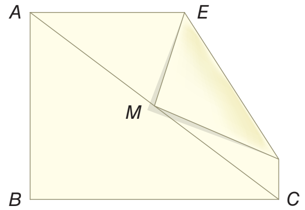
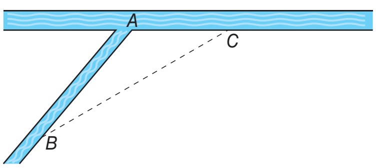


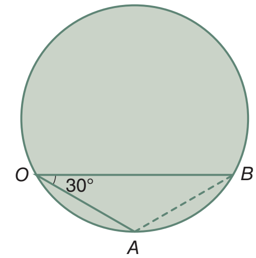
Figura 2

36 Dois rios são retos nas proximidades do ponto A de confluência de ambos. Pela construção de um canal, o curso do rio afluente deve ser desviado, ligando, em linha reta, um ponto B a um ponto C, conforme mostra a figura.



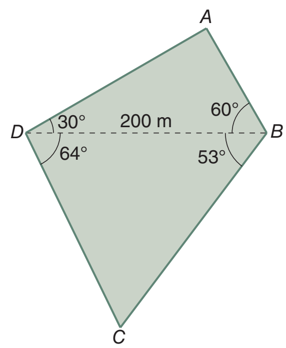
Sabendo que $m(B\hat{A}C) = 120°$, $m(A\hat{B}C) = 15°$ e $BA = 800$ m, calcule o comprimento do canal a ser construído de B a C.

37 (UFRN) Para medir o raio de um pequeno lago circular, uma pessoa usa o seguinte procedimento: traça um ângulo $A\hat{O}B$ de 30°, sendo que os pontos A, O e B estão sobre a margem do lago, e, em seguida, mede a distância de A a B, conforme a figura ao lado.



Justifique por que a medida do segmento $\overline{AB}$ corresponde ao raio do lago.

38 Para calcular a área de um terreno plano com a forma de um quadrilátero $ABCD$, um topógrafo mediu a diagonal $\overline{DB}$ e os ângulos $A\hat{D}B$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$, obtendo 200 m, 30°, 60°, 53° e 64°, respectivamente. Com o auxílio da tabela abaixo, calcule a área desse terreno.



	sen	cos
30°	0,50	0,87
53°	0,80	0,60
63°	0,89	0,45
64°	0,90	0,44

39 Um artesão pretende construir o tampo de uma mesa na forma de um triângulo isósceles ABC tal que $AB = AC = 50$ cm. Para que esse tampo tenha a maior área possível, o lado $\overline{BC}$ deve medir:

a) 80 cm
b) 90 cm
c) 95 cm
d) $25\sqrt{3}$ cm
e) $50\sqrt{2}$ cm

EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 Resolva a equação $\text{sen}^3 x - \text{sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

2 (UFRN) A fim de comemorar o Dia das Crianças, uma escola promoveu uma brincadeira, visando premiar algumas delas. Para isso, reuniu 100 crianças, formando uma grande roda. Todas foram numeradas sucessivamente, de 1 até 100, no sentido horário. A professora de Matemática chamava cada uma pelo número correspondente – na sequência 1, 16, 31, 46, e assim por diante – e lhe dava um chocolate. A brincadeira encerrou-se quando uma das crianças, já premiada, foi chamada novamente para receber seu segundo chocolate.
O número de chocolates distribuídos durante a brincadeira foi:

a) 25 b) 16 c) 21 d) 19

3 Determine os valores reais de x, com $x \in [0, 2\pi]$, de modo que a sequência $(\text{sen}^2 x, 12 \cos x, 16 \text{ tg}^2 x)$ seja uma progressão geométrica.

4 (Unemat-MT) Um barco atravessa um rio num trecho onde a largura é 100 m, seguindo uma direção que forma um ângulo de 30° com uma das margens. Assinale a alternativa correta para a distância percorrida pelo barco para atravessar o rio.

a) 100 m
b) $\dfrac{200}{\sqrt{2}}$ m
c) $\dfrac{200}{\sqrt{3}}$ m
d) 200 m
e) 150 m

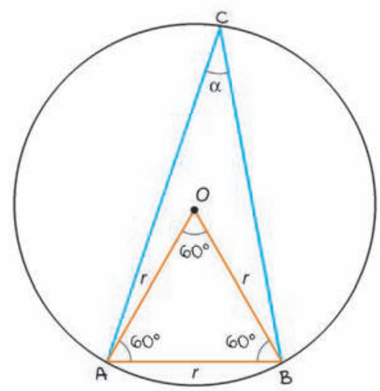
Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

O raio da circunferência circunscrita a um triângulo *ABC* tem o mesmo comprimento do lado $\overline{AB}$. Calcule a medida, em grau, do ângulo $A\hat{C}B$.

Resolução

- O é o centro da circunferência
- r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC
- α é a medida do ângulo $A\hat{C}B$



O triângulo AOB é equilátero, por isso cada um de seus ângulos internos mede 60°.

Como a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente, temos:

$$\alpha = \frac{m(A\hat{O}B)}{2} = \frac{60°}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$ Incompleto!

Comentário

Embora a argumentação do aluno esteja correta, a conclusão está incompleta, pois ele não considerou outra medida possível para o ângulo $A\hat{C}B$, que ocorre para outra posição do triângulo *ABC*.

Agora, corrija a resolução, refazendo-a de dois modos diferentes:

1º Aplique a lei dos senos no triângulo *ABC* e obtenha as duas medidas possíveis do ângulo $A\hat{C}B$.

2º Construa as figuras mostrando o triângulo para as duas medidas encontradas do ângulo $A\hat{C}B$.

3º Aplique o teorema que relaciona as medidas do ângulo inscrito na circunferência e do ângulo central correspondente.

Capítulo

15

Funções trigonométricas

O movimento dos planetas, as marés, as estações do ano, as fases da Lua são fenômenos que se repetem em intervalos iguais de tempo, por isso, chamados de fenômenos periódicos. Esses fenômenos podem ser modelados por funções trigonométricas, que serão estudadas neste capítulo.

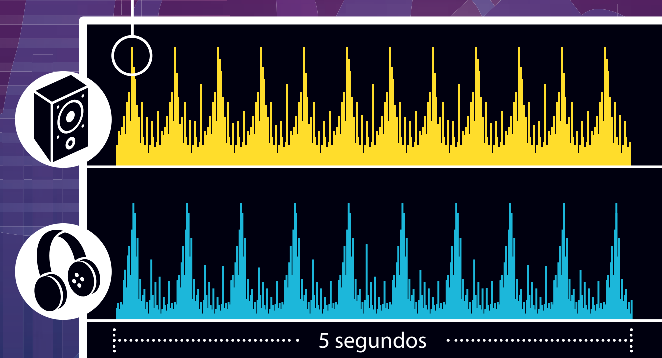
Discotecagem

Um DJ (disc jockey) pode tocar por horas, sobrepondo o fim de uma música ao começo da outra, sem pausas ou mudanças de ritmo. Para isso, ele controla o movimento periódico dos vinis nos toca--discos e, consequentemente, a velocidade das batidas das músicas, sincronizando seus ritmos.

A música não pode parar

Basicamente, o equipamento de um DJ é composto por dois toca-discos e um *mixer*, que permite que duas músicas sejam sincronizadas e tocadas simultaneamente. Assim, o DJ consegue misturar os sons das músicas, passando de uma para outra sem interromper a batida, mantendo o agito da festa.

Os picos do gráfico são as batidas da música, como uma percussão pulsando periodicamente. Um dos jeitos de contar esse ritmo é em batidas por minuto, bpm.



① O gráfico representa um trecho de cinco segundos de uma música. O som do disco amarelo agita o público com uma música de 144 bpm, um ritmo bem intenso. Pelos fones, só o DJ ouve o disco azul, com a música que vai entrar em seguida. O ritmo original dela é menor, 120 bpm.

Glossário

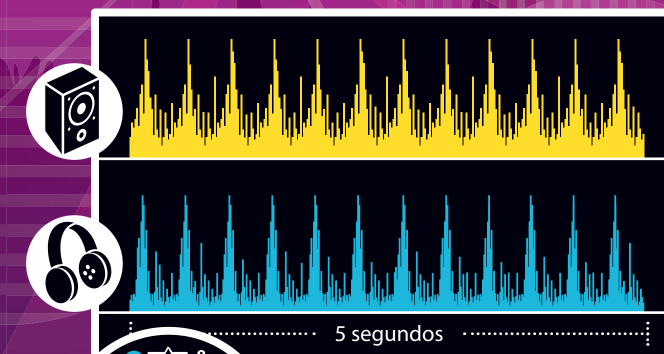
***Pitch*:** Controle deslizante que altera a velocidade de rotação do toca-discos.

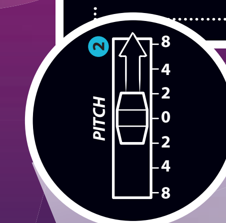
Toca-discos: Esses são os tradicionais, para discos de vinil, mas existem equipamentos que permitem discotecar com arquivos digitais de CDs ou direto do computador.

***Crossfader*:** Altera o volume da música, permite que o DJ passe o som de um toca-discos para o outro ou mande o som dos dois juntos para as caixas.

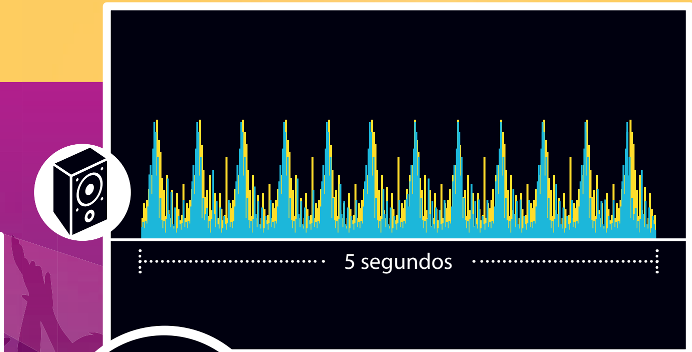
Para pensar

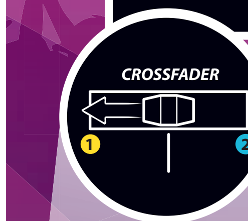
1. Você conhece outras situações que envolvem movimentos periódicos?
2. Se uma música tem 15 batidas a cada 10 segundos, qual é sua velocidade em bpm?



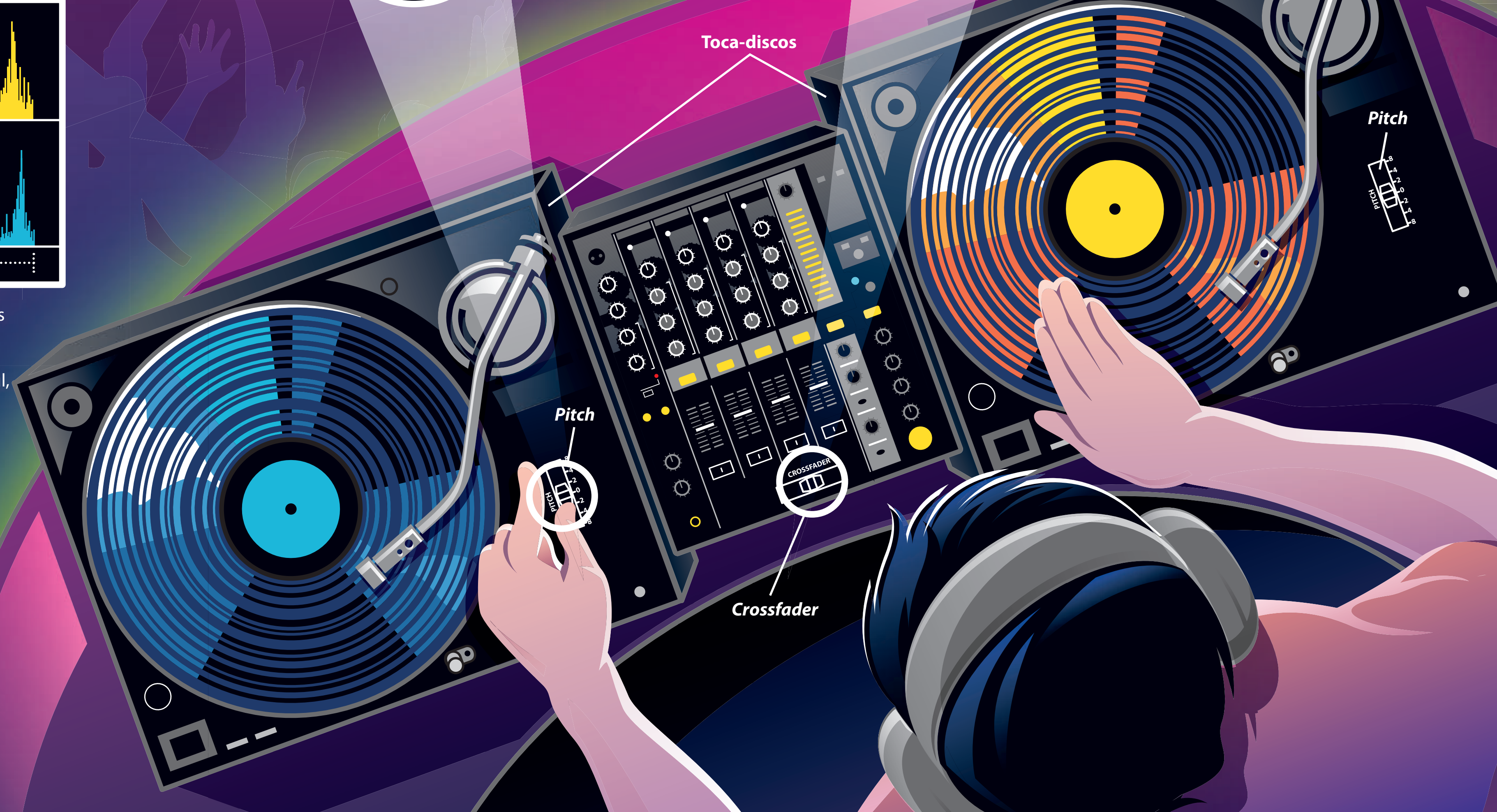


② Com o *pitch* do toca-discos azul, o DJ aumenta a rotação do aparelho, acelerando o ritmo da música até as mesmas 144 bpm da música ouvida pelo público.





③ Igualadas as bpm das músicas, na hora certa o DJ pode deixar o som do toca-discos azul ir para as caixas, sobrepondo-o ao do disco amarelo e trocando-os sem pausas.



Seção 15.1

As funções seno e cosseno

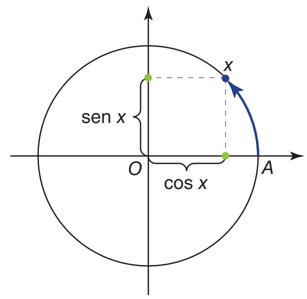
Objetivos

- **Identificar** as funções seno e cosseno e suas representações gráficas.
- **Analisar** as funções seno e cosseno segundo sua periodicidade, sinal, raízes e conjunto imagem.

Termos e conceitos

- função seno
- função cosseno
- período

Vimos anteriormente que a medida x rad associada a um ponto da circunferência trigonométrica pode ser identificada com o número real x. Assim, a cada número real x podemos associar um único sen x e um único cos x.

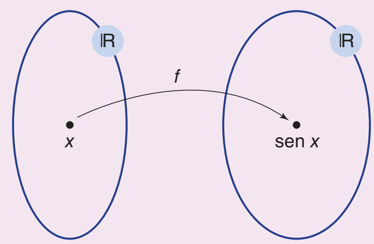


Desse modo, definimos as funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$:

$f(x) = \text{sen } x$

$D = \mathbb{R}$

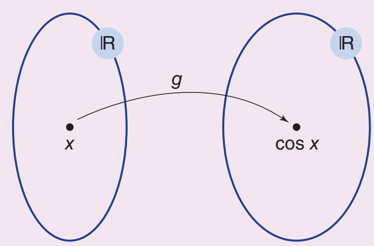
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$



$g(x) = \cos x$

$D = \mathbb{R}$

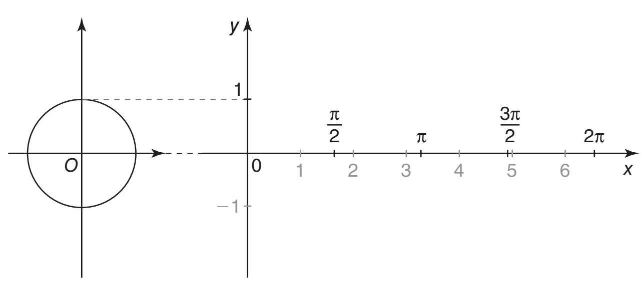
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$



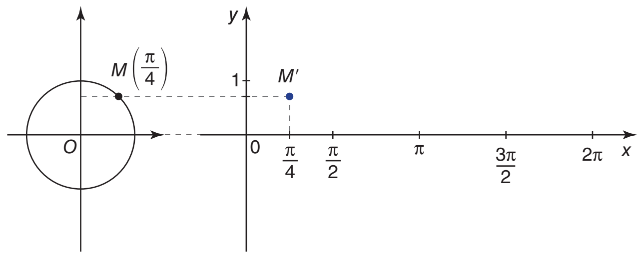
O gráfico da função seno

Vamos usar um método geométrico para a construção do gráfico $y = \text{sen } x$.

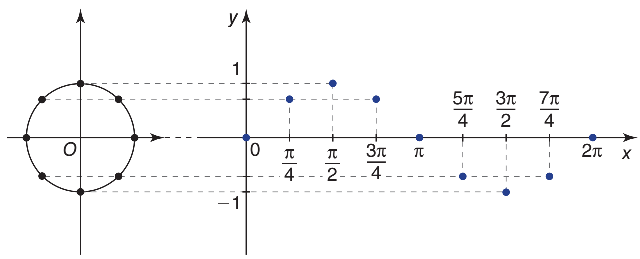
Para isso, construímos a circunferência trigonométrica ao lado de um sistema cartesiano de eixos ortogonais. O eixo das abscissas desse sistema deve estar na mesma reta que o eixo dos cossenos, e a unidade adotada nos eixos deve ser igual ao raio da circunferência trigonométrica, conforme a figura:



A seguir, marcamos no plano cartesiano os pontos (x, y) tais que $y = \text{sen } x$. Por exemplo, transportamos o seno do arco de medida $\frac{\pi}{4}$ para o eixo Oy como ordenada do ponto M', cuja abscissa é $\frac{\pi}{4}$. Assim, o ponto M' pertence ao gráfico da função $y = \text{sen } x$, conforme mostra a figura:

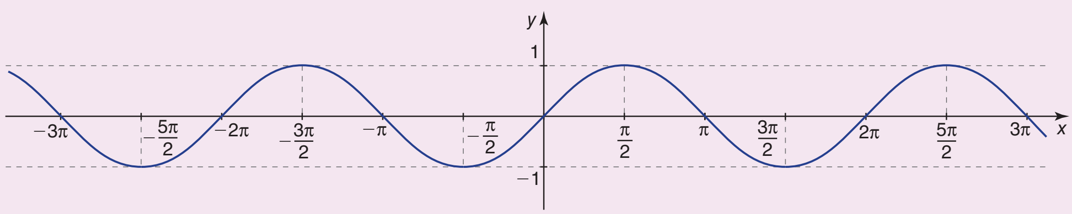


Repetimos o procedimento obtendo vários pontos do gráfico:



Então, considerando os infinitos pontos das infinitas voltas da circunferência trigonométrica, concluímos a construção do gráfico:

$y = \text{sen } x$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Note que o gráfico é formado pela repetição da curva obtida quando x assume todos os valores de uma volta completa da circunferência trigonométrica; por isso dizemos que a função seno é periódica e que seu período é 2π.

Em uma linguagem mais precisa, dizemos que a função $y = \text{sen } x$ é periódica, porque existe pelo menos um número real positivo p que satisfaz a condição $\text{sen } (x + p) = \text{sen } x$ para qualquer número real x. Por exemplo: $\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x$; $\text{sen } (x + 4\pi) = \text{sen } x$; $\text{sen } (x + 6\pi) = \text{sen } x$.

O menor número positivo p que satisfaz essa condição é chamado de **período** da função $y = \text{sen } x$. Como se observa, nesse caso, o menor número p é 2π.

Observe que a função seno é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem do sistema de eixos, isto é, $\text{sen } (-x) = -\text{sen } x$ para qualquer número real x.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Gráfico da função seno.*

Usamos aqui o método geométrico para obter o formato do gráfico da função $y = \text{sen } x$. Por questões de praticidade, porém, vamos resolver as próximas questões com o auxílio de uma tabela.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1 Esboçar o gráfico da função $y = 3 \text{ sen } x$.

Resolução

Para esboçar o gráfico, construímos uma tabela, atribuindo à variável x alguns valores e calculando os correspondentes valores de y. Para facilitar, atribuímos a x os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π.

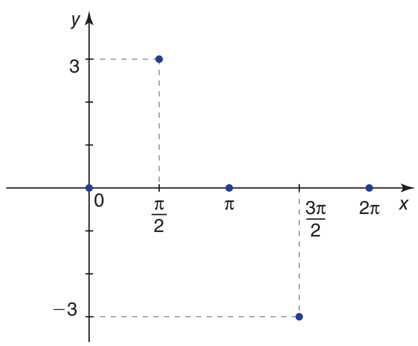
Aqui, atribuímos a x somente valores positivos, mas poderíamos ter atribuído também valores negativos, já que o domínio da função seno é $\mathbb{R}$.

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	3
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	0

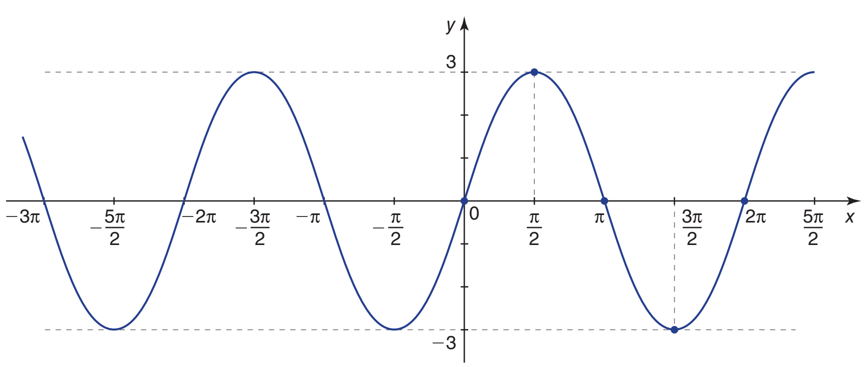
Veja como calculamos, por exemplo, o valor de y quando $x = \frac{\pi}{2}$:

$y = 3 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 = 3$

Marcando no plano cartesiano os pontos $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ e $(2\pi, 0)$, temos:



O gráfico da função passa por esses cinco pontos e tem o seguinte traçado:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$

$p = 2\pi$

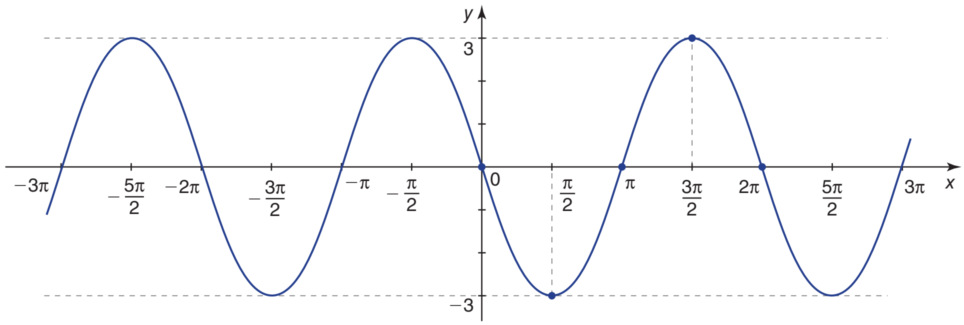
Devemos entender que esse traçado é apenas uma parte do gráfico que deve ser imaginado ao longo de todo o eixo das abscissas, repetindo a figura obtida quando x assume os valores de uma volta da circunferência trigonométrica.

Observe que a função seno é **ímpar**, pois seu gráfico é simétrico em relação à origem, isto é, $\text{sen }(-x) = -\text{sen } x$ para qualquer número real x.

2 Esboçar o gráfico da função $y = -3 \text{ sen } x$.

Resolução

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-3
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	0



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

$p = 2\pi$

Note que esse gráfico é o **simétrico** do gráfico $y = 3 \text{ sen } x$ em relação ao eixo das abscissas.

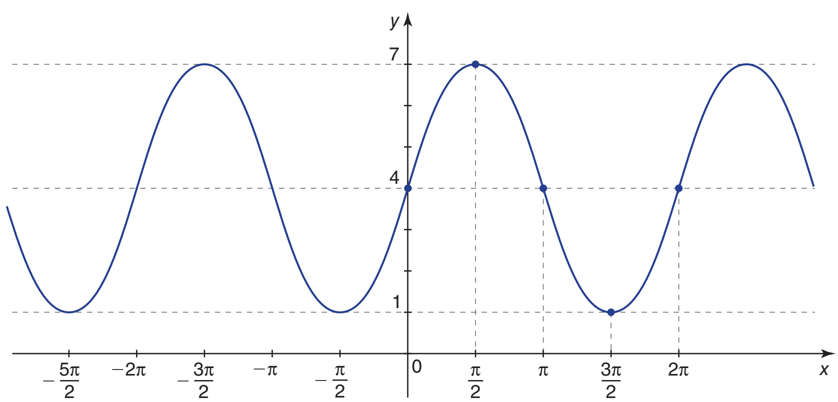
3 Esboçar o gráfico da função $y = 4 + 3 \text{ sen } x$.

Resolução

x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	7
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	4

Veja como calculamos, por exemplo, o valor de y quando $x = \frac{\pi}{2}$:

$y = 4 + 3 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} = 4 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 7\}$

$p = 2\pi$

Note que esse gráfico é uma **translação vertical**, de 4 unidades para cima, do gráfico: $y = 3 \text{ sen } x$

4 Esboçar o gráfico da função $y = \text{sen } 2x$.

Resolução

Quando a medida do arco da função seno tem a forma $(ax + b)$, com a não nulo e $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, podemos construir uma tabela com três colunas: a primeira para o arco $(ax + b)$, a segunda para os valores de x, e a terceira para os valores de y.

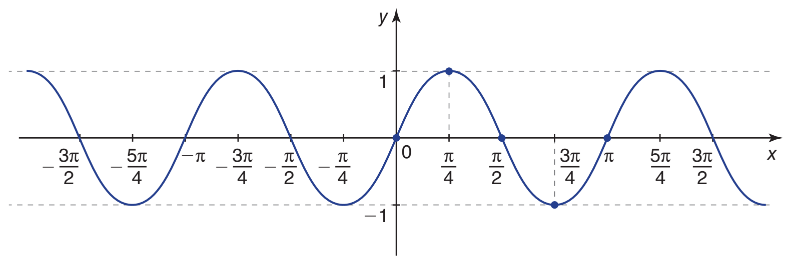
Para obter o gráfico que representa um período da função $y = \text{sen } 2x$, atribuímos ao arco $2x$ os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π, e a seguir determinamos os correspondentes valores de x e y.

Veja como calculamos, por exemplo, os valores de x e y quando $2x = \pi$.

- $2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $\begin{cases} 2x = \pi \\ y = \text{sen } 2x \end{cases} \Rightarrow y = \text{sen } \pi = 0$

$2x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0

Assim, considerando a repetição do período obtido na tabela, temos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

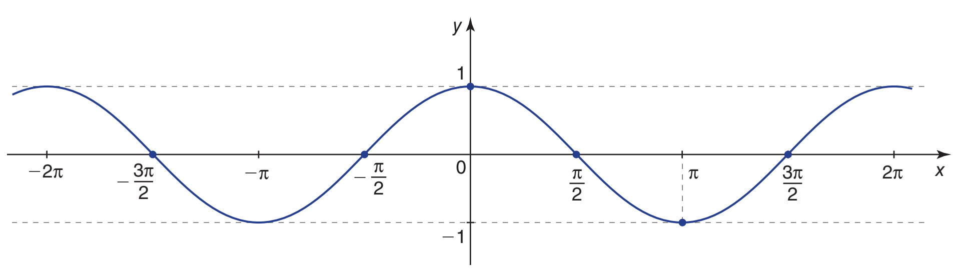
$p = \pi$

Note que ocorreu uma **mudança no período** em relação ao gráfico da função: $y = \text{sen } x$

5 Esboçar o gráfico da função $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Resolução

$\frac{\pi}{2} + x$	x	y
0	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	π	-1
2π	$\frac{3\pi}{2}$	0



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

$p = 2\pi$

Note que esse gráfico é uma **translação horizontal**, de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda, do gráfico da função: $y = \text{sen } x$

6 Determinar o conjunto imagem da função $f(x) = 5 + 4 \text{ sen } x$.

Resolução

Sabemos que sen x varia de -1 a 1, isto é:

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

Multiplicando por 4 os membros dessa desigualdade, temos:

$-4 \leq 4 \text{ sen } x \leq 4$

Adicionando 5 a cada membro da desigualdade, obtemos:

$$5 - 4 \leq 5 + 4 \text{ sen } x \leq 5 + 4 \Rightarrow 1 \leq \underbrace{5 + 4 \text{ sen } x}_{f(x)} \leq 9$$

Logo: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 9\}$

7 Obter os valores reais de m de modo que exista a igualdade sen $x = 2m - 5$.

Resolução

Sabemos que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$. Então, devemos ter:

$-1 \leq 2m - 5 \leq 1$

Adicionando 5 aos membros dessa desigualdade, obtemos:

$-1 + 5 \leq 2m - 5 + 5 \leq 1 + 5$

Ou seja: $4 \leq 2m \leq 6$

Dividindo por 2 os membros da desigualdade, concluímos:

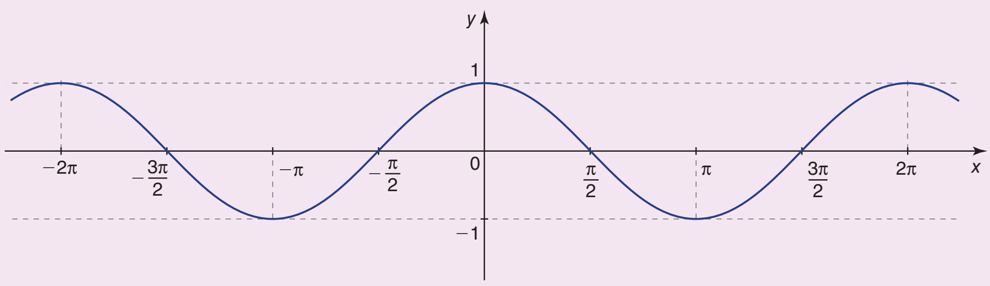
$2 \leq m \leq 3$

Assim, a igualdade sen $x = 2m - 5$ existe se, e somente se, m é um número real tal que $2 \leq m \leq 3$.

O gráfico da função cosseno

Para qualquer valor de x, temos $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$. Por isso, podemos concluir que o gráfico da função $y = \cos x$ é o mesmo gráfico da função $y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, que já foi construído no exercício resolvido 5. Temos, então, o seguinte traçado como o gráfico da função $y = \cos x$:

$y = \cos x$



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

$p = 2\pi$

Observe que a função cosseno é **par**, pois seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, isto é, $\cos(-x) = \cos x$ para qualquer número real x.

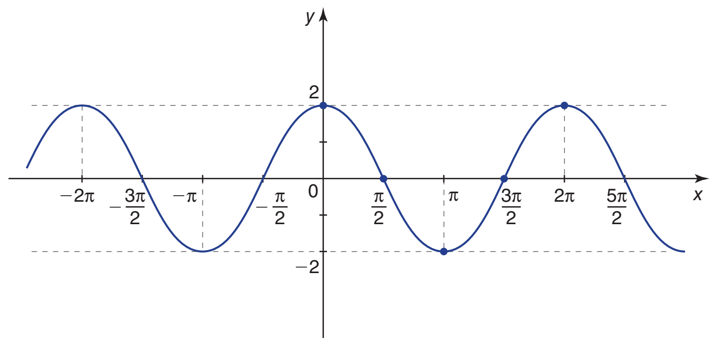
Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Gráfico da função cosseno.*

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8 Esboçar o gráfico da função $y = 2 \cos x$.

Resolução

x	y
0	2
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2



$D = \mathbb{R}$

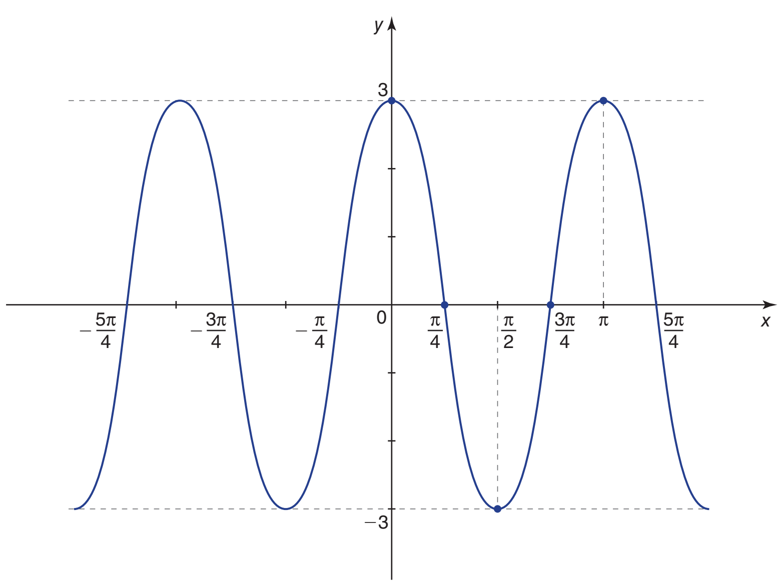
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$

$p = 2\pi$

9 Esboçar o gráfico da função $y = 3 \cos 2x$.

Resolução

$2x$	x	y
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
π	$\frac{\pi}{2}$	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	0
2π	π	3



$D = \mathbb{R}$

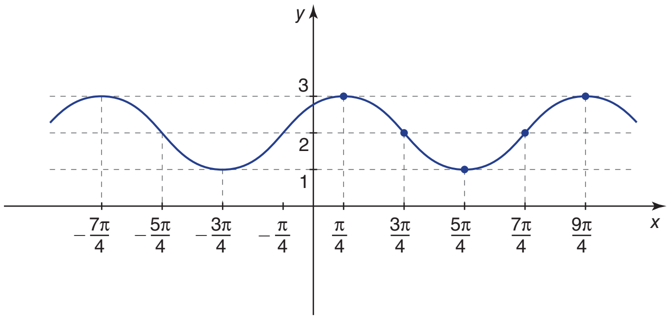
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$

$p = \pi$

10 Esboçar o gráfico da função $y = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2
π	$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	3



$D = \mathbb{R}$

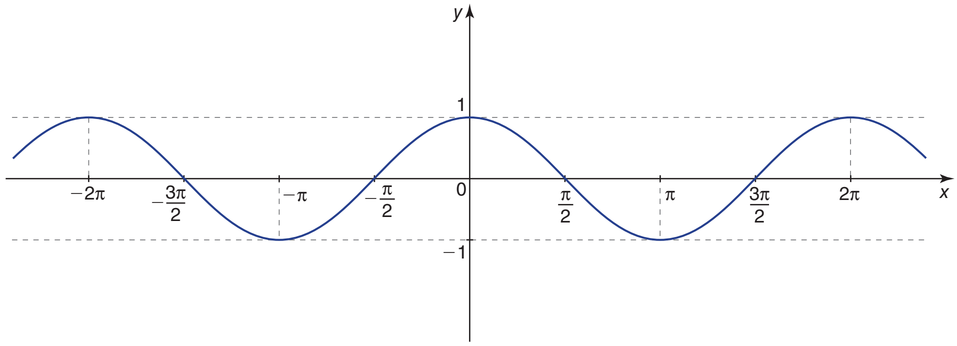
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

$p = 2\pi$

11 Esboçar o gráfico da função $y = |\cos x|$.

Resolução

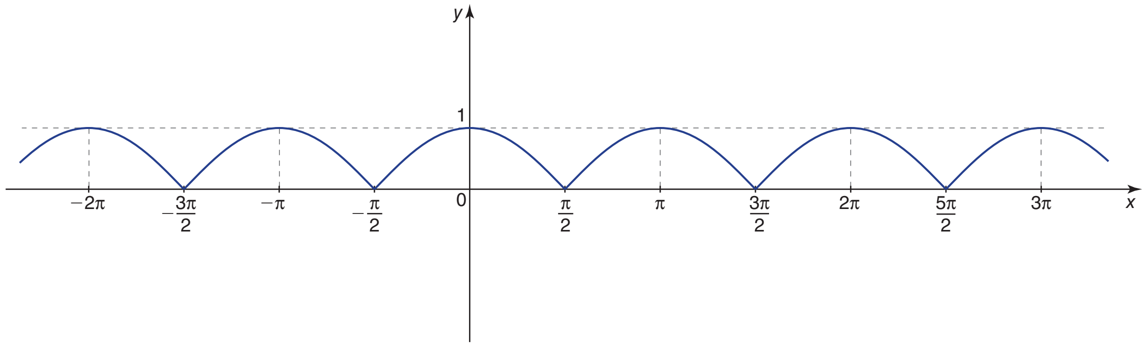
Primeiro, construímos o gráfico da função auxiliar $y_1 = \cos x$:



Depois, construímos o gráfico da função $y = |\cos x|$, do seguinte modo:

- Se $\cos x \geqslant 0$, então $|\cos x| = \cos x$. Graficamente, isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem ordenada positiva ou nula permanecem inalterados.
- Se $\cos x < 0$, então $|\cos x| = -\cos x$. Graficamente, isso significa que os pontos do gráfico auxiliar que tiverem ordenada negativa devem ser transformados nos simétricos em relação ao eixo das abscissas.

  Por fim, traçamos o gráfico da função $y = |\cos x|$:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

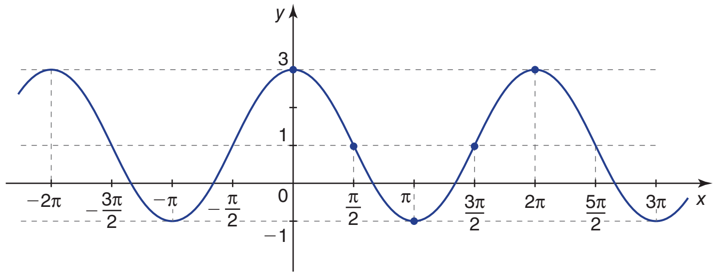
$p = \pi$

12 Esboçar o gráfico da função $y = |1 + 2\cos x|$.

Resolução

Primeiro, construímos o gráfico auxiliar $y_1 = 1 + 2\cos x$:

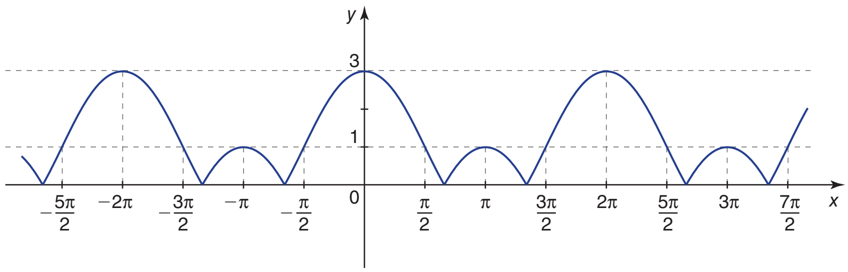
x	y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	1
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3



Depois, construímos o gráfico da função $y = |1 + 2\cos x|$. Para isso, no gráfico anterior:

- Conservamos os pontos de ordenadas não negativas.
- Transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.

Assim, temos o gráfico de $y = |1 + 2\cos x|$:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\}$

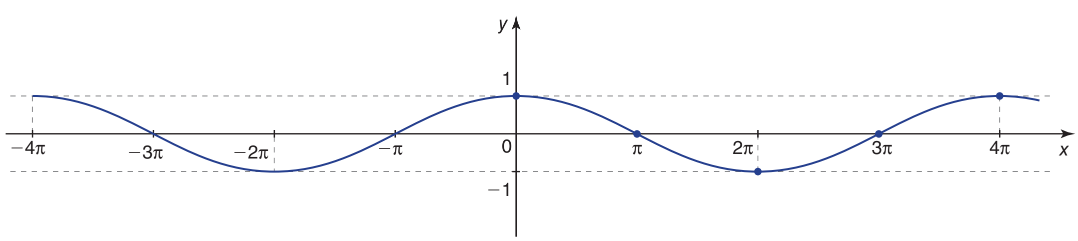
$p = 2\pi$

13 Esboçar o gráfico da função $y = 1 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.

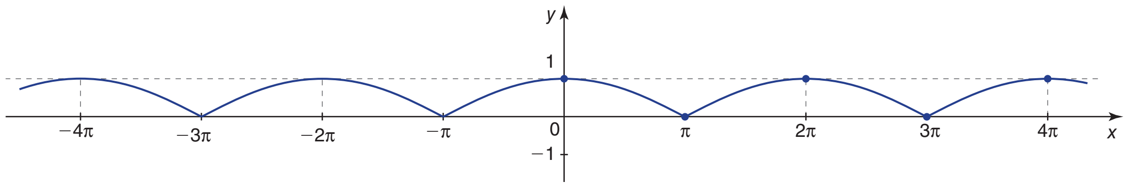
Resolução

Primeiro, construímos o gráfico auxiliar $y_1 = \cos \frac{x}{2}$.

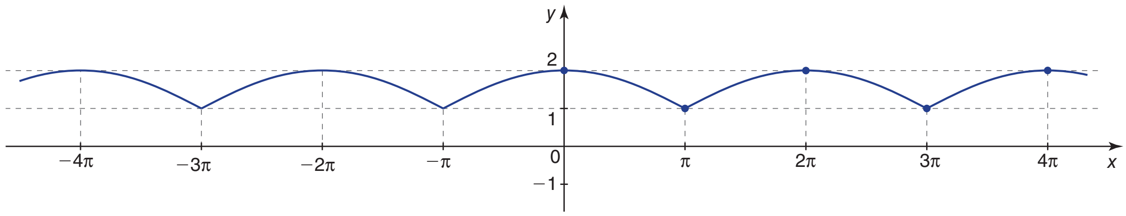
$\frac{x}{2}$	x	y_1
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	2π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0
2π	4π	1



Depois, traçamos o gráfico de $y_2 = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$:



Por fim, transladamos o gráfico $y_2 = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$ em 1 unidade verticalmente para cima obtendo o gráfico $y = 1 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\}$
$p = 2\pi$

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Transformações nos gráficos das funções seno e cosseno.*

Período das funções seno e cosseno

Obtemos o período da função $y = a + b \cdot \text{sen}\,(mx + q)$ ou da função $y = a + b \cdot \cos\,(mx + q)$, em que $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, com $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados a uma volta completa da circunferência trigonométrica. Por exemplo, quando essa medida assume os valores de 0 a 2π, temos:

$$0 \leqslant mx + q \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 - q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q$$

(I) Se $m > 0$:

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi - q}{m}$$

O período p da função é a diferença entre o maior e o menor valor obtidos para x, nessa ordem, isto é :

$$p = \frac{2\pi - q}{m} - \left(-\frac{q}{m}\right) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{m}$$

(II) Se $m < 0$:

$$-q \leqslant mx \leqslant 2\pi - q \Rightarrow -\frac{q}{m} \geqslant x \geqslant \frac{2\pi - q}{m}$$

Calculando o período p:

$$p = -\frac{q}{m} - \frac{2\pi - q}{m} \Rightarrow p = -\frac{2\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{|m|}}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14 Determinar o período das funções:

a) $y = 3 \text{ sen } 2x$

b) $y = 2 + 6 \cos(-4x)$

c) $y = 2 \text{ sen } \frac{x}{3}$

d) $y = 3 - 4 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{5}\right)$

Resolução

a) $p = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) $p = \frac{2\pi}{|-4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

c) $p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

d) $p = \frac{2\pi}{|\pi|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

15 A grande Roda de Pequim é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. Podemos descrever seu movimento de giro por meio de uma função trigonométrica. Por exemplo, considerando um extremo A de um diâmetro horizontal, podemos descrever o movimento através da função $f(t) = 112 + 97 \text{ sen } \frac{\pi t}{15}$, em que $f(t)$ é a altura, em metro, do ponto A em relação ao terreno no instante t, em minuto, a partir do início da medição do tempo ($t = 0$).

a) Qual é a altura máxima atingida pelo ponto A?

b) Em quantos minutos a roda dá uma volta completa?

Resolução

a) A altura máxima atingida pelo ponto A é o valor máximo da função f. Para calcular esse valor, vamos determinar o conjunto imagem de f.

Temos: $-1 \leqslant \text{sen } \frac{\pi t}{15} \leqslant 1$

Multiplicando os membros dessa desigualdade por 97, chegamos a:

$-97 \leqslant 97 \text{ sen } \frac{\pi t}{15} \leqslant 97$

Adicionando 112 aos membros da desigualdade, concluímos:

$112 - 97 \leqslant 112 + 97 \text{ sen } \frac{\pi t}{15} \leqslant 112 + 97 \Rightarrow 15 \leqslant f(t) \leqslant 209$

Portanto, a altura máxima atingida pelo ponto A é 209 m.

b) O tempo necessário para o ponto A girar uma volta completa é o período p da função f, ou seja:

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{15}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} \Rightarrow p = 30$

Logo, a roda completa uma volta em 30 minutos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = 2 \text{ sen } x$

b) $y = -2 \text{ sen } x$

c) $y = 5 + 2 \text{ sen } x$

d) $y = -1 + 2 \text{ sen } x$

e) $y = -4 - 2 \text{ sen } x$

f) $y = 4 \cos x$

g) $y = 3 + 4 \cos x$

2 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = \text{sen } 4x$

b) $y = 2 + 3 \text{ sen } 2x$

c) $y = -1 + 2 \text{ sen } \frac{x}{2}$

d) $y = \cos 4x$

e) $y = 1 - 2 \cos 2x$

f) $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

g) $y = -2 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

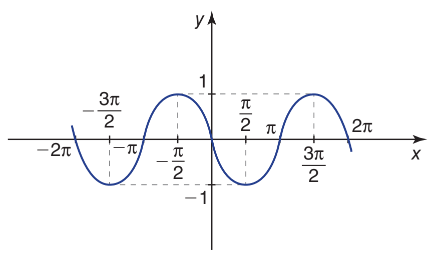
3 Determine o período das funções.

a) $y = 8 \text{ sen } x$
b) $y = \text{sen } 8x$
c) $y = \text{sen } \frac{x}{8}$
d) $y = \cos(-3x)$
e) $y = 2 + 3 \text{ sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
f) $y = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

4 Obtenha o conjunto imagem de cada uma das funções.

a) $y = 10 \text{ sen } x$
b) $y = -10 \text{ sen } x$
c) $y = 3 + 2 \cos x$
d) $y = -4 + 5 \cos \frac{x}{2}$

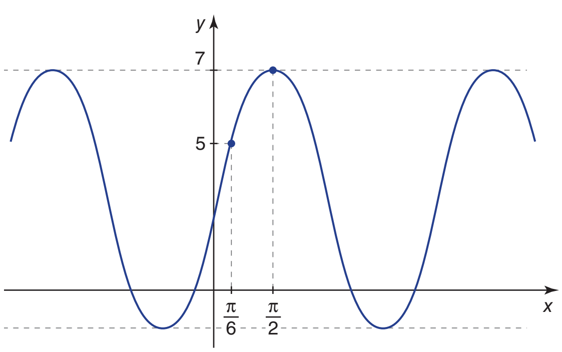
5 (Vunesp) Sabe-se que h é o menor número positivo para o qual o gráfico de $y = \text{sen}(x - h)$ é:



Então, $\cos\left(\frac{2h}{3}\right)$ é igual a:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6 O gráfico da função $y = a + b \cdot \text{sen } x$ é:

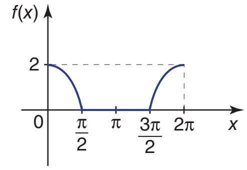


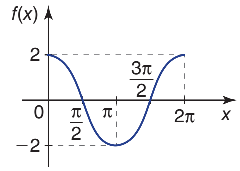
Determine os valores das constantes reais a e b.

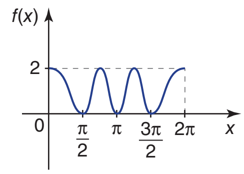
7 Esboce o gráfico das funções:

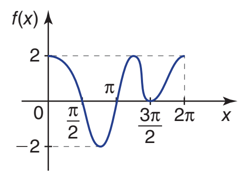
a) $y = |1 + 3 \cos x|$
b) $y = |-2 + 3 \text{ sen } x|$
c) $y = 1 + |\text{sen } 2x|$
d) $y = -2 + \left|\cos \frac{x}{2}\right|$

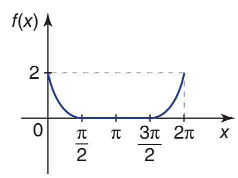
8 (Ufes) O gráfico da função $f(x) = \cos x + |\cos x|$, para $x \in [0, 2\pi]$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


9 Os gráficos das funções trigonométricas podem auxiliar a resolução de uma inequação, conforme mostra este exercício.

a) Construa, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.
b) Analisando o gráfico do item **a**, resolva a inequação $\text{sen } x > \cos x$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

10 Para que valores reais de m existe a igualdade $\text{sen } x = 4m - 5$?

11 (FGV) No mês de abril, o mercado financeiro viveu uma certa instabilidade, e o preço de determinada ação oscilou de tal forma que ele poderia ser descrito pela função periódica: $f(x) = 4{,}50 + \text{sen}(2\pi x)$, em que $f(x)$ é o preço da ação, $x = 0$ representa o 1º dia útil de abril, $x = \frac{1}{4}$, o 2º dia útil, $x = \frac{1}{2}$, o 3º dia útil, e assim por diante.

a) Esboce o gráfico da função $f(x)$ correspondente aos primeiros 5 dias úteis de abril.
b) Considerando que o dia 1º de abril foi segunda-feira, determine em que dias da 1ª semana útil de abril o preço dessa ação atingiu o maior e o menor valor.
c) Quais foram o maior e o menor valor dessa ação na 1ª semana útil de abril?

Resolva os exercícios complementares 1 a 13 e 49.

Seção 15.2

Movimentos periódicos

Objetivos

- **Analisar** situações que apresentam movimento periódico.
- **Obter** uma função trigonométrica que descreva um fenômeno periódico.
- **Resolver** problemas que envolvem funções trigonométricas.

Termo e conceito

- **movimento periódico**

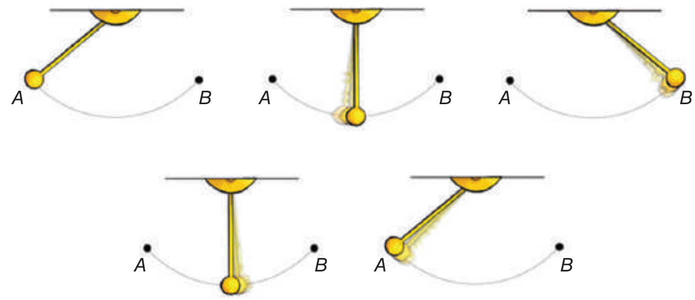
Quando um móvel descreve o mesmo movimento repetidas vezes consecutivas em intervalos de tempo iguais, dizemos que ele realiza um **movimento periódico**. O tempo necessário para a realização de cada um desses movimentos recebe o nome de **período** (p); e o número de movimentos realizados em determinada unidade de tempo é chamado de **frequência** (F) do movimento.

Exemplos

a) Se um pêndulo realiza uma oscilação completa a cada 2 segundos, dizemos que ele realiza um movimento periódico de período $p = 2$ s e de frequência $F = \frac{1}{2}$ oscilação por segundo.

Observe que o período é o inverso da frequência, ou seja, $p = \frac{1}{F}$.

A figura abaixo mostra o pêndulo partindo de A, indo até B e voltando ao ponto A. Essa trajetória é uma oscilação completa do pêndulo.



b) Se um ponto P, distinto do centro de um DVD, gira com velocidade constante de 300 rotações por minuto em um DVD *player*, dizemos que esse ponto realiza um movimento periódico de frequência $F = 300$ rotações por minuto. O período é $p = \frac{1}{300}$ min, pois esse é o tempo que o ponto P leva para completar uma volta.

c) O fenômeno de elevação e abaixamento das águas do mar recebe o nome de maré. O maior e o menor nível das águas do mar são chamados, respectivamente, de maré alta e maré baixa. O tempo decorrente entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é de 12 horas, aproximadamente. Esse movimento das águas é periódico, de período $p = 12$ h e frequência $F = \frac{1}{12}$ oscilação por hora. As marés são provocadas pela força gravitacional da Lua e, secundariamente, pela do Sol, sobre a Terra.

Conteúdo digital Moderna PLUS http://www.modernaplus.com.br
Animação: *Movimentos periódicos.*

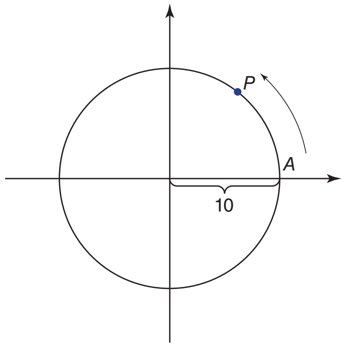
O movimento periódico e as funções trigonométricas

As funções trigonométricas são periódicas, isto é, repetem-se em intervalos consecutivos e de mesmo comprimento. As funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$, por exemplo, repetem-se a cada volta completa na circunferência trigonométrica. Por isso, essas funções são utilizadas para descrever fenômenos periódicos como o movimento das marés, a propagação de ondas, o movimento dos planetas, os batimentos cardíacos, as estações do ano etc.

O chamado movimento periódico circular é fundamental para entender a relação entre as funções trigonométricas e os movimentos periódicos. Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo

No plano cartesiano, considere uma circunferência de 10 cm de raio, centrada na origem do sistema, e um ponto P girando sobre essa circunferência no sentido anti-horário, com velocidade constante de 80 rotações por minuto (rpm). Vamos descrever o movimento desse ponto por meio de uma função trigonométrica.



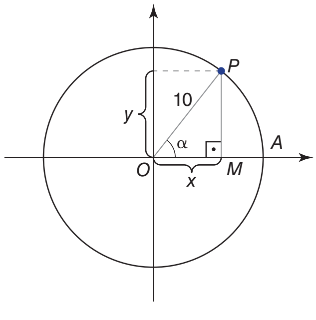
Por descrever o mesmo movimento em intervalos consecutivos e de mesma duração, o movimento desse ponto é periódico, de frequência $F = 80$ rpm e período $p = \dfrac{1}{80}$ min, pois esse é o tempo que o ponto leva para completar uma volta na circunferência.

Para descrever o movimento do ponto, precisamos determinar a medida α do arco $\widehat{AP}$ em função do tempo t, considerando como instante zero um instante em que P passe pelo ponto $A(10, 0)$. Para isso, montamos a regra de três:

Medida do arco (rad)		Tempo (min)
2π	———	$\dfrac{1}{80}$
α	———	t

$\Rightarrow \alpha = 160\pi t$ rad

Considere um momento em que P esteja no 1º quadrante. Como o raio mede 10 cm, temos, pelo triângulo OPM ao lado:



$$\cos \alpha = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cos \alpha = 10 \cos (160\pi t)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \text{ sen } \alpha = 10 \text{ sen } (160\pi t)$$

Podemos generalizar essas relações para os outros quadrantes e descrever o movimento do ponto P, em função do tempo t, em minuto, por meio de:

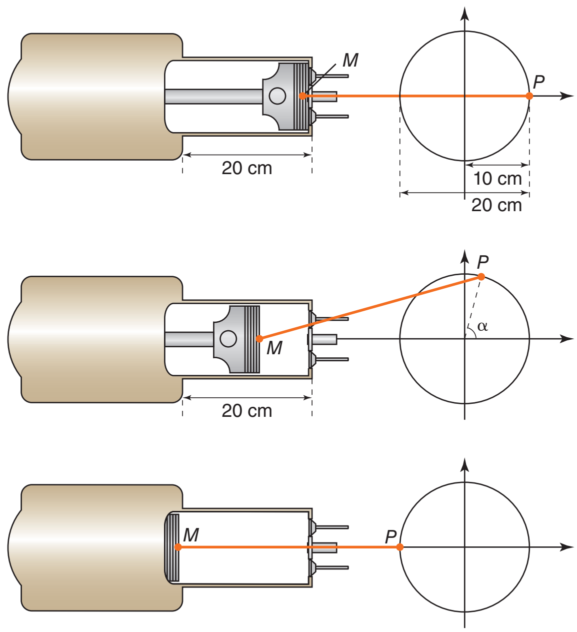
- sua abscissa: $f(t) = 10 \cos (160\pi t)$; ou
- sua ordenada: $g(t) = 10 \text{ sen } (160\pi t)$

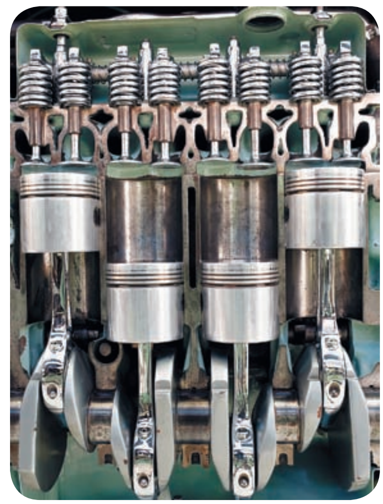
Associando um movimento circular a um movimento periódico

Muitas vezes, o movimento periódico não se associa explicitamente a uma circunferência, mas usando a imaginação conseguimos relacionar o fenômeno a um movimento circular. Acompanhe.

Exemplo

Considere um pistão em movimento periódico tal que seu percurso seja 20 cm e o trajeto de ida e volta (40 cm) seja realizado 80 vezes por minuto. Vamos imaginar uma circunferência de diâmetro 20 cm, com o centro na origem de um sistema cartesiano, tal que, quando um ponto P gira na circunferência, uma haste rígida MP acompanha o movimento do pistão, conforme a figura abaixo.





O pistão de um motor é uma peça cilíndrica metálica deslizante que recebe um movimento de vaivém no interior de um cilindro de motor de combustão interna.

Observe que o diâmetro da circunferência deve ter o mesmo comprimento que o percurso do pistão.

Assim, usando os cálculos do exemplo anterior e admitindo que a velocidade de P seja constante, podemos descrever o movimento do pistão pelo movimento do ponto P, em função do tempo t, em minuto:

- pela abscissa do ponto P: $f(t) = 10 \cos(160\pi t)$; ou
- pela ordenada do ponto P: $g(t) = 10 \text{ sen } (160\pi t)$

Ampliando esse raciocínio, é possível descrever o movimento das marés por meio de uma função trigonométrica, como se o mar fosse um imenso pistão que sobe e desce. Enfim, qualquer movimento periódico, como o movimento de um pêndulo, a propagação de ondas, o movimento dos braços de uma pessoa em exercício de caminhada, os batimentos cardíacos etc., pode ser descrito por uma função trigonométrica.

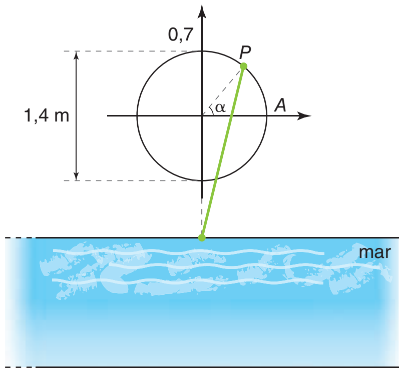
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

16 A amplitude das marés é a diferença entre os níveis da maré alta e da maré baixa. Ela varia dependendo da posição da Lua. Em uma região, em determinado dia, a amplitude das marés é 1,4 m, e o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é 12 horas. Sabendo que uma maré alta ocorre às 3 h, descrever, por meio de uma função trigonométrica, o movimento das marés nessa região em função do horário t, em hora, nesse dia.

Resolução

Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência acima do nível do mar e uma haste rígida ligando um ponto P da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo Oy, conforme mostra a figura ao lado.

O subir e descer da maré, que lembra o movimento de um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto P. Como o intervalo entre duas marés altas consecutivas é 12 horas, o ponto P deve demorar 12 horas para percorrer toda a circunferência. Supondo esse movimento com velocidade constante e no sentido anti-horário, vamos calcular a medida α do arco $\overset{\frown}{AP}$, em função do tempo t em hora, em que $t = 0$, corresponda a um instante em que P passou pelo ponto $A(0{,}7; 0)$:



Medida do arco (rad)		Tempo (h)
2π	———	12
α	———	t

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi t}{6} \text{ rad}$$

Assim, podemos descrever o movimento da maré nesse dia, em função do tempo t, em hora ($0 \leqslant t \leqslant 24$):

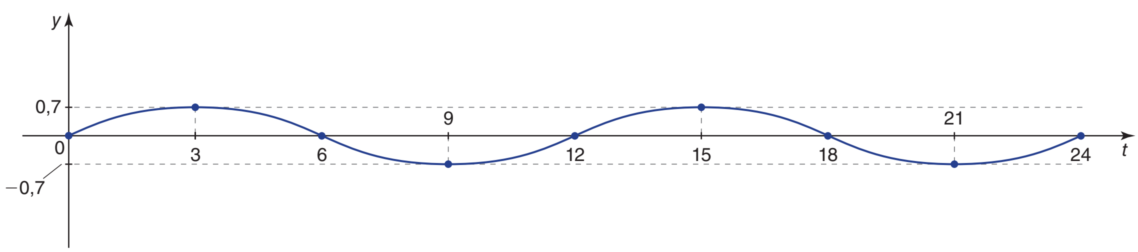
- pela ordenada do ponto P: $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$; ou
- pela abscissa do ponto P: $g(t) = 0{,}7 \cos \frac{\pi t}{6}$

Note que:

1. O período p da função $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$ ou da função $g(t) = 0{,}7 \cos \frac{\pi t}{6}$ é dado por $p = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$.

Esse período, no contexto do problema, chamado de período das marés, é o tempo, em hora, transcorrido entre duas marés altas (ou duas marés baixas) consecutivas.

2. O gráfico da função $f(t) = 0{,}7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$, para $0 \leqslant t \leqslant 24$, é:



Interpretando esse gráfico no contexto do problema, concluímos, por exemplo:

- À zero hora, a maré estava em seu nível médio.
- Às 3 h e às 15 h, a maré estava em seu nível máximo, 0,7 m acima do nível médio.
- Às 9 h e às 21 h, a maré estava em seu nível mínimo, 0,7 m abaixo do nível médio.

3. A amplitude da maré varia de acordo com a posição da Lua em relação ao Sol e à Terra. Nessa questão, admitimos que a amplitude da maré calculada com quaisquer marés alta e baixa de um mesmo dia seja a mesma, o que é muito próximo da realidade, pois a variação da posição da Lua em relação ao Sol e à Terra é pequena em 24 horas.

4. O enunciado informa que uma maré alta ocorre às 3 h. Usamos essa informação ao adotar o sentido anti-horário e a posição do ponto no instante zero. Se adotássemos o sentido horário, nessa mesma posição inicial, às 3 h ocorreria uma maré baixa.

17 A partir da zero hora de cada dia, a pressão interna p, em bar (unidade de medida de pressão que corresponde aproximadamente à pressão da água do mar a 10 m de profundidade), de uma caldeira é controlada automaticamente, variando com o tempo t, em hora, de acordo com a função $p(t) = 300 + 200 \text{ sen } \frac{(t - 1)\pi}{2}$.

a) Qual é a pressão interna máxima ($p_{\text{máx}}$) dessa caldeira?

b) Em que horários, de zero hora às 12 horas, a pressão interna na caldeira é máxima?

Resolução

a) A pressão $p(t) = 300 + 200 \text{ sen } \frac{(t-1)\pi}{2}$ é máxima quando a expressão sen $\frac{(t-1)\pi}{2}$ assume seu valor máximo, que é 1. Assim:

$p_{\text{máx}} = (300 + 200 \cdot 1)$ bars $= 500$ bars

b) Sabemos que quando sen $\frac{(t-1)\pi}{2} = 1$ a pressão é máxima. Assim, para determinar os horários em que a pressão é máxima, basta resolver a equação:

$$\text{sen } \frac{(t-1)\pi}{2} = 1 \Rightarrow \frac{(t-1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore t = 2 + 4k$, com $k \in \mathbb{Z}$

A seguir, atribuímos valores inteiros a k, em $t = 2 + 4k$, de modo que $0 \leqslant t \leqslant 12$:

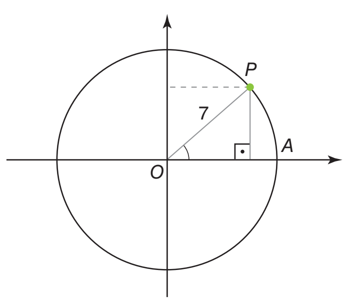
$$k = 0 \Rightarrow t = 2$$
$$k = 1 \Rightarrow t = 6$$
$$k = 2 \Rightarrow t = 10$$

Para qualquer outro valor inteiro de k, a variável t não pertence ao intervalo $[0, 12]$. Logo, de zero hora às 12 horas, a pressão interna da caldeira é máxima às 2, às 6 e às 10 horas.

Note que primeiro resolvemos a equação em $\mathbb{R}$, para depois atribuir valores a k.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 No plano cartesiano, considere uma circunferência de 7 cm de raio, centrada na origem do sistema, e um ponto P girando sobre essa circunferência, no sentido anti-horário, com velocidade constante de 30 rpm. Esse ponto descreve uma volta completa na circunferência a cada $\frac{1}{30}$ min. Por descrever o mesmo movimento em intervalos consecutivos e de igual duração, dizemos que o movimento desse ponto é periódico.



Como vimos, movimentos periódicos podem ser descritos por funções trigonométricas. Considerando que no instante zero o ponto P esteja no ponto $A(7, 0)$, as coordenadas do ponto P, em função do tempo t, em minuto, são dadas, respectivamente, por:

a) $f(t) = 7 \cos (6\pi t)$ e $g(t) = 7 \text{ sen } (6\pi t)$

b) $f(t) = 7 \cos \frac{\pi t}{6}$ e $g(t) = 7 \text{ sen } \frac{\pi t}{6}$

c) $f(t) = 7 \cos \frac{\pi t}{60}$ e $g(t) = 7 \text{ sen } \frac{\pi t}{60}$

d) $f(t) = 7 \cos (60\pi t)$ e $g(t) = 7 \text{ sen } (60\pi t)$

e) $f(t) = 7 \cos (\pi t)$ e $g(t) = 7 \text{ sen } (\pi t)$

13 Um pistão realiza um movimento periódico no interior de um cilindro, percorrendo 16 cm na subida e 16 cm na descida, tal que cada oscilação completa de 32 cm (subida e descida) é realizada pelo pistão em $\frac{1}{60}$ min.

Considerando que no instante zero o pistão está subindo e que sua cabeça (tampa) está a 8 cm da base do cilindro, a função que descreve a altura $f(t)$, atingida pela cabeça do pistão em relação à base, em função do tempo t, em minuto, é:

a) $f(t) = 8 \cos (60\pi t)$

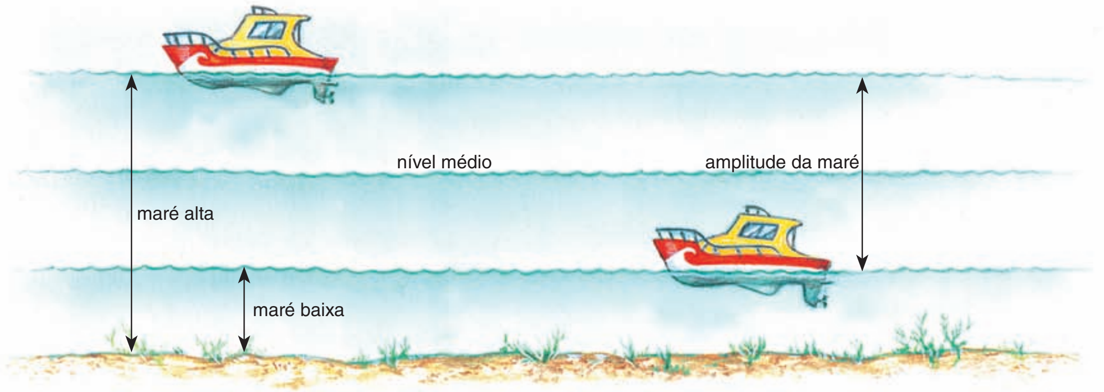
b) $f(t) = 16 \cos (60\pi t)$

c) $f(t) = 8 \cos (120\pi t)$

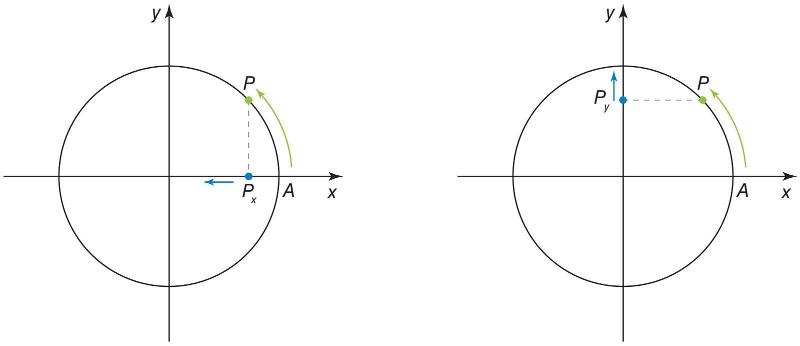
d) $f(t) = 8 \text{ sen } (120\pi t)$

e) $f(t) = 16 \cos \left(\frac{\pi t}{60}\right)$

14 Em uma região, em determinado dia, a amplitude da maré é 2,6 m, e o intervalo de tempo entre duas marés altas consecutivas (ou entre duas marés baixas consecutivas) é 12 horas. Sabendo que uma maré alta ocorre às 5 h, descreva, por meio de uma função trigonométrica, o movimento das marés nessa região em função do horário t, em hora, durante um dia. (Vamos supor que a amplitude seja constante nesse dia.)

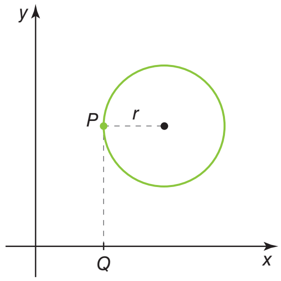


15 Quando um ponto P gira com velocidade constante, repetidas vezes, sobre uma circunferência, a projeção ortogonal de P sobre qualquer um dos eixos coordenados realiza um movimento periódico de vaivém chamado de Movimento Harmônico Simples (MHS). Nas figuras abaixo, P_x e P_y representam respectivamente as projeções ortogonais de P sobre os eixos das abscissas e das ordenadas.



Considere 5 cm para a medida do raio da circunferência e que o ponto P gire no sentido anti-horário, completando uma volta a cada 3 s. Determine as funções f e g que descrevem respectivamente os movimentos de P_x e P_y, sendo t a medida do tempo em segundo, tal que no instante zero P esteja no ponto $A(5, 0)$.

16 (Enem) Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:

a) $r\left(1 - \text{sen}\,\dfrac{d}{r}\right)$

b) $r\left(1 - \cos\dfrac{d}{r}\right)$

c) $r\left(1 - \text{tg}\,\dfrac{d}{r}\right)$

d) $r\,\text{sen}\left(\dfrac{r}{d}\right)$

e) $r\cos\left(\dfrac{r}{d}\right)$

Resolva os exercícios complementares 50 a 65.

Outras funções trigonométricas

Objetivos

- **Identificar** as funções tangente, cotangente, cossecante e secante e suas representações gráficas.
- **Analisar** cada função segundo sua peridiocidade, sinal, raízes e conjunto imagem.

Termos e conceitos

- função tangente
- função cotangente
- função cossecante
- função secante

Já estudamos as funções trigonométricas seno e cosseno. Neste tópico, vamos definir as funções tangente, cotangente, cossecante e secante.

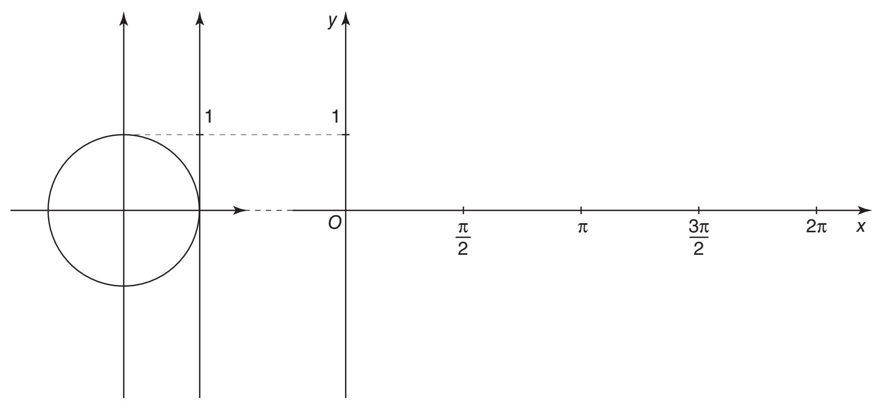
Função tangente

A **função tangente** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \text{tg } x$$

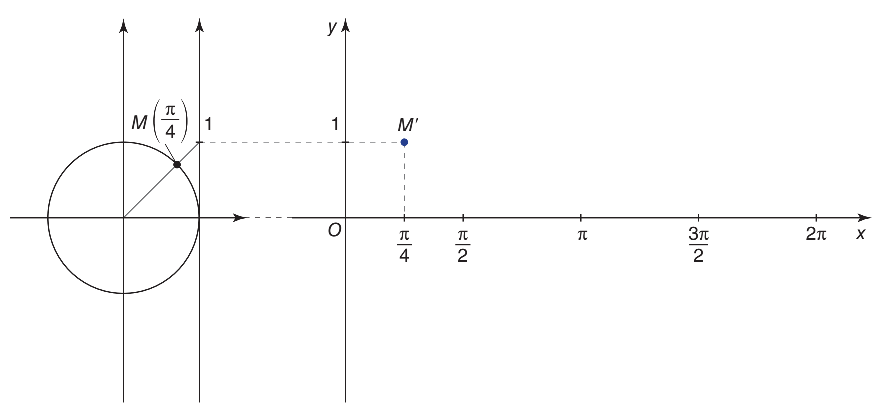
O gráfico da função tangente

Assim como fizemos com o seno, vamos aplicar um método geométrico na construção do gráfico da tangente. Para isso, construímos a circunferência trigonométrica ao lado de um sistema cartesiano, conforme a figura:

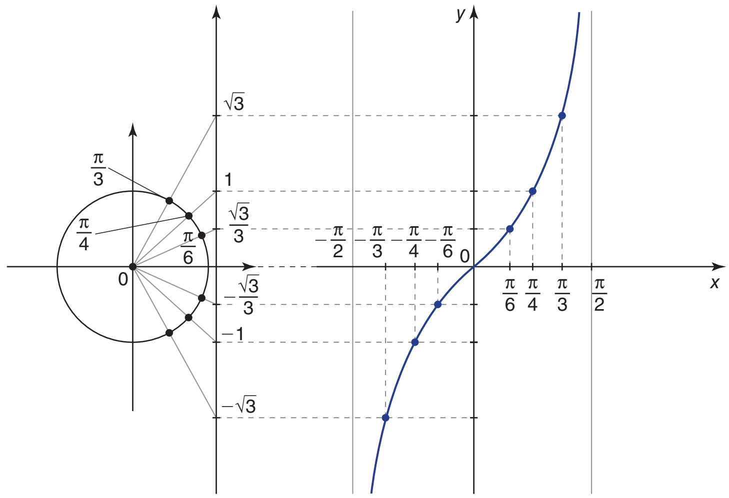


A unidade adotada nos eixos deve ser igual ao raio da circunferência trigonométrica.

A seguir, marcamos no plano cartesiano os pontos (x, y) tais que $y = \text{tg } x$. Por exemplo, transportamos a tangente do arco de medida $\frac{\pi}{4}$ para o eixo Oy como ordenada do ponto M', cuja abscissa é $\frac{\pi}{4}$. Assim, o ponto M' pertence ao gráfico da função $y = \text{tg } x$, conforme a figura:

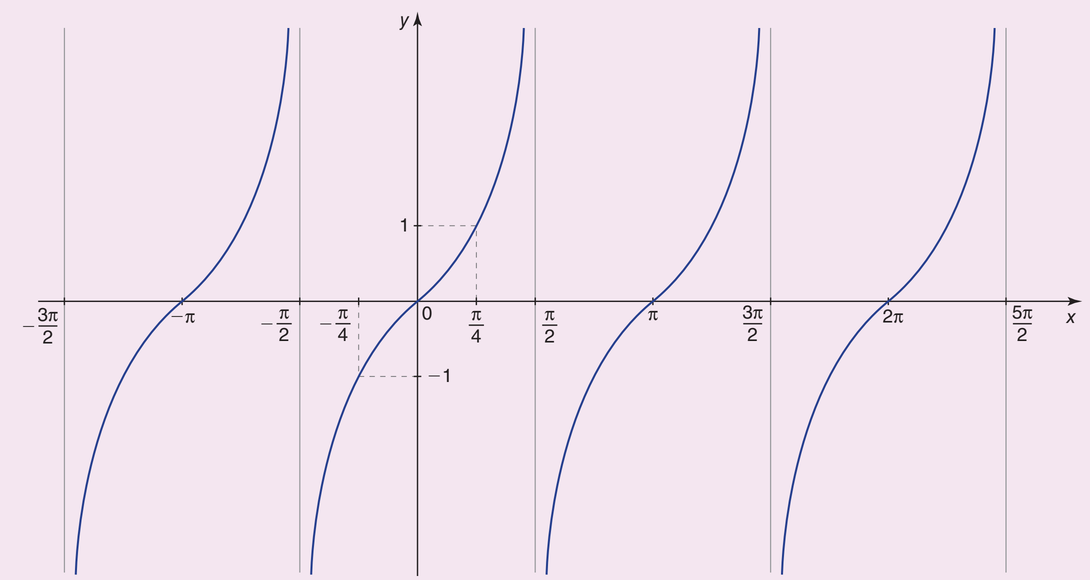


Repetindo o procedimento para outros pontos da circunferência trigonométrica, obtemos mais pontos do gráfico. Quanto mais pontos determinamos, mais nos aproximamos da figura a seguir, que é o gráfico de um período da função $y = \text{tg } x$.



Considerando as infinitas voltas da circunferência trigonométrica, concluímos a construção do gráfico:

$y = \text{tg } x$



- As retas verticais que passam pelos pontos de abscissa ..., $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, ... não têm ponto comum com o gráfico. E, quando x se aproxima indefinidamente de uma dessas retas, a distância entre essa reta e o gráfico tende a zero. Essas retas são chamadas **assíntotas verticais** do gráfico.
- Na função $y = \text{tg } x$, a variável x pode assumir qualquer valor real tal que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, o domínio D dessa função é:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Como tg x pode assumir qualquer valor real, o conjunto imagem (Im) da função $y = \text{tg } x$ é: $Im = \mathbb{R}$.
- O gráfico se repete a cada comprimento π no eixo Ox, ou seja, $\text{tg } (x + \pi) = \text{tg } x$; logo, a função tangente é periódica de período $p = \pi$, pois π é o menor valor positivo de p tal que $\text{tg } (x + p) = \text{tg } x$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

18 Determinar o domínio *D* e o conjunto imagem *Im* da função $y = \text{tg } 3x$.

Resolução

Sabemos que $\text{tg } 3x = \dfrac{\text{sen } 3x}{\cos 3x}$; logo, a condição de existência dessa função é $\cos 3x \neq 0$ e, portanto:

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Então, o domínio da função é o conjunto $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como tg 3*x* pode assumir qualquer valor real, concluímos que o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

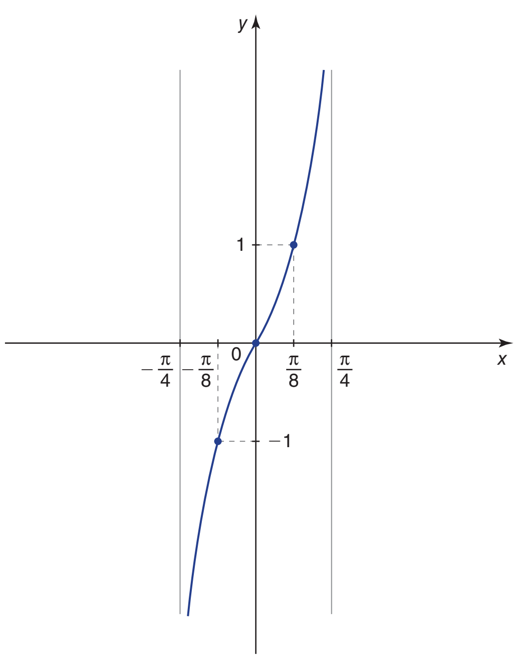
19 Esboçar o gráfico da função $y = \text{tg } 2x$.

Resolução

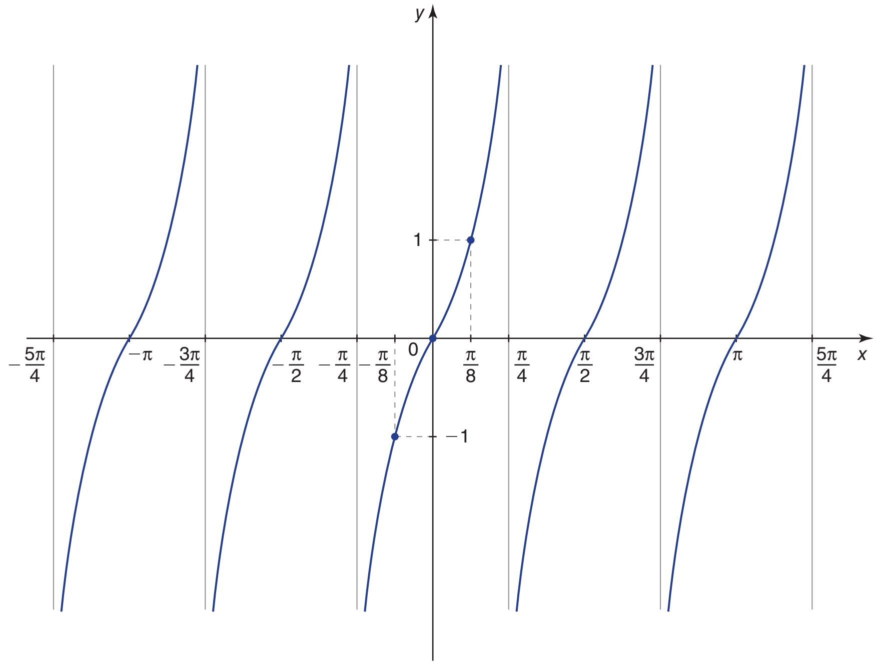
Construindo uma tabela, vamos determinar alguns pontos como referência para o esboço do gráfico de um período dessa função. Para isso, atribuímos ao arco 2*x* os valores $-\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4}$, 0, $\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{2}$. Assim, obtemos a tabela ao lado.

$2x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$

A tabela mostra que o gráfico passa pelos pontos $\left(-\dfrac{\pi}{8}, -1\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\dfrac{\pi}{8}, 1\right)$. Indica ainda que não existe tg 2*x* para $x = -\dfrac{\pi}{4}$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$; logo, duas assíntotas verticais passam pelos pontos de abscissa $-\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{4}$. Concluímos que o gráfico de um período da função $y = \text{tg } 2x$ tem o traçado apresentado na figura abaixo.



Podemos então deduzir o gráfico completo da função, que será formado por infinitas repetições do período já determinado, como sugere a figura:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para tg $2x$, isto é:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Logo, o domínio da função é o conjunto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

O conjunto imagem da função é:

$Im = \mathbb{R}$

O período p da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é:

$$p = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

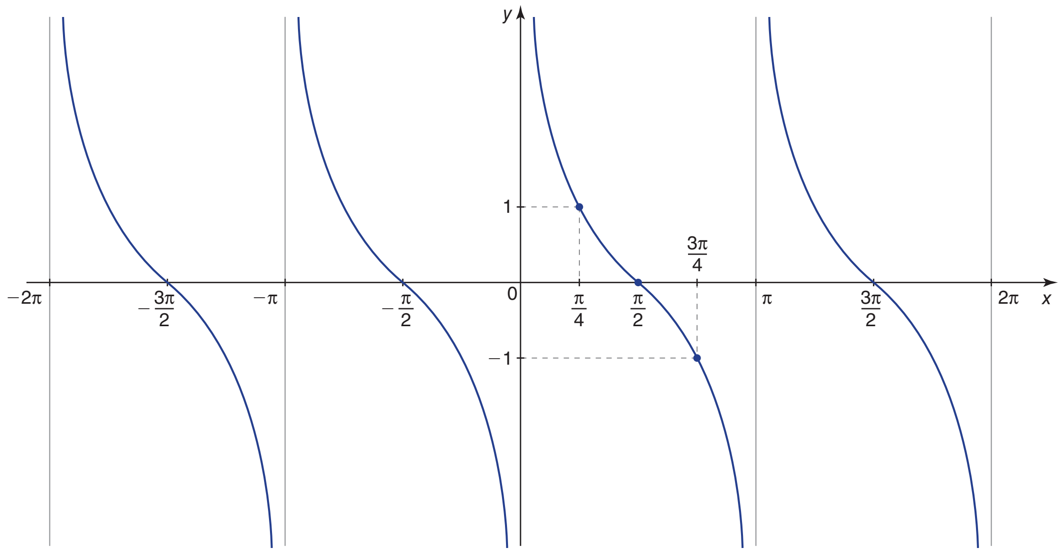
20 Esboçar o gráfico da função $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Resolução

Para esboçar o gráfico de um período dessa função, podemos atribuir ao arco $\frac{\pi}{2} - x$ os valores $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$, obtendo os correspondentes valores de x e y:

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
0	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0	$\nexists$

Assim, com base na repetição do período considerado na tabela, temos o gráfico:



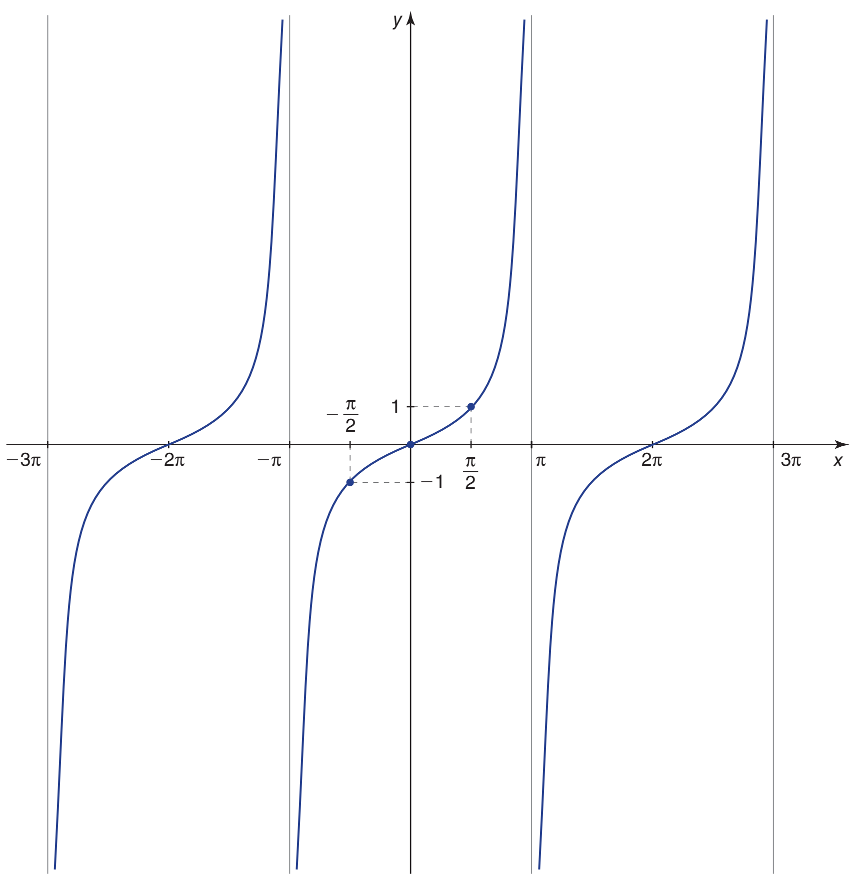
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = \pi$

21 Esboçar o gráfico da função $y = \left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$.

Resolução

Como fizemos nos exercícios resolvidos 11 e 12, vamos construir primeiro o gráfico auxiliar $y_1 = \text{tg } \frac{x}{2}$:

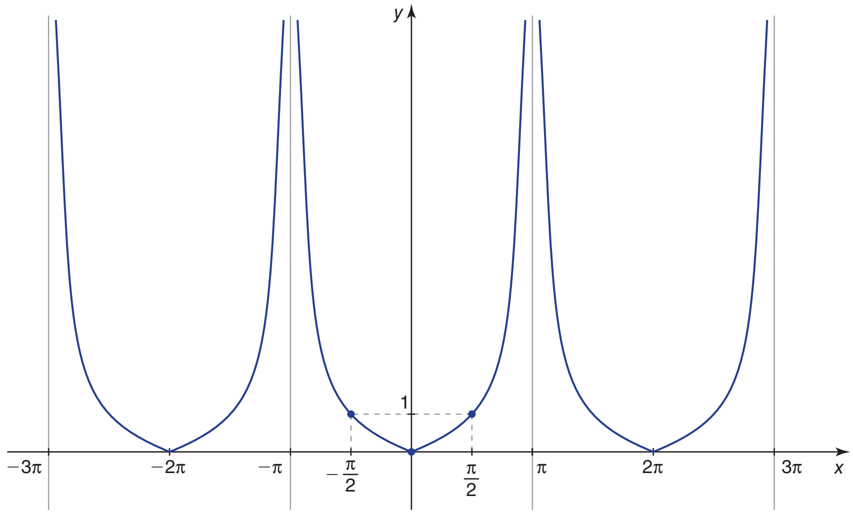
$\frac{x}{2}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$



Com base no gráfico auxiliar, construímos o gráfico da função $y = \left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$, da seguinte maneira:

- Conservamos os pontos de ordenadas não negativas.
- Transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.

Assim, obtemos o gráfico da função $y = \left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para $\left|\text{tg } \frac{x}{2}\right|$, isto é:

$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Portanto, o domínio da função é o conjunto: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

O conjunto imagem é $Im = \mathbb{R}_+$.

O período p da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é: $p = \pi - (-\pi) = 2\pi$

Período de funções que envolvem tangente

Determinamos o período da função $y = a + b \cdot \text{tg } (mx + q)$, com $\{a, b, m, q\} \subset \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e $m \neq 0$, fazendo a medida $(mx + q)$ assumir todos os valores reais associados à meia-volta da circunferência trigonométrica, pois, a cada meia-volta, a função tangente assume todos os valores de sua imagem $\mathbb{R}$. Por exemplo, quando essa medida assume os valores reais do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < mx + q < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q$$

(I) Se $m > 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} < x < \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}$$

O período p da função é a diferença entre o maior e o menor extremo do intervalo acima, nessa ordem:

$$p = \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m}\right) = \frac{\pi}{m}$$

(II) Se $m < 0$:

$$-\frac{\pi}{2} - q < mx < \frac{\pi}{2} - q \Rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} > x > \frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}$$

Calculando o período p:

$$p = \frac{-\frac{\pi}{2} - q}{m} - \left(\frac{\frac{\pi}{2} - q}{m}\right) = -\frac{\pi}{m}$$

Por (I) e (II), concluímos que:

$$\boxed{p = \frac{\pi}{|m|}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

22 Determinar o período das funções:

a) $y = \text{tg}\, 4x$

b) $y = 5\, \text{tg}\, (-2x)$

c) $y = 6 + 4\, \text{tg}\left(\frac{\pi}{7} - 3x\right)$

Resolução

Aplicando a fórmula $p = \frac{\pi}{|m|}$, temos:

a) $p = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}$

b) $p = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$

c) $p = \frac{\pi}{|-3|} = \frac{\pi}{3}$

Função cotangente

A **função cotangente** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \text{cotg}\, x$$

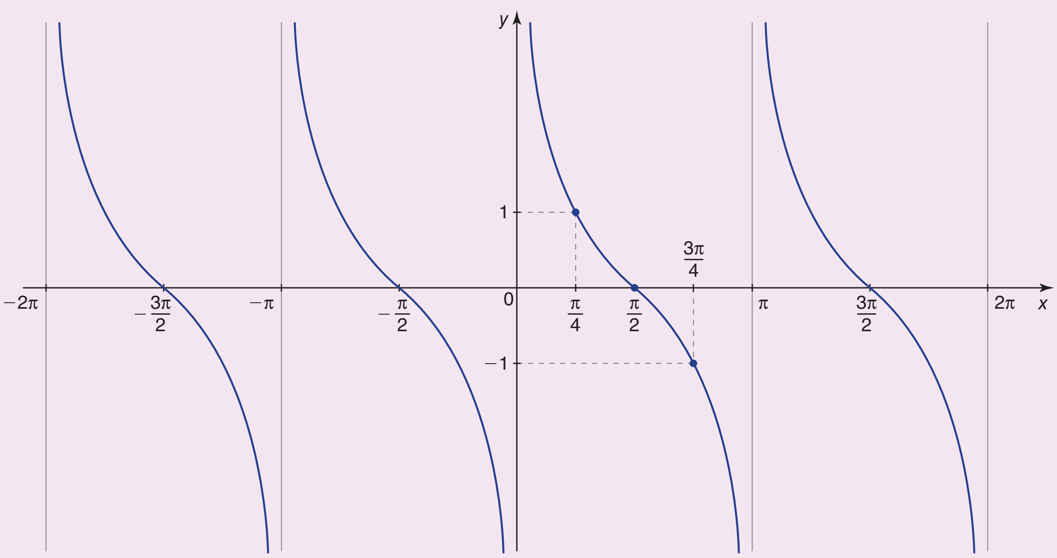
O gráfico da função cotangente

Lembrando que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\, x$, temos:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \text{cotg}\, x$$

Portanto, o gráfico da função $y = \text{cotg}\, x$ é igual ao gráfico da função $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, já construído no exercício resolvido 20:

y = cotg x



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

23 Determinar o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{cotg}\,\frac{x}{2}$.

Resolução

Sabemos que $\text{cotg}\,\frac{x}{2} = \frac{\cos\frac{x}{2}}{\text{sen}\,\frac{x}{2}}$; logo, a condição de existência dessa função é $\text{sen}\,\frac{x}{2} \neq 0$ e, portanto:

$\frac{x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o domínio da função é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

Como $\text{cotg}\,\frac{x}{2}$ pode assumir qualquer valor real, concluímos que o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

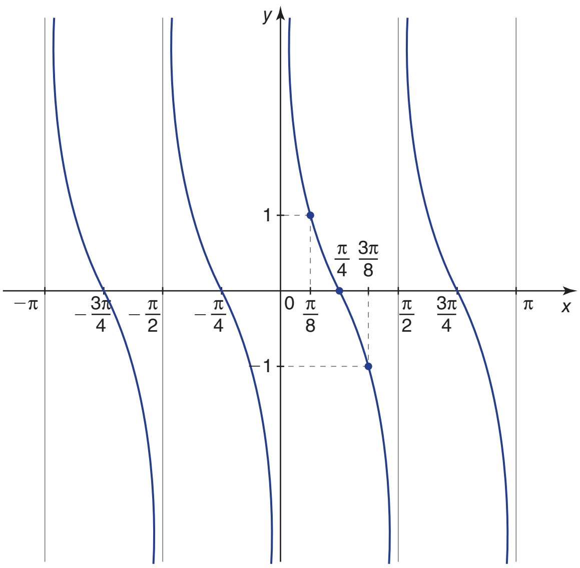
24 Esboçar o gráfico da função $y = \text{cotg}\,2x$.

Resolução

Para esboçar o gráfico de um período da função, construímos uma tabela e atribuímos ao arco $2x$ os valores $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ e π, obtendo os correspondentes valores de x e y.

$2x$	x	y
0	0	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1
π	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$

Assim, com base na repetição do período considerado na tabela, temos o gráfico:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para $\text{cotg}\,2x$, isto é:

$2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o domínio da função é o conjunto: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

O conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

O período p da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é: $p = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

17 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = \text{tg } 4x$

b) $y = 5 \text{ tg } \frac{3x}{2}$

c) $y = 4 + \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

18 Esboce o gráfico das funções.

a) $y = \text{tg } 4x$

b) $y = -\text{tg } 4x$

c) $y = \text{tg } \frac{x}{2}$

19 Calcule o período de cada função.

a) $y = \text{tg } 6x$

b) $y = \text{tg } \frac{x}{6}$

c) $y = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

20 Obtenha o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = \text{cotg } 2x$

b) $y = \text{cotg } \frac{x}{3}$

21 Esboce o gráfico de:

a) $y = \text{cotg } \frac{x}{2}$

b) $y = -2 + \text{cotg } x$

Resolva os exercícios complementares 14 a 21.

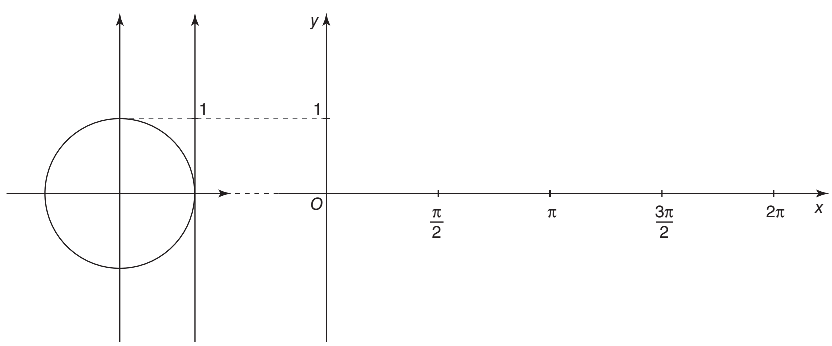
Função cossecante

A **função cossecante** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq k\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \text{cossec } x$$

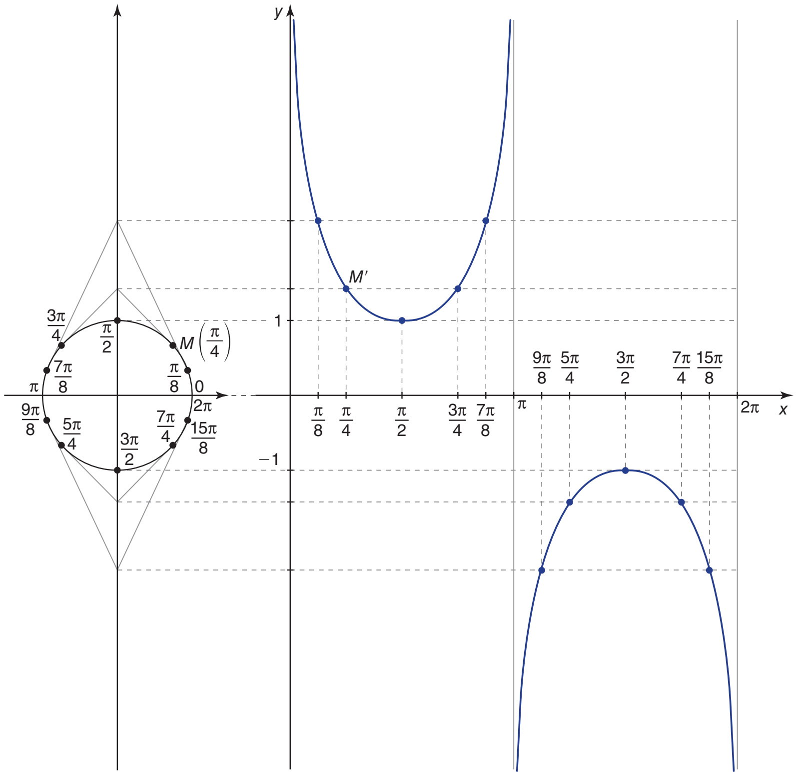
O gráfico da função cossecante

Assim como fizemos para as funções anteriores, vamos aplicar um método geométrico na construção do gráfico da cossecante. Para isso, construímos a circunferência trigonométrica ao lado de um sistema cartesiano, conforme a figura:



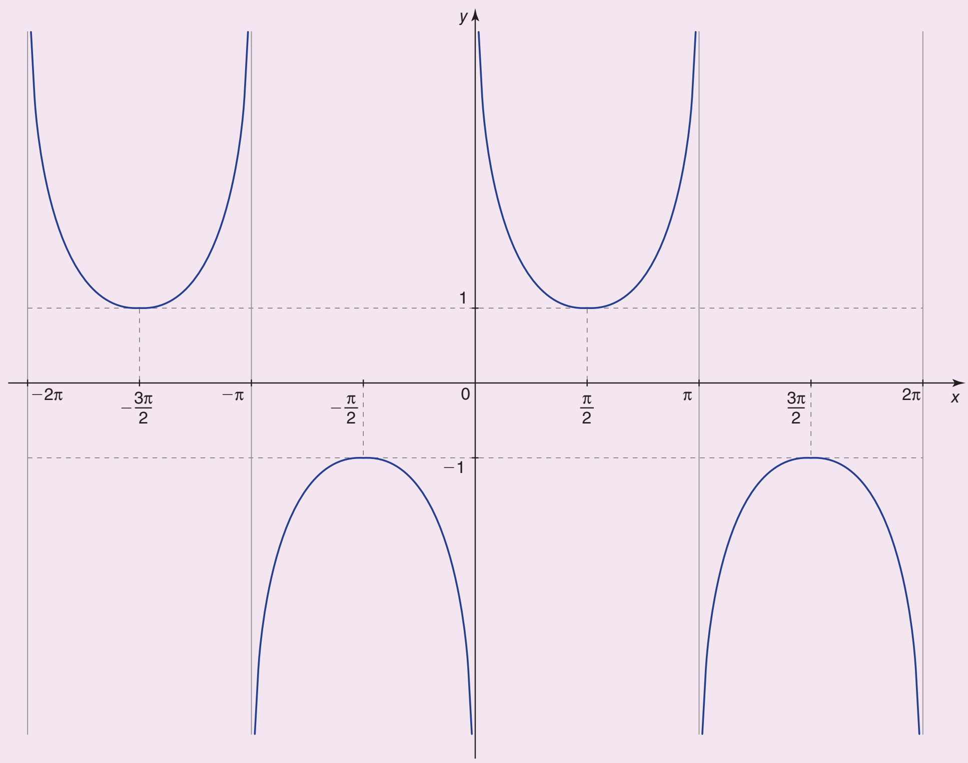
A unidade adotada nos eixos deve ser igual ao raio da circunferência trigonométrica.

A seguir, marcamos no plano cartesiano os pontos (x, y) tais que $y = \text{cossec } x$. Por exemplo, transportamos a cossecante do arco de medida $\frac{\pi}{4}$ para o eixo Oy como ordenada do ponto M', cuja abscissa é $\frac{\pi}{4}$. Assim, o ponto M' pertence ao gráfico da função $y = \text{cossec } x$. Repetindo o procedimento para outros pontos da circunferência trigonométrica, obtemos mais pontos do gráfico. Quanto mais pontos determinarmos, mais nos aproximaremos da figura a seguir, que é o gráfico de um período da função $y = \text{cossec } x$.



O gráfico completo da função cossecante é obtido pela repetição do gráfico de um período da função ao longo do eixo Ox:

$y = \text{cossec } x$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$

$p = 2\pi$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

25 Determinar o domínio da função $y = \text{cossec}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Resolução

Sabemos que $\text{cossec}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$; logo, a condição de existência dessa função é:

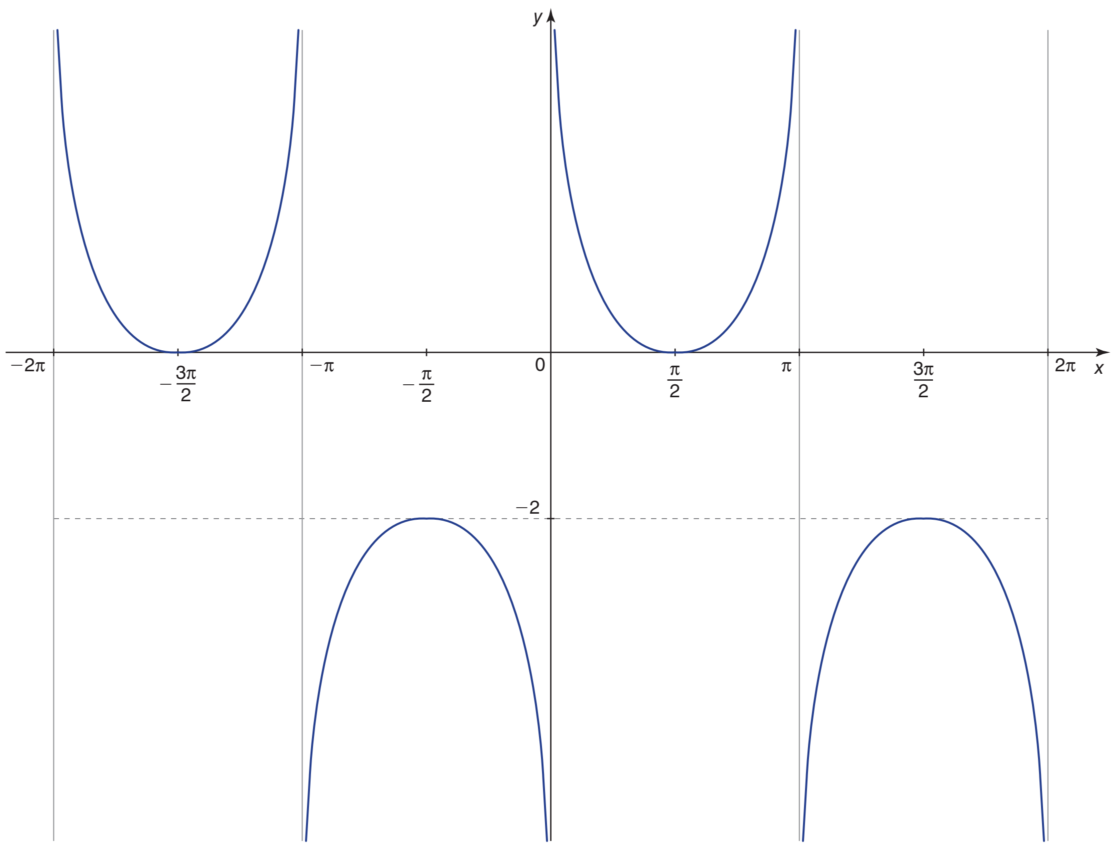
$\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ e, portanto: $2x - \frac{\pi}{3} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o domínio da função é o conjunto: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

26 Esboçar o gráfico da função $y = -1 + \text{cossec}\, x$.

Resolução

Basta transladar verticalmente, em 1 unidade para baixo, o gráfico da função $y = \text{cossec}\, x$. Então, o gráfico da função $y = -1 + \text{cossec}\, x$ é:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

$Im = \{x \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -2 \text{ ou } y \geqslant 0\}$

$p = 2\pi$

27 Determinar o conjunto imagem da função $y = 4 + 2\,\text{cossec}\, x$.

Resolução

$y = 4 + 2\,\text{cossec}\, x \Rightarrow \frac{y - 4}{2} = \text{cossec}\, x$

Como $\text{cossec}\, x \leqslant -1$ ou $\text{cossec}\, x \geqslant 1$, temos: $\frac{y-4}{2} \leqslant -1$ ou $\frac{y-4}{2} \geqslant 1$

Resolvendo as duas últimas inequações, concluímos que $y \leqslant 2$ ou $y \geqslant 6$ e, portanto, o conjunto imagem da função é:

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2 \text{ ou } y \geqslant 6\}$

Função secante

A **função secante** é a função que associa a cada número real x, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $k \in \mathbb{Z}$, um único número real y tal que:

$$y = \sec x$$

O gráfico da função secante

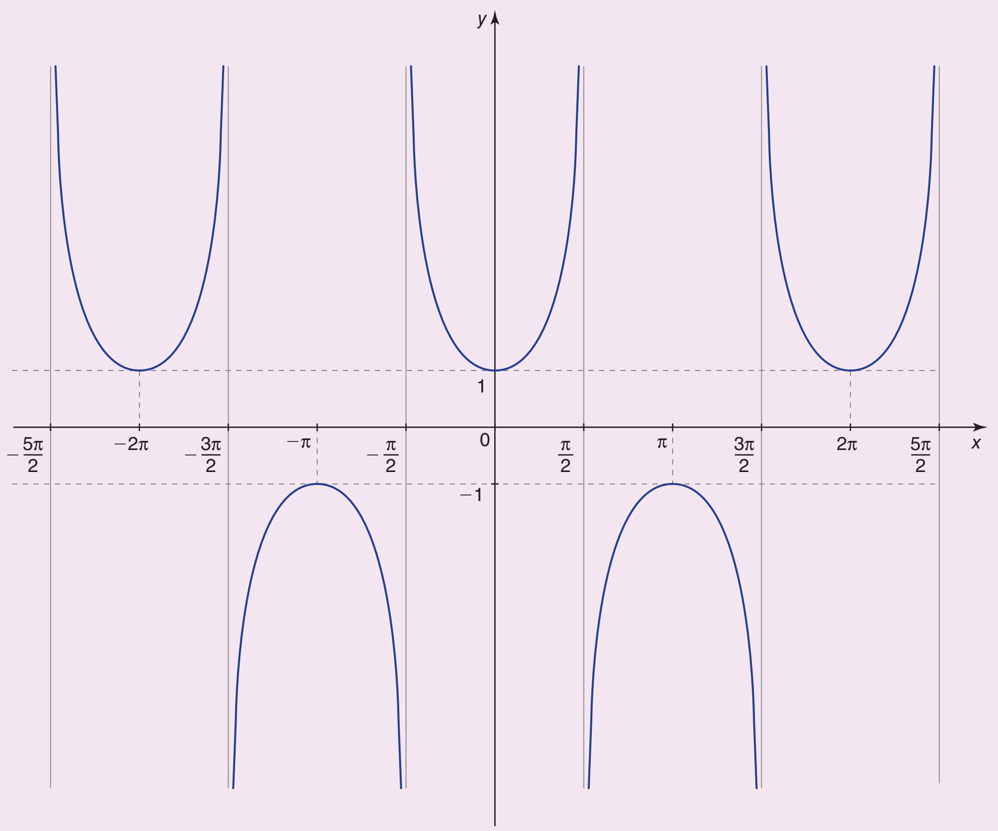
Lembrando que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, temos:

$$\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Portanto, o gráfico da função $y = \sec x$ é igual ao gráfico da função $y = \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, que é uma translação horizontal, de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda, do gráfico da função $y = \text{cossec}\, x$.

Assim, temos:

$y = \sec x$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$p = 2\pi$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

28 Determinar o domínio da função: $y = \sec\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right)$

Resolução

Sabemos que $\sec\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\cos\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right)}$; logo, a condição de existência dessa função é

$\cos\left(2x + \dfrac{3\pi}{5}\right) \neq 0$ e, portanto:

$$2x + \frac{3\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Assim, o domínio da função é o conjunto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

29 Para que valores reais de m é possível a igualdade $\sec x = 2m - 3$?

Resolução

Como $\sec x \leqslant -1$ ou $\sec x \geqslant 1$, os valores de m devem satisfazer a condição:

$2m - 3 \leqslant -1$ ou $2m - 3 \geqslant 1$

Resolvendo as duas últimas inequações, obtemos: $m \leqslant 1$ ou $m \geqslant 2$

Concluímos que existe a igualdade $\sec x = 2m - 3$ apenas para os números reais m tal que $m \leqslant 1$ ou $m \geqslant 2$.

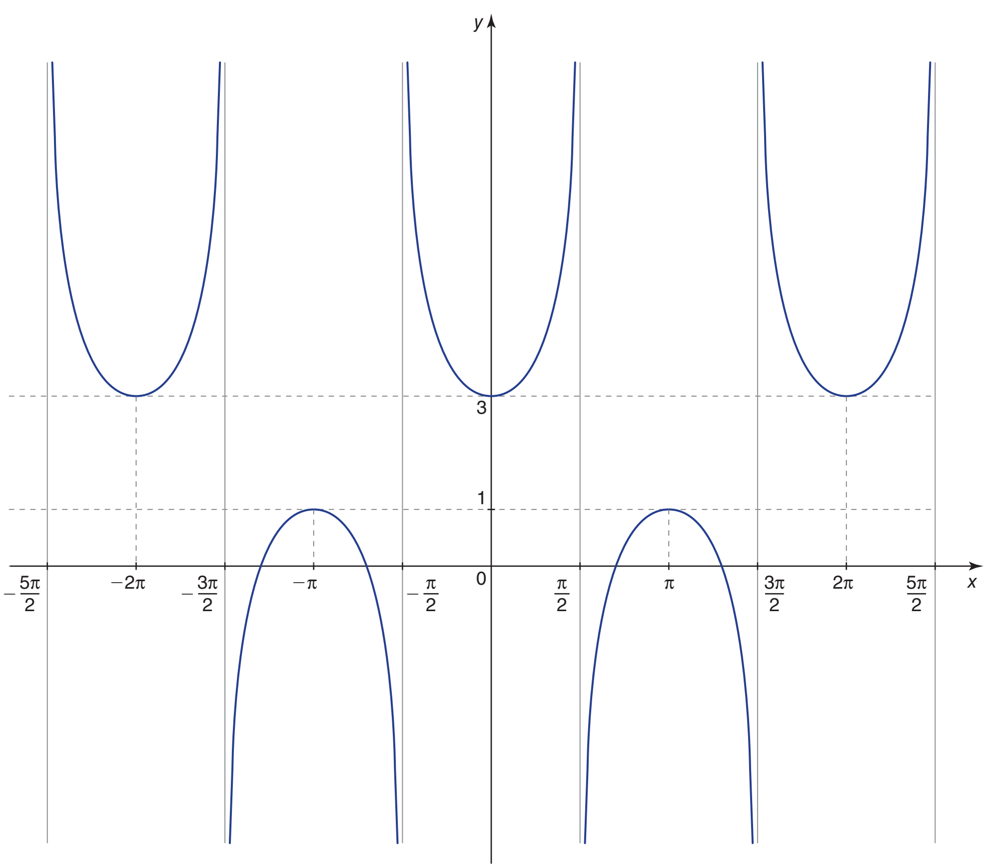
30 Esboçar o gráfico da função $y = |2 + \sec x|$.

Resolução

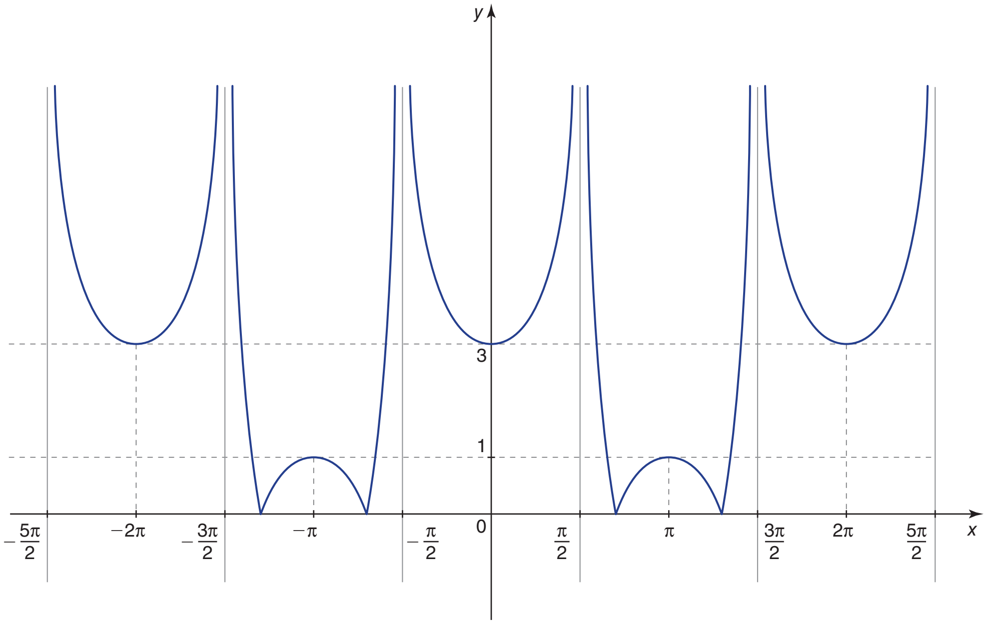
Primeiro, construímos o gráfico auxiliar $y_1 = 2 + \sec x$.

Esse gráfico é obtido por translação vertical, de 2 unidades para cima, do gráfico da função $f(x) = \sec x$.

Assim, o gráfico auxiliar é:



Por uma transformação do gráfico auxiliar, construímos o gráfico da função $y = |2 + \sec x|$:



$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$$

$$p = 2\pi$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a) $y = \text{cossec } 2x$

b) $y = 2 + \text{cossec } \frac{x}{2}$

23 Obtenha os valores reais de k para os quais existe a igualdade: $k - 2 \text{ cossec } x = 5$.

24 Esboce o gráfico das funções:

a) $y = 3 + \text{cossec } x$

b) $y = -\text{cossec } x$

c) $y = |-2 + \text{cossec } x|$

25 Obtenha o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $y = \sec 4x$

b) $y = 2 \sec \frac{x}{2}$

26 Encontre os valores reais de k para os quais seja possível a igualdade: $2k + \sec x = 5$.

Resolva os exercícios complementares 22 a 27.

Seção 15.4

Funções trigonométricas inversas

Objetivos

- **Usar** calculadora científica.
- **Identificar** as funções arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente e suas representações gráficas.
- **Resolver** equações trigonométricas.

Termos e conceitos

- **função arco-seno**
- **função arco-cosseno**
- **função arco-tangente**

Funções trigonométricas na calculadora

Em uma calculadora científica, ao digitar a medida de um ângulo seguida da tecla [sin] e da tecla [=], surgirá no visor um número que é o seno da medida digitada inicialmente.

Inversamente, digitando-se um número maior ou igual a -1 e menor ou igual a 1 seguido da tecla [$\sin^{-1}$] e da tecla [=], surgirá no visor a medida de um ângulo cujo seno é o valor digitado inicialmente.

Essa experiência provoca, inevitavelmente, uma dúvida: para cada valor do seno, há infinitos arcos que têm esse seno; por que a calculadora apresenta apenas um resultado?

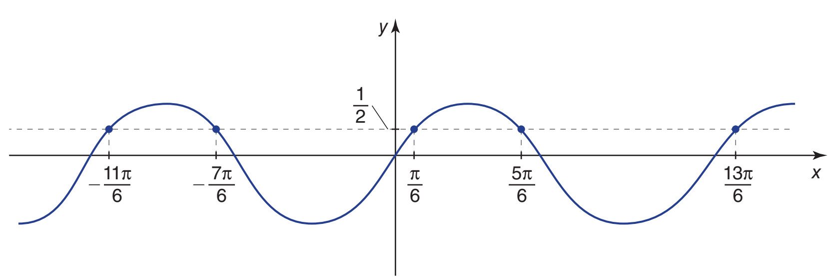
A explicação para esse fato, que também ocorre para o cosseno e a tangente, será apresentada no próximo tópico, sobre as funções trigonométricas inversas.

Notas:

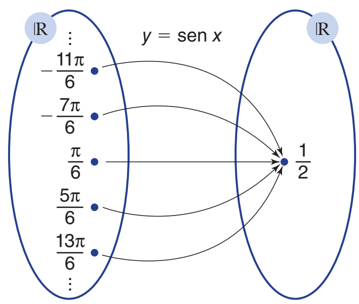
1. Os símbolos "sin" e "tan" são, respectivamente, abreviações das palavras *sine* e *tangent*, que significam seno e tangente em inglês.
2. Os símbolos "$\sin^{-1}$", "$\cos^{-1}$" e "$\tan^{-1}$" (ou "arcsin", "arccos" e "arctan") indicam, respectivamente, as inversas das funções seno, cosseno e tangente, sob certas restrições, que serão estudadas no próximo tópico.
3. Há calculadoras em que se digita a tecla "sin" (ou "cos" e "tan") antes da medida do ângulo.
4. Há calculadoras que apresentam: a tecla [arcsin] em vez de [$\sin^{-1}$]; a tecla [arccos] em vez de [$\cos^{-1}$]; e a tecla [arctan] em vez de [$\tan^{-1}$].

Restrições a domínios e contradomínios

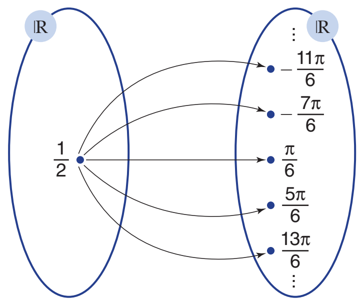
O gráfico abaixo representa a função $y = \text{sen } x$.



Observe que existem infinitas medidas de arcos que têm o mesmo seno:



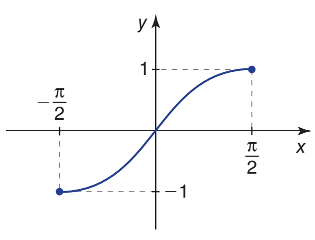
Como há pelo menos dois valores distintos do domínio dessa função que têm a mesma imagem, concluímos que a função $y = \text{sen } x$ não é bijetora e, portanto, não admite função inversa, pois a relação inversa não é função. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ do domínio da relação inversa tem mais de uma imagem, logo, essa relação não é função; observe:



Raciocinando de maneira análoga, concluímos que as funções cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante também não admitem função inversa, pois nenhuma delas é bijetora. Porém, restringindo convenientemente o domínio e o contradomínio de cada uma delas, podemos obter novas funções que sejam bijetoras e, por isso, admitem inversas. Estudaremos esse tipo de restrição para as funções seno, cosseno e tangente.

Função arco-seno

Vamos considerar a restrição da função $y = \text{sen } x$, com domínio $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$. O gráfico dessa restrição é:



Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. A inversa dessa restrição da função seno será indicada por:

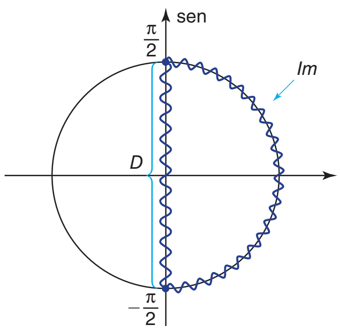
$$\boxed{y = \text{arcsen } x}$$

e deve ser entendida da seguinte maneira:

$$\boxed{y \text{ é o arco cujo seno vale } x}$$

Note que esse arco é único, pois fizemos uma restrição à função seno.

O domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arcsen } x$ são:



$D = [1, -1]$

$Im = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Observe que o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arcsen } x$ são respectivamente iguais ao conjunto imagem e ao domínio da restrição feita à função seno, pois essas duas funções são inversas entre si.

Nota:

Na calculadora científica, ao digitar o valor de um possível seno, seguido da tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ e da tecla $\boxed{=}$, o visor mostrará apenas o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno é o valor digitado inicialmente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

31 Calcular:

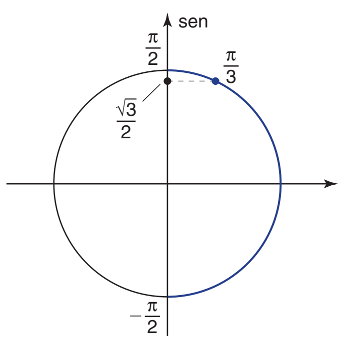
a) $\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\text{arcsen } 0$

Resolução

Como o conjunto imagem da função arco-seno é o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, os valores pedidos devem pertencer a esse intervalo.

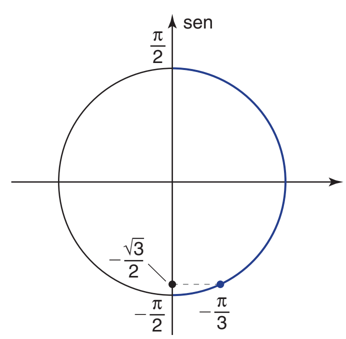
Logo:

a) $\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2}$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



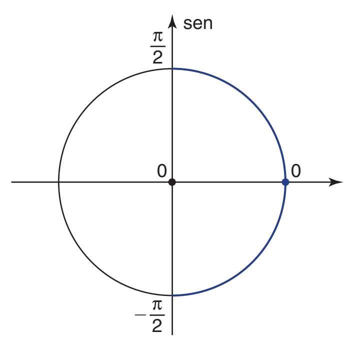
Logo: $\text{arcsen } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

b) $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno vale $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Assim: $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

c) $\text{arcsen } 0$ é o arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno vale 0.



Logo: $\text{arcsen } 0 = 0$

32 Calcular o valor de $\text{tg}\left(\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Resolução

Sabemos que $\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Assim, concluímos que $\text{tg}\left(\text{arcsen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

33 Calcular o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{5}\right)$.

Resolução

Sendo $\alpha = \text{arcsen}\,\frac{3}{5}$, deduzimos que:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

Substituindo sen α por $\frac{3}{5}$ na relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, concluímos que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, ou seja, $\cos\left(\text{arcsen}\,\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

34 Calcular o valor de $\text{sen}\left(2\,\text{arcsen}\,\frac{1}{3}\right)$.

Resolução

Sendo $\alpha = \text{arcsen}\,\frac{1}{3}$, deduzimos que:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$ e $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

Substituindo sen α por $\frac{1}{3}$ na relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, então $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Aplicando a identidade $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$, concluímos:

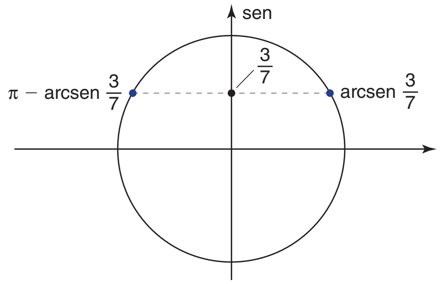
$$\text{sen}\left(2\,\text{arcsen}\,\frac{1}{3}\right) = \text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

35 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\,x = \frac{3}{7}$.

Resolução

Na 1ª volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:



Logo, $x = \text{arcsen}\,\frac{3}{7}$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{3}{7}$.

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \text{arcsen}\,\frac{3}{7} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{3}{7} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen}\,\frac{3}{7} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen}\,\frac{3}{7} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

36 Determinar o domínio da função $y = \text{arcsen}\,3x$.

Resolução

$y = \text{arcsen}\,3x \Rightarrow 3x = \text{sen}\,y$

Como $-1 \leqslant \text{sen}\,y \leqslant 1$, então $-1 \leqslant 3x \leqslant 1$, portanto:

$-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$

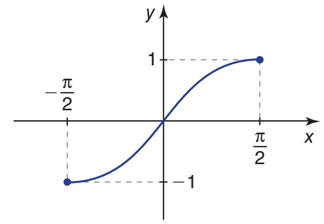
Logo, o domínio da função é o conjunto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}\right\}$$

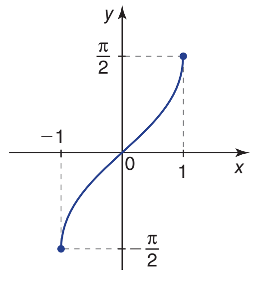
37 Construir o gráfico da função $y = \text{arcsen}\,x$.

Resolução

O gráfico da função $y = \text{sen}\,x$, sob a restrição $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, é:



A inversa dessa função restrita é a função $y = \text{arcsen}\,x$. Como funções inversas entre si têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, concluímos que o gráfico de $y = \text{arcsen}\,x$ é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 Calcule:

a) $\text{arcsen}\ \frac{1}{2}$

b) $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\text{arcsen}\ 1$

d) $\text{arcsen}\ (-1)$

e) $\text{arcsen}\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

g) $\text{arcsen}\ 2$

h) $\text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right)$

28 Obtenha o valor de $\sec\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

29 Encontre o valor de $\text{tg}\left(2\ \text{arcsen}\ \frac{1}{2}\right)$.

30 Qual é o valor de $\cos\left(\text{arcsen}\ \frac{12}{13}\right)$?

31 Determine $\cos\left(2\ \text{arcsen}\ \frac{2}{3}\right)$.

32 Determine o domínio da função $y = \text{arcsen}\ 2x$.

33 Qual é o valor da expressão $\cos\left(\text{arcsen}\ \frac{3}{5} + \text{arcsen}\ 1\right)$?

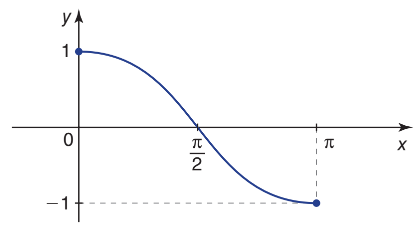
34 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\text{sen}\ x = \frac{2}{7}$.

35 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\frac{\pi}{3} = \text{arcsen}\ x$.

Resolva os exercícios complementares 28 a 34.

Função arco-cosseno

Vamos considerar a restrição da função $y = \cos x$ com domínio $D = [0, \pi]$ e contradomínio $CD = [-1, 1]$. O gráfico dessa restrição é o gráfico ao lado:



Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. A inversa dessa restrição da função cosseno será indicada por:

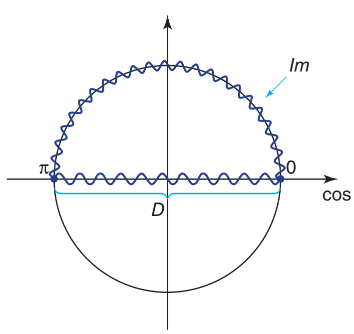
$$y = \text{arccos}\ x$$

e deve ser entendida da seguinte maneira:

y é o arco cujo cosseno vale x

Note que esse arco é único, pois fizemos uma restrição à função cosseno.

O domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arccos}\ x$ são:



$D = [1, -1]$
$Im = [0, \pi]$

Note que o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arccos}\ x$ são respectivamente iguais ao conjunto imagem e ao domínio da restrição feita à função cosseno, pois essas duas funções são inversas entre si.

38 Calcular:

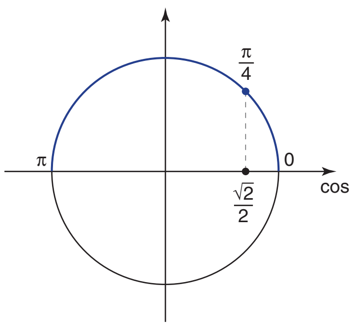
a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\arccos 0$

Resolução

O conjunto imagem da função arco-cosseno é o intervalo $[0, \pi]$ e, portanto, os valores pedidos pertencem a esse intervalo.

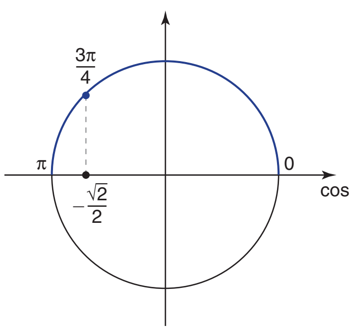
Logo:

a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



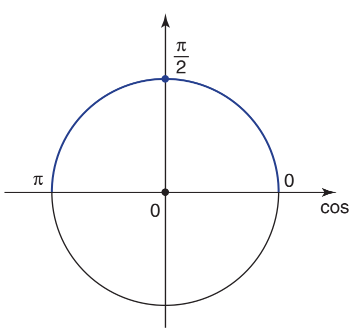
Assim: $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

b) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno vale $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Logo: $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

c) $\arccos 0$ é o arco do intervalo $[0, \pi]$ cujo cosseno vale 0.



Portanto: $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

39 Calcular o valor de $\text{sen}\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$.

Resolução

Sendo $\alpha = \arccos \frac{5}{13}$, deduzimos que:

$\cos \alpha = \frac{5}{13}$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

Substituindo $\cos \alpha$ por $\frac{5}{13}$ na relação fundamental

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, obtemos:

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \text{sen}\, \alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$

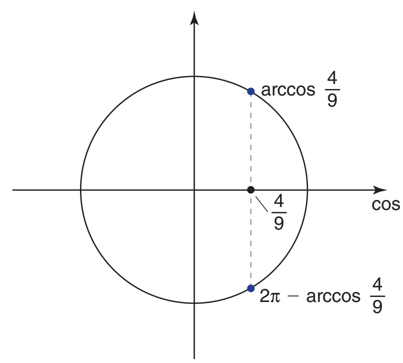
Como $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, concluímos que $\text{sen}\, \alpha = \frac{12}{13}$, ou seja:

$\text{sen}\left(\arccos \frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$

40 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\cos x = \frac{4}{9}$.

Resolução

Na 1ª volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:



Logo: $x = \arccos \frac{4}{9}$ ou $x = 2\pi - \arccos \frac{4}{9}$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi$ ou

$x = 2\pi - \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = 2\pi - \arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Outra maneira possível de apresentar esse conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\arccos \frac{4}{9} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

41 Determinar o domínio da função $y = \text{arccos}\ \frac{x}{2}$.

Resolução

$y = \text{arccos}\ \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \cos y$

Como $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, então

$-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$, portanto: $-2 \leqslant x \leqslant 2$

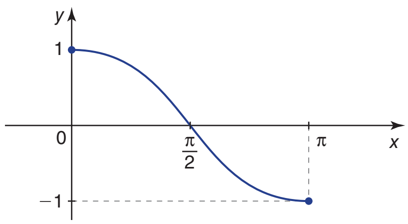
Logo, o domínio da função é o conjunto:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

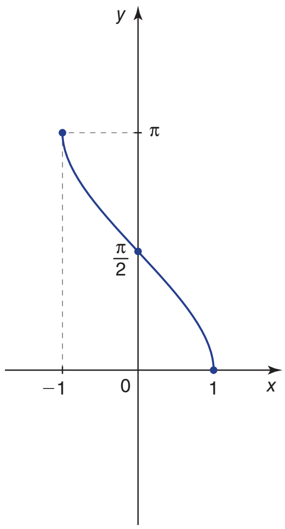
42 Construir o gráfico da função $y = \text{arccos}\ x$.

Resolução

O gráfico da função $y = \cos x$, sob a restrição $0 \leqslant x \leqslant \pi$, é:



A inversa dessa função restrita é a função $y = \text{arccos}\ x$. Como funções inversas entre si têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, concluímos que o gráfico de $y = \text{arccos}\ x$ é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 Calcule:

a) $\text{arccos}\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\text{arccos}\ 1$

d) $\text{arccos}\ (-1)$

e) $\text{arccos}\ \frac{1}{2}$

f) $\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$

g) $\text{arccos}\ \frac{3}{2}$

37 Qual é o valor de $\text{cossec}\left[\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$?

38 Obtenha o valor de $\text{sen}\left(\text{arccos}\ \frac{15}{17}\right)$.

39 Encontre o valor de $\text{sen}\left(2\ \text{arccos}\ \frac{1}{3}\right)$.

40 Qual é o domínio da função $y = \text{arccos}\ 4x$?

41 Determine o valor da expressão $\text{tg}\left[\text{arccos}\ \frac{4}{5} + \text{arccos}\ (-1)\right]$.

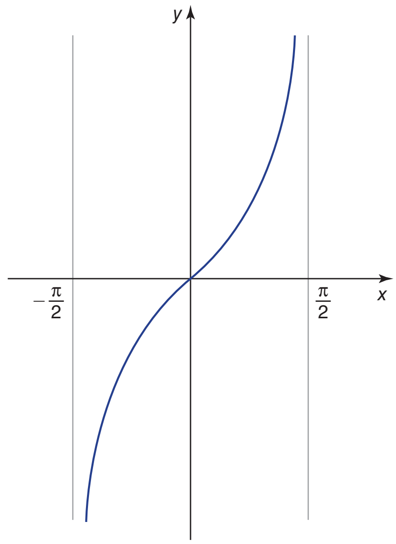
42 Encontre o valor de $\cos\left[\text{arccos}\ \frac{12}{13} + \text{arccos}\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$.

43 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\cos x = \frac{2}{3}$.

Resolva os exercícios complementares 35 a 41.

Função arco-tangente

Vamos considerar a restrição da função $y = \text{tg}\, x$ com domínio $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e contradomínio $CD = \mathbb{R}$. O gráfico dessa restrição é:



Essa função é bijetora e, portanto, admite inversa. A inversa dessa restrição da função tangente será indicada por:

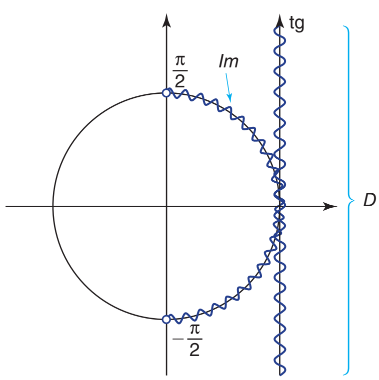
$$y = \text{arctg}\, x$$

e deve ser entendida da seguinte maneira:

y é o arco cuja tangente vale *x*

Note que esse arco é único, pois fizemos uma restrição à função tangente.

O domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arctg}\, x$ são:



$$D = \mathbb{R}$$

$$Im = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Note que o domínio D e o conjunto imagem Im da função $y = \text{arctg}\, x$ são, respectivamente, iguais ao conjunto imagem e ao domínio da restrição feita à função tangente, pois essas duas funções são inversas entre si.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

43 Calcular:

a) arctg $\sqrt{3}$

b) arctg $\left(-\sqrt{3}\right)$

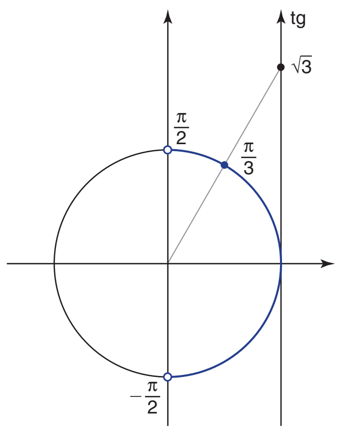
c) arctg 0

Resolução

O conjunto imagem da função arco-tangente é o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e, portanto, os valores pedidos pertencem a esse intervalo.

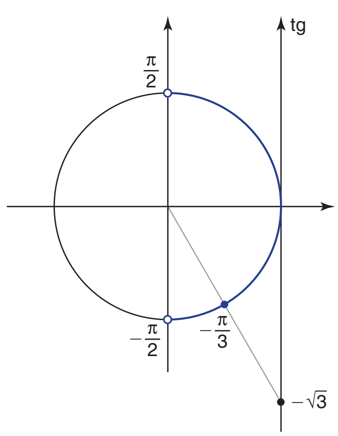
Logo:

a) arctg $\sqrt{3}$ é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente vale $\sqrt{3}$.



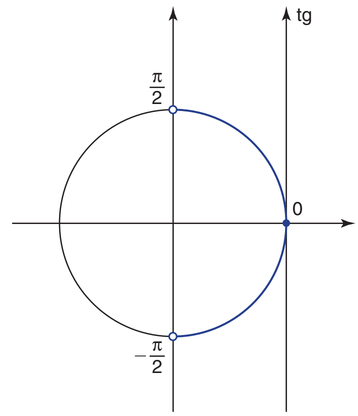
Logo: arctg $\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

b) arctg $\left(-\sqrt{3}\right)$ é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente vale $-\sqrt{3}$.



Assim: arctg $\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

c) arctg 0 é o arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente vale 0.



Portanto: arctg 0 = 0

44 Calcular sen (arctg 1).

Resolução

Como arctg $1 = \frac{\pi}{4}$, concluímos que:

$$\text{sen (arctg 1)} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

45 Calcular o valor de sen [2 arctg (−3)].

Resolução

Sendo $\alpha = \text{arctg}\,(-3)$, deduzimos que:

$\text{tg}\,\alpha = -3$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Da igualdade $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -3$, temos:

$\text{sen}\,\alpha = -3\cos\alpha \quad \text{(I)}$

Substituindo sen α por −3 cos α na relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos:

$(-3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 10\cos^2\alpha = 1$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{1}{10}$

$\therefore \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

Como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, concluímos que:

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Substituindo cos α por $\frac{\sqrt{10}}{10}$ em (I), obtemos:

$\text{sen}\,\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Finalmente, aplicamos a identidade $\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$, concluindo:

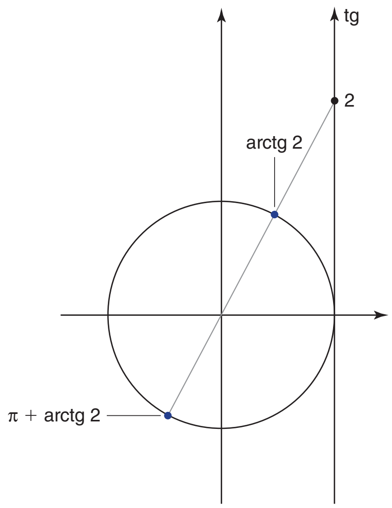
$\text{sen}\,[2\,\text{arctg}\,(-3)] = \text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 2 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = -\frac{3}{5}$

46 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação tg $x = 2$.

Resolução

Na 1ª volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos $x = \text{arctg } 2$ ou $x = \pi + \text{arctg } 2$:



Observando que esses valores de x estão associados a pontos da circunferência simétricos em relação ao centro da circunferência, podemos apresentar os infinitos números reais associados a esses pontos pela expressão:

$x = \text{arctg } 2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

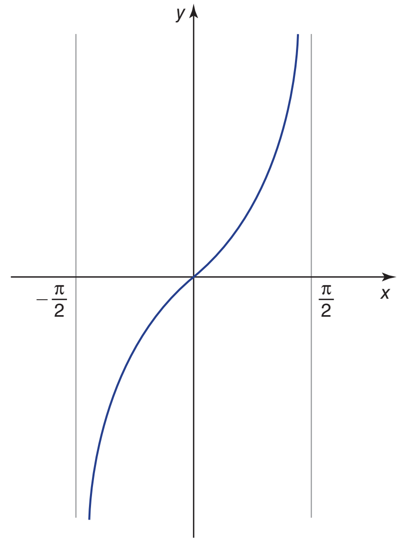
Logo, o conjunto solução da equação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arctg } 2 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

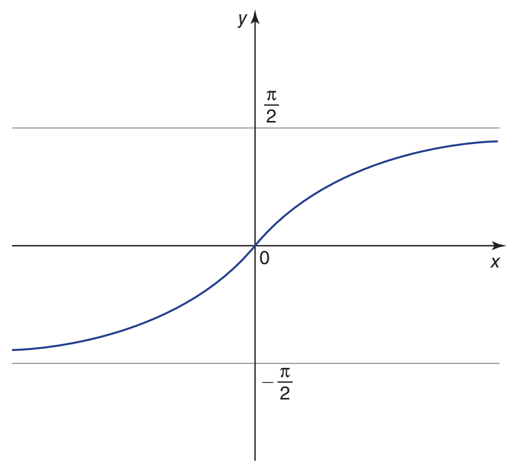
47 Construir o gráfico da função $y = \text{arctg } x$.

Resolução

O gráfico da função $y = \text{tg } x$, sob a restrição $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, é:



A inversa dessa função restrita é a função $y = \text{arctg } x$. Como funções inversas entre si têm gráficos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, concluímos que o gráfico de $y = \text{arctg } x$ é:



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

44 Calcule:

a) arctg 1

b) arctg (-1)

c) arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) arctg $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

45 Obtenha o valor de $\cos\left[\text{arctg } \sqrt{3}\right]$.

46 Encontre o valor de $\text{sen}\left[2 \text{ arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right]$.

47 Qual é o valor de $\sec\left(\text{arctg } \sqrt{5}\right)$?

48 Determine $\cos\,(2 \text{ arctg } 2)$.

49 Determine o conjunto imagem da função $y = 2 \text{ arctg } x$.

50 Encontre o valor de tg $[\text{arctg } 5 + \text{arctg } 2]$.

51 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação tg $x = 10$.

Resolva os exercícios complementares 42 a 48.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Exercícios técnicos

1 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = \frac{\text{sen } x}{2}$

b) $y = 4 - 2 \text{ sen } x$

c) $y = -4 \cos x$

d) $y = \frac{4 \cos x}{3}$

e) $y = -2 + 3 \cos x$

f) $y = 1 - 3 \cos x$

g) $y = -1 - 2 \cos x$

2 Esboce o gráfico de cada função.

a) $y = 2 - 3 \text{ sen } 2x$

b) $y = 2 \text{ sen } \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = -2 \text{ sen } \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $y = 2 + \text{sen } \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

e) $y = 1 + 2 \cos 2x$

f) $y = -2 + \cos \frac{x}{2}$

g) $y = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

3 Determine o período das funções:

a) $y = \frac{\text{sen } x}{8}$

b) $y = -3 \cos x$

c) $y = \frac{\cos x}{3}$

d) $y = \cos \frac{x}{3}$

e) $y = -3 + 5 \cos 6x$

f) $y = -1 - 5 \text{ sen } \left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

4 Obtenha o conjunto imagem das funções:

a) $y = -2 + 3 \text{ sen } x$

b) $y = -1 + 3 \text{ sen } 2x$

c) $y = 6 - 4 \cos \left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$

d) $y = \pi + 2\pi \text{ sen } \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

5 (Fuvest-SP) O menor valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com x real, é:

a) $\frac{1}{6}$

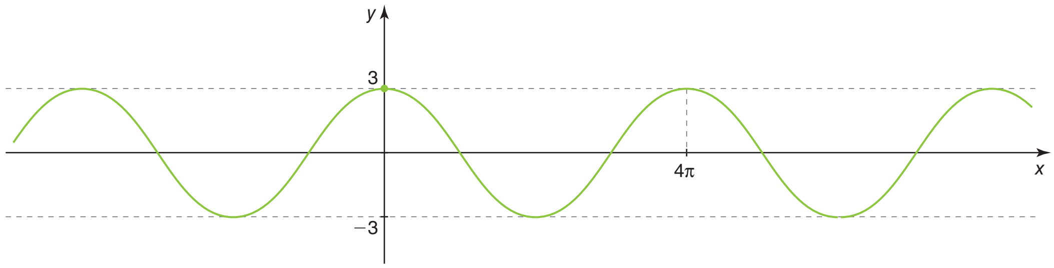
b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

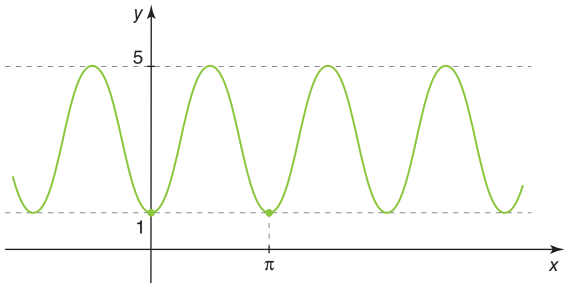
d) 1

e) 3

6 O gráfico abaixo representa a função $f(x) = b \cdot \cos mx$. Determine o valor das constantes reais b e m.



7 Determine as constantes reais a, b e m na função $f(x) = a + b \cdot \cos mx$, dado que o gráfico de f é:



8 Esboce o gráfico das funções:

a) $y = -|\cos x|$

b) $y = 2 - |\cos x|$

c) $y = 3\,|\text{sen } x|$

d) $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

9 Qual é o número de raízes da equação $\cos x = x^2 - 4x$?
(*Sugestão*: Construa, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $y = \cos x$ e $y = x^2 - 4x$.)

10 Qual é o número de raízes da equação $\text{sen } x = \frac{x}{\pi}$?

11 Determine os valores reais de k para os quais existe a igualdade $\cos x = \frac{2k - 1}{3}$.

12 Determine os possíveis valores da constante p para os quais a equação na variável x, $\cos x = 2p - 1$, tenha solução.

13 Obtenha os valores reais de m para os quais a equação $\text{sen } x = 2m + 5$, na variável x, tenha solução no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

14 Esboce o gráfico das funções:

a) $y = \left|\text{tg } \frac{x}{3}\right|$

b) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = 2 + \text{tg } x$

15 Calcule o período de cada função.

a) $y = 5 + 3\,\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $y = 4\,\text{tg}\left(-\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \frac{\text{sen}^3 6x}{\cos 6x} - \text{sen } 6x \cdot \cos 6x$

16 Quantas raízes possui a equação $\text{tg } x = \frac{4x}{\pi}$ no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$?

17 Sendo $A = \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$, determine o conjunto imagem da função $f\colon A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{3} + \text{tg } 4x$.

18 Obtenha o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:

a) $y = 5\,\text{cotg } \frac{3x}{2}$

b) $y = \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

19 Esboce o gráfico de:

a) $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

b) $y = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = -\text{cotg } 2x$

20 Esboce o gráfico da função $y = \text{tg } x \cdot \text{cotg } x$ para $x \in [0, 2\pi]$.

21 Quantas raízes possui a equação $\text{cotg } x = 2 - x^2$ no universo $U = [0, \pi]$?

22 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função:

a) $y = 5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = -2 + \text{cossec } 2x$

23 Para que valores reais de m existe a igualdade $\text{cossec } x = m^2 - 1$?

24 Determine o número de raízes da equação $\frac{2x}{\pi} = \text{cossec } x$ no intervalo $[0, \pi]$.

25 Obtenha o domínio e o conjunto imagem das funções:

a) $y = 1 + \sec x$

b) $y = 4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

c) $y = 3 + 2\sec 3x$

26 Esboce o gráfico de:

a) $y = -2 + \sec x$

b) $y = -\sec x$

c) $y = |1 + \sec x|$

27 Quantas raízes possui a equação $\sec x = \frac{2x}{\pi} + 1$ no intervalo $[0, 2\pi]$?

28 Calcule $\text{sen}\left(2\,\text{arcsen } \frac{3}{4}\right)$.

29 Resolva a expressão:

$\cos(\text{arcsen } 0) + \text{tg}\left(\text{arcsen } \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{sen}\left(\text{arcsen } \frac{2}{7}\right)$

30 Obtenha o domínio da função:

$y = \text{arcsen}\left(\frac{3x}{2} + 5\right)$

31 Encontre o valor de:

$\text{sen}\left[\text{arcsen } \frac{1}{3} + \text{arcsen}\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$

32 Considerando o universo $\mathbb{R}$, dê o conjunto solução da equação $6\,\text{sen}^2 x - 7\,\text{sen } x + 1 = 0$.

33 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\frac{\pi}{2} = \text{arcsen}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

34 Qual é o número de raízes da equação $\frac{\pi x}{2} = \text{arcsen } x$?

35 Determine $\text{cotg}\left(2\,\text{arccos } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

36 Calcule $\cos\left(2\,\text{arccos } \frac{5}{6}\right)$.

37 Resolva a expressão:

$$\text{sen}\,(\text{arccos}\,0) + \text{cotg}\left(\text{arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos\left(\text{arccos}\,\frac{5}{9}\right)$$

38 Obtenha o domínio da função $y = \text{arccos}\left(\frac{x}{4} + 2\right)$.

39 Obtenha, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $5\,\text{sen}^2\,x - 3\cos x - 3 = 0$.

40 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\frac{\pi}{4} = \text{arccos}\,x$

b) $\frac{\pi}{3} = \text{arccos}\,(2x - 1)$

41 Qual é o número de raízes da equação $-2x^2 + 2 = \text{arccos}\,x$?

42 Calcule tg (2 arctg 6).

43 Resolva a expressão:

$$\text{cossec}\left(\text{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sec\,(\text{arctg}\,0) + \text{tg}\,(\text{arctg}\,9)$$

44 Obtenha o conjunto imagem da função: $y = 4\,\text{arctg}\,3x$

45 Qual é o valor da expressão

$$\cos\left(\text{arctg}\,\frac{3}{4} + \text{arctg}\,0\right)?$$

46 Considerando o universo $\mathbb{R}$, dê o conjunto solução da equação $\text{tg}^2\,x - 3\,\text{tg}\,x + 2 = 0$.

47 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\frac{\pi}{4} = \text{arctg}\,x$

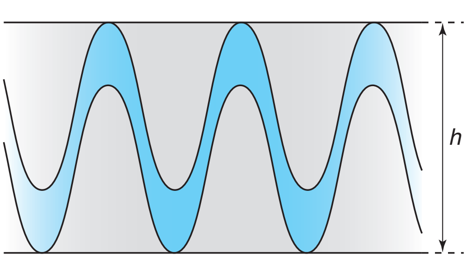
b) $\frac{2\pi}{3} = \text{arctg}\,2x$

48 Qual é o número de raízes da equação

$x^2 - \frac{\pi}{2} = \text{arctg}\,x$?

Exercícios contextualizados

49 No plano cartesiano xOy, em que a unidade adotada nos eixos Ox e Oy é o metro, um arquiteto projetou uma calçada a ser construída na orla reta de uma praia. No piso, serão desenhadas ondas representadas entre os gráficos das funções $f(x) = 4\,\text{sen}\,x$ e $g(x) = 3 + 4\,\text{sen}\,x$, sendo que o gráfico de f tangenciará uma margem da calçada e o de g tangenciará a outra margem, conforme mostra a figura. Calcule a largura h da calçada, em metro.



50 (FGV) Suponha que a temperatura (em °F) de uma cidade localizada em um país de latitude elevada do hemisfério norte, em um ano bissexto, seja modelada pela equação

$$T = 50 \cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5)\right] + 25$$

na qual d é dado em dias e $d = 0$ corresponde a 1º de janeiro.

a) Esboce o gráfico de T *versus* d para $0 \leqslant d \leqslant 366$.

b) Use o modelo para prever qual será o dia mais quente do ano.

c) Baseado no modelo, determine em quais dias a temperatura será 0 °F.

51 (UFPB) Um objeto desloca-se de tal modo que sua posição x em função do tempo t é dada pela função $x(t) = 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$, em que t é dado em segundo e x, em metro. Acerca desse movimento são feitas as seguintes afirmações:

(I) No instante $t = 0$, o objeto ocupa a posição $x = 4$ m.

(II) O valor máximo que a posição x pode assumir é 5 m.

(III) O valor mínimo que a posição x pode assumir é -4 m.

(IV) O móvel passa pela posição $x = 4$ nos tempos $t = n\pi - \frac{\pi}{4}$, com $n = 1, 2, 3$.

Estão corretas:

a) I e III
b) II e IV
c) I e II
d) II e III
e) III e IV

52 (Vunesp) No hemocentro de certo hospital, o número de doações de sangue tem variado periodicamente. Admita que, nesse hospital, no ano de 2004, esse número, de janeiro ($t = 0$) a dezembro ($t = 11$), seja dado, aproximadamente, pela expressão:

$$S(t) = \lambda - \cos\frac{(t - 1)\pi}{6}$$

com λ uma constante positiva, $S(t)$ em milhares e t em meses, $0 \leqslant t \leqslant 11$. Determine:

a) a constante λ sabendo que, no mês de fevereiro, houve 2 mil doações de sangue;

b) em quais meses houve 3 mil doações de sangue.

53 (Vunesp) Podemos supor que um atleta, enquanto corre, balança cada um de seus braços ritmicamente (para a frente e para trás) segundo a equação

$$y = f(t) = \frac{\pi}{9}\,\text{sen}\left[\frac{8\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)\right],$$

em que y é o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical, com $-\frac{\pi}{9} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{9}$, e t é o tempo medido em segundo, $t \geqslant 0$. Com base nessa equação, determine quantas oscilações completas (para a frente e para trás) o atleta faz com o braço em 6 segundos.

54 Uma locomotiva se desloca com velocidade constante, e cada uma de suas rodas tem 0,5 m de raio. Um ponto P de uma das rodas toca o trilho a cada 0,36 segundo. Indicando por $t = 0$ um instante em que P toca o trilho, a altura h, em metro, em função do tempo t, em segundo, do ponto P em relação ao trilho pode ser determinada por:

a) $h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

b) $h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{9\pi t}{25}\right)$

c) $h(t) = 1 - \cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

d) $h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{50\pi t}{9}\right)$

e) $h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{9\pi t}{25}\right)$

55 (FGV) Em uma cidade frequentada por viajantes em férias, estima-se que o número de pessoas empregadas dependa da época do ano, e pode ser aproximada pela função: $N = 10 + 2\,\text{sen}\,(2\pi x)$, em que N é o número de pessoas empregadas (em milhares) e $x = 0$ representa o início do ano 2009, $x = 1$ o início do ano 2010, e assim por diante.

O número de empregados atinge o menor valor:

a) no início do 1º trimestre de cada ano.
b) no início do 2º trimestre de cada ano.
c) no início do 3º trimestre de cada ano.
d) no início e no meio de cada ano.
e) no início do 4º trimestre de cada ano.

56 (Vunesp) Uma equipe de mergulhadores, entre eles um estudante de ciências exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que o fenômeno era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right),$$

em que t é o tempo (em hora) decorrido após o início da observação ($t = 0$), e $P(t)$ é a profundidade da água (em metro) no instante t.

a) Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$ para $t > 0$.
b) Determine quantas horas após o início da observação ocorreu a primeira maré alta.

57 (UFSCar-SP) O número de turistas de uma cidade pode ser modelado pela função $f(x) = 2{,}1 + 1{,}6\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que x representa o mês do ano (1 para janeiro, 2 para fevereiro, 3 para março, e assim sucessivamente) e $f(x)$ o número de turistas no mês x (em milhares).

a) Determine quais são os meses em que a cidade recebe um total de 1.300 turistas.
b) Construa o gráfico da função f, para x real, tal que $x \in [1, 12]$, e determine a diferença entre o maior e o menor número de turistas da cidade em um ano.

58 (Uerj) A temperatura média diária, T, para um determinado ano, em uma cidade próxima ao polo Norte é expressa pela função abaixo.

$$T = 50\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 7$$

Nessa função, t é dado em dias, $t = 0$ corresponde ao dia 1º de janeiro e T é medida na escala Fahrenheit. A relação entre as temperaturas medidas na escala Fahrenheit (F) e as temperaturas medidas na escala Celsius (C) obedece, por sua vez, à seguinte equação:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Em relação a esse determinado ano, estabeleça:

a) o dia no qual a temperatura será a menor possível;
b) o número total de dias em que se esperam temperaturas abaixo de 0 °C.

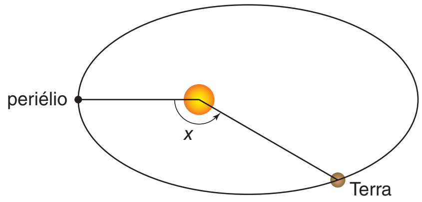
59 (Uenf-RJ) Uma população P de animais varia, aproximadamente, segundo a equação abaixo:

$$P = 800 - 100\,\text{sen}\,\frac{(t + 3)\pi}{6}$$

Considere que t é o tempo medido em meses e que 1º de janeiro corresponde a $t = 0$.
Determine, no período de 1º de janeiro a 1º de dezembro de um mesmo ano, os meses nos quais a população de animais atinge:

a) um total de 750;
b) seu número mínimo.

60 O esquema a seguir representa a órbita elíptica da Terra em torno do Sol, com destaque para o **periélio**, que é o ponto dessa órbita mais próximo do Sol. O ângulo assinalado mede x radianos, com $x \in [0, 2\pi[$, tem um lado que passa pelo periélio e outro que passa pela Terra.



A distância, em milhões de quilômetros, da Terra ao Sol é $d = 149{,}6 - 2{,}5\cos x$, aproximadamente, em que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - \frac{\pi}{183} \cdot \text{sen}\,x$, sendo:

- t o tempo, em dia, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até o instante em que o ângulo periélio-Sol-Terra assume a medida x;
- T o tempo que a Terra demora para descrever uma órbita completa (365,24 dias).

a) Determine a distância da Terra ao Sol quando ela se encontra no periélio.
b) Calcule a distância da Terra ao Sol quando $t = T\left(\frac{1}{366} + \frac{x}{2\pi}\right)$.

61 (Vunesp) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura h, em metro, em que se encontra seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11{,}5 + 10\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right]$, em que o tempo t é dado em segundo e a medida angular em radiano.

a) Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ($t = 0$).
b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período).

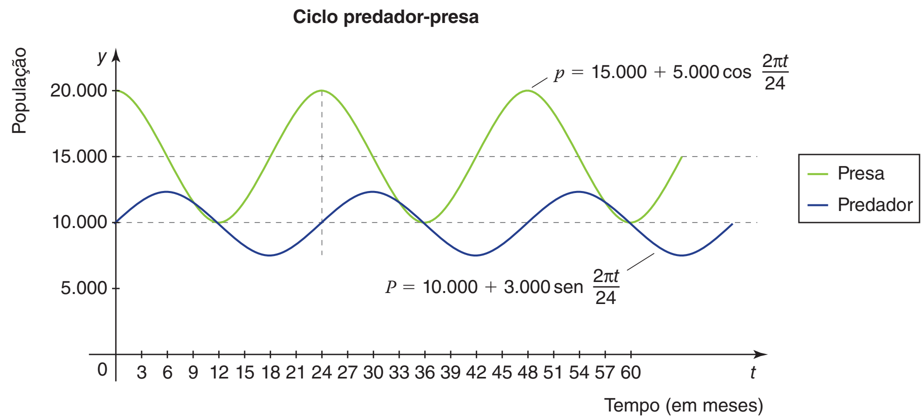
62 (UFMT) Em um determinado ciclo predador-presa, a população P de um predador no instante t (em meses) tem como modelo:

$$P = 10.000 + 3.000 \text{ sen } \frac{2\pi t}{24},$$

e a população p de sua fonte básica de alimento (sua presa) admite o modelo:

$$p = 15.000 + 5.000 \cos \frac{2\pi t}{24}$$

O gráfico a seguir apresenta ambos os modelos no mesmo sistema de eixos cartesianos.



Em relação ao ciclo predador-presa acima, assinale a afirmativa incorreta.

a) Em $t = 48$ meses, a população de predadores é igual à de presas.
b) Os modelos P e p têm o mesmo período, de 24 meses.
c) A maior população de predadores, nesse ciclo, é 13.000.
d) A média aritmética entre os valores da menor população de presas e a menor de predadores, nesse ciclo, é 8.500.
e) No início do ciclo predador-presa ($t = 0$), existem 10.000 predadores e 20.000 presas.

63 (UFPA) O pêndulo simples é formado por uma partícula de massa m fixada na extremidade inferior de uma haste retilínea, de comprimento ℓ (de massa desprezível se comparada com a massa da partícula), cuja extremidade superior está fixada. Suponhamos que o movimento do pêndulo se processe em um plano vertical e designemos por θ o ângulo que a haste faz com a reta vertical OY (veja figura abaixo). Observemos que $\theta = \theta(t)$, isto é, θ é função do tempo $t \geq 0$. O movimento do pêndulo, para pequenas oscilações, é regido pela equação:

$$\theta(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right),\ t \geq 0,$$

em que A é uma constante positiva, g é a aceleração da gravidade e ℓ é o comprimento da haste. Os valores de $t \geq 0$, referentes à passagem do pêndulo pela posição vertical OY, isto é, ao momento em que $\theta(t) = 0$, são dados por:

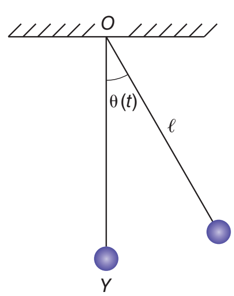
a) $t = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}},\ k = 0, 1, 2, ...$

b) $t = 1, 2, 3, ...$

c) $t = 0$ ou $t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

d) $t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$

e) $t = \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...$



64 (Uespi) Em virtude de a procura por certo produto ser maior em determinados meses do ano e menor em outros, seu preço, durante todo o decorrer do ano de 2009, variou segundo a equação:

$$N(t) = 120 + 80 \cos \frac{t\pi}{6},$$

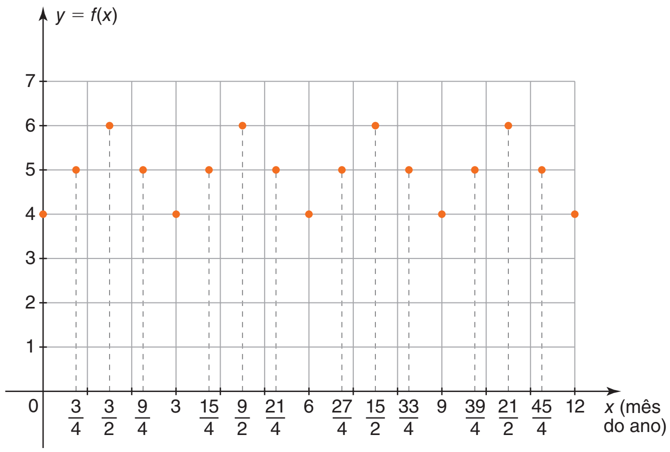
em que $N(t)$ é o preço de uma unidade do produto, em real, e t é o mês do ano, $t \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$. Com base nesses dados, e considerando $\pi = 3{,}14$, analise as afirmativas abaixo:

(1) O valor máximo obtido pela venda de uma unidade do produto foi R$ 200,00.
(2) O pior valor de venda da unidade do produto ocorreu no 9º mês.
(3) No 8º mês do ano, o produto foi comercializado por R$ 80,00 a unidade.

Está(ão) correta(s):

a) 1 apenas **b)** 1 e 2 apenas **c)** 1 e 3 apenas **d)** 2 e 3 apenas **e)** 1, 2 e 3

65 (FGV) O gráfico indica a relação entre y e x ao longo dos 12 meses de um ano:



a) Admita que a função $f(x) = 5 + \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ modele a relação de dependência entre y e x indicada com os pontos do gráfico. Determine, através dessa função, o valor de $f(x)$ ao final do primeiro quarto do mês de abril.

b) Determine possíveis valores dos parâmetros reais a, b e c de forma que a representação gráfica da função $g(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x)$ passe por todos os pontos indicados.

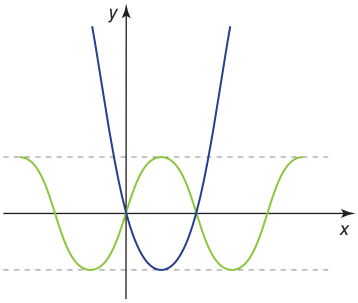
EXERCÍCIOS DE REVISÃO CUMULATIVA

Ao concluir o estudo deste capítulo, resolva estes exercícios, que envolvem alguns assuntos estudados nos capítulos anteriores.

1 (Fuvest-SP) Os vértices de um triângulo ABC, no plano cartesiano, são: $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = \left(0, \sqrt{3}\right)$. Então, o ângulo $B\hat{A}C$ mede:

a) 60° b) 45° c) 30° d) 18° e) 15°

2 (Mackenzie-SP) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções f e g. Sabe-se que $g(x) = \text{sen}(\pi x)$ e que f é uma função polinomial do 2º grau.



Então $f(3)$ é igual a:

a) 22 b) 24 c) 26 d) 28 e) 30

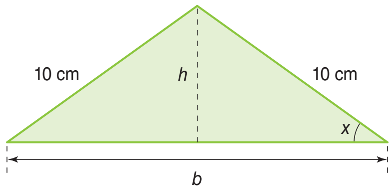
3 (Fuvest-SP) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$, que estão no intervalo $[0, 2\pi]$, é:

a) 2π b) 3π c) 4π d) 6π e) 7π

4 Em um triângulo isósceles, os lados congruentes medem 10 cm e cada ângulo da base tem medida x, em radiano, conforme mostra a figura ao lado.

a) Determine, em função de x, a medida h da altura, a medida b da base e a área A do triângulo.

b) Determine x de modo que A, em centímetro quadrado, seja igual a 50 sen x.



ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

❯ Um aluno resolveu o exercício abaixo, conforme reproduzido a seguir. Observe a resolução e reflita sobre o comentário.

Exercício

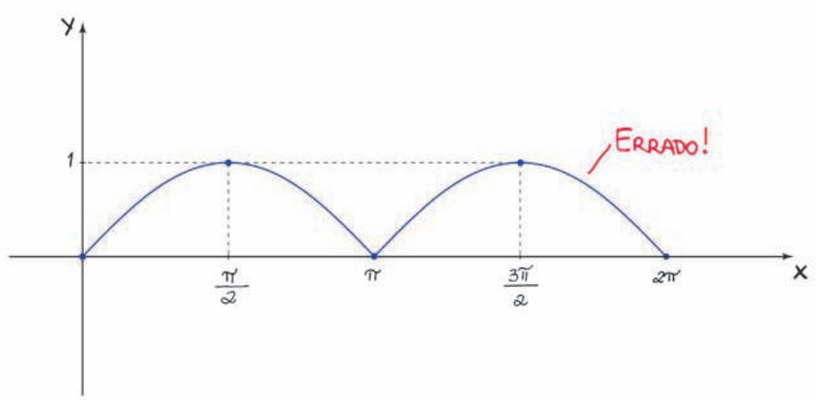
Construa o gráfico da função $y = \text{sen}^2\, x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Resolução

Alguns pontos do gráfico são:

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	0

Marcando esses pontos no plano cartesiano e esboçando o gráfico:



Comentário

Embora o gráfico apresentado passe pelos pontos obtidos na tabela, seu traçado está incorreto. Para obter o traçado correto, o aluno poderia ter recorrido à fórmula de arco duplo $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$, pela qual se pode obter o $\text{sen}^2\, x$ em função do $\cos 2x$.

❯ Refaça a resolução, corrigindo-a.

CAPÍTULO 11 Sequências

Para pensar

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Exercícios propostos

1 $a_1 = 5$; $a_2 = -4$; $a_3 = 8$; $a_4 = \sqrt{3}$; $a_5 = 6$; $a_6 = 6$; $a_7 = 6$

2 a) (7, 9, 11, 13, ...) d) (4, 9, 14, 19, ...)
b) (2, 6, 12, 20, ...) e) (3, 7, 4, −3, ...)
c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right)$

3 a) 110 c) 10
b) 2 d) $2n$

4 a) 7
DICA: Ao dividir 23 por 4, o quociente é o número de livros novos a que o cliente tem direito, e o resto da divisão é o número de livros já lidos que permanecem com o cliente.
b) (126, 31, 8, 2, 1)

5 a) 225 c) 84
b) n^2 d) $4n + 4$

6 a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144
b) $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \text{com } n \geqslant 3 \end{cases}$

7 a

8 a) É PA. e) Não é PA.
b) Não é PA. f) É PA.
c) É PA. g) Não é PA.
d) É PA.

9 a) 2 d) zero
b) −3 e) $2 - \sqrt{3}$
c) $-\frac{3}{4}$

10 2 **11** c

12 É PA.
DICA: Basta verificar se é constante ou não a diferença:
$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) + 5 - (3n + 5)$

13 a) crescente d) decrescente
b) crescente e) constante
c) decrescente f) crescente

14 a) decrescente c) crescente
b) constante

15 4

16 $a_n = a_1 + (n - 1)r$

17 (−1, 2, 5)

18 (−8, −2, 4, 10)

19 d **20** R$ 930,00

21 431 **22** $22k - 19$

23 $a_n = 6n - 4$ **24** −2

25 $39k - 38$

26 $\left(\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, ...\right)$

27 25 termos **28** 16 termos

29 $\frac{1}{2}$

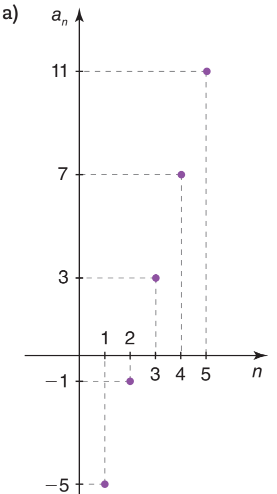
30 $\left(2, \frac{22}{7}, \frac{30}{7}, \frac{38}{7}, \frac{46}{7}, \frac{54}{7}, \frac{62}{7}, 10\right)$

31 $\frac{5}{3}$ **32** 66 **33** $\frac{1}{4}$

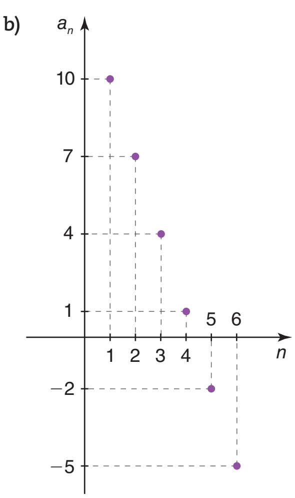
34 c **35** 0,05 km = 50 m

36 c
DICA: O número de emissoras é o número de termos da PA em que $a_1 = 87{,}9$, $a_n = 107{,}9$ e $r = 0{,}2$.

37 a)



b)



38 a **39** $r = 2$ e $a_{40} = 85$

40 18 **41** c **42** 10

43 3 **44** 9.027

45 1.290 **46** 594

47 39.900

48 a) 2.550 b) 2.420

49 a) $5n - 3$ b) $\frac{5n^2 - n}{2}$

50 n^2 **51** 11 **52** c

53 a) 126 ha b) 1.760 ha
DICA: O total de hectares desmatados é calculado pela soma dos 20 primeiros termos da PA sugerida no enunciado.

54 560

55 a) É PG. e) Não é PG.
b) Não é PG. f) É PG.
c) É PG. g) É PG.
d) É PG.

56 a) 2 c) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
b) −3 d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

57 $\frac{1}{3}$ **58** 2 **59** e

60 $\frac{13}{3}$

61 É PG.
DICA: Basta verificar se é constante ou não a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{5 \cdot 2^n}$.

62 a) crescente f) constante
b) crescente g) quase nula
c) decrescente h) crescente
d) oscilante i) constante
e) constante

63 b

64 (2, 4, 8)

65 $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$

66 c

67 $\frac{3}{16}$

68 c

69 $3 \cdot 2^{n-1}$

70 $\frac{5}{9}$

71 $\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, ...\right)$

72 16

73 3

74 $\left(1, \sqrt[5]{7}, \sqrt[5]{7^2}, \sqrt[5]{7^3}, \sqrt[5]{7^4}, 7\right)$

75 $-\frac{1}{3}$
DICA: Para resolver o sistema, divida membro a membro suas equações.

76 40

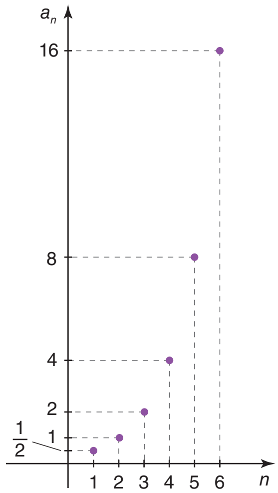
77 $\sqrt[3]{2}$ ou $-\sqrt[3]{2}$

78 e

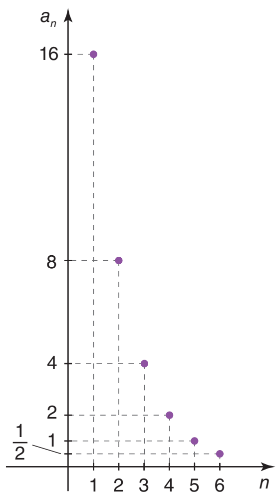
79 c
DICA: Considere 4 horas como 12 períodos de 20 minutos.

80 5 milhões
DICA: Os números de pessoas das gerações 1, 2, 3,... formam uma PG de razão 10.

81 a)



b)



82 e

83 $q = \frac{4}{3}$ e $a_{30} = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$

84 $\sqrt[9]{\frac{4}{\sqrt{3}}}$ **85** 12 ou -12

86 $x = 0$ ou $x = -2$

87 4 **88** $a = 2$ e $c = 6$

89 1 **90** R$ 121.000,00

91 c **92** 1.023

93 $\frac{2.047}{512}$

94 a) zero b) 1

95 3 **96** $\frac{1 - k^{30}}{1 - k}$

97 c **98** 12 **99** a

100 a) 10ª semana b) 20.460

101 512 **102** 7^{14}

103 $\left(1, \sqrt[7]{3}, \sqrt[7]{3^2}, \sqrt[7]{3^3}, \sqrt[7]{3^4}, \sqrt[7]{3^5}, \sqrt[7]{3^6}, 3\right)$

104 a) $\frac{189}{2}$ b) $\frac{80}{3}$ c) $\frac{4}{9}$

105 $\frac{9}{5}$

106 a) $\frac{47}{9}$ b) $\frac{68}{15}$

DICA: O número 4,5333... pode ser representado como 4,5 + 0,03333...

107 5

108 Não, pois a distância percorrida pelo caminhão após a freada é de aproximadamente 26,66 m, que é menor do que 100 m, distância inicial entre a pedra e o caminhão.

109 40 cm **110** demonstração

111 20 km

DICA: Quando o barco da polícia percorrer uma distância d, o barco dos criminosos percorrerá a distância $\frac{d}{2}$.

Exercícios complementares

• Exercícios técnicos

1 b

DICA: A cada quatro digitações T, V, T, V, o número 2 volta ao visor.

2 c

DICA: Indicando por A a área da figura 1, as áreas das demais figuras serão $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}, \ldots$

3 3

4 a) 13 b) $\frac{360° + \alpha}{\alpha}$

DICA: Uma circunferência tem 360°.

5 11

DICA: Represente alguns termos da sequência até perceber uma repetição.

6 a **7** 7

8 a) 9 b) -3 c) $\frac{k}{k + 1}$

9 -11 **10** Não é PA.

11 É PA.

12 a) crescente c) decrescente
b) constante

13 $(18, 5, -8)$

14 $(-1, 3, 7, 11)$ ou $\left(-9, \frac{1}{3}, \frac{29}{3}, \frac{57}{3}\right)$

15 b **16** a **17** 20

18 80 **19** a **20** $\frac{3}{19}$

21 $\left(1, \frac{25}{6}, \frac{44}{6}, \frac{63}{6}, \frac{82}{6}, \frac{101}{6}, 20\right)$

22 10 **23** -6

24 $\frac{5 - k}{11}$

25 105

DICA: Para que a_k seja um múltiplo de k deve existir um número natural n tal que $a_k = nk$.

26 a **27** 6 **28** 3

29 demonstração

30 demonstração

DICA: Basta mostrar que, para qualquer valor de x, o termo médio é diferente da média aritmética dos outros dois.

31 $\frac{365}{2}$

32 432

DICA: Inicialmente, mostre que a sequência é uma PA.

33 3.341 **34** 37.674

35 29.850

DICA: Observe que existem números que são múltiplos de 2 e também de 3.

36 $n = 11$

37 $S_n = n^2 - n$

DICA: Os números naturais pares são: 0, 2, 4, 6, 8, ...

38 $S_n = n^2 + n$

39 e **40** a **41** d

42 a) $b = \frac{6}{5}$; $r = \frac{12}{5}$ c) 500
b) $\frac{239}{5}$

43 a) 10 b) $n \in \mathbb{N}$ e $n > 7$

44 a

45 a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $k + 1$

46 $k^2 - k + 1$ **47** a

48 Não é PG. **49** É PG.

50 a) crescente c) constante
b) crescente d) oscilante

51 $\left(12, 3, \frac{3}{4}\right)$ **52** $\left(\frac{1}{2}, 2, 8, 32\right)$

53 $\frac{1}{(k + 2)^2}$ **54** 24

55 25 **56** $\frac{1}{2}$

57 $(10, 10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, 10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, 10\sqrt[6]{2^5}, 20)$ e $(10, -10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, -10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, -10\sqrt[6]{2^5}, 20)$

DICA: Há duas interpolações possíveis quando o número de meios geométricos a serem inseridos for ímpar.

58 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **59** 1 **60** $\sqrt[7]{\frac{k}{\sqrt{3}}}$

61 b **62** 77 **63** 3

64 1 **65** 3

66 demonstração

67 demonstração

68 e **69** b **70** e

71 c **72** d **73** c

74 $1.533\left(2 + \sqrt{2}\right)$

75 a) $\frac{5^{41}-5}{4}$ b) $3^{n+1}-3$

76 11

77 65.654
DICA: Esse somatório pode ser decomposto em duas parcelas: a soma dos 15 termos de uma PA e a soma dos 15 termos de uma PG.

78 14 **79** a **80** 35

81 $P_n = 5^{\frac{n^2+n}{2}}$

82 a) 3 b) 3 c) 81 d) 3^{12}

83 a) $\frac{5}{3}$ b) $-\frac{12}{5}$ c) $\frac{5}{4}$

84 a) $\frac{247}{33}$ b) $\frac{191}{75}$

85 c
DICA: O perímetro de um círculo de raio r é $2\pi r$.

86 $4\sqrt{2}$ **87** a **88** a

- **Exercícios contextualizados**

89 $\frac{5x+3}{3x+2}$

90 b
DICA: Represente a sequência dos dias da semana em que José nada, até perceber uma repetição.

91 a) (48, 58, 68, 78, ..., 2.848)
b) $a_n = 38 + 10n$

92 a) (10.000, 10.200, 10.404, ..., $10.000 \cdot (1{,}02)^{20}$)
b) $a_n = 10.000 \cdot (1{,}02)^{n-1}$

93 a) $\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{4}, \frac{t+1}{8}, \frac{t+1}{16}\right)$
b) 15 horas

94 a) o jogador B b) 40

95 b **96** c **97** a

98 d **99** a **100** b

101 b **102** e

103 a) $(5n^2 + 5n)$ metros
b) $10n$ m/s

104 a) $F_{10} = 76$ e $F_n = F_1 + (n-1)r$
b) 10.000

105 a **106** b

107 a) 20 b) 55.000

108 a) F
DICA: Observe que os números de fichas distribuídas nos dias (1, 2, 3, ..., n) formam a PA (6, 15, 24, ..., a_n).
b) V
c) V
d) F
e) V

109 b **110** b

111 e
DICA: Multiplicando-se por 4 o número de lados de cada polígono, obtém-se o número de lados do polígono seguinte.

112 b
DICA: Multiplicando-se por $\frac{8}{9}$ a área de uma face, obtém-se a área de uma face da peça seguinte.

113 a) 405 b) 31

114 $1.023x$ **115** b

116 c **117** b

118 c **119** d

120 Não é verdadeira

Exercícios de revisão cumulativa

1 a

2 6.581π m^2

3 a

Análise da resolução

S = {1}

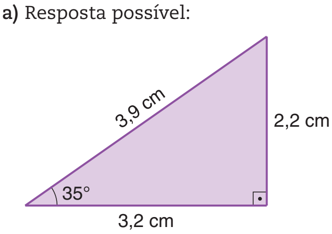
CAPÍTULO 12 Trigonometria no triângulo retângulo

Para pensar

Podemos construir um triângulo semelhante ao triângulo retângulo formado na situação, medir seus lados e obter AB por uma proporção.

Exercícios propostos

1 a) Resposta possível:



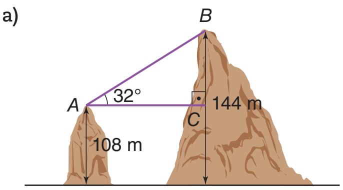
b) Valores aproximados:

	35°	55°
sen	0,56	0,82
cos	0,82	0,56
tg	0,69	1,45

2 a) 3,52 cm
b) 2,3 cm
c) 5,3 dm

3 38,4 m

4 a)



b) ≈ 69,23 m

5 ≈ 38,3 cm

6

	10°	80°
sen	0,17	0,98
cos	0,98	0,17
tg	0,17	5,76

7 14,22 cm **8** $\frac{8}{5}$

9 $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$

10 $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

11 a) $\text{tg}\,\alpha = \frac{8}{15}$ b) 6 m

12 $\frac{1}{16}$ **13** $\frac{1}{6}$ **14** 324 m

15 $50(\sqrt{3}+1)$ m ou ≈ 137 m

16 c

Exercícios complementares

- **Exercícios técnicos**

1 a) sen 35° ≈ 0,57; cos 35° ≈ 0,82; tg 35° ≈ 0,70
b) sen 44° ≈ 0,69; cos 44° ≈ 0,72; tg 44° ≈ 0,96

2 a) 4 b) 6 c) $\frac{44\sqrt{2}}{3}$

3 ≈ 15,19 cm
DICA: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

4 $\frac{7}{9}$

5 demonstração
DICA: Divida a primeira igualdade, membro a membro, por $\cos\alpha$.

6 $\frac{16}{9}$

7 $x = 0{,}31$; $y = 0{,}95$
DICA: Se dois ângulos de medidas α e β são complementares, então $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$ e $\text{sen}\,\beta = \cos\alpha$.

8 4,5 cm

9 $\text{sen}\,\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\,\theta = 2\sqrt{2}$

10 $\cos\alpha = 0{,}8$; $\text{tg}\,\alpha = 0{,}75$

11 $\text{sen}\,\beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\cos\beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

12 $20\sqrt{6}$ cm

• **Exercícios contextualizados**

13 a) $\approx 4{,}6$ m
b) 3,56 m na horizontal e 1,72 na vertical.

14 $R = \dfrac{h \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta}$

15 21 m

16 a
DICA: Sendo Δs a distância percorrida pelo ciclista em um tempo Δt, a velocidade constante v é dada por $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

17 c
DICA: Aplique o conceito de semelhança de triângulos.

18 $\dfrac{700}{77}$ m ou $\approx 9{,}09$ m

19 d
DICAS:
- A soma S das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por $S = 180°(n - 2)$, em que n é o número de lados (ou de vértices) do polígono.
- Um polígono convexo regular possui os lados congruentes entre si e os ângulos internos congruentes entre si.

20 $\approx 1{,}70$ m
DICA: A medida a_i de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados (n vértices) é dada por:
$a_i = \dfrac{(n-2)180°}{n}$.

21 1,786 m **22** $\approx 561{,}7$ m

23 $\approx 82{,}3$ m **24** $\approx 4{,}95$ m

25 2 m **26** e

27 d

28 $50\sqrt{3}$ m ou $\approx 86{,}6$ m

29 60 m

30 b

31 36 degraus
DICA: A medida da hipotenusa do triângulo representado pode ser calculada a partir da velocidade e do tempo.

Exercícios de revisão cumulativa

1 20 mm **2** 5

3 a) $\approx$ R$ 1.114,95 b) $\approx$ R$ 114,95

4 a) 17 b) $f(x) = 3x - 13$

Análise da resolução

c

CAPÍTULO 13 A circunferência trigonométrica: seno, cosseno e tangente

Para pensar

1 $\approx 25{,}7°$ **2** ≈ 424 m

3 ≈ 14 m/min

Exercícios propostos

1 4 rad **2** b **3** a

4 a) $\dfrac{\pi}{6}$ rad d) $\dfrac{5\pi}{3}$ rad
b) $\dfrac{2\pi}{3}$ rad e) $\dfrac{4\pi}{3}$ rad
c) $\dfrac{5\pi}{4}$ rad f) $\dfrac{11\pi}{6}$ rad

5 a) 45° d) 72°
b) 270° e) 300°
c) 210°

6 d

7 a) 50°, 410° e 770°
b) $-310°$ e $-670°$

8 a) $\dfrac{6\pi}{7}$ rad, $\dfrac{20\pi}{7}$ rad e $\dfrac{34\pi}{7}$ rad
b) $-\dfrac{8\pi}{7}$ rad e $-\dfrac{22\pi}{7}$ rad

9 a) 43° f) $\dfrac{8\pi}{5}$ rad
b) 172° g) $\dfrac{25\pi}{13}$ rad
c) 320°
d) 320° h) $\dfrac{2\pi}{5}$ rad
e) $\dfrac{\pi}{11}$ rad

10 a) 240° c) 960°
b) 600° d) $-120°$

11 a) $\dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{25\pi}{6}$
b) $\dfrac{13\pi}{6}$ d) $-\dfrac{11\pi}{6}$

12 a

13 a) $x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

14 a) $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$
b) resposta possível: $x = \dfrac{5\pi}{3} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

15 a) 72.010° c) 0 h 20 min
b) $\dfrac{14.402}{3}\pi$ rad

16 a) N(158°), P(202°) e Q(338°)
b) $N\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$, $P\left(\dfrac{8\pi}{7}\right)$ e $Q\left(\dfrac{13\pi}{7}\right)$

17 a) M(60°), N(120°), P(240°) e Q(300°)
b) M(30°), N(150°), P(210°) e Q(330°)
c) M(50°), N(130°), P(230°) e Q(310°)
d) $M\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, $N\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$, $P\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$ e $Q\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$
e) $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $N\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $P\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ e $Q\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$
f) $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $N\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

18 32°, 212° e 328°, respectivamente

19 a) 1 i) 1 q) 1
b) 0 j) 0 r) -1
c) 0 k) 1 s) 1
d) 1 l) 1 t) -1
e) -1 m) -1 u) 0
f) 0 n) 0 v) -1
g) 0 o) 1
h) -1 p) -1

20 -2

21 a) 2 b) -1 c) -1

22 1

23 O valor máximo de f é 1 e o mínimo é -1.

24 d

25 b
DICA: Se um ângulo entre duas retas r e s mede α, e um segmento de reta de medida d está contido em s, então a medida da projeção ortogonal desse segmento sobre r é dada pelo produto $d \cdot \cos \alpha$.

26 d

27 a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\dfrac{1}{2}$ e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{1}{2}$

28 a) $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ e $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$
b) $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $Q\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

29 a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $-\dfrac{1}{2}$ e) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

g) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

30 a) $-\frac{1}{2}$ h) $-\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ j) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}$ k) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ l) $\frac{1}{2}$

f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ m) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $-\frac{1}{2}$

31 -1

32 a) $\frac{5}{13}$ c) $-\frac{12}{13}$ e) $\frac{12}{13}$

b) $\frac{12}{13}$ d) $-\frac{5}{13}$

33 $\frac{48}{7}$ cm **34** 5 m

35 $-\frac{4}{5}$ **36** $\frac{12}{13}$

37 sen $\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e cos $\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

38 2

39 14,4 cm

DICA: A distância entre um ponto P e uma reta r é a medida do segmento $\overline{PP'}$, em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r.

40 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **41** $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

42 a **43** 2,5 m

44 a) 0 c) 0

b) Não existe. d) 0

45 a) F b) V c) V

46 $-\frac{3}{2}$ **47** $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

48 cos $\alpha = \frac{4}{5}$; sen $\alpha = \frac{3}{5}$

49 $\frac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm

DICA: Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio dessa circunferência no ponto de tangência.

50 $\frac{10}{\pi}$ m ou $\approx$ 3,18 m

DICA: Planificando-se a superfície lateral de um cilindro, obtém-se um retângulo.

51 a) $-\sqrt{3}$ e) 1

b) -1 f) -1

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ g) $-\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3}$ h) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

52 1

53 a) -1 b) $\frac{1}{\cos x}$

54 a) 2,6 b) 0 c) $-2{,}6$

DICA: Em todo paralelogramo, ângulos internos consecutivos são suplementares.

55 12 cm

56 a) -1 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$

57 10 m

58 a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ i) $S = \{0, \pi\}$

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ j) $S = \varnothing$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ k) $S = \varnothing$

d) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ l) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ m) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ n) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ o) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

h) $S = \{0\}$

59 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

m) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

n) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

60 a) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S = \{0, \pi\}$

c) $S = \{0, \pi, 2\pi\}$

d) $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

61 $S = \{60°, 120°, 240°, 300°, 420°, 480°, 600°, 660°\}$

62 seis raízes **63** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

64 a) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$

65 d **66** 30° e 60°

67 60°

68 $\frac{120}{\pi}$ m ou $\approx$ 32,8 m

69 a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

DICA: O produto de dois números reais é nulo se, e somente se, pelo menos um deles for nulo.

d) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

70 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

71 $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

72 a) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

73 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

74 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$

k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

l) $S = \varnothing$

m) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$

n) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{4\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{5\pi}{3}\right\}$

o) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

p) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

q) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

75 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

o) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

p) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{7\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

76 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{9} \text{ ou } \frac{8\pi}{9} < x < 2x\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{7} \text{ ou } \frac{13\pi}{7} \leq x < 2x\right\}$

77 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}\right\}$

78 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x \leq \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

79 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < \frac{5\pi}{4}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

80 $0° < \alpha < 30°$

81 $30° < x < 90°$

82 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

83 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

1 $90°$

2 $\frac{\pi}{6}$ rad

3 e

DICA: Os vértices de um polígono regular qualquer dividem a circunferência circunscrita a ele em arcos de mesma medida.

4 a) 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° e 315°

b) 585° e 945°

c) −45° e −405°

5 a) 0 rad, $\frac{\pi}{3}$ rad, $\frac{2\pi}{3}$ rad, π rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad

c) $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad

6 e

7 a) M(47°), N(133°), P(227°) e Q(313°)

b) M(54°), N(126°), P(234°) e Q(306°)

c) M(20°), N(160°), P(200°) e Q(340°)

d) $M\left(\frac{13\pi}{36}\right)$, $N\left(\frac{23\pi}{36}\right)$, $P\left(\frac{49\pi}{36}\right)$ e $Q\left(\frac{59\pi}{36}\right)$

e) $M\left(\frac{2\pi}{9}\right)$, $N\left(\frac{7\pi}{9}\right)$, $P\left(\frac{11\pi}{9}\right)$ e $Q\left(\frac{16\pi}{9}\right)$

f) $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $N\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $P\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ e $Q\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

8 d

9 zero

10 1

11 e

12 a) V c) F

b) F d) V

13 $(6\sqrt{2} + 4)$ cm

14 d

15 b

16 d

17 a) −1 b) $1 - \cos\alpha$

18 c

19 2

20 $\frac{1}{2}$

DICA: Se a soma das medidas de dois arcos trigonométricos é 180°, então as extremidades desses arcos são simétricas em relação ao eixo dos senos.

21 $-\frac{1}{4}$

22 $\frac{40}{3}$ cm

23 −0,32

DICA: Para quaisquer números reais *a* e *b*, temos:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

24 $\frac{1}{4}$

25 $S = \{2 + 2\cos\alpha, 2 - 2\cos\alpha\}$

26 1

27 a) $2k$ c) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

b) $k^2 + k$

28 b

29 c

30 $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

31 $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

32 $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

33 c

34 1

35 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{\alpha}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

DICA: A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente.

36 a) $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $N\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

b) $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e $N\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

c) $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $N\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

37 a) $-\sqrt{3}$ b) 1 c) $-\sqrt{3}$

38 e

39 a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{3}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) -1 f) $-\sqrt{3}$

40 a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) 1

b) $\sqrt{3}$ e) 1

c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ f) $\sqrt{3}$

41 a

42 c

43 a) $S = \{90°\}$ c) $S = \{30°, 150°\}$

b) $S = \{90°, 270°\}$ d) $S = \{120°, 240°\}$

44 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

45 a) $S = \{0, \pi\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

46 b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

47 $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

48 $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

49 a

50 d

DICA: A medida α de qualquer ângulo interno de um triângulo satisfaz a condição: $0° < \alpha < 180°$

51 30°

DICA: Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

52 4π

53 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

54 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

55 $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

56 $S = \{0, \pi\}$

57 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

58 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

59 $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

60 a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

b) $S = \{0, \pi, 2\pi\}$

c) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

d) $S = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$

f) $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$

61 a

62 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

63 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

64 $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$

65 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

66 a) $S = \{0\}$ c) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

67 três raízes

68 $\frac{4\pi}{3}$

DICA: Em toda equação do 2º grau da forma $at^2 + bt + c = 0$, a soma das raízes é $-\frac{b}{a}$ e o produto delas é $\frac{c}{a}$.

69 d

70 $S = \{\pi\}$

71 $S = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

72 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$

73 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}$

74 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

75 b

76 a

77 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leq x < 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$

78 b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

79 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$

80 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

81 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

82 a

83 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 0\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}\right\}$

k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

84 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

85 d

86 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leq x < 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x < 2\pi\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

• **Exercícios contextualizados**

87 e

88 e

89 a) 1,5 rad/min b) 5 cm

90 $\frac{15\pi}{4}$ cm/s ou $\approx$ 11,78 cm/s

91 $d = 2\sqrt{3}$ km ou $\approx$ 3,46 km

92 a) $A(\theta) = \frac{15\theta}{2}$ m² b) 64°

93 $\frac{\pi}{5.400}$ rad

94 d

95 $\frac{16\pi}{5}$ rad

96 a

97 a) 300 b) $-150\sqrt{3}$ c) 300 km d) 1,5 h

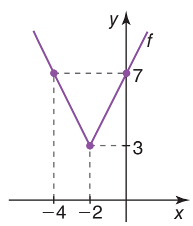
98 60 m

99 c

100 c

Exercícios de revisão cumulativa

1



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [3, +\infty[$

2 a) $a_n = 200.000 \cdot 1{,}05^{n-1}$

a) $S_n = \dfrac{200.000 \cdot (1 - 1{,}05^n)}{-0{,}05}$

Análise da resolução

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

CAPÍTULO 14 Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos

Para pensar

$$\frac{6.400\left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

Exercícios propostos

1 a) 1 b) 1 c) −1

2 7

3 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

4 $-\frac{\sqrt{17}}{4}$

5 a) $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

b) $S = \{\pi\}$ e) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ f) $S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

6 $S = \varnothing$

7 a

8 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \pi < x < 2\pi\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

9 1,3 m

10 a) É identidade em $\mathbb{R}$.
b) Não é identidade em $\mathbb{R}$.
c) É identidade em $\mathbb{R}$.
d) Não é identidade em $\mathbb{R}$.
e) É identidade em $\mathbb{R}^*$.
f) É identidade em $\mathbb{R}$.
g) Não é identidade em $\mathbb{R}$.
h) É identidade em $\mathbb{R}$.
i) É identidade em $\mathbb{R}$.
j) É identidade em $\mathbb{R}$.

11 d

12 demonstrações

13 a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ c) $2 + \sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

14 demonstração

15 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

16 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1

17 c

18 $\frac{17\sqrt{2}}{26}$

19 $\frac{6(4 - \sqrt{2})}{7}$

DICA: Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo Ê é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a Ê.

20 d

21 $\frac{1}{2}$

DICA: A pessoa vê a base do quadro sob um ângulo de medida β com a horizontal. Calcule tg β e tg (α + β).

22 $\operatorname{sen} 2x = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$; $\cos 2x = \frac{7}{9}$

23 $\frac{4}{5}$

24 $\frac{7}{18}$

25 e

26 e

27 $4k^3 - 3k$

28 $3a - 4a^3$

29 b

30 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

31 a

32 $\text{sen } x = -\frac{1}{5}$; $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

33 150 cm^2

DICA: A área S do triângulo *AEH* pode ser calculada por $S = \frac{1}{2} \cdot HE \cdot AE \cdot \text{sen } 15°$.

34 b

35 0,96

36 $\frac{3\sqrt{13}}{3}$; $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

DICA: Se x é a medida de um arco trigonométrico com extremidade no 1º quadrante, então $\frac{x}{2}$ também é medida de um arco com extremidade no 1º quadrante.

37 $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

38 c

39 96 m

40 e

DICA: Sendo *O* o centro do globo terrestre e $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes à Terra em *A* e *B*, os triângulos *OPA* e *OPB* são congruentes.

41 a) 7 cm b) $5\sqrt{7}$ m

42 4 dm

43 a) $-\frac{1}{5}$ b) obtuso

DICA: O maior ângulo interno de um triângulo se opõe ao maior lado.

44 $5\sqrt{3}$ cm e $5\sqrt{7}$ cm

45 $3\sqrt{7}$ cm

46 7 km

47 14 km

48 $3\sqrt{2}$

49 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm

DICA: Em todo triângulo isósceles, são congruentes os ângulos internos opostos aos lados congruentes.

50 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm

51 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

52 45°

53 158 m

54 a) 60 cm^2 b) 20 cm^2

55 30 cm^2

56 30° ou 150°

DICA: Se dois ângulos são suplementares, eles têm o mesmo seno.

57 $3(5\pi - 3) \text{ cm}^2$

Exercícios complementares

• Exercícios técnicos

1 $\frac{13}{3}$

2 −0,75

3 $\frac{7}{13}$

4 c

5 a

6 c

7 b

8 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$

9 $\frac{1}{2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha} - \frac{\pi}{4}$

10 demonstrações

11 a) $\sec x = -\sqrt{10}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\text{cossec } x = 4$; $\text{sen } x = \frac{1}{4}$

c) 1

d) demonstração

e) demonstração

12 b

13 a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $\sqrt{3}$

d) $2 + \sqrt{3}$

e) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$

f) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

14

	20°	40°	45°	65°
sen	0,3	0,54	0,7	0,84
cos	0,9	0,72	0,7	0,42

15

	13°	22°	35°	57°	70°
tg	0,23	0,4	0,7	1,53	2,72

16 d

17 1

18 0

19 a

20 a) $\text{tg } \alpha = 1$; $\text{tg } \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg } \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\alpha = 45°$; $\gamma = 30°$

c) demonstração

21 $\frac{(3-\sqrt{3})\alpha}{6}$

DICA: Em um plano, se um ponto *O* equidista dos lados de um ângulo, então *O* pertence à bissetriz desse ângulo.

22 5 cm

23 e

24 b

25 a

26 a

27 $(AC)^2 + (BD)^2 = 2(a^2 + b^2)$

28 d

DICA: Dodecágono regular é um polígono de doze lados congruentes entre si, e doze ângulos internos congruentes entre si.

• Exercícios contextualizados

29 201 m

30 e

31 45°

32 $\frac{7}{25}$

DICA: Sendo *P* a projeção ortogonal do ponto *A* sobre a margem oposta, e α e β as medidas dos ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}P$, respectivamente, calcule sen (α + β).

33 31,5 m

34 a

35 $\frac{25}{8}$ cm ou ≈ 3,1 cm

36 $400\sqrt{6}$ m ou ≈ 980 m

37 Pela lei dos senos, tem-se

$\frac{AB}{\text{sen } 30°} = 2R \Rightarrow AB = R$

38 $\approx 24.900 \text{ m}^2$

39 e

Exercícios de revisão cumulativa

1 $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

2 c

3 $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

4 d

Análise da resolução

30° ou 150°

CAPÍTULO 15 Funções trigonométricas

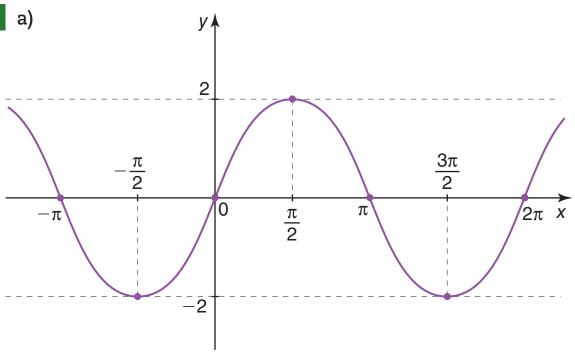
Para pensar

1 resposta pessoal

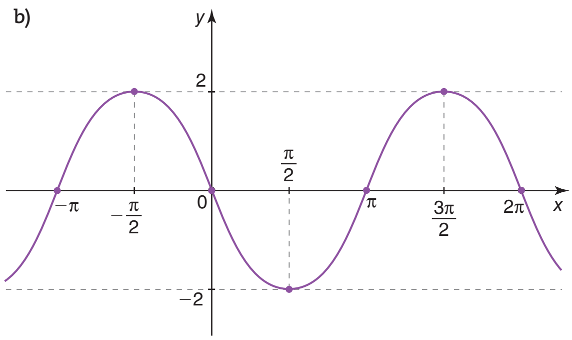
2 90 bpm

Exercícios propostos

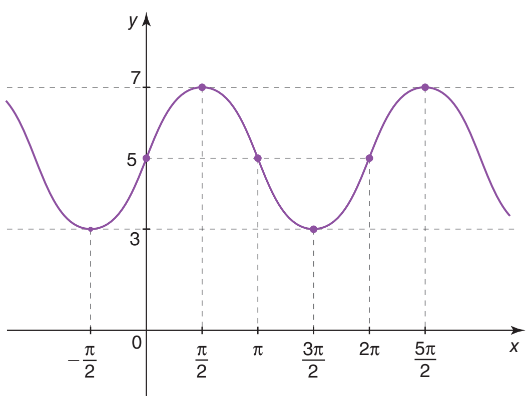
1 a)



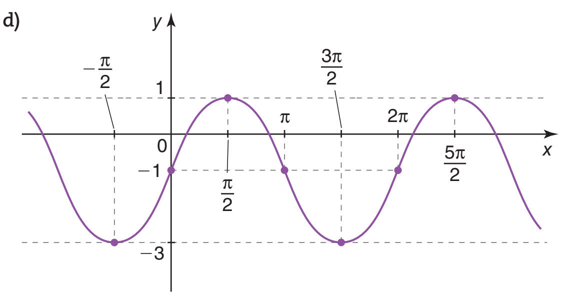
b)



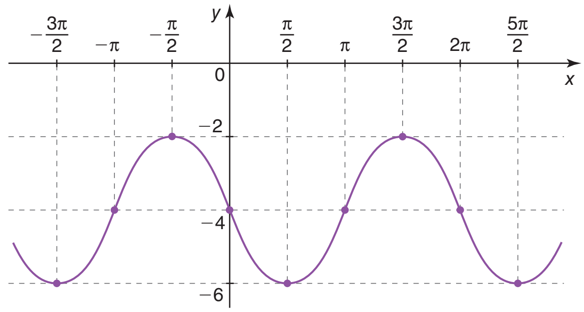
c)



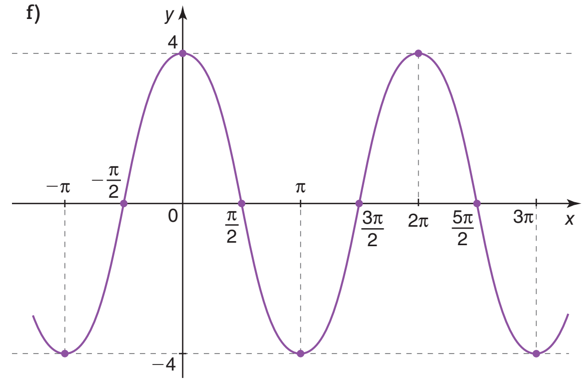
d)



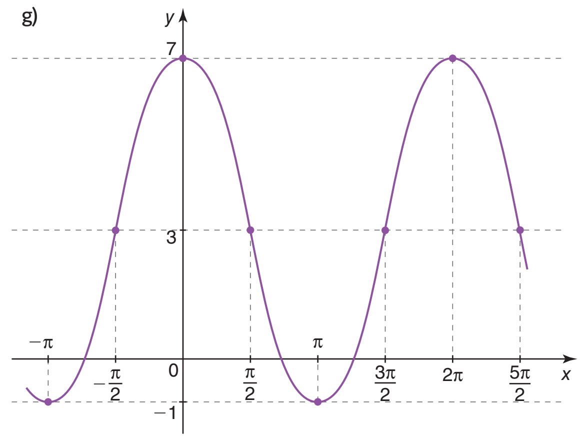
e)



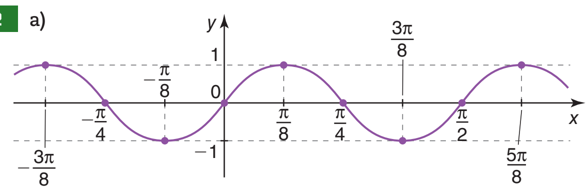
f)



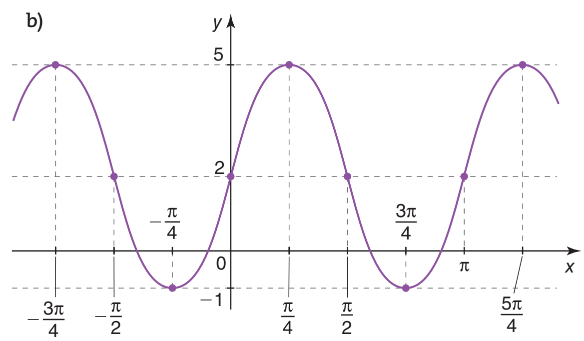
g)



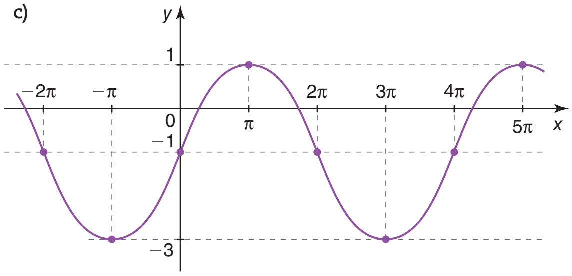
2 a)



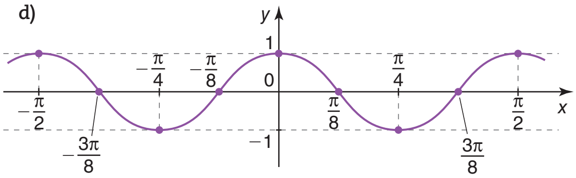
b)



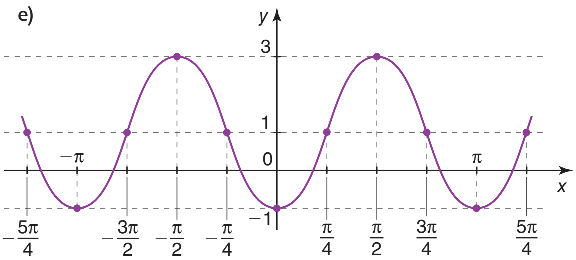
c)



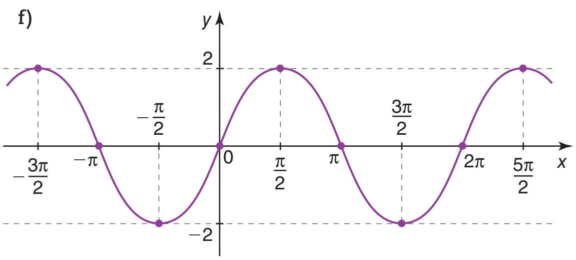
d)



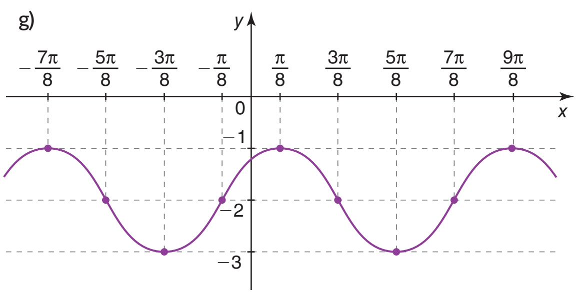
e)



f)



g)



3 a) 2π

b) $\frac{\pi}{4}$

c) 16π

d) $\frac{2\pi}{3}$

e) $\frac{2\pi}{3}$

f) π

4 a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$

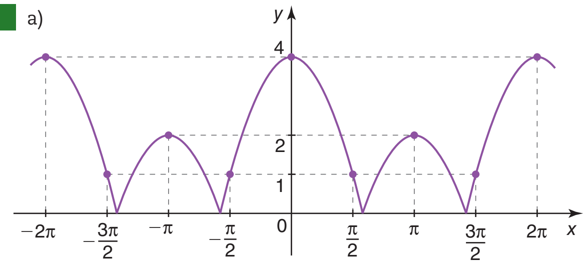
c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\}$

d) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -9 \leqslant y \leqslant 1\}$

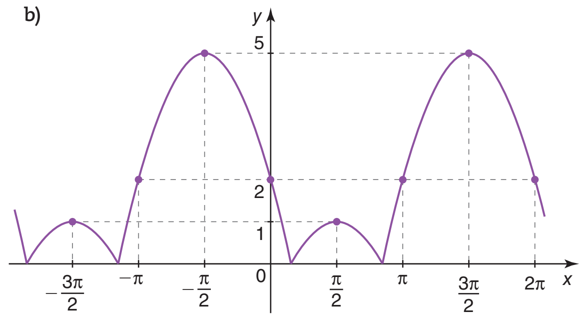
5 c

6 $a = 3$; $b = 4$

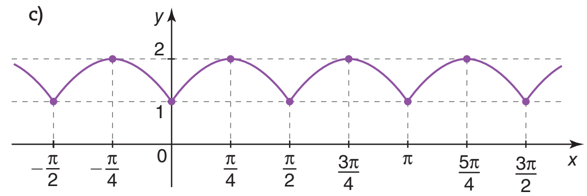
7 a)



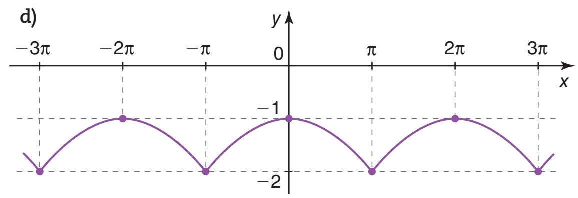
b)



c)

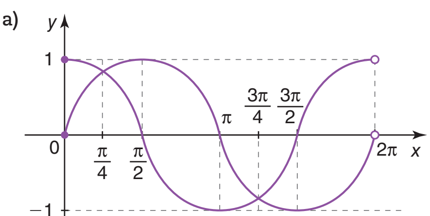


d)



8 a

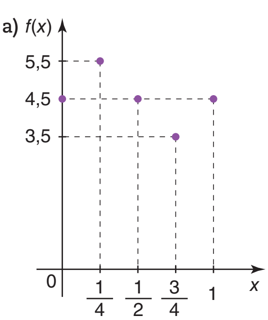
9 a)



b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$

10 qualquer m real, com $1 \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}$

11 a)



b) terça-feira; quinta-feira

c) 5,5; 3,5

12 d

13 d

14 $f(t) = 1{,}3\ \text{sen}\ \dfrac{\pi(t-2)}{6}$

15 $f(t) = 5\cos\dfrac{2\pi t}{3}$; $g(t) = 5\ \text{sen}\ \dfrac{2\pi t}{3}$

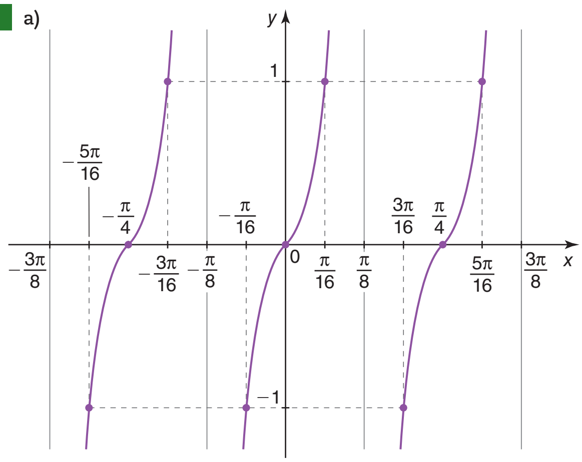
16 b

17 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

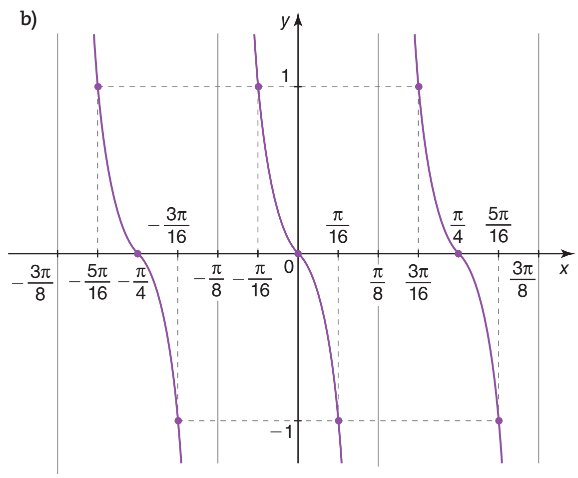
b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{7\pi}{10} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

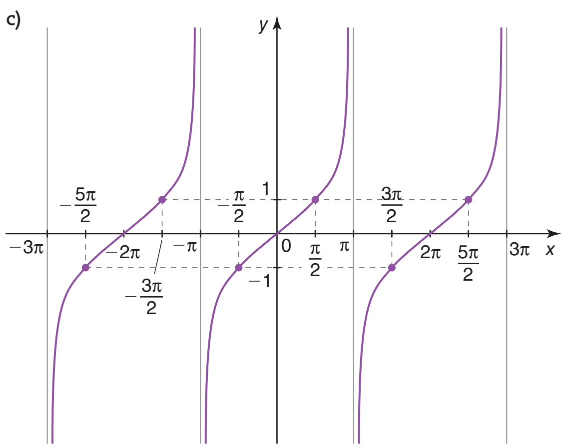
18 a)



b)



c)



19 a) $\dfrac{\pi}{6}$

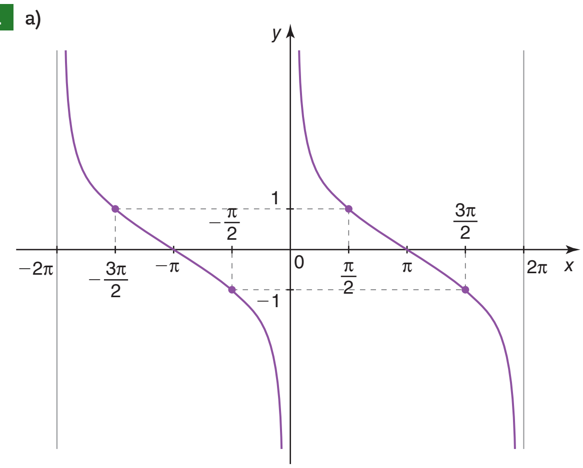
b) 6π

c) $\dfrac{\pi}{2}$

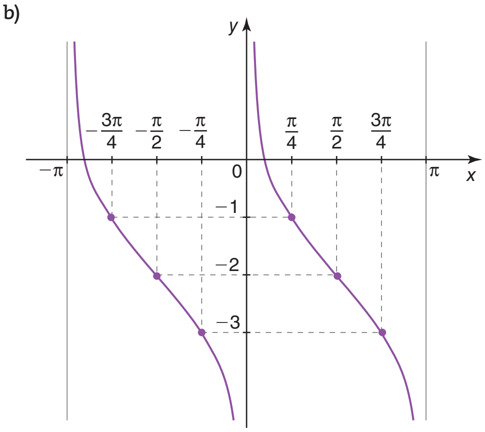
20 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im = \mathbb{R}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$; $Im = \mathbb{R}$

21 a)



b)

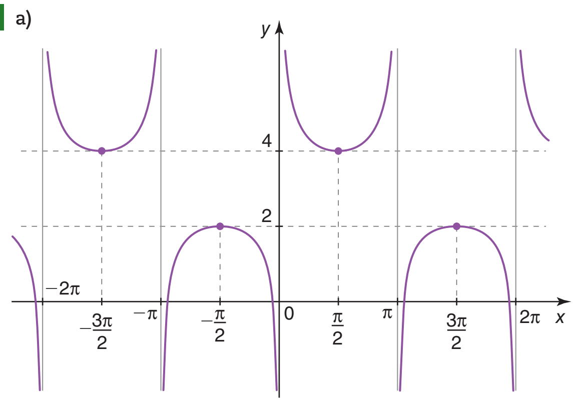


22 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$; $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

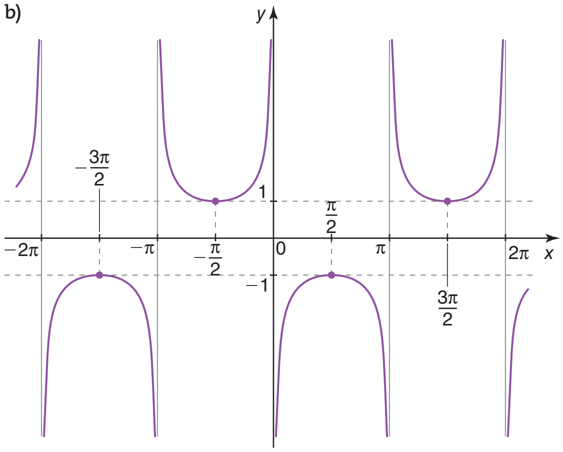
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$; $Im =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

23 qualquer k real, com $k \leqslant 3$ ou $k \geqslant 7$

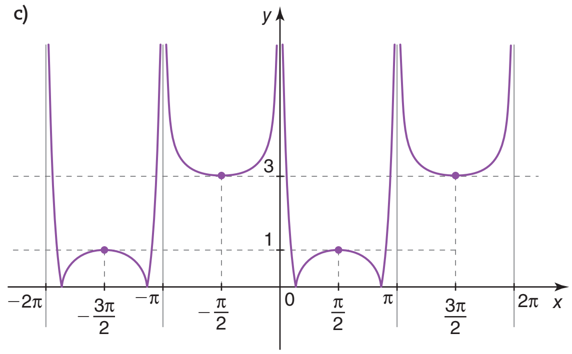
24 a)



b)



c)



25 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$;

$Im =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

26 qualquer k real, com $k \leqslant 2$ ou $k \geqslant 3$

27 a) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ g) Não existe.

b) $-\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{4}$ h) Não existe.

c) $\frac{\pi}{2}$ f) $-\frac{\pi}{4}$

28 2

29 $\sqrt{3}$

30 $\frac{5}{13}$

31 $\frac{1}{9}$

32 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

DICA: Temos que $-1 \leqslant \text{sen } y \leqslant 1$ e $y = \text{arcsen } 2x \Rightarrow 2x = \text{sen } y$.

33 $-\frac{3}{5}$

34 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen } \frac{2}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen } \frac{2}{7} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

35 $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

36 a) $\frac{\pi}{6}$ c) zero   e) $\frac{\pi}{3}$ g) Não existe.

b) $\frac{5\pi}{6}$ d) π f) $\frac{2\pi}{3}$

37 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

38 $\frac{8}{17}$

39 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

40 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

41 $\frac{3}{4}$

42 $-\frac{56}{65}$

43 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arccos } \frac{2}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\text{arccos } \frac{2}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

44 a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{\pi}{6}$

45 $\frac{1}{2}$

46 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

47 $\sqrt{6}$

DICA: Para agilizar a resolução, pode-se aplicar a identidade $\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$.

48 $-\frac{3}{5}$

49 $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -\pi < y < \pi\}$

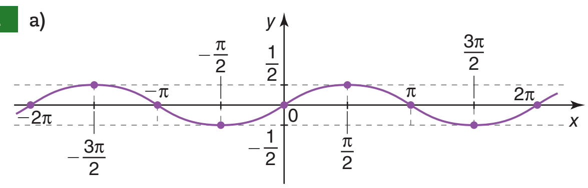
50 $-\frac{7}{9}$

51 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arctg } 10 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

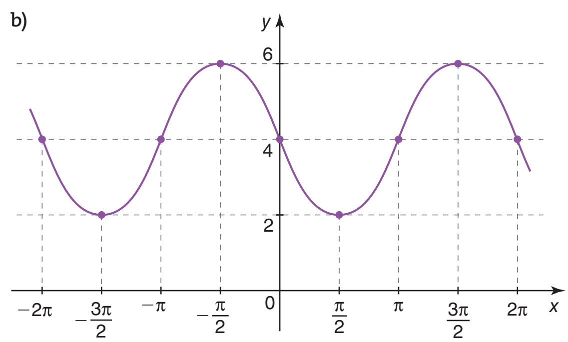
Exercícios complementares

• **Exercícios técnicos**

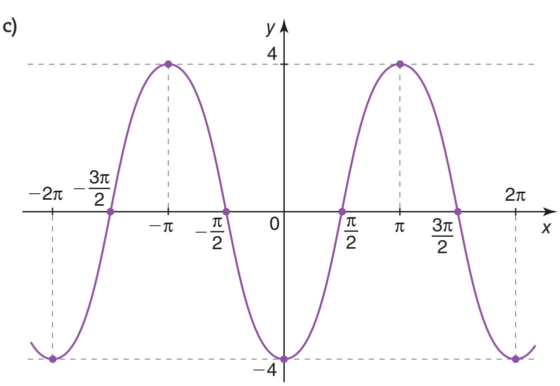
1 a)



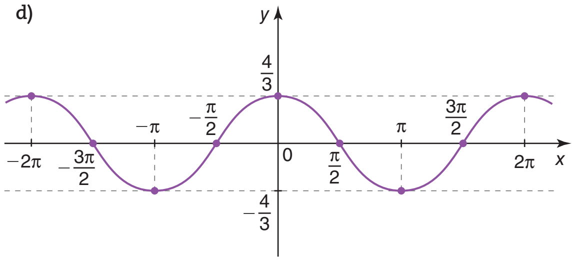
b)



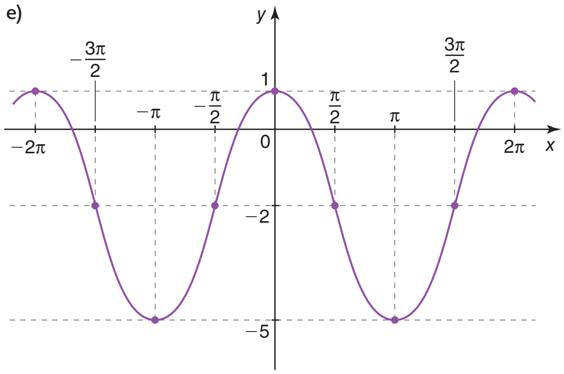
c)



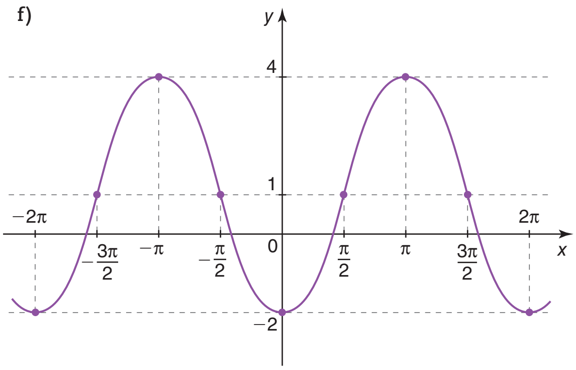
d)



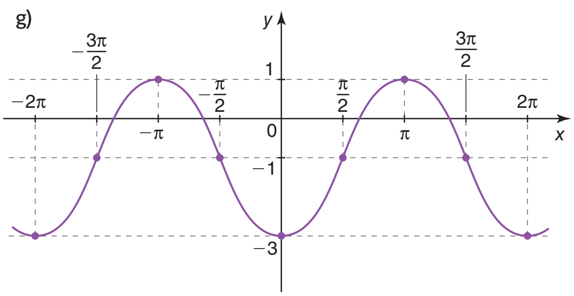
e)



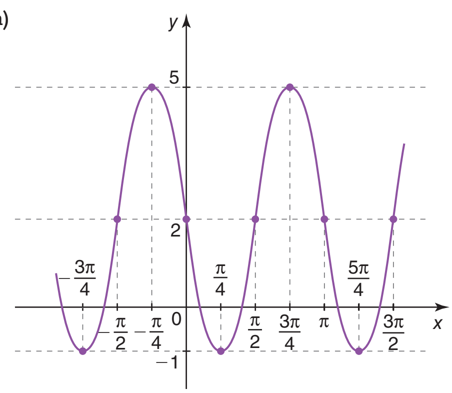
f)



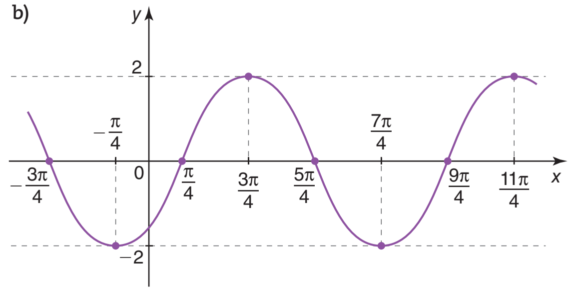
g)



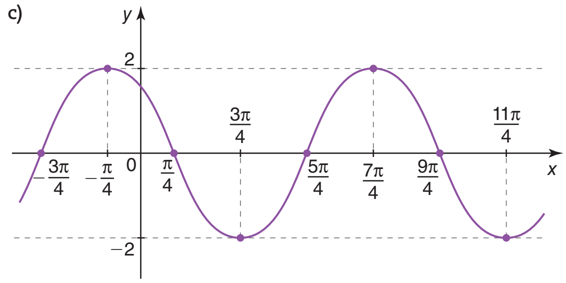
2 a)



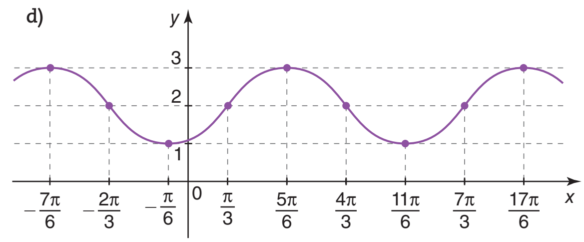
b)



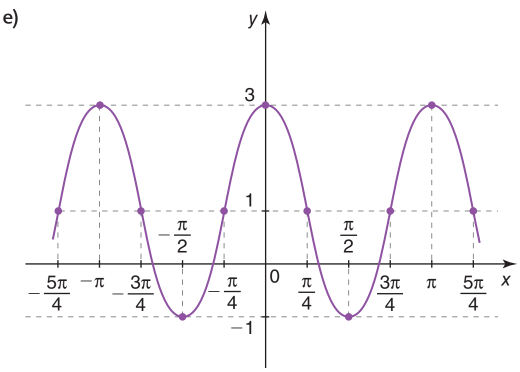
c)



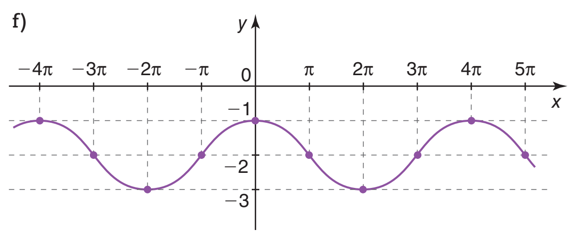
d)



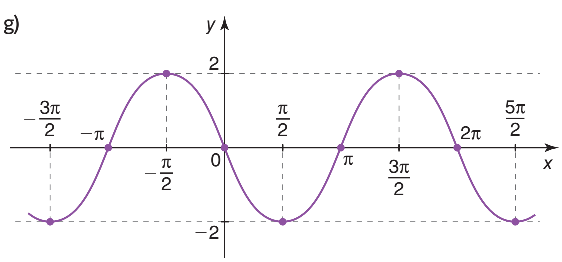
e)



f)



g)



3 a) 2π
b) 2π
c) 2π
d) 6π
e) $\frac{\pi}{3}$
f) 1

4 a) $Im = [-5, 1]$
b) $Im = [-4, 2]$
c) $Im = [2, 10]$
d) $Im = [-\pi, 3\pi]$

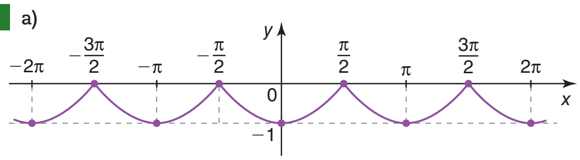
5 b

6 $m = \frac{1}{2}$ e $b = 3$ ou $m = -\frac{1}{2}$ e $b = 3$

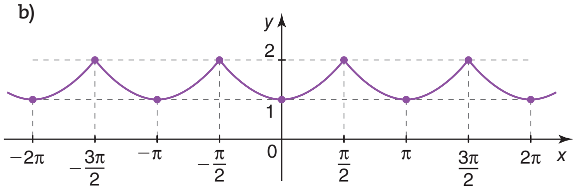
DICA: A função $f(x) = \cos x$ é par, isto é, $f(x) = f(-x)$

7 $m = 2$, $a = 3$ e $b = -2$ ou $m = -2$, $a = 3$ e $b = -2$

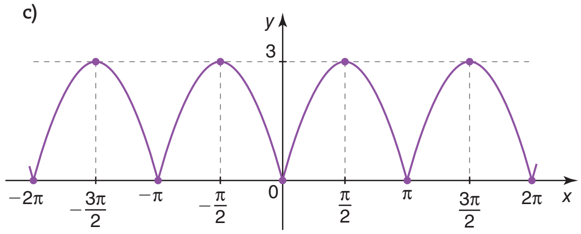
8 a)



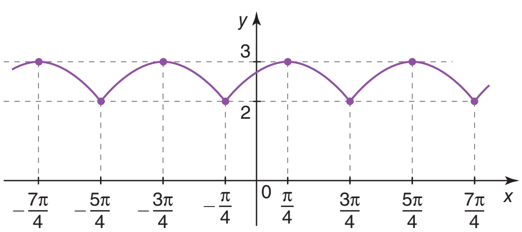
b)



c)



d)



9 exatamente duas raízes

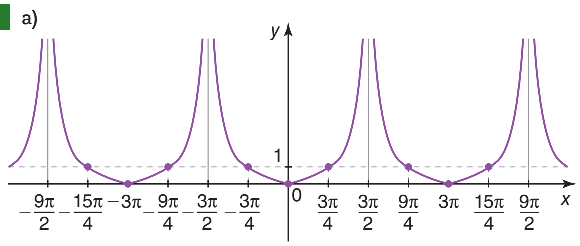
10 exatamente três raízes

11 qualquer k real, com $-1 \leqslant k \leqslant 2$

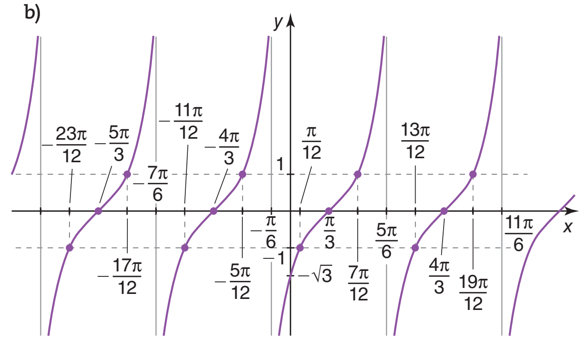
12 qualquer p real, com $0 \leqslant p \leqslant 1$

13 qualquer m real, com $-\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$

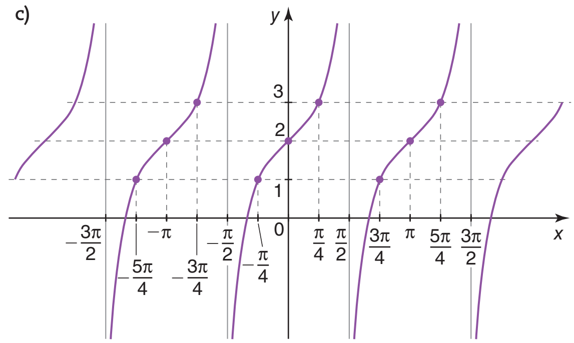
14 a)



b)



c)



15 a) π
b) 2π
c) $\frac{\pi}{6}$

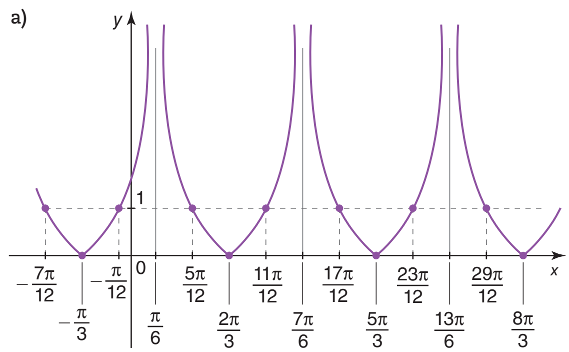
16 exatamente três raízes

17 $Im = \left[0, 2\sqrt{3}\right]$

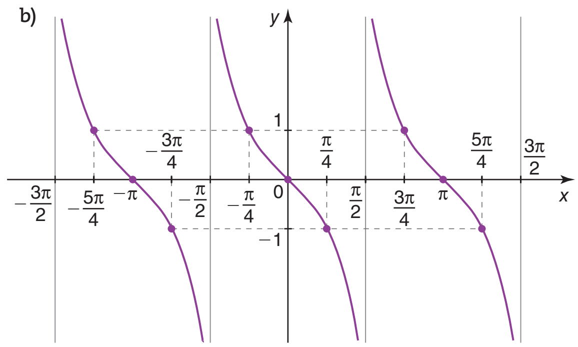
18 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im = \mathbb{R}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $Im = \mathbb{R}$

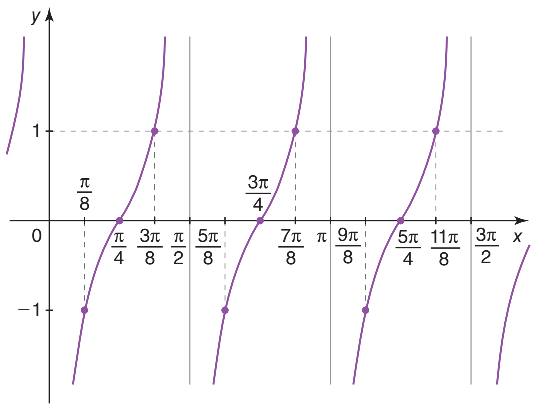
19 a)



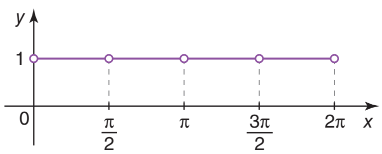
b)



c)



20



21 exatamente três raízes

22 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -5 \text{ ou } y \geqslant 5\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -3 \text{ ou } y \geqslant -1\}$

23 $m = 0$ ou qualquer m real, com $m \leqslant -\sqrt{2}$ ou $m \geqslant \sqrt{2}$

24 exatamente duas raízes

25 a) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0 \text{ ou } y \geqslant 2\}$

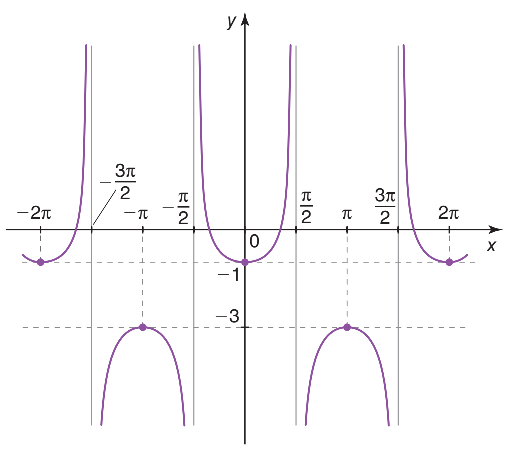
b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -4 \text{ ou } y \geqslant 4\}$

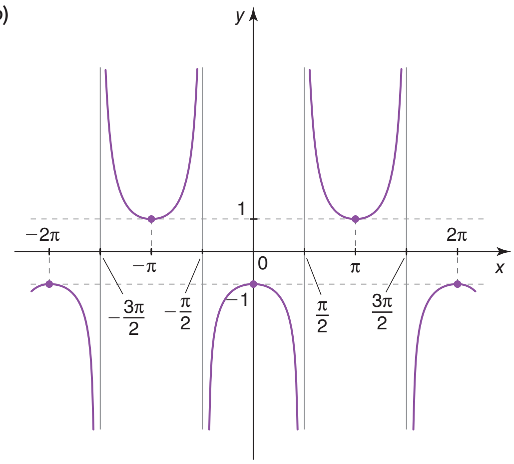
c) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1 \text{ ou } y \geqslant 5\}$

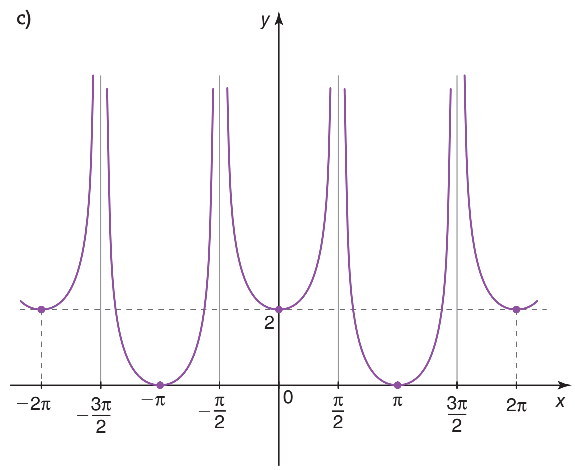
26 a)



b)



c)



27 exatamente três raízes

28 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

29 $\frac{16}{7}$

30 $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -\frac{8}{3}\right\}$

31 $\frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$

32 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \text{arcsen } \frac{1}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen } \frac{1}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

33 $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

34 3 raízes

DICA: Construa os gráficos das funções $f(x) = \frac{\pi x}{2}$ e $g(x) = \text{arcsen } x$.

35 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

36 $\frac{7}{18}$

37 $\frac{23}{9}$

38 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leqslant x \leqslant -4\}$

39 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \arccos \frac{2}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos \frac{2}{5} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

40 **a)** $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ **b)** $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

41 3 raízes

42 $-\frac{12}{35}$

43 12

44 $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2\pi < y < 2\pi\}$

45 $\frac{4}{5}$

46 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \text{arctg } 2 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

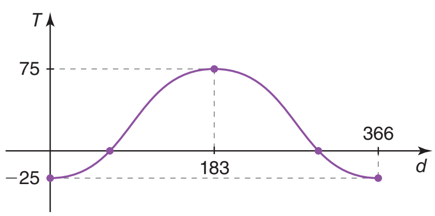
47 **a)** $S = \{1\}$ **b)** $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

48 2 raízes

• **Exercícios contextualizados**

49 11 m

50 **a)**



b) 183º dia, que corresponde a 2 de julho.
c) 61º e 305º dia, que correspondem, respectivamente, a 2 de março e 1º de novembro.
DICA: O *n*-ésimo dia de um ano se completa às 24 horas do dia de número *n*. Por exemplo, o dia 5 de janeiro se completa às 24 horas do dia 5; assim, às 12 horas do dia 5 de janeiro terão decorridos 4,5 dias do ano.

51 e

52 **a)** 3 **b)** maio e novembro

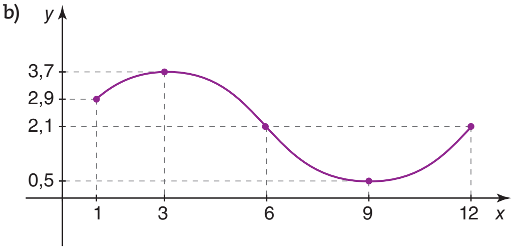
53 8 oscilações completas

54 a

55 e

56 **a)** $S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = -\frac{15}{2} + 12k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}_+^*\right\}$
b) 4,5 h

57 **a)** julho e novembro
b)



A diferença entre o maior e o menor número de turistas da cidade é 3.200.

58 **a)** 10 de janeiro
b) ≈243 dias
DICA: Sendo *t* o tempo em dia, o número de dias tal que $a < t < b$ é dado por $b - a$.

59 **a)** março e novembro
b) janeiro

60 **a)** 147,1 milhões de quilômetros
b) 149,6 milhões de quilômetros

61 **a)** 6,5 m
b) As alturas mínima e máxima são 1,5 m e 21,5 m, respectivamente, e o tempo gasto em uma volta completa é 24 s.

62 a

63 a

64 c

65 **a)** $\frac{10 - \sqrt{3}}{2}$
b) $a = 5, b = -1$ e $c = \frac{2\pi}{3}$ ou $a = 5, b = -1$ e $c = -\frac{2\pi}{3}$

Exercícios de revisão cumulativa

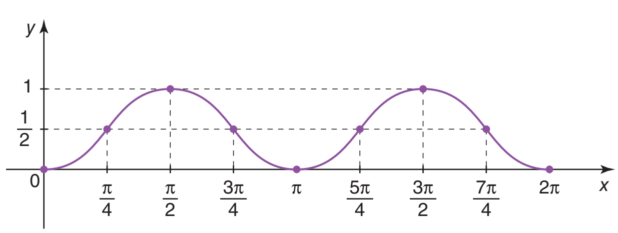
1 e

2 b

3 c

4 **a)** $h = 10 \cdot \text{sen } x$, $b = 20 \cdot \cos x$ e $A = 100 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$
b) $\frac{\pi}{3}$ rad

Análise da resolução



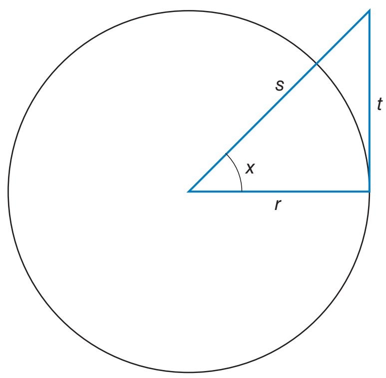
A origem dos nomes das razões trigonométricas

Como o surgimento da Trigonometria é incerto, há várias suposições sobre a origem da palavra “seno”. O texto reproduzido abaixo mostra algumas dessas suposições e traz esclarecimentos sobre a origem dos nomes das outras razões trigonométricas.

“[...] *Sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa ‘dobra bolso ou prega de uma vestimenta’. Isso não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa, que infelizmente durou até hoje. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida, seria *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa ‘a corda de um arco (de caça ou de guerra)’. Uma explicação para esse erro é proposta por A. Aaboe (*Episódios da história antiga da Matemática*, p. 139): em árabe, como em hebraico, é frequente escreverem-se apenas as consoantes das palavras; o leitor se encarrega de completar as vogais. Além de *jiba* e *jaib* terem as mesmas consoantes, a primeira dessas palavras era pouco comum, pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito.

Evidentemente, quando se buscam as origens das palavras, é quase inevitável que se considerem várias hipóteses e dificilmente se pode ter certeza absoluta sobre a conclusão. Há outras explicações para a palavra ‘seno’. Uma delas é de que se trata da abreviatura: s. ins. (semicorda inscrita).

Quanto ao termo ‘tangente’, ele tem significado claro, pois $\text{tg}\, x = \frac{t}{r}$, onde t é o segmento da tangente compreendido entre a extremidade do raio (um dos lados do ângulo x) e o prolongamento do outro lado.



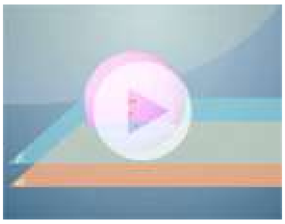
A ‘secante’ do ângulo x é definida pela fórmula $\sec x = \frac{s}{r}$, onde s é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são o raio r e o segmento de tangente t. Como o segmento de reta s corta o círculo (*secare* = cortar em latim), a denominação ‘secante’ se justifica.

Finalmente, [como o prefixo *co*- significa ‘complemento’] cosseno, cotangente e cossecante são simplesmente o seno, a tangente e a secante do arco complementar. [...]”

LIMA, Elon Lages. Conceitos e controvérsias. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 8, p. 13, 1º sem. 1986.

CONTEÚDO DIGITAL - PARTE 3

Animação



Demonstração do teorema de Pitágoras

Matemática 1 > Parte 3 > Cap. 12 > Seção 12.2

A animação apresenta uma forma de demonstrar o teorema de Pitágoras.

Gráfico da função seno

Matemática 1 > Parte 3 > Cap. 15 > Seção 15.1

Mostra a representação gráfica da função seno em correspondência ao seno de um ângulo na circunferência trigonométrica.

Gráfico da função cosseno

Matemática 1 > Parte 3 > Cap. 15 > Seção 15.1

Mostra a representação gráfica da função cosseno em correspondência ao cosseno de um ângulo na circunferência trigonométrica.

TEMAS BÁSICOS DE ARITMÉTICA

Razões e proporções

Razão

Suponha que uma torneira tenha vazão constante de 23 L de água a cada 5 s.


IFONG/SHUTTERSTOCK

Para calcular a vazão da torneira em cada segundo, basta dividir 23 por 5:

$$23 : 5 = 4{,}6$$

Assim, concluímos que a torneira despeja 4,6 L de água por segundo. Como o quociente 23 : 5 pode ser representado pela fração $\frac{23}{5}$, temos:

$$4{,}6 \text{ L/s} = \frac{23}{5} \text{ L/s}$$

O quociente representado pela fração $\frac{23}{5}$ é chamado de **razão** do número de litros de água para o número de segundos.

> Sendo a e b números quaisquer, com $b \neq 0$, chama-se razão de a para b o quociente indicado por $\frac{a}{b}$ ou $a : b$. Os números a e b são chamados, respectivamente, de antecedente e consequente da razão.

Nota:

A expressão "razão de *a* para *b*" tem o mesmo significado da expressão "razão entre *a* e *b*, nessa ordem".

Razões equivalentes

No exemplo anterior, em vez de dizer que a vazão da torneira é $\frac{23}{5}$ L/s, poderia ser dito que a vazão da torneira é $\frac{46}{10}$ L/s. Essas duas afirmações têm igual significado, pois as frações $\frac{23}{5}$ e $\frac{46}{10}$ representam o mesmo quociente:

$$\frac{23}{5} = \frac{46}{10} = 4{,}6$$

Por isso, as razões $\frac{23}{5}$ e $\frac{46}{10}$ são chamadas de razões equivalentes.

Duas razões são equivalentes quando representam o mesmo número. Indicaremos a equivalência entre as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Propriedade

Multiplicando ou dividindo o antecedente e o consequente da razão $\frac{a}{b}$ por um mesmo número não nulo, obtém-se uma razão equivalente a $\frac{a}{b}$.

Exemplos

a) Multiplicando por 4 o antecedente e o consequente da razão $\frac{5}{3}$, obtemos a razão equivalente $\frac{20}{12}$:

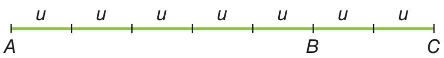
$$\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$$

b) Dividindo por 6 o antecedente e o consequente da razão $\frac{18}{12}$, obtemos a razão equivalente $\frac{3}{2}$:

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Razões inversas

Adotando a unidade de comprimento u, consideremos os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ representados abaixo.



Assim: $AB = 5u$ e $BC = 2u$.

Calculando as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{BC}{AB}$, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{5u}{2u} \text{ e } \frac{BC}{AB} = \frac{2u}{5u}$$

Cancelando a unidade u, podemos escrever:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{5}{2} \text{ e } \frac{BC}{AB} = \frac{2}{5}$$

Por serem representadas por frações inversas, $\frac{5}{2}$ e $\frac{2}{5}$, as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{BC}{AB}$ são chamadas de razões inversas.

Sendo x e y números quaisquer, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, as razões $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$ são chamadas de razões inversas entre si.

Comparação de dois números positivos por meio da razão entre eles

A comparação de dois números positivos a e b pode ser feita por meio da razão $\frac{a}{b}$. Quando essa razão é:

- menor que 1, concluímos que $a < b$;
- maior que 1, concluímos que $a > b$;
- igual a 1, concluímos que $a = b$.

Exercícios propostos

1 Represente por uma fração irredutível:
a) a razão do número 18 para o número 10.
b) a razão entre 21 e 35, nessa ordem.
c) a razão do número 16 para o número 8.

2 Represente por um número decimal:
a) a razão do número 12 para o número 10.
b) a razão entre 3 e 4, nessa ordem.
c) a razão do número 1 para o número 10.000.

3 Obtenha duas razões equivalentes a $\frac{20}{12}$ que tenham o antecedente inteiro positivo e menor que 20.

4 Obtenha duas razões equivalentes a $\frac{18}{10}$ que tenham o antecedente positivo e maior que 18.

5 Se a razão entre a capacidade de um vaso e a capacidade de um copo, nessa ordem, é $\frac{18}{4}$, isso significa que a capacidade do vaso equivale a:
a) 4 vezes a do copo.
b) 4,5 vezes a do copo.
c) 3 vezes a do copo.
d) 3,5 vezes a do copo.
e) 3,8 vezes a do copo.

6 Uma barra de ferro com 10 m de comprimento foi cortada em dois pedaços, tendo um deles 6 m. Represente por uma fração irredutível:
a) a razão do comprimento do pedaço maior para o comprimento do menor.
b) a razão do comprimento do pedaço menor para o comprimento do maior.

7 Uma urna contém exatamente 18 bolas, sendo 12 pretas e 6 brancas. Calcule:
a) a razão do númzero de bolas pretas para o número total de bolas da urna.
b) a razão do número total de bolas para o número de bolas pretas da urna.
c) a razão do número de bolas brancas para o número total de bolas da urna.
d) a razão do número total de bolas para o número de bolas brancas da urna.
e) a razão do número de bolas pretas para o número de bolas brancas da urna.
f) a razão do número de bolas brancas para o número de bolas pretas da urna.

8 Uma máquina, com velocidade constante de produção, fabrica 180 m de corda em 40 s. Represente por uma fração irredutível a razão do número de metros de corda para o número de segundos.

9 **(Enem)** No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.
Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

a) 1 : 20
b) 1 : 100
c) 1 : 200
d) 1 : 1.000
e) 1 : 2.000

10 A razão entre os conteúdos de duas embalagens A e B de iogurte, nessa ordem, é $\frac{2}{5}$. Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações.

a) O conteúdo da embalagem A é menor e representa 0,4 do conteúdo de B.
b) O conteúdo da embalagem B é menor e representa 0,4 do conteúdo de A.
c) O conteúdo da embalagem A é maior e representa 2,5 do conteúdo de B.
d) O conteúdo da embalagem B é menor e representa 2,5 do conteúdo de A.
e) Necessariamente, a embalagem A tem 2 L e B tem 5 L de iogurte.
f) Se o conteúdo da embalagem A é 200 mL, então o conteúdo de B é 500 mL.

11 A razão de um volume V_1 para um volume V_2 é 0,75. Isso significa que a razão de V_2 para V_1 é:

a) 75
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{3}{4}$

12 Se $\frac{x}{5}$ e $\frac{y}{8}$ são razões inversas, podemos afirmar que:

a) $x = 8$ e $y = 5$
b) $x = 5$ e $y = 8$
c) $\frac{x}{y} = \frac{8}{5}$
d) $\frac{x}{y} = \frac{5}{8}$
e) $xy = 40$

13 Sabendo que os números positivos x, y e z são tais que $\frac{x}{y} = 1{,}2$ e $\frac{z}{y} = 0{,}4$, podemos concluir que:

a) $x < y < z$
b) $x < z < y$
c) $y < x < z$
d) $z < x < y$
e) $z < y < x$

14 **(Enem) Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani**
O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1.200.000 quilômetros quadrados, dos quais 840.000 quilômetros estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo. Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

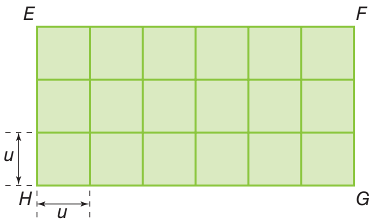
Disponível em: http://noticias.terra.com.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

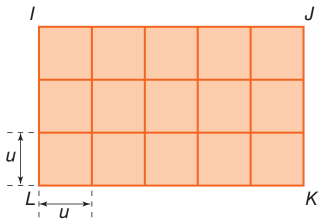
Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da Sabesp, a capacidade do aquífero Guarani é:

a) $1{,}5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.
b) $1{,}5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.
c) $1{,}5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.
d) $1{,}5 \times 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.
e) $1{,}5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

15 Se a razão da idade de Cristina para a idade de Paulo é $\frac{1}{4}$, qual é a razão da idade de Paulo para a idade de Cristina?

16 Os retângulos *EFGH* e *IJKL*, abaixo, são formados por quadradinhos cujos lados têm medida *u*.





Sendo A_1 a área do retângulo *EFGH* e A_2 a área do retângulo *IJKL*, calcule as razões a seguir, representando-as por frações irredutíveis.

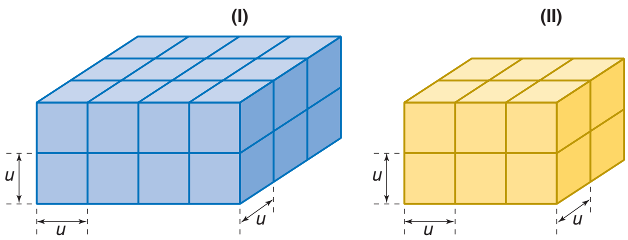
a) $\dfrac{A_1}{A_2}$

b) $\dfrac{A_2}{A_1}$

c) $\dfrac{A_1 + A_2}{A_2}$

d) A inversa da razão $\dfrac{2A_1}{3A_2}$

17 Os paralelepípedos (I) e (II), abaixo, são formados por cubinhos cujas arestas têm medida *u*.



Sendo V_I e V_{II} os volumes dos paralelepípedos (I) e (II), respectivamente, calcule as razões a seguir, representando-as por frações irredutíveis.

a) $\dfrac{V_I}{V_{II}}$

b) $\dfrac{V_{II}}{V_I}$

c) $\dfrac{V_I}{V_I + V_{II}}$

d) a inversa de $\dfrac{5V_I}{4V_{II}}$

Proporção

Ao conceituar razões equivalentes, vimos que dizer que a vazão da torneira é $\dfrac{23}{5}$ L/s é equivalente a dizer que a vazão da torneira é $\dfrac{46}{10}$. Por isso podemos escrever:

$$\frac{23}{5} = \frac{46}{10}$$

Essa igualdade entre as razões $\dfrac{23}{5}$ e $\dfrac{46}{10}$ é chamada de proporção. Generalizando, definimos:

Se duas razões $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ são equivalentes, então a igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ é chamada de proporção.

Notas:

1. A proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deve ser lida: "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*". Os números *a*, *b*, *c* e *d* são chamados termos da proporção, sendo *a* e *d* os extremos e *b* e *c* os meios da proporção.

2. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então dizemos que *a*, *b*, *c* e *d* formam, nessa ordem, uma proporção.

3. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então dizemos que *a* e *c* são proporcionais a *b* e *d*, respectivamente.

Propriedades das proporções

P1. Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow bc = ad, \text{ com } b \neq 0 \text{ e } d \neq 0$$

Demonstração

Multiplicando por *bd* cada um dos membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$$

$$\therefore\ ad = bc$$

Exemplos

a) A sentença $\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$ é verdadeira, pois: $10 \cdot 9 = 6 \cdot 15$

b) A sentença $\frac{12}{8} = \frac{4}{3}$ é falsa, pois: $8 \cdot 4 \neq 12 \cdot 3$

P2. Em toda proporção de termos não nulos, permutando os extremos ou permutando os meios, obtém-se uma nova proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

e

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Demonstração

Multiplicando por $\frac{d}{a}$ cada um dos membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{ba} = \frac{cd}{da}$$

$$\therefore\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Multiplicando por $\frac{b}{c}$ cada um dos membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, obtemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{bc} = \frac{cb}{dc}$$

$$\therefore\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Exemplo

Como a sentença $\frac{2}{8} = \frac{4}{16}$ é verdadeira, então também são verdadeiras as sentenças $\frac{16}{8} = \frac{4}{2}$ e $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$.

> **P3.** Em toda proporção de termos não nulos, invertendo ambos os membros, obtém-se uma nova proporção.
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Demonstração

Pela propriedade P.1, temos:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow bc = ad$ (I)

Dividindo por ac ambos os membros da igualdade $bc = ad$, obtemos:

$\frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (II)

Por (I) e (II), concluímos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Exemplo

Como a sentença $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$ é verdadeira, então também é verdadeira a sentença $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

> **P4.** Em toda proporção, adicionando a cada antecedente o respectivo consequente, obtém-se uma nova proporção.
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Demonstração

Adicionando 1 a cada um dos membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Exemplo

Como a sentença $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ é verdadeira, então também é verdadeira a sentença $\frac{2+4}{4} = \frac{3+6}{6}$

> **P5.** Em toda proporção, subtraindo de cada antecedente o respectivo consequente, obtém-se uma nova proporção.
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Demonstração

Subtraindo 1 de cada um dos membros da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Exemplo

Como a sentença $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ é verdadeira, então também é verdadeira a sentença $\frac{9-6}{6} = \frac{3-2}{2}$.

P6. Em toda proporção com duas ou mais razões cuja soma dos consequentes é diferente de zero, a razão da soma dos antecedentes para a soma dos consequentes é igual a cada razão da proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Demonstração

Seja k a constante tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} a = kb \\ c = kd \\ e = kf \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas igualdades, obtemos:

$$a + c + e = kb + kd + kf \Rightarrow a + c + e = k(b + d + f)$$

$$\therefore \frac{a+c+e}{b+d+f} = k$$

Como a constante k é igual a cada uma das razões $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$, concluímos:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Exemplo

Como a sentença $\frac{5}{10} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ é verdadeira, então também é verdadeira a sentença $\frac{5+2+3}{10+4+6} = \frac{5}{10} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

Notas:

1. A igualdade de três ou mais razões é chamada de **proporção múltipla**.

2. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$, o número k é chamado de **constante de proporcionalidade** da proporção múltipla.

Resolução de uma proporção

Em março de 1983, o deputado federal Dante de Oliveira, atendendo a uma crescente pressão do povo brasileiro, apresentou uma proposta de emenda à constituição brasileira, que pretendia restabelecer as eleições diretas para a Presidência da República. Se aprovada, a emenda apressaria o fim da ditadura militar iniciada em 1964. A expectativa em torno da votação dessa proposta pelo Congresso deu início à maior manifestação popular já ocorrida até então no Brasil, o movimento conhecido como Diretas-já.

Nos anos de 1983 e 1984, dezenas de comícios em favor das Diretas-já espalharam-se por todo o Brasil. Os dois maiores ocorreram em abril de 1984, na Praça da Candelária, no Rio de Janeiro, e no Vale do Anhangabaú, em São Paulo.

JUCA MARTINS/PULSAR IMAGENS

Comício das Diretas-já em abril de 1984 na cidade de São Paulo.

Para a contagem das pessoas que participaram do comício no Anhangabaú, os técnicos da polícia militar estimaram em 250.000 m^2 a área ocupada pela multidão, havendo, aproximadamente, 300 pessoas em cada 50 m^2. Assim, o número *n* de pessoas pôde ser determinado pela proporção:

$$\frac{n}{250.000} = \frac{300}{50}$$

Aplicando a propriedade P.1 das proporções (o produto dos extremos é igual ao produto dos meios), os técnicos obtiveram:

$50n = 300 \cdot 250.000 \Rightarrow 50n = 75.000.000$

$\therefore\ n = \dfrac{75.000.000}{50} \Rightarrow n = 1.500.000$

Assim, estimaram que 1.500.000 pessoas participaram do comício em São Paulo.

Ao determinar o termo desconhecido *n* na proporção, os técnicos resolveram a proporção.

> Resolver uma proporção significa determinar um ou mais termos desconhecidos nessa proporção.

Exercícios resolvidos

1 Resolver as proporções:

a) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{x}$ b) $\dfrac{12}{8} = \dfrac{2x+1}{x+4}$

Resolução

a) Pela propriedade P.1 das proporções (o produto dos extremos é igual ao produto dos meios), temos:

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{x} \Rightarrow 3x = 9 \cdot 4$

$\therefore\ x = 12$

b) $\dfrac{12}{8} = \dfrac{2x+1}{x+4} \Rightarrow 8(2x+1) = 12(x+4)$

$\therefore\ 16x + 8 = 12x + 48 \Rightarrow 4x = 40$

$\therefore\ x = 10$

2 Os números x + 2 e x − 1 são proporcionais aos números 4 e 2, respectivamente. Determinar o valor de x.

Resolução

Dizer que x + 2 e x − 1 são proporcionais aos números 4 e 2, respectivamente, equivale a dizer que:

$\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{x-1}{2}$

Pela propriedade P.1 das proporções, temos:

$4(x-1) = 2(x+2) \Rightarrow 4x - 4 = 2x + 4$

$\therefore\ 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

3 Os números 2, x + 3, 4 e 4x + 2 formam, nessa ordem, uma proporção. Determinar o valor de x.

Resolução

Dizer que os números 2, x + 3, 4 e 4x + 2 formam, nessa ordem, uma proporção equivale a dizer que:

$\dfrac{2}{x+3} = \dfrac{4}{4x+2}$

Pela propriedade P1 das proporções, temos:

$2(4x+2) = 4(x+3) \Rightarrow 8x + 4 = 4x + 12$

$\therefore\ 4x = 8 \Rightarrow x = 2$

4 Com 47,6 kg de ferro moldaram-se duas esferas maciças tais que a razão entre suas massas é $\frac{3}{4}$. Qual é a massa da esfera maior, em quilograma?

Resolução

Sendo m e M as massas em quilograma das esferas menor e maior, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{M} = \dfrac{3}{4} & \text{(I)} \\ m + M = 47{,}6 & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando a propriedade P.4 na proporção (I), temos:

$$\frac{m}{M} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{m + M}{M} = \frac{3 + 4}{4} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (II) em (III), concluímos:

$$\frac{47{,}6}{M} = \frac{7}{4} \Rightarrow 7M = 190{,}4$$

$$\therefore\ M = 27{,}2$$

Logo, a massa da esfera maior é 27,2 kg.

5 Uma barra de ferro com 2,7 m de comprimento deve ser cortada em três pedaços de comprimentos x, y e z, em metro, tais que $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$. Determinar esses comprimentos.

Resolução

Aplicando a propriedade P.6 das proporções, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{4} \\ x + y + z = 2{,}7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x + y + z}{3 + 2 + 4} = \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{4} & \text{(I)} \\ x + y + z = 2{,}7 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\frac{2{,}7}{9} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} \Rightarrow x = 0{,}9,\ y = 0{,}6 \text{ e } z = 1{,}2$$

Logo, os comprimentos x, y e z são, respectivamente, 0,9 m, 0,6 m e 1,2 m.

Exercícios propostos

18 Classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das sentenças a seguir.

a) $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ b) $\frac{2}{6} = \frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{5} \neq \frac{8}{4}$

19 Verifique se os números 4 e 6 são proporcionais aos números 10 e 15, respectivamente.

20 Verifique se os números 3 e 6 são proporcionais aos números 4 e 12, respectivamente.

21 Verifique se os números 2, 3, 6 e 9 formam uma proporção, nessa ordem.

22 Determine o valor de x em cada uma das proporções.

a) $\frac{2}{x} = \frac{6}{15}$

b) $\frac{x}{3} = \frac{9}{2}$

c) $\frac{4}{3} = \frac{x}{5}$

d) $\frac{x + 1}{6} = \frac{x - 1}{3}$

e) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{6x}$

23 A razão da área de um terreno A para a área de um terreno B é $\frac{5}{6}$. Sabendo que a área do terreno A é 300 m^2, calcule a área de B.

24 A razão da capacidade de um jarro para a capacidade de um copo é $\frac{7}{3}$. Se a capacidade do copo é 210 mL, qual é a capacidade do jarro, em mililitro?

25 A água é uma substância composta formada pelos elementos hidrogênio e oxigênio. Em qualquer quantidade de água, a razão da massa de hidrogênio para a massa de oxigênio é $\frac{1}{8}$. Se em certa quantidade de água a massa de hidrogênio é 16 g, qual é a massa de oxigênio, em grama?

26 Em uma mistura de sal e água, a razão da massa de sal para a massa de água é $\frac{3}{8}$. Se a mistura contém 240 g de água, qual é a quantidade de sal, em grama?

27 Uma moeda é fabricada com dois tipos de metal: cobre e níquel. A razão da massa de cobre para a massa de níquel é $\frac{3}{4}$. Sabendo que essa moeda contém 9 g de cobre, calcule a quantidade de níquel, em grama, que a compõe.

28 Em uma cidade com 160.000 eleitores há dois candidatos, A e B, concorrendo à prefeitura. Após uma pesquisa com 800 eleitores escolhidos ao acaso nessa cidade, constatou-se que 450 deles votarão no candidato A. Se essa tendência se mantiver para todo o eleitorado, quantos votos terá o candidato A?

29 Para contar o número de rãs de um charco, um biólogo capturou 90 rãs e marcou-as com um pingo de tinta não tóxica, devolvendo-as a seguir ao charco. Esperou algum tempo para que as rãs se espalhassem pelo charco e, depois, capturou 50 rãs, constatando que entre elas havia 12 rãs marcadas com o pingo de tinta. Qual é o número estimado de rãs no charco?

WIM WEENINK/FOTO NATURA/ MINDEN PICTURES/LATINSTOCK

30 A razão do comprimento para a largura de um retângulo é $\frac{5}{3}$. Sabendo que o comprimento desse retângulo tem 4 cm a mais que a largura, calcule sua área.

31 Em um campeonato de *videogame*, ficaram para a partida final Luiz e Pedro. Nessa partida, Pedro fez 800 pontos a mais que Luiz. Sabendo que a razão do número de pontos de Pedro para o número de pontos de Luiz foi $\frac{5}{4}$, determine o número de pontos de Luiz.

32 A razão do salário de Carlos para o salário de João é $\frac{3}{2}$. Sabendo que João recebe R$ 500,00 a menos que Carlos, calcule o salário de Carlos.

33 A vazão de uma das comportas de uma represa é 75.000 L em 23 s. Quantos segundos são necessários para que escoem 135.000 L de água por essa comporta?

34 Os números x e 5 são proporcionais aos números 6 e 3, respectivamente. Determine o valor de x.

35 Determine o número x, sabendo que os números $3x - 1$, 6, $4x + 1$ e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

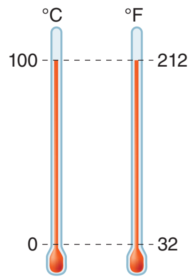
36 Determine os valores desconhecidos na proporção múltipla:

$$\frac{4}{x} = \frac{y}{15} = \frac{8}{z} = \frac{2}{5}$$

37 Sabendo que $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, calcule as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$.

38 Que proporção obtemos adicionando 1 a ambos os membros da igualdade $\frac{a}{3} = \frac{b}{6}$?

39 **(Cesgranrio-RJ)** As escalas termométricas Celsius e Fahrenheit são obtidas atribuindo-se ao ponto de fusão do gelo, sob pressão de uma atmosfera, os valores 0 (Celsius) e 32 (Fahrenheit) e à temperatura de ebulição da água, sob pressão de uma atmosfera, os valores 100 (Celsius) e 212 (Fahrenheit).



A temperatura 40 °C corresponde a:

a) 104 °F
b) 98,4 °F
c) 84,8 °F
d) 40 °F
e) 4,4 °F

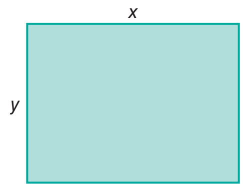
40 A soma de dois números é 42, e a razão entre eles é $\frac{2}{5}$. Quais são esses números?

41 A razão entre um número x e um número y, nessa ordem, é $\frac{3}{5}$. Determine esses números sabendo que $x + y = 32$.

42 Em 40 L de uma mistura de álcool e gasolina, a razão do volume de álcool para o volume de gasolina é $\frac{2}{3}$. Quantos litros de álcool essa mistura contém?

43 Paulo e Roberto subiram juntos na balança de uma farmácia e constataram que a massa dos dois juntos é 119 kg. Sabendo que a razão da massa de Paulo para a massa de Roberto é $\frac{4}{3}$, calcule a massa de Roberto.

44 O retângulo representado abaixo tem 28 cm de perímetro, e a razão do comprimento x para a largura y é $\frac{4}{3}$. Calcule a área desse retângulo.



45 Um pedreiro estimou que para cimentar o piso de um salão são necessários 18 m^3 de uma mistura de areia e cimento, na razão de duas partes de cimento para 7 de areia. Calcule a quantidade, em metro cúbico, de areia e cimento necessária para realizar o serviço.

46 **(Enem)** Muitas usinas hidroelétricas estão situadas em barragens. As características de algumas das grandes represas e usinas brasileiras estão apresentadas no quadro a seguir.

Usina	Área alagada (km^2)	Potência (MW)	Sistema Hidrográfico
Tucuruí	2.430	4.240	Rio Tocantins
Sobradinho	4.214	1.050	Rio São Francisco
Itaipu	1.350	12.600	Rio Paraná
Ilha Solteira	1.077	3.230	Rio Paraná
Furnas	1.450	1.312	Rio Grande

A razão entre a área da região alagada por uma represa e a potência produzida pela usina nela instalada é uma das formas de estimar a relação entre o dano e o benefício trazidos por um projeto hidroelétrico. A partir dos dados apresentados no quadro, o projeto que mais onerou o ambiente em termos de área alagada por potência foi:

a) Tucuruí
b) Furnas
c) Itaipu
d) Ilha Solteira
e) Sobradinho

47 **(Enem)** Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

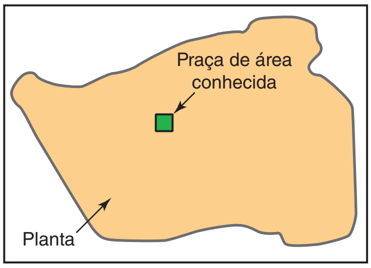
Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2.055), *Cláudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumam 1.000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litro, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

a) 10^{-2} b) 10^3 c) 10^4 d) 10^6 e) 10^9

48 **(Enem)** Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m $\times$ 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metro quadrado, é de, aproximadamente:

a) 800
b) 10.000
c) 320.000
d) 400.000
e) 5.000.000



49 **(Enem)** Se compararmos a idade do planeta Terra, avaliada em quatro e meio bilhões de anos ($4,5 \times 10^9$ anos), com a de uma pessoa de 45 anos, então, quando começaram a florescer os primeiros vegetais, a Terra já teria 42 anos. Ela só conviveu com o homem moderno nas últimas quatro horas e, há cerca de uma hora, viu-o começar a plantar e a colher. Há menos de um minuto percebeu o ruído de máquinas e de indústrias e, como denuncia uma ONG de defesa do meio ambiente, foi nesses últimos sessenta segundos que se produziu todo o lixo do planeta!

O texto permite concluir que a agricultura começou a ser praticada há cerca de:

a) 365 anos
b) 460 anos
c) 900 anos
d) 10.000 anos
e) 460.000 anos

50 **(Enem)** Comprimam-se todos os 4,5 bilhões de anos de tempo geológico em um só ano. Nesta escala, as rochas mais antigas reconhecidas datam de março. Os seres vivos apareceram inicialmente nos mares, em maio. As plantas e animais terrestres surgiram no final de novembro. (Don L. Eicher. *Tempo geológico*.)

Meses	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
(em milhões de anos)	4.500	4.125	3.750	3.375	3.000	2.625

Meses	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
(em milhões de anos)	2.250	1.875	1.500	1.125	750	375

Na escala de tempo acima, o sistema solar surgiu no início de janeiro e vivemos hoje à meia-noite de 31 de dezembro. Nessa mesma escala, Pedro Álvares Cabral chegou ao Brasil também no mês de dezembro, mais precisamente na:

a) manhã do dia 01.
b) tarde do dia 10.
c) noite do dia 15.
d) tarde do dia 20.
e) noite do dia 31.

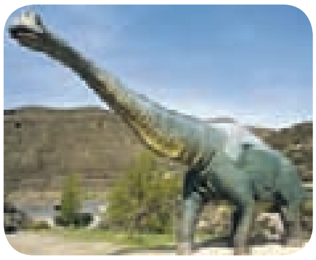
51 Que proporção obtemos subtraindo 1 de ambos os membros da igualdade $\frac{a}{5} = \frac{b}{8}$?

52 A razão entre dois números positivos é $\frac{4}{3}$, e a diferença entre eles é 6. Quais são esses números?

53 A razão entre dois números positivos é $\frac{3}{5}$, e a diferença entre eles é 16. Quais são esses números?

54 Os dinossauros surgiram há cerca de 225 milhões de anos, no fim do período triássico, e foram extintos há cerca de 65 milhões de anos, no fim do período cretáceo. Alguns tinham o tamanho de um gato; outros, o tamanho de um prédio de 5 andares. Para se ter uma ideia das dimensões que esses répteis podiam atingir, estima-se que a razão do comprimento de um braquiossauro adulto para sua altura era $\frac{5}{3}$, e a diferença entre o comprimento e a altura, nessa ordem, era 10 m. Calcule o comprimento e a altura dos grandes braquiossauros.

ALBERTO PAREDES/ ALAMY/ OTHER IMAGES



Os braquiossauros viveram no fim do período jurássico, há cerca de 150 milhões de anos.

55 Uma panela de água foi colocada no fogo. Após algum tempo, uma parte da água evaporou, restando 600 mL de água na panela. A razão entre a quantidade de água colocada na panela e a quantidade de água evaporada, nessa ordem, é $\frac{4}{1}$. Calcule a quantidade de água evaporada, em mililitro.

56 Sabendo que a constante de proporcionalidade da proporção múltipla $\frac{a}{d} = \frac{b}{4} = \frac{c}{9}$ é 2, isto é, $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{9} = 2$:

a) calcule a razão $\frac{a + b + c}{d + 4 + 9}$.
b) calcule os valores b e c.

57 A soma de três números, x, y e z, é 12. Determine esses números sabendo que $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9}$.

58 A soma de quatro números, a, b, c e d, é 20. Determine esses números sabendo que $\frac{a}{3} = \frac{b}{9} = \frac{c}{12} = \frac{d}{6}$.

59 José, Marcelo e Alex são sócios de uma papelaria. O lucro dessa loja no mês passado foi R$ 18.000,00. Desse lucro, José deve receber x, Marcelo deve receber y e Alex deve receber z tal que $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$. Quanto receberá cada um?

60 Aplicando as propriedades das proporções, resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{7} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - x = 6 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{15} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 8 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1} \end{cases}$

61 Sabendo que $a + 4b + 5c = 48$ e que $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{9}$, determine os números a, b e c.
(Sugestão: Obtenha a razão equivalente a $\dfrac{b}{6}$, com antecedente $4b$; e a razão equivalente a $\dfrac{c}{9}$, com antecedente $5c$.)

62 Aplicando as propriedades das proporções, resolva o sistema de equações.

$$\begin{cases} a + 3b + c + 2d = 18 \\ \dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{9} = \dfrac{d}{12} \end{cases}$$

Algumas razões especiais

Média aritmética

Nas primeiras 4 partidas de um campeonato de futebol, um atacante marcou 1, 2, 3 e 2 gols, respectivamente. Distribuindo igualmente, pelas 4 partidas, o total de gols marcados, obtemos o número:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 2}{4} = 2$$

Esse número é a **média aritmética** de gols marcados por jogo pelo jogador nas 4 primeiras partidas do campeonato.

Generalizando, dizemos que a média aritmética entre dois ou mais números é a razão cujo antecedente é a soma desses números e o consequente é a quantidade desses números. Em símbolos, temos:

A média aritmética entre os n números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ é o número $\overline{x}$ determinado por: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$

Exercício resolvido

6 A tabela abaixo mostra as estaturas dos jogadores de uma equipe de basquetebol. Qual é a estatura média desses jogadores?

Atleta	Estatura (em metro)
Cezar Augusto Viana	1,96
David Medeiros	1,92
Ernesto de Paula	1,86
Edvaldo Ramos Filho	2,00
Ronaldo dos Santos Vieira	2,06

Resolução

A estatura média dos jogadores é a média aritmética entre suas estaturas, isto é:

$$\overline{x} = \frac{1{,}96 + 1{,}92 + 1{,}86 + 2{,}00 + 2{,}06}{5} = 1{,}96$$

Logo, a estatura média é 1,96 m.

Média aritmética ponderada

Um escritório de advocacia possui 8 funcionários, cujos salários estão descritos na tabela abaixo.

Funcionário	Salário
Abelardo Tavares	R$ 1.800,00
Alberto dos Santos	R$ 2.400,00
Antônio Rodrigues Pimentel	R$ 1.800,00
Beatriz Soares Lima	R$ 2.400,00
Bernardo Silva	R$ 2.400,00
Cláudia de Carvalho	R$ 1.600,00
José Carlos Batochio	R$ 2.400,00
Luíza Piqueira	R$ 1.800,00

O salário médio desses funcionários é:

$$\overline{x} = \frac{1.800 + 2.400 + 1.800 + 2.400 + 2.400 + 1.600 + 2.400 + 1.800}{8}$$

ou seja

$$\overline{x} = \frac{1.800 \cdot 3 + 2.400 \cdot 4 + 1.600}{8} = 2.075$$

Assim, concluímos que a média salarial desses funcionários é R$ 2.075,00.

Observe que no cálculo dessa média aritmética:

- o valor 1.800 apareceu 3 vezes;
- o valor 2.400 apareceu 4 vezes;
- o valor 1.600 apareceu 1 vez.

Por isso, dizemos que essa é a **média aritmética ponderada** entre os valores 1.800, 2.400 e 1.600 com **pesos**, respectivamente, iguais a 3, 4 e 1.

Generalizando, dizemos que a média aritmética ponderada entre dois ou mais números, aos quais são atribuídos pesos, é a razão cujo antecedente é a soma dos produtos desses números pelos respectivos pesos, e o consequente é a soma dos pesos. Em símbolos, temos:

A média aritmética ponderada entre os n números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com pesos $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, respectivamente, é o número $\overline{x}$ determinado por:

$$\overline{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + ... + x_np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

Exercício resolvido

7 Segundo os critérios da escola onde Leonor estuda, a média final, em cada matéria, é a média aritmética ponderada entre as notas dos bimestres 1º, 2º, 3º e 4º com pesos 1, 2, 2 e 3, respectivamente. O aluno que consegue média final maior ou igual a 6 está automaticamente aprovado. O boletim abaixo apresenta as notas bimestrais de Leonor em Matemática. Leonor está aprovada automaticamente em Matemática?

Aluno: Leonor Rodrigues de Moraes, nº 28					
1ª série A, sala 12					
	1º bimestre (peso 1)	2º bimestre (peso 2)	3º bimestre (peso 2)	4º bimestre (peso 3)	Média final
Matemática	4,0	5,0	6,5	7,0	

Resolução

A média final de Leonor, em Matemática, é a média aritmética ponderada $\bar{x}$ entre as notas 4,0; 5,0; 6,5 e 7,0 com pesos 1, 2, 2 e 3, respectivamente, isto é:

$$\bar{x} = \frac{4{,}0 \cdot 1 + 5{,}0 \cdot 2 + 6{,}5 \cdot 2 + 7{,}0 \cdot 3}{1 + 2 + 2 + 3}, \text{ ou seja,}$$

$$\bar{x} = \frac{48{,}0}{8} = 6{,}0$$

Logo, Leonor está aprovada automaticamente em Matemática.

Exercícios propostos

63 Calcule a média aritmética entre os números.

a) 2; 3; 5; 8 e 6
b) 3,5; 4,0; 2,8 e 4,2
c) 1; 0; 6; 0; 3; 1; 1 e 2
d) 8,21; 3,04; 2,75 e 6,00

64 Luís, Carlos e Beto compraram um pequeno veleiro em sociedade. Luís contribuiu com R$ 2.700,00, Carlos com R$ 2.900,00 e Beto com R$ 3.100,00. Qual foi a média de contribuição de cada um?

KONSTANTIN SUTYAGIN/SHUTTERSTOCK

65 Os 258 operários de uma empresa recebem juntos R$ 312.825,00. Qual é o salário médio de cada operário dessa empresa?

66 **(UEPB)** Em uma eleição para prefeito de uma cidade do interior, os primeiros 5 eleitores demoraram a votar, respectivamente: 1 min 28 s, 2 min 04 s, 1 min 50 s, 1 min 16 s e 1 min 22 s. A previsão do tempo que será gasto por 400 eleitores, considerando a média aritmética dos cinco votos iniciais é:

a) 9 h 10 min
b) 8 h 20 min
c) 10 h 40 min
d) 12 h
e) 7 h 50 min

67 As notas obtidas pelos 21 alunos em uma prova foram diferentes entre si. O professor escreveu essas notas em ordem decrescente e separou-as em dois grupos: o grupo A com as 11 notas mais altas e o grupo B com as demais notas. A seguir calculou a nota média (média aritmética) de cada grupo. Depois, no entanto, decidiu passar a menor nota do grupo A para o grupo B. Com essa mudança:

a) a média do grupo A aumentou e a de B diminuiu.
b) a média do grupo A diminuiu e a de B aumentou.
c) as médias de ambos os grupos aumentaram.
d) as médias de ambos os grupos diminuíram.
e) as médias dos grupos podem ter aumentado ou diminuído, dependendo das notas dos alunos.

68 **(Puccamp-SP)** Sabe-se que os números x e y fazem parte de um conjunto de 100 números, cuja média aritmética é 9,83. Retirando-se x e y desse conjunto, a média aritmética dos números restantes será 8,5. Se $3x - 2y = 125$, então:

a) $x = 75$
b) $y = 55$
c) $x = 85$
d) $y = 56$
e) $x = 95$

69 **(Fuvest-SP)** Sabe-se que a média aritmética de 5 números inteiros distintos, estritamente positivos, é 16. O maior valor que um desses inteiros pode assumir é:

a) 16
b) 20
c) 50
d) 70
e) 100

70 **(Enem)** Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5ª nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10ª, e ambas se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

Investimentos bilaterais (em milhões de dólares)		
Ano	Brasil na França	França no Brasil
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1.458
2006	539	744
2007	280	1.214

Disponível em: www.cartacapital.com.br
Acesso em: 7 de jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor:

a) inferior a 300 milhões de dólares.
b) superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.
c) superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.
d) superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.
e) superior a 600 milhões de dólares.

71 Calcule a **média aritmética ponderada** entre os números:

a) 2; 3; 8 e 15, com pesos 4; 1; 3 e 2, respectivamente.
b) 3,2; 4,1; 6; 3,5 e 2, com pesos 3; 2; 1; 1 e 6, respectivamente.
c) 1; 2 e 9, com pesos 6; 3 e 4, respectivamente.
d) 4,25; 2; 3,4 e 6,8, com pesos 4; 3; 5 e 1, respectivamente.
e) 5,2; 3,0 e 2,4, com pesos 1,4; 1,6 e 5, respectivamente.

72 Para avaliar o preço médio da cesta básica de alimentos em uma cidade, foi feita uma pesquisa em uma amostra de 60 estabelecimentos. Nessa amostra, constatou-se que o preço da cesta básica:
- em 10 estabelecimentos era R$ 189,00;
- em 18 estabelecimentos era R$ 195,00;
- em 32 estabelecimentos era R$ 204,00.

Qual foi o preço médio da cesta básica apurado nessa pesquisa?

73 Para conhecer a estatura média das mulheres em certa região, foi escolhida uma amostra de 200 mulheres, constatando-se que, dessas mulheres:
- 50 têm estatura 1,68 m;
- 120 têm estatura 1,60 m;
- 30 têm estatura 1,70 m.

De acordo com essa amostra, qual é a estatura média das mulheres dessa região?

74 O corpo docente de uma escola é formado por 30 professores, entre os quais:
- 18 professores recebem por 100 aulas mensais, cada um;
- 8 professores recebem por 120 aulas mensais, cada um;
- 4 professores recebem por 180 aulas mensais, cada um.

Sabendo que o preço-aula dessa escola é R$ 45,00, qual é o salário médio mensal desses professores?

75 **(Vunesp)** Suponha que o país A receba de volta uma parte de seu território T, que por certo tempo esteve sob a administração do país B, devido a um tratado entre A e B. Estimemos a população de A, antes de receber T, em 1,2 bilhão de habitantes, e a de T em 6 milhões de habitantes. Se as médias de idade das populações A e T, antes de se reunirem, eram, respectivamente, 30 anos e 25 anos, mostre que a média de idade após a reunião é superior a 29,9 anos.

76 **(Fuvest-SP)** Numa classe com vinte alunos, as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que 8 alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses oito alunos foi 65, enquanto que a média dos aprovados foi 77. Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.

a) Calcule a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos cinco pontos extras.

b) Com a atribuição dos cinco pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para a aprovação?

77 **(UFRN)** Uma prova foi aplicada em duas turmas distintas. Na primeira, com 30 alunos, a média aritmética das notas foi 6,40. Na segunda, com 50 alunos, foi 5,20.

A média aritmética das notas dos 80 alunos foi:

a) 5,65
b) 5,70
c) 5,75
d) 5,80

78 **(Unicamp-SP)** A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é de 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é de 35 anos e a dos homens é de 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo, no grupo?

79 **(UFMS)** A média aritmética do salário de um grupo de 100 pessoas é de 422 reais. Se a média aritmética do salário das mulheres é de 380 reais e a dos homens é de 520 reais, quantas são as mulheres do grupo?

Velocidade média

Um automóvel percorreu um trecho de 320 km de uma estrada em 4 h. A razão da distância percorrida para o tempo correspondente, isto é, $\frac{320 \text{ km}}{4 \text{ h}} = 80$ km/h, é o que chamamos de **velocidade média** do veículo nesse trecho da estrada.

Notas:

1. Dizer que a velocidade média do automóvel foi 80 km/h nesse trecho da estrada não significa que o veículo manteve essa velocidade durante todo o percurso; significa que, se fosse mantida uma mesma velocidade para percorrer 320 km em 4 h, essa velocidade deveria ser 80 km/h.
2. Se o veículo mantivesse a mesma velocidade para percorrer esse trecho da estrada, diríamos que a velocidade do automóvel nesse percurso foi constante.

Generalizando, definimos:

Se um móvel percorre uma distância d em um tempo t, dizemos que a velocidade média v do móvel nesse trajeto é dada por:

$$v = \frac{d}{t}, \text{ com } t \neq 0$$

Exercício resolvido

8 Durante determinado período, um foguete viajou à velocidade média de 39.000 km/h. Que distância percorreu o foguete em 3 min desse período?

Resolução

Como 1 hora equivale a 60 minutos, podemos dizer que a velocidade média v do foguete no período considerado pode ser representada por $\frac{39.000 \text{ km}}{60 \text{ min}}$. Devemos obter a distância x km tal que a razão $\frac{x \text{ km}}{3 \text{ min}}$ também represente a velocidade v, isto é:

$$\frac{x}{3} = \frac{39.000}{60} \Rightarrow x = 1.950$$

Assim, concluímos que o foguete percorreu 1.950 km em 3 min.

Densidade demográfica

Segundo dados do Censo 2010, divulgados pelo IBGE em 29 de novembro de 2010, a população brasileira era 190.732.694 habitantes. Como a área oficial do território brasileiro é 8.514.876,599 km^2, dizemos que a densidade demográfica do Brasil era, naquela data, dada por:

$$\frac{190.732.694 \text{ hab.}}{8.514.876,599 \text{ km}^2} \approx 2,4 \text{ hab./km}^2$$

Generalizando, definimos:

> A densidade demográfica de um território é a razão do número de habitantes pela área do território.

Densidade de uma amostra de matéria

Uma esfera maciça de ferro cuja massa é 23,58 g possui volume igual a 3 cm^3. Dividindo a massa pelo volume da esfera, obtemos:

$$\frac{23,58 \text{ g}}{3 \text{ cm}^3} = 7,86 \text{ g/cm}^3$$

Essa razão é chamada de **densidade** dessa esfera. Generalizando, definimos:

> A densidade de uma amostra de matéria é a razão da massa pelo volume dessa amostra.

Exercício resolvido

9 Se um corpo (amostra de matéria) tem densidade maior que a densidade de um líquido, esse corpo afunda no líquido; se a densidade do corpo é menor que a do líquido, o corpo boia. Aplicando esse princípio, resolva o problema a seguir, sabendo que a densidade da água é 1 g/cm^3. Considere uma placa de ferro com 102,18 kg obtida a partir de uma placa retangular com 220 cm de comprimento por 120 cm de largura e 0,5 cm de espessura, da qual foi retirado em cada vértice um quadrado de lado 10 cm, conforme mostra a figura 1. Dobrando a peça representada pela figura 1, obtemos uma caixa sem tampa, representada pela figura 2.

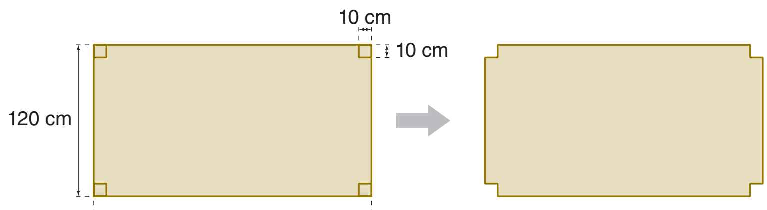


Figura 1

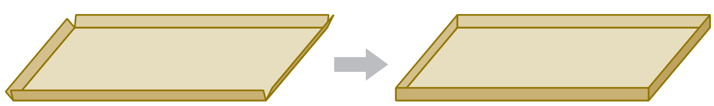


Figura 2

a) A placa da figura 1 boia ou afunda quando colocada dentro de um tanque com água?

b) A caixa da figura 2 boia ou afunda quando colocada com a cavidade voltada para cima e o fundo apoiado sobre a superfície da água de um tanque?

Resolução

a) O volume V_1 da placa da figura 1 é dado por:

$V_1 = (120 \cdot 220 \cdot 0,5 - 4 \cdot 10^2 \cdot 0,5)\ cm^3 = 13.000\ cm^3$

Logo, a densidade d_1 dessa placa é dada por:

$$d_1 = \frac{102.180\ g}{13.000\ cm^3} = 7,86\ g/cm^3$$

Como a densidade d_1 é maior que a densidade da água, concluímos que a placa afunda na água.

b) O volume V_2 da caixa da figura 2 é dado por:

$V_2 = (100 \cdot 200 \cdot 10)\ cm^3 = 200.000\ cm^3$

Logo, a densidade d_2 dessa caixa é dada por:

$$d_2 = \frac{102.180\ g}{200.000\ cm^3} = 0,5109\ g/cm^3$$

Como a densidade d_2 é menor que a densidade da água, concluímos que a caixa boia na água.

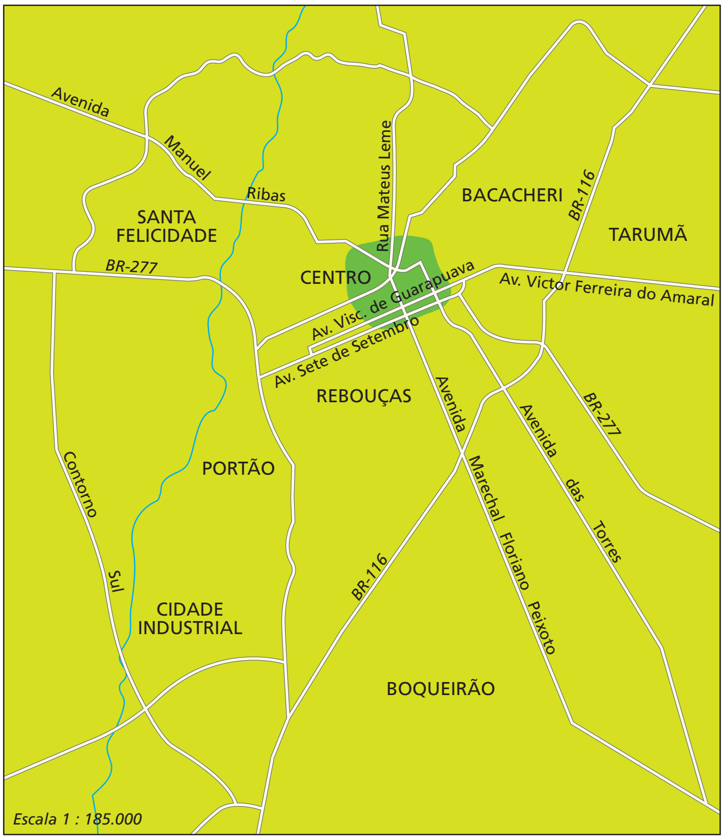
Nota:

Esse exercício explica por que um navio boia sobre a água.

Escala

Ao desenhar o mapa de uma região, pretende-se que, com o desenho, se obtenha a exata noção da forma e do tamanho da região.

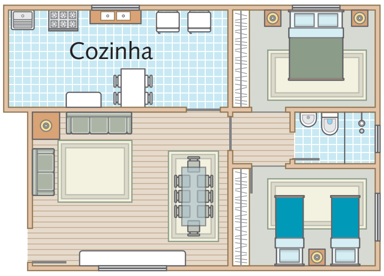
Quanto à forma, basta desenhar o mapa como se fosse uma fotografia reduzida ou ampliada da região. Para dar a noção de tamanho, menciona-se a **escala** com que o mapa foi desenhado. A escala é a razão cujo antecedente é o comprimento de uma linha qualquer no mapa, e o consequente é o comprimento real correspondente na região representada. Por exemplo, no mapa ao lado foi adotada a escala 1 : 185.000. Isso significa que cada unidade de comprimento 1 u no desenho corresponde ao comprimento 185.000 u na região representada. Assim, por exemplo, uma estrada representada no mapa por uma linha de 1 cm mede na realidade 185.000 cm, ou seja, 1,85 km.



Escala de um mapa é a razão entre o comprimento de uma linha do mapa e o comprimento real do trecho representado por essa linha, nessa ordem.

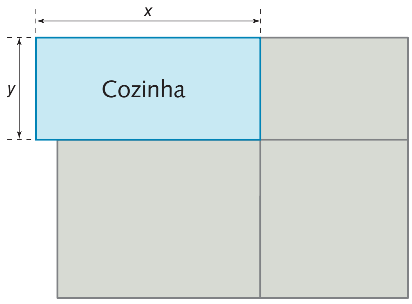
Exercícios resolvidos

10 Um arquiteto deve desenhar a planta de uma residência na escala 1 : 50. A casa a ser construída terá uma cozinha retangular com 4,4 m de comprimento por 2 m de largura. Quais devem ser as dimensões, em centímetro, do retângulo que representará essa cozinha na planta?



Resolução

Temos: 4,4 m = 440 cm e 2 m = 200 cm. A escala $\frac{1}{50}$ informa que cada 1 cm no desenho deve corresponder a 100 cm na casa. Assim, indicando por x e y, respectivamente, o comprimento e a largura, em centímetro, do retângulo que representará a cozinha na planta, temos:



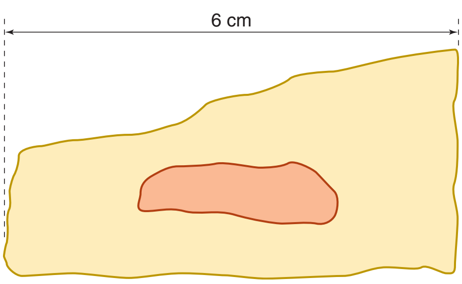
$$\frac{1}{50} = \frac{x}{440} \Rightarrow x = 8{,}8$$

e

$$\frac{1}{50} = \frac{y}{200} \Rightarrow y = 4$$

Logo, o retângulo que representará a cozinha deverá ter 8,8 cm de comprimento por 4 cm de largura.

11 O desenho abaixo é o esquema de uma célula que reveste o estômago humano. Sabendo que o desenho tem 6 cm de comprimento e que foi adotada a escala 20.000 : 1, calcular o comprimento real dessa célula, em milímetro.



Resolução

Temos que 6 cm = 60 mm. A escala $\frac{20.000}{1}$ informa que cada 20.000 milímetros no desenho correspondem a 1 milímetro na célula real. Assim, indicando por x o comprimento real dessa célula, temos:

$$\frac{20.000}{1} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 0{,}003$$

Logo, o comprimento real da célula é 0,003 mm.

Exercícios propostos

80 Um automóvel percorreu um trecho de 270 km de uma estrada em 3 h. Qual foi a velocidade média, em quilômetro por hora, do veículo nesse trecho?

81 Fui de Ribeirão Preto a São Joaquim da Barra, cidades do estado de São Paulo, em 0,8 h à velocidade média de 82,5 km/h. Qual é a distância entre essas duas cidades, em quilômetro?

82 Em um dos dias de sua viagem de turismo pelo estado de Pernambuco, Paulo foi de Recife a Gravatá, percorrendo 78 km à velocidade média de 80 km/h. Em quanto tempo, em minuto, Paulo fez essa viagem?

83 **(Unicamp-SP)** Um pequeno avião a jato gasta sete horas a menos do que um avião a hélice para ir de São Paulo até Boa Vista. O avião a jato voa a uma velocidade média de 660 km/h, enquanto o avião a hélice voa em média a 275 km/h. Qual é a distância entre São Paulo e Boa Vista?

84 **(Unicamp-SP)** Normas de segurança determinam que um certo tipo de avião deve levar, além do combustível suficiente para chegar ao seu destino, uma reserva para voar por mais 45 minutos. A velocidade média desse tipo de avião é de 200 quilômetros por hora e seu consumo é de 35 litros de combustível por hora de voo.

a) Qual o tempo, em horas e minutos, gasto por esse avião para voar 250 quilômetros?

b) Qual a quantidade mínima de combustível, incluindo a reserva, necessária para a viagem de 250 quilômetros?

85 **(Unaerp-SP)** Num circuito oval de automobilismo, um piloto faz o percurso em 5 min; se aumentar a velocidade média em 12 km/h, reduz o tempo em 1 min. O comprimento do circuito é:

a) 4 km **c)** 10 km **e)** 50 km
b) 5 km **d)** 40 km

86 O município de Caruaru, em Pernambuco, ocupa uma área de 920 km^2 e possuía 298.500 habitantes no ano de 2009. Qual era a densidade demográfica desse município em 2009?

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Feira de Caruaru.

87 No ano de 2009, a densidade demográfica da cidade de Vitória, capital do estado do Espírito Santo, era 3.428,53 hab./km^2. Sabendo que a área desse município é 93,38 km^2, calcule seu número de habitantes naquela data.

RUI REZENDE/SAMBAPHOTO

Vista parcial de Vitória.

88 Segundo dados do IBGE, a cidade de Salvador, capital da Bahia, tinha 2.998.056 habitantes em 2009, com densidade demográfica de 4.241,74 hab./km^2. Considerando esses dados, calcule a área do município de Salvador.

ALEX UCHÔA/IMAGEM BRASIL

Elevador Lacerda, em Salvador.

89 Em uma estação experimental de piscicultura, dois tanques com volumes de água 10 m^3 e 17 m^3 possuem 800 peixes e x peixes, respectivamente. Despejando a água desses dois tanques, juntamente com os peixes, em um terceiro tanque, até então vazio, observa-se que a densidade populacional (número de peixes por metro cúbico) desse terceiro tanque é 100 peixes/m^3. Determine o valor de x.

90 Uma rolha de cortiça tem massa 1,92 g e volume 6 cm^3. Qual é a densidade dessa rolha, em grama por centímetro cúbico?

91 Uma moeda de massa 4,875 g tem densidade 3,25 g/cm^3. Qual é o volume dessa moeda, em centímetro cúbico?

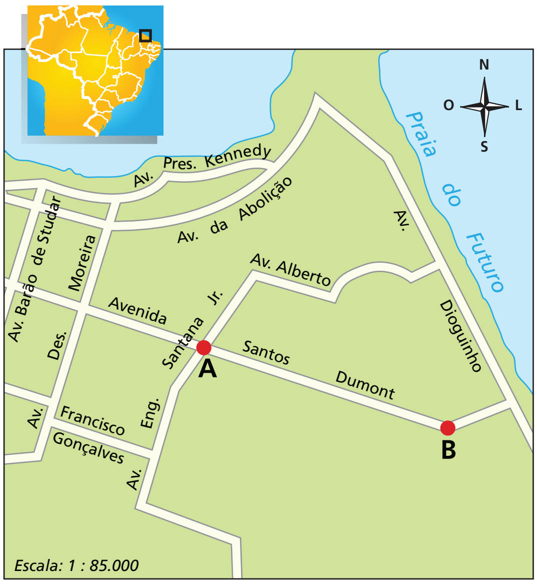
92 Uma coroa é composta de volumes iguais de ouro e prata. Sabendo que a densidade do ouro é 19,3 g/cm^3 e a da prata é 10,5 g/cm^3, calcule a densidade dessa coroa, em grama por centímetro cúbico.

93 Se no exercício anterior o volume do ouro da coroa fosse o dobro do volume da prata, qual seria a densidade da coroa, em grama por centímetro cúbico?

94 **(Enem)** Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é Spa-Francorchamps, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km. Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de Spa-Francorchamps, parado no boxe para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo:

a) 617 kg
b) 668 kg
c) 680 kg
d) 689 kg
e) 717 kg

95 No mapa abaixo, a linha reta que liga os pontos A e B mede 3,4 cm e representa um trecho da Avenida Santos Dumont, em Fortaleza, capital do Ceará. Sabendo que o mapa foi desenhado obedecendo à escala 1 : 85.000, determine o comprimento real desse trecho da avenida, em metro.



96 Em um mapa, a distância entre os pontos que representam as cidades de Curitiba e Florianópolis é 4 cm. Sabendo que o mapa obedece à escala 1 : 7.500.000, calcule a distância entre as duas cidades, em quilômetro.

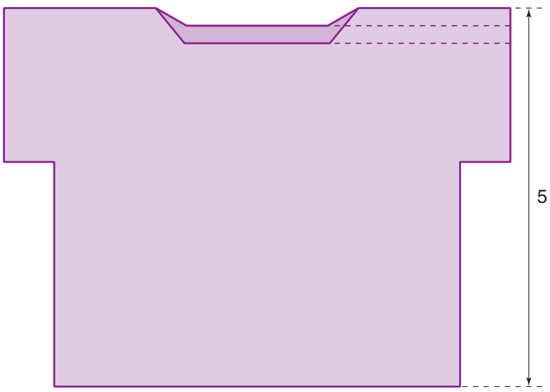
97 **(UFPE)** Utilizando o mapa, calcule a distância real, em linha reta, entre as cidades de Florianópolis e Lajes, sabendo que a distância gráfica (no mapa) é de 1,7 cm.

Assinale a alternativa correta.
a) 1.700 km
b) 170.000 m
c) 1.700.000 m
d) 17 km
e) 1.700 m

98 **(Fuvest-SP)** Em um mapa, a distância, em linha reta, entre as cidades de Araçatuba e Campinas é de 1,5 cm. A escala do mapa é de 1: 25.000.000. Na realidade, essa distância é de aproximadamente:
a) 150 km
b) 167 km
c) 188 km
d) 250 km
e) 375 km

99 **(Vunesp)** Sobre um mapa, na escala de 1 : 500.000, tenciona-se demarcar uma reserva florestal de forma quadrada apresentando 7 cm de lado. A área da reserva medirá no terreno:
a) 12,15 km^2
b) 1.225 km^2
c) 12.250 km^2
d) 122,5 km^2
e) 12.255 km^2

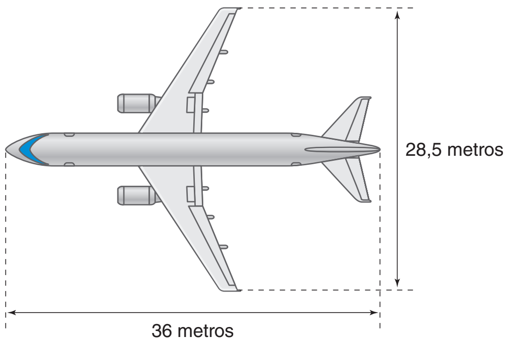
100 Adotando a escala $\frac{1}{9}$, uma estilista esboçou o desenho abaixo, em que o comprimento em destaque é 5 cm. Calcule o comprimento real da blusa, que foi confeccionada de acordo com este esboço.



101 O mapa abaixo representa o Bairro do Flamengo, no Rio de Janeiro. A Rua Silveira Martins, representada no mapa por uma linha de 3 cm de comprimento, tem, na realidade, 600 m de comprimento. Qual foi a escala adotada nesse mapa?

102 **(UFRS)** Num mapa geográfico de escala não referida, a menor distância entre duas cidades é representada por 5 cm. Sabendo-se que a distância real entre ambas é de 250 km, em linha reta, é correto concluir que o mapa foi desenhado na escala:
a) 1 : 50
b) 1 : 250.000
c) 1 : 500.000
d) 1 : 2.500.000
e) 1 : 5.000.000

103 **(Enem)** A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1 : 150.



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetro, que essa folha deverá ter?
a) 2,9 cm × 3,4 cm
b) 3,9 cm × 4,4 cm
c) 20 cm × 25 cm
d) 21 cm × 26 cm
e) 192 cm × 242 cm

Números diretamente proporcionais e números inversamente proporcionais

Sequências numéricas diretamente proporcionais

Um operário recebe R$ 9,00 por hora de trabalho. A tabela abaixo mostra o número de horas trabalhadas por ele e o valor, em real, recebido por essas horas.

Número de horas trabalhadas	1	2	3	4	5
Valor recebido em real	9	18	27	36	45

Note que a razão do número de horas trabalhadas para a remuneração correspondente é constante, ou seja, é sempre a mesma:

$$\frac{1}{9} = \frac{2}{18} = \frac{3}{27} = \frac{4}{36} = \frac{5}{45}$$

Por isso, dizemos que os números 1, 2, 3, 4 e 5 são diretamente proporcionais aos números 9, 18, 27, 36 e 45, respectivamente.

Notas:

1. Para facilitar a linguagem, quando quisermos especificar que certos números devem obedecer à **ordem** em que são apresentados, diremos que eles formam uma **sequência (ou sucessão)**. Assim, ao afirmar que 9, 18, 27, 36, 45 estão em sequência, isso significa que 9, 18, 27, 36 e 45 são, respectivamente, o 1º, 2º, 3º, 4º e 5º elementos da sequência.
2. Representaremos uma sequência entre parênteses. Por exemplo, ao escrever (9, 18, 27, 36, 45) estaremos indicando a sequência 9, 18, 27, 36, 45.
3. Cada elemento de uma sequência também pode ser chamado de termo da sequência.
4. Termos que ocupam a mesma posição em duas sequências são chamados de termos correspondentes. Por exemplo, nas sequências (1, 2, 3, 4, 5) e (9, 18, 27, 36, 45), são termos correspondentes: 1 e 9, 2 e 18, 3 e 27, 4 e 36, 5 e 45.

Assim, definimos:

> Duas sequências numéricas com o mesmo número de termos não nulos são **diretamente proporcionais** quando os elementos de uma delas são diretamente proporcionais aos elementos correspondentes da outra.

Notas:

1. Sequências diretamente proporcionais podem ser chamadas simplesmente de **sequências proporcionais**, ficando subentendida a palavra "diretamente".
2. Como as sequências (1, 2, 3, 4, 5) e (9, 18, 27, 36, 45) são diretamente proporcionais, então a razão entre dois elementos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os elementos correspondentes da outra. Por exemplo:
   $\frac{1}{2} = \frac{9}{18}$ e $\frac{3}{5} = \frac{27}{45}$

Exercício resolvido

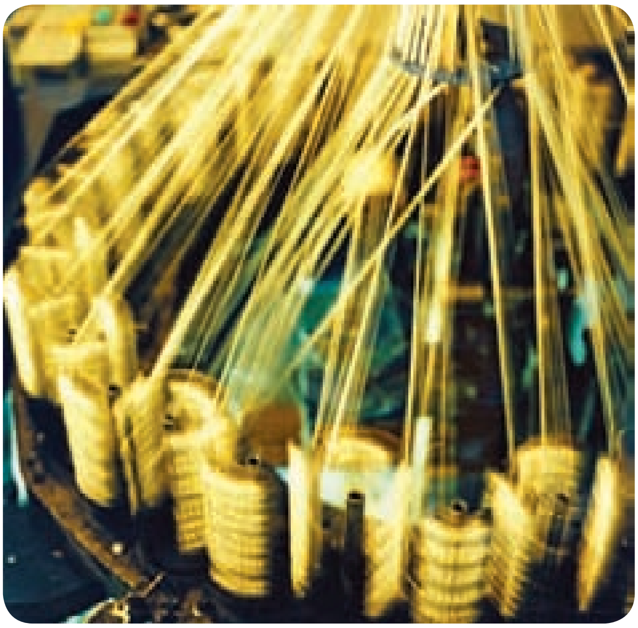
12 Determinar os valores x e y para que as sequências (4, 2, y) e (6, x, 12) sejam diretamente proporcionais.

Resolução

Devemos ter: $\frac{4}{6} = \frac{2}{x} = \frac{y}{12} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 8$

Divisão de um número em partes diretamente proporcionais a outros números

Uma máquina com velocidade constante de produção fabricou 6.500 m de corda em três etapas: na primeira trabalhou durante 3 h, na segunda 4 h e na terceira 6 h. Quantos metros de corda foram fabricados pela máquina em cada uma dessas etapas?



ANGELA WYANT/RISER/GETTY IMAGES

Esse é um problema típico de divisão diretamente proporcional. Devemos dividir o número 6.500 em partes diretamente proporcionais aos números 3, 4 e 6, isto é, devemos determinar os números x, y e z tais que:

$$\begin{cases} x + y + z = 6.500 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{6} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando na equação (II) a propriedade P.6 das proporções, obtemos:

$$\frac{x + y + z}{3 + 4 + 6} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) em (III), concluímos:

$$\frac{6.500}{13} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1.500,\ y = 2.000 \text{ e } z = 3.000$$

Logo, foram fabricados 1.500 m, 2.000 m e 3.000 m de corda nas etapas 1, 2 e 3, respectivamente.

Generalizando os procedimentos adotados nessa resolução, estabelecemos que dividir um número em partes **diretamente proporcionais** aos termos de uma sequência numérica significa decompor esse número em parcelas que sejam diretamente proporcionais aos termos da sequência. Em símbolos, temos:

Dividir um número k em partes diretamente proporcionais aos números não nulos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ significa determinar os números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tais que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = k \\ \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \dfrac{x_3}{a_3} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n} \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

13 Lucas, Arnaldo e Celso fundaram uma empresa. Lucas investiu R$ 120.000,00 no negócio, Arnaldo investiu R$ 100.000,00 e Celso investiu R$ 80.000,00. O lucro mensal é dividido em partes diretamente proporcionais aos investimentos dos sócios. No mês passado, o lucro da empresa foi de R$ 45.000,00. Que parte desse lucro coube a cada um dos sócios?

Resolução

Devemos determinar os números x, y e z tais que:

$$\begin{cases} x + y + z = 45.000 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{120.000} = \dfrac{y}{100.000} = \dfrac{z}{80.000} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando na equação (II) a propriedade P.6 das proporções, obtemos:

$$\frac{x + y + z}{120.000 + 100.000 + 80.000} = \frac{x}{120.000} = \frac{y}{100.000} = \frac{z}{80.000} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) em (III), concluímos:

$$\frac{45.000}{300.000} = \frac{x}{120.000} = \frac{y}{100.000} = \frac{z}{80.000}$$

$\therefore x = 18.000,\ y = 15.000 \text{ e } z = 12.000$

Logo, Lucas, Arnaldo e Celso devem receber R$ 18.000,00, R$ 15.000,00 e R$ 12.000,00, respectivamente.

14 João e Pedro são sócios de uma empresa. Ambos investiram a mesma quantia, porém João é o fundador da empresa e Pedro só entrou como sócio 3 anos depois. Hoje, quando a empresa completa 5 anos de existência, haverá a primeira divisão do lucro. Segundo a regra da sociedade, a divisão do lucro deve considerar apenas o capital que cada um investiu e o tempo de participação na empresa. Sendo R$ 28.000,00 o lucro a ser dividido, calcular o valor que deve receber cada um.

Resolução

Como ambos investiram quantias iguais, mas João trabalhou durante 5 anos e Pedro durante 2 anos, a divisão do lucro deve ser diretamente proporcional aos tempos de trabalho. Assim, sendo x e y as quantias que devem receber João e Pedro, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} x + y = 28.000 & \text{(I)} \\ \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando na equação (II) a propriedade P.6 das proporções, obtemos:

$$\frac{x + y}{5 + 2} = \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) em (III), concluímos:

$$\frac{28.000}{7} = \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \Rightarrow x = 20.000 \text{ e } y = 8.000$$

Logo, João deve receber R$ 20.000,00 e Pedro, R$ 8.000,00.

15 Para a colheita de café em suas duas fazendas, A e B, o proprietário contratou duas turmas: uma composta de 20 pessoas, que trabalharam juntas durante 25 dias na fazenda A; e a outra, composta de 30 pessoas, que trabalharam juntas durante 18 dias na fazenda B. No fim do trabalho, o fazendeiro avaliou em R$ 31.200,00 o valor que deveria ser pago aos trabalhadores e enviou a cada fazenda o valor correspondente ao salário das turmas. Que quantia foi enviada a cada fazenda, considerando que todos os trabalhadores recebem a mesma diária?

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Resolução

O total de diárias a serem pagas na fazenda A é dado pelo produto $20 \cdot 25 = 500$, e o total de diárias a serem pagas em B é dado pelo produto $30 \cdot 18 = 540$. Assim, a quantia R$ 31.200,00 deve ser dividida em partes diretamente proporcionais aos produtos $20 \cdot 5$ e $30 \cdot 18$. Indicando por a e b as quantias que devem ser enviadas às fazendas A e B, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b = 31.200 & \text{(I)} \\ \dfrac{a}{500} = \dfrac{b}{540} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando na equação (II) a propriedade P.6 das proporções, obtemos:

$$\frac{a + b}{500 + 540} = \frac{a}{500} = \frac{b}{540} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) em (III), concluímos:

$$\frac{31.200}{1.040} = \frac{a}{500} = \frac{b}{540} \Rightarrow a = 15.000 \text{ e } b = 16.200$$

Logo, devem ser enviados R$ 15.000,00 à fazenda A e R$ 16.200,00 à B.

Notas:

1. Esse problema trata de uma "divisão proporcional composta", que obedece à seguinte propriedade, conhecida como **propriedade da divisão proporcional composta**:

> Dividir um número k em partes diretamente proporcionais aos números p_1 e p_2, respectivamente, e diretamente proporcionais aos números q_1 e q_2, respectivamente, equivale a dividir o número k em partes diretamente proporcionais aos produtos $p_1 \cdot q_1$ e $p_2 \cdot q_2$, respectivamente.

No exercício resolvido anterior, dividimos o número 31.200 em partes diretamente proporcionais a 20 e 25, respectivamente, e diretamente proporcionais a 30 e 18, respectivamente.

2. A propriedade da divisão proporcional composta pode ser generalizada do seguinte modo:

> Dividir um número *k* em partes diretamente proporcionais a duas ou mais sequências numéricas, simultaneamente, equivale a dividir o número *k* em partes diretamente proporcionais aos produtos dos elementos correspondentes nessas sequências.

Exercícios propostos

104 Em cada um dos itens a seguir, verifique se as sequências são diretamente proporcionais.

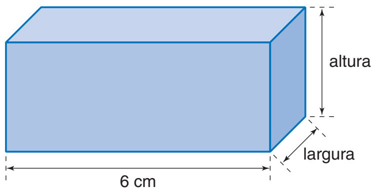
a) (1, 5, 6) e (4, 20, 24)

b) (4, 8, 6, 1) e (10, 15, 20, 5)

c) $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}\right)$ e $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 1\right)$

105 Obtenha os valores de *x*, *y* e *z* de modo que as sequências (8, *x*, 12, *z*) e (4, 5, *y*, 3) sejam diretamente proporcionais.

106 O comprimento, a largura e a altura de um paralelepípedo são diretamente proporcionais aos números 4, 2 e 1, respectivamente. Calcule o volume desse paralelepípedo, sabendo que seu comprimento é 6 cm.



107 As estaturas de José, Beto e Ricardo, jogadores de basquetebol do colégio, são diretamente proporcionais aos números 6,9; 7 e 6,6, respectivamente. Sabendo que a estatura de José é 2,07 m, calcule as estaturas de Beto e Ricardo.

108 Divida o número 30 em partes diretamente proporcionais aos números 3, 2 e 1.

109 Divida o número 16,6 em partes diretamente proporcionais aos números 2,2; 1,3 e 4,8.

110 Para a confecção de uma argamassa, as quantidades de água, areia e cimento devem ser diretamente proporcionais a 2, 6 e 1, respectivamente. Qual é a quantidade, em quilograma, de cimento contida em 45 kg dessa argamassa?

111 Uma torneira com vazão constante despejou 5.850 L de água em um tanque, em três etapas: na primeira abasteceu o tanque durante 2 h, na segunda durante 3 h e na terceira durante 1,5 h. Quantos litros de água essa torneira despejou no tanque em cada etapa?

112 Vicente, Cláudio e Álvaro trabalharam 3 h, 4 h e 6 h, respectivamente, para a conclusão de uma tarefa. Por essa tarefa, receberam juntos R$ 520,00. Quanto recebeu cada um, sabendo que o salário/hora foi o mesmo para todos?

113 Com certa quantidade de tinta, encheram-se 1.200 recipientes de três tamanhos diferentes: pequeno, médio e grande. A capacidade de cada recipiente médio é o dobro da capacidade de cada pequeno, e a capacidade de cada recipiente grande é o triplo da capacidade de cada pequeno. Sabendo que as quantidades usadas de recipientes pequenos, médios e grandes foram diretamente proporcionais às suas capacidades, calcule o número de recipientes de cada tamanho usados.

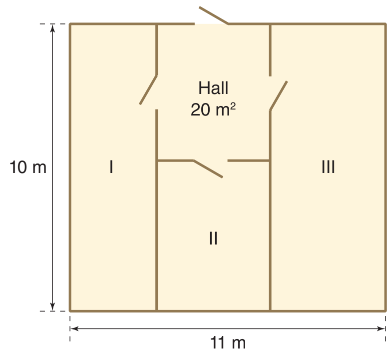
114 O comprimento e a largura de um retângulo são diretamente proporcionais a 8 e 6, respectivamente. Calcule a área desse retângulo, sabendo que seu perímetro é 42 cm.

115 O comprimento, a largura e a altura de um paralelepípedo são proporcionais a 1, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Calcule o volume desse paralelepípedo, sabendo que a soma das medidas de suas 12 arestas é 44 dm.

116 Duas piscinas têm a forma de um paralelepípedo. A área da base (piso) de uma delas é 18 m^2, e a área da base da outra é 24 m^2. Sabendo que as duas têm a mesma profundidade, estão completamente cheias e juntas têm 63.000 L de água, calcule a capacidade de cada uma.

117 Três máquinas, A, B e C, trabalharam juntas durante o mesmo tempo, produzindo 180 pratos iguais. A máquina A produz 12 pratos por minuto, a B produz 8 pratos por minuto e a C produz 10 pratos por minuto. Quantos pratos produziu cada máquina?

118 **(Enem)** Em uma empresa, existe um galpão que precisa ser dividido em três depósitos e um "hall" de entrada de 20 m^2, conforme a figura a seguir. Os depósitos I, II e III serão construídos para o armazenamento de, respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, e suas áreas devem ser proporcionais a essas capacidades.



A largura do depósito III deve ser, em metros, igual a:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

119 Luísa, Márcia e Roberta são as sócias de uma loja que hoje completa 6 anos de existência. Luísa investiu R$ 18.000,00 na loja e é a fundadora, Márcia investiu R$ 12.000,00 e é sócia há 4 anos, e Roberta investiu R$ 20.000,00 e é sócia há apenas 2 anos. Hoje haverá a primeira divisão de lucro da empresa. Segundo a regra da sociedade, a divisão do lucro deve considerar apenas o capital que cada uma investiu e o tempo de participação na empresa. Sendo R$ 49.000,00 o lucro a ser dividido, calcule o valor que deve receber cada uma.

(Sugestão: Veja o exercício resolvido 13, sobre divisão proporcional composta.)

120 **(Puccamp-SP)** A tabela a seguir mostra a participação em uma empresa, de seus três sócios, em tempo (a partir do início das atividades da empresa) e em capital inicial investido.

Sócio	Tempo de participação	Capital inicial investido
Antônio	6 meses	R$ 5.000,00
Carlos	12 meses	R$ 2.500,00
Ernesto	9 meses	R$ 3.000,00

Ao completar um ano de funcionamento, o lucro de L reais foi dividido entre eles. A parte que coube a

a) Antônio correspondeu a $\frac{13}{29}$ de L.

b) Carlos correspondeu a $\frac{11}{29}$ de L.

c) Ernesto correspondeu a $\frac{9}{29}$ de L.

d) Carlos correspondeu a $\frac{7}{29}$ de L.

e) Antônio correspondeu a $\frac{5}{29}$ de L.

121 Em determinado mês, uma empresa teve um prejuízo de R$ 162.000,00. A tabela a seguir mostra o capital investido e o tempo de participação de cada um dos três sócios na empresa.

Sócio	Tempo de participação	Capital investido
Eduardo	10 anos	R$ 24.000,00
Armando	8 anos	R$ 25.000,00
Renata	5 anos	R$ 20.000,00

Segundo a regra da sociedade, a divisão do lucro ou prejuízo deve considerar apenas o capital que cada um investiu e o tempo de participação na empresa. Qual foi o prejuízo de cada sócio?

Sequências numéricas inversamente proporcionais

Três automóveis percorreram 400 km, indo de São Paulo ao Rio de Janeiro.

A tabela abaixo mostra a velocidade média de cada veículo e o tempo de duração da viagem.

	Carro 1	Carro 2	Carro 3
Velocidade média (km/h)	100	80	50
Tempo (h)	4	5	8

Note que o produto da velocidade pelo tempo correspondente é constante, ou seja, é sempre o mesmo:

$100 \cdot 4 = 80 \cdot 5 = 50 \cdot 8$

Por isso, dizemos que a sequência (100, 80, 50) é **inversamente proporcional** à sequência (4, 5, 8).

Note, também, que a sentença $100 \cdot 4 = 80 \cdot 5 = 50 \cdot 8$ é equivalente a

$$\frac{100}{\frac{1}{4}} = \frac{80}{\frac{1}{5}} = \frac{50}{\frac{1}{8}}$$

Isso significa que os números 100, 80 e 50 são **diretamente proporcionais aos inversos** dos números 4, 5 e 8, respectivamente.

Generalizando, definimos:

Duas sequências numéricas com o mesmo número de termos não nulos são **inversamente proporcionais** quando o produto de termos correspondentes é constante.

Consequência

Se duas sequências de números não nulos são inversamente proporcionais, então qualquer uma delas é **diretamente proporcional** à sequência formada pelos inversos dos números da outra.

Exemplo

A sequência (2, 4, 3) é inversamente proporcional à sequência (18, 9, 12), pois: $2 \cdot 18 = 4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$

Logo, a sequência (2, 4, 3) é diretamente proporcional à sequência $\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}\right)$.

Divisão de um número em partes inversamente proporcionais a outros números

Um carro de corrida deu três voltas em uma pista: na primeira volta sua velocidade média foi 2 km/min; na segunda foi 3 km/min e na terceira foi 4 km/min. Se o tempo gasto nas três voltas foi 13 min, quanto tempo durou cada volta?

PHOTOGRAPHER'S CHOICE/GETTY IMAGES

Para resolver esse problema, vamos indicar por a, b e c os tempos, em minuto, que duraram a 1ª, a 2ª e a 3ª voltas, respectivamente, e por d o comprimento da pista, em quilômetro. Dividindo o comprimento da pista pelo tempo que durou cada volta, obtemos a velocidade média em cada volta:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{a} = 2 \\ \dfrac{d}{b} = 3 \\ \dfrac{d}{c} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2a \\ d = 3b \\ d = 4c \end{cases}$$

Logo: $2a = 3b = 4c$

Perceba, portanto, que a sequência (a, b, c) é inversamente proporcional à sequência $(2, 3, 4)$; logo, a sequência (a, b, c) é diretamente proporcional à sequência $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 13 & \text{(I)} \\ \dfrac{a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{b}{\frac{1}{3}} = \dfrac{c}{\frac{1}{4}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando na equação (II) a propriedade P.6 das proporções, obtemos:

$$\frac{a + b + c}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{4}} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (I) em (III), concluímos:

$$\frac{13}{\frac{13}{12}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{4}} \Rightarrow a = 6, b = 4 \text{ e } c = 3$$

Logo, os tempos que duraram a 1ª, a 2ª e a 3ª voltas foram, respectivamente, 6 min, 4 min e 3 min.

Nesse problema, observamos que, quanto maior a velocidade do carro, menor será o tempo gasto para dar uma volta na pista e, quanto menor a velocidade, maior será o tempo gasto, verificando-se que a velocidade e o tempo variam em razões inversas. Por exemplo:

- ao dobrar a velocidade, o tempo para dar uma volta na pista se reduz à metade;
- ao triplicar a velocidade, o tempo para dar uma volta na pista se reduz à terça parte;
- ao reduzir à metade a velocidade, o tempo para dar uma volta na pista dobra;
- e assim por diante, ao multiplicar a velocidade por um número positivo k, o tempo para dar uma volta na pista será dividido por k.

Essas observações mostram que o problema trata da divisão do número 13 em partes inversamente proporcionais a 2, 3 e 4.

Generalizando os procedimentos adotados na resolução desse problema, estabelecemos que dividir um número em partes **inversamente proporcionais** aos termos de uma sequência numérica significa decompor esse número em parcelas diretamente proporcionais aos **inversos** dos termos da sequência. Em símbolos, temos:

Dividir um número k em partes inversamente proporcionais aos números não nulos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ significa determinar os números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ tais que:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = k \\ \dfrac{x_1}{\frac{1}{a_1}} = \dfrac{x_2}{\frac{1}{a_2}} = \dfrac{x_3}{\frac{1}{a_3}} = ... = \dfrac{x_n}{\frac{1}{a_n}} \end{cases}$$

Exercício resolvido

16 Dividir o número 135 em partes inversamente proporcionais a 1, 3, 9 e 18.

Resolução

Dividir 135 em partes inversamente proporcionais a 1, 3, 9 e 18 equivale a dividir 135 em partes diretamente proporcionais aos inversos de 1, 3, 9 e 18. Assim, devemos determinar os números a, b, c e d tais que:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 135 & \text{(I)} \\ \dfrac{a}{\frac{1}{1}} = \dfrac{b}{\frac{1}{3}} = \dfrac{c}{\frac{1}{9}} = \dfrac{d}{\frac{1}{18}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Aplicando na equação (II) a propriedade P.6 das proporções, obtemos:

$$\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}} = \frac{a}{\frac{1}{1}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{9}} = \frac{d}{\frac{1}{18}} \text{ (III)}$$

Substituindo (I) em (III), concluímos:

$$\frac{135}{\frac{27}{18}} = \frac{a}{\frac{1}{1}} = \frac{b}{\frac{1}{3}} = \frac{c}{\frac{1}{9}} = \frac{d}{\frac{1}{18}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 90, b = 30, c = 10$ e $d = 5$

Logo, a divisão do número 135 em partes inversamente proporcionais a 1, 3, 9 e 18 resulta em 90, 30, 10 e 5, respectivamente.

Exercícios propostos

122 Em cada um dos itens a seguir, verifique se as sequências são inversamente proporcionais.

a) (2, 4, 1) e (14, 7, 28)

b) (12, 4, 6, 3) e (5, 15, 10, 30)

c) $\left(\frac{1}{4}, 2, \frac{3}{5}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{16}, \frac{5}{8}\right)$

123 Obtenha os valores de x e y de modo que as sequências $(9, x, y)$ e $(20, 60, 45)$ sejam inversamente proporcionais.

124 Obtenha os valores de x, y e z de modo que as sequências $\left(\frac{1}{3}, x, 6, z\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, 12, y, \frac{1}{5}\right)$ sejam inversamente proporcionais.

125 Divida o número 66 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 4 e 6.

126 Divida o número 52 em partes inversamente proporcionais a $2, \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

127 Em um movimento de conscientização da população, a empresa responsável pelo abastecimento de água de uma cidade promoveu uma campanha em que toda residência que diminuísse seu consumo médio mensal teria um desconto inversamente proporcional ao seu consumo: quanto menor o consumo, maior o desconto.

Entre muitas residências que ganharam desconto em suas contas de água do mês passado, estão as residências A, B e C, que antes da campanha tinham o mesmo consumo médio mensal e depois o diminuíram para 28 m^3, 14 m^3 e 7 m^3, respectivamente. Sabendo que essas três residências ganharam juntas um desconto de R$ 56,00, determine o desconto de cada uma.

128 **(Unicamp-SP)** A quantia de R$ 1.280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

a) a divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?

b) a divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

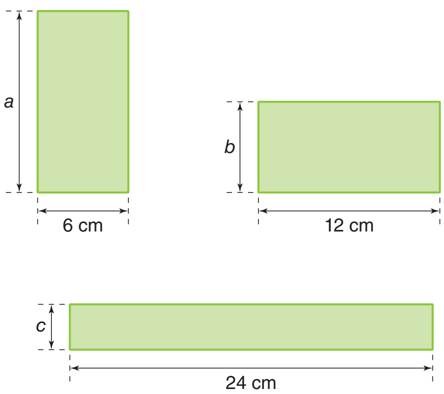
129 Três municípios, A, B e C, têm o mesmo número de habitantes e suas densidades demográficas são 120 hab./km^2, 80 hab./km^2 e 40 hab./km^2, respectivamente. Sabendo que os três municípios juntos têm 495 km^2 de área, calcule a área de cada um.

(*Nota*: Como os três municípios têm o mesmo número de habitantes, quanto maior a área do município, menor é o número de habitantes por quilômetro quadrado.)

130 Três bolas, A, B e C, de materiais diferentes têm a mesma massa e suas densidades são 6 g/cm^3, 4 g/cm^3 e 2 g/cm^3, respectivamente. Sabendo que a soma dos volumes das três bolas é 55 cm^3, calcule o volume de cada uma.

(*Nota*: O que no cotidiano chamamos de peso de um corpo, em Física é chamado de **massa** do corpo. Assim, a massa de um corpo é a grandeza física que indica a quantidade de matéria que o compõe, e pode ser medida, por exemplo, em grama.)

131 Os três retângulos representados abaixo têm a mesma área, e a soma de suas alturas *a*, *b* e *c* é 14 cm. Calcule cada uma dessas alturas.



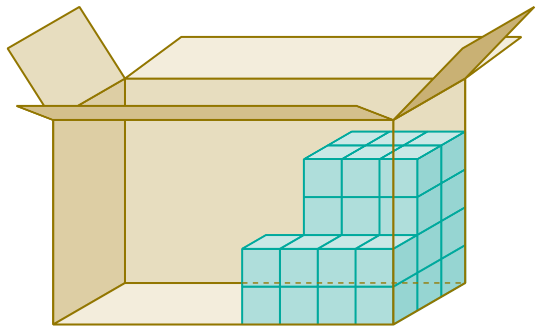
132 Leandro, Vagner e Pedro pesam 80 kg, 90 kg e 100 kg, respectivamente. Eles começaram uma dieta alimentar em que os três juntos consomem 3.630 calorias diárias, e o consumo de cada um é inversamente proporcional ao seu peso (massa). Qual é o consumo diário de calorias de cada um?

(*Nota*: O que no cotidiano chamamos de caloria é cientificamente chamado de quilocaloria.)

133 Durante o ano passado, os irmãos Nelson, Cláudio e Edna não foram à escola 8 dias, 4 dias e 12 dias, respectivamente. No fim do ano, os três foram aprovados e seu pai resolveu presenteá-los com R$ 2.200,00 distribuídos de acordo com suas faltas às aulas: quem faltou mais ganhará menos. Qual é a divisão mais justa possível?

134 Três aquários, A, B e C, de mesma capacidade, estão vazios. Cada um deles será abastecido por sua própria torneira. As três torneiras juntas têm vazão de 45 L/min. Se os tempos para encher A, B e C são 6 min, 8 min e 12 min, respectivamente, calcule a vazão de cada torneira em litro por minuto.

135 Quatro caixas, A, B, C e D, com forma de paralelepípedo, têm a mesma capacidade. Cada uma delas foi completamente cheia de cubos, empilhados face a face. Na caixa A cada cubo tem volume 2 cm^3, em B cada cubo tem 4 cm^3, em C cada cubo tem 6 cm^3 e em D cada cubo tem 16 cm^3. Sabendo que foram encaixotados 188 cubos, determine quantos cubos foram colocados em cada caixa.



136 **(Puccamp-SP)** Uma mina d'água localiza-se na divisa de dois sítios. Os dois proprietários, Sr. Edson e Sr. José, resolveram construir, na saída da mina, uma caixa de água coberta e vão dividir as despesas entre si, em partes inversamente proporcionais às distâncias de suas casas em relação à mina. Se as despesas totalizarem R$ 5.600,00 e se as casas do Sr. Edson e do Sr. José distam, respectivamente, 5 km e 3 km da mina, então a parte da despesa que caberá ao Sr. Edson é:

a) R$ 1.900,00
b) R$ 2.100,00
c) R$ 2.200,00
d) R$ 3.100,00
e) R$ 3.500,00

137 **(FGV)** Uma variável y é inversamente proporcional ao quadrado de outra variável x. Para x = 3, y vale 15. Então, se x = 4, y deverá valer:

a) $\frac{1}{16}$ **b)** $\frac{15}{16}$ **c)** $\frac{45}{16}$ **d)** $\frac{135}{16}$ **e)** $\frac{625}{16}$

Grandezas e a técnica da regra de três

Grandeza

Usamos medidas para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de uma região, a profundidade de um rio etc.

Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.

São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e vazão.

Neste capítulo, estudaremos as grandezas associadas apenas a medidas positivas, embora existam grandezas que possam ser associadas a medidas negativas – por exemplo, a temperatura. O estudo das grandezas pode ser ampliado para as medidas nulas ou negativas, mas não faremos isso neste capítulo.

Grandezas diretamente proporcionais

No laboratório de Física, durante o estudo do movimento de um carrinho com velocidade constante, Márcio construiu a tabela abaixo, descrevendo a distância percorrida pelo carrinho e o tempo transcorrido para que essa distância fosse percorrida.

Distância percorrida (em metro)	4	6	10	20	30
Tempo transcorrido (em segundo)	2	3	5	10	15

Com essa experiência, Márcio concluiu que:

- as grandezas **distância** e **tempo** são **dependentes**, pois a variação na medida de uma delas provocou a variação na medida da outra;
- as grandezas **distância** e **tempo** são **diretamente proporcionais**, pois os valores das distâncias percorridas são diretamente proporcionais aos tempos correspondentes. Por exemplo, da tabela temos:
  $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{30}{15}$

Para suas conclusões, Márcio aplicou os conceitos definidos a seguir.

> Duas grandezas são **dependentes** quando, sob alguma condição, a variação na medida de uma delas provocar a variação na medida da outra.

> Duas grandezas dependentes são **diretamente proporcionais** quando qualquer sequência de medidas de uma delas é diretamente proporcional à sequência de medidas correspondentes da outra.

Exemplos

a) Supondo que o preço de um fio seja R$ 3,00 o metro, observe a tabela, em que k representa um número real positivo qualquer:

Comprimento (em metro)	5	12	20	k
Preço (em real)	15	36	60	$3k$

Como $\frac{5}{15} = \frac{12}{36} = \frac{20}{60} = \frac{k}{3k}$, concluímos que o comprimento do fio e o preço são grandezas diretamente proporcionais.

b) Supondo que a velocidade constante de produção de uma máquina seja de 200 parafusos por minuto, observe a tabela, em que *n* representa um número inteiro positivo qualquer:

Quantidade de parafusos produzidos	600	800	1.000	n
Tempo (em minuto)	3	4	5	$\frac{n}{200}$

Como $\frac{600}{3} = \frac{800}{4} = \frac{1.000}{5} = \frac{n}{\frac{n}{200}}$, concluímos que a quantidade de parafusos produzidos e o tempo são grandezas diretamente proporcionais.

Nota:

Para entender a expressão "sob alguma condição" na definição de grandezas dependentes, pense na seguinte questão: Se um carrinho percorre a distância de 50 m em 10 s, é possível que ele percorra 100 m em 10 s?

A resposta é sim, desde que se dobre a velocidade média do carrinho.

Perceba, portanto, que, embora a distância percorrida pelo carrinho e o tempo correspondente sejam grandezas dependentes, a variação de uma não causou variação na outra, pois uma terceira grandeza (velocidade) fez com que o tempo permanecesse constante. Porém, sob a condição de manter a mesma velocidade média do carrinho nos dois trechos, a resposta seria não, pois a variação da distância provoca a variação do tempo.

Grandezas inversamente proporcionais

No laboratório de Física, durante o estudo do movimento de um carrinho, Márcio fez o carrinho percorrer três vezes um mesmo trajeto. Em cada uma das vezes, a velocidade constante do carrinho foi diferente. Após a experiência, Márcio construiu a tabela abaixo, mostrando a velocidade e o tempo com que o carrinho completou o trajeto em cada uma das vezes:

Velocidade (em metro por segundo)	2	4	8
Tempo (em segundo)	50	25	12,5

Com essa experiência, Márcio concluiu que:

- as grandezas **velocidade** e **tempo** são **dependentes**, pois a variação na medida de uma delas provocou a variação na medida da outra;
- as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**, pois os valores das velocidades são inversamente proporcionais aos tempos correspondentes. Por exemplo, da tabela temos:

$2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 8 \cdot 12{,}5$

Para a segunda conclusão, Márcio aplicou o conceito definido a seguir.

Duas grandezas dependentes são **inversamente proporcionais** quando qualquer sequência de medidas de uma delas é inversamente proporcional à sequência de medidas correspondentes da outra.

Exemplos

a) Supondo que os operários que realizam certo trabalho tenham a mesma velocidade de produção, observe a tabela a seguir, que relaciona o número de operários e o tempo para que o trabalho seja realizado, sendo *n* um número inteiro positivo qualquer.

Quantidade (número de operários)	2	4	8	n
Tempo (em dia)	12	6	3	$\frac{24}{n}$

Como $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6 = 8 \cdot 3 = n \cdot \frac{24}{n}$, concluímos que a quantidade de operários e o tempo são grandezas inversamente proporcionais.

b) Uma corda de 12 m de comprimento deve ser cortada em pedaços de mesmo comprimento. A tabela a seguir mostra a quantidade de pedaços que podem ser obtidos e o respectivo comprimento de cada pedaço, em que a variável k representa um número inteiro positivo qualquer.

Quantidade (número de pedaços)	3	2	12	k
Comprimento de cada pedaço (em metro)	4	6	1	$\frac{12}{k}$

Como $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 = 12 \cdot 1 = k \cdot \frac{12}{k}$, concluímos que a quantidade de pedaços e o comprimento de cada pedaço são grandezas inversamente proporcionais.

Nota:

Quando estudamos a variação de duas grandezas para analisar se elas são diretamente ou inversamente proporcionais, devemos supor que qualquer outra grandeza seja fixa, isto é, não varie. Por exemplo, quando Márcio analisou as grandezas distância e tempo, ele fixou a velocidade; e quando analisou as grandezas velocidade e tempo, ele fixou a distância.

Exercícios propostos

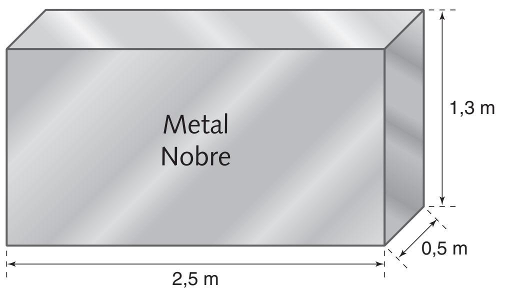
138 Para os pitagóricos, o número era considerado a essência das coisas, sendo a base teórica da harmonia do universo. O filósofo grego Filolaus, pitagórico que viveu no século IV a.C., afirmava:

"Todas as coisas que podem ser conhecidas têm número; pois não é possível que sem número qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida."

Observe, portanto, que, para Filolaus, as coisas que podem ser conhecidas são aquelas que podem ser estudadas sob o ponto de vista de **grandezas**. Entre as alternativas abaixo, qual não é uma grandeza?

a) comprimento
b) volume
c) velocidade
d) tristeza
e) temperatura

139 **(Enem)** A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



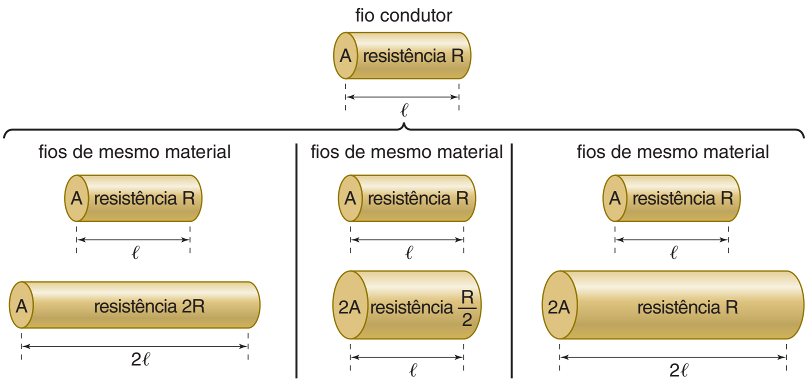
O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza:

a) massa.
b) volume.
c) superfície.
d) capacidade.
e) comprimento.

140 **(Enem) A resistência elétrica e as dimensões do condutor.**

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre: resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A); resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ); e comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



Disponível em: http://www.efeitojoule.com. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente:

a) direta, direta e direta.
b) direta, direta e inversa.
c) direta, inversa e direta.
d) inversa, direta e direta.
e) inversa, direta e inversa.

Regra de três

A **regra de três** é uma técnica aplicada na determinação de um valor desconhecido em problemas que relacionam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. A regra de três pode ser **simples**, quando envolve apenas duas grandezas, ou **composta**, quando relaciona mais de duas grandezas.

O nome "regra de três" teve origem em problemas que relacionam duas grandezas das quais são conhecidos três valores e um é desconhecido.

Regra de três simples direta e regra de três simples inversa

A **regra de três simples direta** envolve duas grandezas diretamente proporcionais e a **regra de três simples inversa** envolve duas grandezas inversamente proporcionais.

Exercícios resolvidos

17 Um automóvel percorre a distância de 220 km em 2,5 h. Mantendo a mesma velocidade média, que distância ele percorreria em 4 h?

Resolução

Nesse problema, variam apenas duas grandezas: distância e tempo. Indicando por x a distância procurada, em quilômetro, esquematizamos:

Distância (em quilômetro por hora)	Tempo (em hora)
220	2,5
x	4

A distância e o tempo são grandezas **diretamente proporcionais** (quanto maior a distância, maior o tempo, ambos variando na mesma razão). Assim, a sequência (220; x) é diretamente proporcional à sequência (2,5; 4), isto é:

$$\frac{220}{2,5} = \frac{x}{4}$$

Logo, $2,5x = 220 \cdot 4 \Rightarrow x = 352$

Concluímos, então, que em 4 h o automóvel percorrerá 352 km.

18 Para alimentar 185 porcos, um fazendeiro compra mensalmente 6.660 kg de ração. Se tivesse 203 porcos, qual seria a quantidade mensal de ração necessária para alimentá-los?

Resolução

Nesse problema, variam apenas duas grandezas: número de porcos e quantidade de ração. Indicando por x a quantidade procurada, em quilograma, esquematizamos:

Número de porcos	Quantidade de ração (em quilograma)
185	6.660
203	x

O número de porcos e a quantidade de ração são grandezas **diretamente proporcionais** (quanto maior o número de porcos, maior a quantidade de ração, ambos variando na mesma razão). Assim, a sequência (185, 203) é diretamente proporcional à sequência (6.660, x), isto é:

$$\frac{185}{6.660} = \frac{203}{x}$$

Logo: $185x = 6.660 \cdot 203 \Rightarrow x = 7.308$

Concluímos, então, que para alimentar 203 porcos seriam necessários 7.308 kg de ração mensalmente.

19 Viajando à velocidade média de 80 km/h, um trem percorre o trajeto entre duas cidades em 2,7 h. Se o trem viajasse a 90 km/h, em quanto tempo percorreria o mesmo trajeto?

JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

Resolução

Nesse problema, variam apenas duas grandezas: velocidade e tempo. Indicando por x o tempo procurado, em hora, esquematizamos:

Velocidade (em quilômetro por hora)	Tempo (em hora)
80	2,7
90	x

A velocidade e o tempo são grandezas **inversamente proporcionais** (quanto maior a velocidade, menor o tempo, variando em razões inversas). Assim, a sequência (80; 90) é inversamente proporcional à sequência (2,7; x), isto é:

$80 \cdot 2,7 = 90x$

Logo: $x = 2,4$

Concluímos, então, que à velocidade de 90 km/h o trem percorreria o trajeto em 2,4 h.

20 Seis máquinas, com a mesma velocidade de produção, trabalhando juntas, produzem certa quantidade de peças iguais em 15 h. Quantas dessas máquinas seriam necessárias para que essa mesma quantidade de peças fosse produzida em apenas 10 h?

Resolução

Nesse problema, variam apenas duas grandezas: número de máquinas e tempo. Indicando por x o número de máquinas procurado, esquematizamos:

Número de máquinas	Tempo (em hora)
6	15
x	10

O número de máquinas e o tempo são grandezas **inversamente proporcionais** (quanto maior o número de máquinas, menor o tempo, variando em razões inversas). Assim, a sequência (6, x) é inversamente proporcional à sequência (15, 10), isto é:

$6 \cdot 15 = 10x$

Logo: $x = 9$

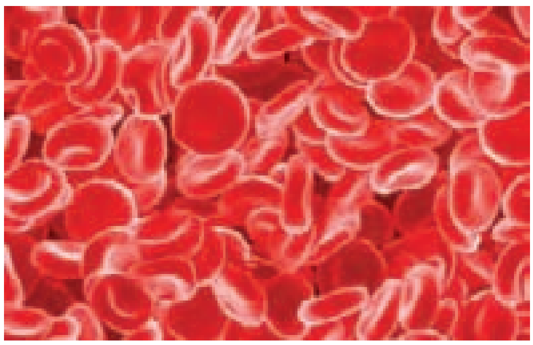
Concluímos, então, que seriam necessárias 9 máquinas para que a mesma quantidade de peças fosse produzida em apenas 10 h.

Exercícios propostos

141 Com 100 g de matéria plástica são fabricados 48 copos iguais. Quantos desses copos seriam fabricados com 112,5 g de matéria plástica?

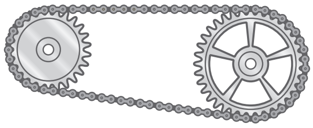
142 Um livro de 120 páginas foi escrito com 2.400 caracteres por página. Se cada página tivesse 3.000 caracteres, qual seria o total de páginas do livro?

143 Um homem sadio possui 35 milhões de glóbulos vermelhos em cada 7 mm^3 de sangue. Quantos glóbulos vermelhos esse homem possui em 10 mm^3 de sangue?



SUSUMU NISHINAGA/SCIENCE PHOTO LIBRARY/LATINSTOCK

144 As duas rodas dentadas de uma bicicleta, ligadas por uma corrente, têm diâmetros 20 cm e 15 cm.



Ao pedalar, um ciclista fez a roda maior girar 180 voltas. Quantas voltas girou a roda menor?

145 Uma mistura é composta de 15 kg de açúcar e 75 kg de água. Agita-se bem essa mistura e retira-se uma amostra de 3 kg. Qual passa a ser a quantidade de açúcar dessa mistura, em quilograma?

146 Três tratores, com a mesma capacidade de trabalho, aram uma região em 5,4 h. Em quanto tempo o trabalho seria realizado por apenas dois desses tratores?

147 Uma impressora com velocidade constante imprime 1.000 caracteres em x min e imprime 1.400 caracteres em (x + 2) min. Pode-se concluir que em 10 min essa impressora imprime:

a) 1.500 caracteres
b) 1.600 caracteres
c) 1.800 caracteres
d) 1.850 caracteres
e) 2.000 caracteres

148 O consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupa é diretamente proporcional à sua temperatura. Durante quanto tempo o ferro deve ser mantido à temperatura de 150 °C para que o consumo de energia seja o mesmo que no caso de ele ser mantido a 180 °C durante 3 horas?

149 **(Enem)** Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20.000 quilômetros quadrados de floresta.

Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto:

O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos.

Considerando que um ano tem aproximadamente $32 \cdot 10^6$ s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km^2 (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de:

a) 10.000 km^2, e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.
b) 10.000 km^2, e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.
c) 20.000 km^2, e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.
d) 40.000 km^2, e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
e) 40.000 km^2 e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

150 **(Enem)** Os números e cifras envolvidos, quando lidamos com dados sobre produção e consumo de energia em nosso país, são sempre muito grandes. Apenas no setor residencial, em um único dia, o consumo de energia elétrica é da ordem de 200 mil MWh. Para avaliar esse consumo, imagine uma situação em que o Brasil não dispusesse de hidrelétricas e tivesse de depender somente de termoelétricas, onde cada kg de carvão, ao ser queimado, permite obter uma quantidade de energia da ordem de 10 kWh.

Considerando que um caminhão transporta, em média, 10 toneladas de carvão, a quantidade de caminhões de carvão necessária para abastecer as termoelétricas, a cada dia, seria da ordem de:

a) 20 **c)** 1.000 **e)** 10.000
b) 200 **d)** 2.000

151 Uma máquina colheu todo o milho de uma região em 6 dias, trabalhando 8 h por dia. Se essa colheitadeira trabalhasse 12 h por dia, em quantos dias teria concluído o trabalho?

152 A impressora de um computador tem várias velocidades diferentes. À velocidade de 12 caracteres por segundo, um trabalho é concluído em 28 min. Se a velocidade for aumentada em $\frac{1}{3}$, em quanto tempo o trabalho poderá ser concluído?

153 Os antigos discos de vinil eram gravados para ser ouvidos em determinada velocidade: 33, 45 ou 78 rotações por minuto (voltas por minuto).

STEVE BOWER/ SHUTTERSTOCK

Suponha que uma música de 3,9 min de duração tenha sido gravada em um disco a 45 rpm (rotações por minuto). Ao ouvir esse disco à velocidade de 78 rpm, a música é executada em quanto tempo?

154 Um automóvel percorreu um trajeto em 6 min à velocidade de 75 km/h. Em quanto tempo esse automóvel percorreria esse trajeto à velocidade de 90 km/h?

155 Uma máquina, com velocidade constante de produção, fabrica 53 pregos em 10,6 s. Quantos pregos essa máquina produz em 1 min?

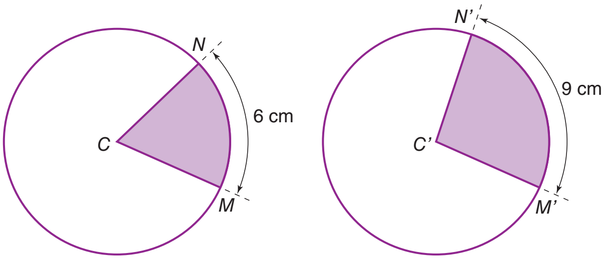
156 Um engenheiro calculou que cada 3,8 m^2 de uma laje suporta 1.250 kg. Se essa laje tem 266 m^2 de área, qual é a massa, em quilograma, que ela suporta?

157 O escoamento de toda a água de uma piscina é concluído em 15 h através de dois canos de mesmo diâmetro. Se houvesse três canos como esses para o escoamento da água, em quanto tempo seria esvaziada a piscina?

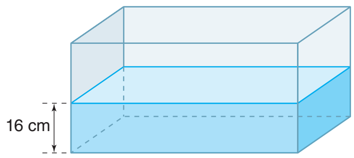
158 Em 13,5 g de água há 1,5 g de hidrogênio. Quantos gramas de hidrogênio há em 10,8 g de água?

159 Um recipiente contém uma mistura constituída por 6 L de gasolina e 0,3 L de etanol. Quantos cL dessa mistura devem ser retirados do recipiente para que o líquido restante no recipiente contenha apenas 0,18 L de etanol?

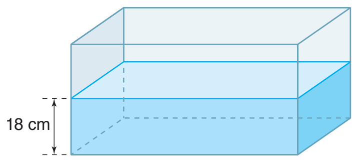
160 A figura abaixo mostra dois círculos de centros C e C′ e raios de medidas iguais. A região colorida *CMN* tem área 12 cm^2. Qual é a área da região colorida *C′M′N′*?



161 A figura abaixo mostra dois aquários, A e B, com forma de paralelepípedo de mesmas dimensões e com bases horizontais. Os 12 L de água do aquário A atingem a altura de 16 cm em relação ao fundo do aquário, e a água do aquário B atinge 18 cm de altura. Qual é a quantidade, em litro, de água no aquário B?



A



B

162 Colocando um projetor de *slides* a certa distância de uma tela vertical, consegue-se uma imagem retangular com 1,5 m de comprimento por 1,2 m de largura. Aumentando um pouco a distância entre o projetor e a tela, consegue-se uma imagem retangular com 2 m de comprimento. Qual é a largura desse retângulo?


GOYGEL-SOKOL DMITRY/SHUTTERSTOCK

163 Ao entrar no espaço aéreo de um aeroporto, um avião estava a 180 m de altura em relação à pista. Sua sombra sobre a pista, na mesma vertical do avião, deslocou-se 600 m em linha reta até o momento em que o avião tocou o solo. Quantos metros percorreu a sombra, desde o momento em que o avião estava a 135 m de altura até o momento de contato com o solo?

164 Uma perfuratriz escavou um túnel em 120 dias, perfurando 54 cm por hora. Se a escavação tivesse sido feita a 60 cm por hora, em quanto tempo o trabalho teria sido concluído?

165 Uma parede foi revestida com 900 azulejos de área 225 cm^2 cada um. Quantos azulejos de área 540 cm^2 cada um seriam necessários para revestir essa parede?

166 Três torneiras de mesma vazão enchem um tanque em 4,5 h. Cinco torneiras como essas encheriam o tanque em quanto tempo?

167 Para manter em funcionamento 2 caldeiras de mesmo consumo de combustível, uma metalúrgica gasta 510 L de óleo diesel por dia. Qual seria o gasto diário, em litro de óleo diesel, para manter em funcionamento 5 caldeiras como essas?

168 **(Mackenzie-SP)** Uma engrenagem de 36 dentes movimenta outra de 48 dentes. Quantas voltas dá a maior enquanto a menor dá 100 voltas?

169 **(UDF)** Uma máquina varredeira limpa uma área de 5.100 m^2 em 3 h de trabalho. Nas mesmas condições, em quanto tempo ela limpará uma área de 11.900 m^2?

a) 4 h
b) 5 h
c) 7 h
d) 9 h

170 **(Vunesp)** Um secretário gastou 15 dias para desenvolver um certo projeto, trabalhando 7 horas por dia. Se o prazo concedido fosse de 21 dias para realizar o mesmo projeto, poderia ter trabalhado:

a) 2 horas a menos por dia.
b) 2 horas a mais por dia.
c) 3 horas a menos por dia.
d) 3 horas a mais por dia.
e) 4 horas a mais por dia.

171 **(Enem)** Já são comercializados no Brasil veículos com motores que podem funcionar com o chamado combustível flexível, ou seja, com gasolina ou álcool em qualquer proporção. Uma orientação prática para o abastecimento mais econômico é que o motorista multiplique o preço do litro da gasolina por 0,7 e compare o resultado com o preço do litro de álcool. Se for maior, deve optar pelo álcool. A razão dessa orientação deve-se ao fato de que, em média, se com um certo volume de álcool o veículo roda dez quilômetros, com igual volume de gasolina rodaria cerca de:

a) 7 km
b) 10 km
c) 14 km
d) 17 km
e) 20 km

Redução de uma grandeza à unidade

Nosso próximo assunto é o estudo das regras de três compostas. Um recurso muito empregado para resolver esse tipo de regra de três é a **redução à unidade**, apresentado a seguir.

> Quando duas grandezas dependentes A e B variam, **reduzir à unidade** a grandeza A significa determinar o valor assumido por B quando A assume o valor 1 (unidade).

Exemplos

a) Se durante 3 h uma máquina consome 18 L de óleo diesel, reduzir à unidade a grandeza tempo (hora) significa determinar o consumo (litro) dessa máquina em 1 h.

Esquematizando, temos:

Tempo (hora)		Consumo (litro)
3	———	18
1	———	x

Como essas grandezas são diretamente proporcionais, temos que o valor de x é $\frac{18}{3}$.

Note que para reduzir à unidade a grandeza tempo aplicamos uma regra de três simples direta.

> Se A e B são grandezas diretamente proporcionais e A assume o valor a quando B assume o valor b, então, reduzindo à unidade a grandeza A, a grandeza B se reduz ao valor $\frac{b}{a}$.

b) Se um automóvel demora 2 h para percorrer um trajeto entre duas cidades com velocidade média de 50 km/h, reduzir à unidade o tempo (hora) significa determinar a velocidade do automóvel para percorrer o mesmo trajeto em 1 h.

Esquematizando, temos:

Tempo (hora)		Velocidade (quilômetro por hora)
2	———	50
1	———	x

Como essas grandezas são inversamente proporcionais, temos que o valor de x é $50 \cdot 2$.

Note que para reduzir à unidade a grandeza tempo aplicamos uma regra de três simples inversa.

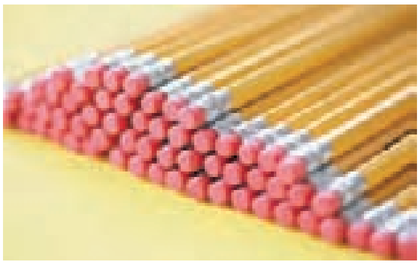
> Se A e B são grandezas inversamente proporcionais e A assume o valor a quando B assume o valor b, então, reduzindo à unidade a grandeza A, a grandeza B se reduz ao valor $b \cdot a$.

Regra de três composta

Como já vimos, regra de três composta é aquela que relaciona mais de duas grandezas. Uma regra de três composta pode ser transformada em uma regra de três simples por meio da **redução à unidade**. Esse método consiste em reduzir à unidade duas ou mais grandezas, deixando variáveis apenas duas grandezas da regra de três. Para entender esse método, observe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

21 Duas máquinas, com a mesma velocidade de produção, fabricam 480 lápis em 3 min. Quantas dessas máquinas seriam necessárias para fabricar 640 lápis em 2 min?


AMERICAN IMAGES/GETTY IMAGES

Resolução

Nesse problema, variam três grandezas: quantidade de máquinas, produção e tempo. Indicando por x o número de máquinas procurado, esquematizamos:

Quantidade de máquinas	Produção (número de lápis)	Tempo (em minuto)
2	480	3
x	640	2

Comparando duas quaisquer dessas grandezas, vamos reduzir à unidade uma delas. Por exemplo, vamos comparar as grandezas "produção" e "tempo", reduzindo o tempo à unidade. Para isso, supomos que a terceira grandeza envolvida (quantidade de máquinas) permaneça constante, raciocinando do seguinte modo:

- Se 480 lápis são fabricados em 3 min, então em 1 min são fabricados $\frac{480}{3}$ lápis, ou seja, 160 lápis. (Note que essas grandezas são diretamente proporcionais; por isso, ao reduzir o tempo à unidade [1 min], a grandeza "número de lápis" se reduz ao quociente $\frac{480}{3}$.)
- Se 640 lápis são fabricados em 2 min, então em 1 min são fabricados $\frac{640}{2}$ lápis, ou seja, 320 lápis.

Assim, retornando ao esquema, temos:

Quantidade de máquinas	Produção (número de lápis)	Tempo (em minuto)
2	160	1
x	320	1

Note que ao fazer a redução à unidade fixamos o tempo, isto é, o tempo não varia (1 e 1). Assim, basta resolver a regra de três simples formada pelas grandezas "quantidade de máquinas" e "produção".

Como as grandezas "quantidade de máquinas" e "produção" são diretamente proporcionais (quanto maior o número de máquinas, maior a produção, variando na mesma razão), temos:

$$\frac{2}{160} = \frac{x}{320} \Rightarrow x = 4$$

Concluímos, então, que seriam necessárias 4 máquinas para produzir 640 lápis em 2 min.

22 Três pedreiros, supostos com a mesma velocidade de produção, assentam juntos 200 tijolos em 40 min. Quantos tijolos são assentados em 36 min por 5 pedreiros como esses?


SUSAN LAW CAIN/SHUTTERSTOCK

Resolução

Nesse problema, variam três grandezas: quantidade de pedreiros, produção e tempo. Indicando por x o número desconhecido de tijolos assentados, esquematizamos:

Quantidade de pedreiros	Produção (número de tijolos)	Tempo (em minuto)
3	200	40
5	x	36

Comparando duas quaisquer dessas grandezas, vamos reduzir à unidade uma delas. Por exemplo, vamos comparar as grandezas "quantidade de pedreiros" e "tempo", reduzindo a "quantidade de pedreiros" à unidade. Para isso, supomos que a terceira grandeza envolvida (produção) permaneça constante, raciocinando do seguinte modo:

- Se 3 pedreiros assentam certa quantidade de tijolos em 40 min, então 1 pedreiro assenta essa mesma quantidade de tijolos em $40 \cdot 3$ min, ou seja, em 120 min. (Note que as grandezas "quantidade de pedreiros" e "tempo" são inversamente proporcionais; por isso, ao reduzir à unidade a quantidade de pedreiros, a grandeza "tempo" se reduz ao produto $40 \cdot 3$).
- Se 5 pedreiros assentam certa quantidade de tijolos em 36 min, então 1 pedreiro assenta essa mesma quantidade de tijolos em $36 \cdot 5$ min, ou seja, em 180 min.

Assim, retornando ao esquema, temos:

Quantidade de pedreiros	Produção (número de tijolos)	Tempo (em minuto)
1	200	120
1	x	180

Note que ao fazer a redução à unidade fixamos o número de pedreiros, isto é, o número de pedreiros não varia (1 e 1). Assim, basta resolver a regra de três simples formada pelas grandezas "produção" e "tempo".

Como as grandezas "produção" e "tempo" são diretamente proporcionais (quanto maior o tempo, maior a produção, variando na mesma razão), temos:

$$\frac{200}{120} = \frac{x}{180} \Rightarrow x = 300$$

Concluímos, então, que 300 tijolos são assentados por 5 desses pedreiros em 36 min.

23 Um motorista constatou que de 80 km/h a 100 km/h o consumo de combustível de seu automóvel é diretamente proporcional à velocidade. Esse veículo consome 3 L de combustível em 18 min à velocidade de 80 km/h. Em quantos minutos são consumidos 10 L de combustível à velocidade de 100 km/h?

Resolução

Nesse problema, variam três grandezas: consumo, tempo e velocidade. Indicando por x o número desconhecido de minutos, esquematizamos:

Consumo (em litro)	Tempo (em minuto)	Velocidade (em quilômetro por hora)
3	18	80
10	x	100

Comparando duas quaisquer dessas grandezas, vamos reduzir à unidade uma delas. Por exemplo, vamos comparar as grandezas "consumo" e "tempo", reduzindo o "consumo" à unidade. Para isso, supomos que a terceira grandeza envolvida (velocidade) permaneça constante, raciocinando do seguinte modo:

- Se 3 L de combustível são consumidos em 18 min a certa velocidade, então, à mesma velocidade, 1 L de combustível é consumido em $\frac{18}{3}$ min, ou seja, em 6 min. (Note que as grandezas "consumo" e "tempo" são diretamente proporcionais; por isso, ao reduzir o consumo à unidade (1 min), a grandeza "tempo" se reduz ao quociente $\frac{18}{3}$.)
- Se 10 L de combustível são consumidos em x min a certa velocidade, então, à mesma velocidade, 1 L de combustível é consumido em $\frac{x}{10}$ min.

Assim, retornando ao esquema, temos:

Consumo (em litro)	Tempo (em minuto)	Velocidade (em quilômetro por hora)
1	6	80
1	$\frac{x}{10}$	100

Note que ao fazer a redução à unidade fixamos o consumo, isto é, o consumo não varia (1 e 1). Assim, basta resolver a regra de três simples formada pelas grandezas "tempo" e "velocidade".

Como as grandezas "tempo" e "velocidade" são inversamente proporcionais (quanto maior a velocidade, menor o tempo, variando em razões inversas), temos:

$$6 \cdot 80 = \frac{x}{10} \cdot 100 \Rightarrow x = 48$$

Concluímos, então, que em 48 min são consumidos 10 L de combustível à velocidade de 100 km/h.

Agilizando a resolução de uma regra de três composta (Propriedade da proporcionalidade multiplicativa)

Podemos chegar mais rapidamente à resolução de uma regra de três composta aplicando a propriedade a seguir, conhecida como "propriedade da proporcionalidade multiplicativa".

> Se uma grandeza g é diretamente proporcional às grandezas g_1 e g_2, então as medidas assumidas por g são diretamente proporcionais aos produtos das medidas correspondentes assumidas por g_1 e g_2.

Outra forma de enunciar a propriedade da proporcionalidade multiplicativa é:

> Se uma grandeza g é diretamente proporcional às grandezas g_1 e g_2, então a razão entre duas medidas de g é igual ao produto das razões entre as medidas correspondentes de g_1 e g_2.

Demonstração

Seja g uma grandeza diretamente proporcional às grandezas g_1 e g_2, assumindo as medidas correspondentes indicadas em cada linha do esquema a seguir:

g	g_1	g_2
a	b	c
d	e	f

Reduzindo à unidade a grandeza g_1, obtemos:

g	g_1	g_2
$\frac{a}{b}$	1	c
$\frac{d}{e}$	1	f

Ao fazer a redução à unidade, fixamos g_1, isto é, g_1 não varia (1 e 1). Assim, basta resolver a regra de três simples formada pelas grandezas g e g_2.
Como a grandeza g é diretamente proporcional a g_2, temos:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{d}{e}}{f}$$

Daí concluímos:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \cdot \frac{c}{f}$$

Nota:

Essa propriedade pode ser generalizada da seguinte maneira:

> Se uma grandeza g é diretamente proporcional às grandezas $g_1, g_2, g_3, ..., g_n$, então a razão entre duas medidas de g é igual ao produto das razões entre as medidas correspondentes de $g_1, g_2, g_3, ...$ e g_n.

Exercícios resolvidos

24 Para asfaltar uma rua com 6 m de largura, foram usados 86.400 kg de asfalto em uma camada com 10 cm de espessura. Quantos quilogramas de asfalto seriam necessários se a largura dessa rua fosse 8 m e a camada de asfalto tivesse 12 cm de espessura?

ZUMA PRESS/DIOMEDIA

Resolução

Nesse problema, variam três grandezas: largura da rua, quantidade de asfalto e espessura da camada asfáltica. Indicando por x o número desconhecido de quilogramas de asfalto, esquematizamos:

Largura da rua (em metro)	Quantidade de asfalto (em quilograma)	Espessura da camada asfáltica (em centímetro)
6	86.400	10
8	x	12

Para aplicar a propriedade da proporcionalidade multiplicativa, desenhamos uma seta vertical com qualquer sentido, para cima ou para baixo, na coluna onde está o x, ou seja, na coluna correspondente à quantidade de asfalto. Por exemplo, desenhamos uma seta com o sentido para baixo:

Largura da rua (em metro)	Quantidade de asfalto (em quilograma)	Espessura da camada asfáltica (em centímetro)
6	86.400 ↓	10
8	x	12

Em seguida, comparamos a grandeza em que está o x com cada uma das outras grandezas:

- se a grandeza em que está o x é diretamente proporcional à outra grandeza, desenhamos nessa outra uma seta com o mesmo sentido da seta onde está o x;
- se a grandeza onde está o x é inversamente proporcional à outra grandeza, desenhamos nessa outra uma seta com o sentido oposto ao da seta onde está o x.

A quantidade de asfalto e a largura da rua são diretamente proporcionais, pois, quanto maior for a largura da rua, maior será a quantidade de asfalto (variando na mesma razão); logo, desenhamos na coluna da largura da rua uma seta com o mesmo sentido da seta onde está o x.
A quantidade de asfalto e a espessura da camada asfáltica são diretamente proporcionais, pois, quanto maior for a espessura da camada, maior será a quantidade de asfalto (variando na mesma razão); logo, desenhamos na coluna da espessu-

ra da camada asfáltica uma seta com o mesmo sentido da seta onde está o x.

Largura da rua (em metro)	Quantidade de asfalto (em quilograma)	Espessura da camada asfáltica (em centímetro)
$6 \downarrow$	$86.400 \downarrow$	$10 \downarrow$
8	x	12

As setas indicando para o mesmo sentido significam que a quantidade de asfalto é diretamente proporcional a cada uma das outras grandezas; logo, pela propriedade da proporcionalidade multiplicativa, temos:

$$\frac{86.400}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{10}{12} \Rightarrow x = 138.240$$

Portanto, seriam necessários 138.240 kg de asfalto.

25 Um livro de 200 páginas foi editado com 24 linhas por página e 65 caracteres por linha. Em uma nova edição, esse livro se apresentou com 30 linhas por página e 50 caracteres por linha. Qual foi o número de páginas do livro na nova edição?

Resolução

Nesse problema, variam três grandezas: número de páginas, número de linhas por página e número de caracteres por linha. Indicando por x o número desconhecido de páginas, esquematizamos:

Número de páginas	Número de linhas por página	Número de caracteres por linha
200	24	65
x	30	50

Para aplicar a propriedade da proporcionalidade multiplicativa, desenhamos uma seta vertical com qualquer sentido, para cima ou para baixo, na coluna onde está o x, ou seja, na coluna correspondente ao número de páginas. Por exemplo, desenhamos uma seta com o sentido para cima:

Número de páginas	Número de linhas por página	Número de caracteres por linha
$200 \uparrow$	24	65
x	30	50

Em seguida, comparamos a grandeza onde está o x com cada uma das outras grandezas:

- se a grandeza onde está o x é diretamente proporcional à outra grandeza, desenhamos nessa outra uma seta com o mesmo sentido da seta onde está o x;
- se a grandeza em que está o x é inversamente proporcional à outra grandeza, desenhamos nessa outra uma seta com o sentido inverso ao da seta onde está o x.

O número de páginas e o número de linhas por página são inversamente proporcionais, pois, quanto maior for a quantidade de linhas por página, menor será o número de páginas (variando em razões inversas); logo, desenhamos na coluna do número de linhas por página uma seta com o sentido inverso ao da seta onde está o x.

O número de páginas e o número de caracteres por linha são inversamente proporcionais, pois, quanto maior for a quantidade de caracteres por linha, menor será o número de páginas (variando em razões inversas); logo, desenhamos na coluna do número de caracteres por linha uma seta com o sentido inverso ao da seta onde está o x.

Número de páginas	Número de linhas por página	Número de caracteres por linha
$200 \uparrow$	$24 \downarrow$	$65 \downarrow$
x	30	50

Em seguida, deixamos todas as setas indicando para o mesmo sentido, todas para cima ou todas para baixo; por exemplo, todas para baixo. Para isso, invertemos a razão correspondente ao número de páginas, obtendo:

Número de páginas	Número de linhas por página	Número de caracteres por linha
$x \downarrow$	$24 \downarrow$	$65 \downarrow$
200	30	50

Finalmente, aplicamos a propriedade da proporcionalidade multiplicativa:

$$\frac{x}{200} = \frac{24}{30} \cdot \frac{65}{50} \Rightarrow x = 208$$

Logo, na nova edição, o livro ficou com 208 páginas.

Exercícios propostos

172 Para uma viagem de 8 dias pelo Brasil, um comboio de 12 caminhões consumiu 1.440 litros de combustível. Todos os veículos consumiram igualmente. Se a viagem durasse 10 dias e o comboio tivesse apenas 11 desses caminhões, qual seria a quantidade de combustível consumida?

173 Duas máquinas com a mesma velocidade de produção fabricam 720 m de arame farpado em 10 h. Quantas dessas máquinas seriam necessárias para fabricar 540 m desse tipo de arame em 5 h?

174 Um motorista constatou que de 60 km/h a 90 km/h o consumo de combustível de seu automóvel é diretamente proporcional à velocidade. Esse veículo consome 2 L de combustível para percorrer 10 km à velocidade de 60 km/h. Que distância deve percorrer à velocidade de 90 km/h para consumir 3 L de combustível?

175 Duas torneiras de mesma vazão enchem juntas 45 recipientes de mesma capacidade em 10 h. Quantos recipientes poderiam ser cheios por 3 dessas torneiras em 12 h?

176 Para a confecção de uma peça de tecido com 30 m de comprimento por 60 cm de largura são necessários 40 kg de algodão. Qual seria o comprimento, em metro, da peça desse tecido que poderia ser confeccionada com 3 toneladas de algodão se a largura da peça fosse 90 cm?

177 Plantando 900 mudas diárias, o plantio de um campo de 500 hectares foi concluído em 20 dias. Quantas dessas mudas deveriam ser plantadas diariamente para que o plantio de outro campo de 400 hectares fosse concluído no prazo de 30 dias?

178 Dois caminhões, com a mesma capacidade de carga, transportam juntos 144 m^3 de terra, fazendo 8 viagens cada um. Com 3 caminhões como esses, fazendo 9 viagens cada um, quantos metros cúbicos de terra poderiam ser transportados?

ROBERT MCGOUEY/ALAMY/ OTHER IMAGES

179 Um empresário gastou R$ 18.000,00 na compra de 150 recipientes com 60 L de álcool cada um. Sabendo que os recipientes não são cobrados, determine quanto o empresário gastaria na compra de 230 recipientes com 40 L de álcool cada um.

180 Todas as 30 lâmpadas de um armazém eram mantidas acesas durante 120 h semanais, e com isso a despesa semanal era R$ 40,00. Para colaborar com uma campanha de economia de energia, retirou-se $\frac{1}{3}$ das lâmpadas, e as lâmpadas restantes permaneceram acesas apenas durante $\frac{3}{4}$ do tempo anterior. Qual o valor da nova despesa mensal?

181 Uma cidade com 180.000 habitantes consome 1.125 m^3 de água em 30 dias. Se nessa cidade aumentar em $\frac{1}{4}$ o número de habitantes de modo que o consumo médio de água por habitante continue o mesmo, qual será o consumo de água da cidade em 20 dias?

182 Em uma granja com 2.500 frangos são consumidos 1.680 kg de ração em 6 dias. Se o granjeiro aumentar sua produção para 6.800 frangos e o consumo médio por frango continuar o mesmo, em quantos dias serão consumidos 7.616 kg de ração?

CLAUSS MEYER/TYBA

183 **(Enem)** Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.
Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg
b) 800 kg
c) 720 kg
d) 600 kg
e) 570 kg

184 **(UnB-DF)** Com 16 máquinas de costura aprontaram 720 uniformes em 6 dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionar 2.160 uniformes em 24 dias?

185 **(PUC-SP)** Um motorista de táxi, trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias, gasta R$ 1.026,00 de gás. Qual será o seu gasto mensal, se trabalhar 4 horas por dia?

a) R$ 1.026,00
b) R$ 2.052,00
c) R$ 3.078,00
d) R$ 4.104,00
e) R$ 4.824,00

186 **(Mackenzie-SP)** Se 15 operários em 9 dias de 8 horas ganham R$ 10.800,00; 23 operários em 12 dias de 6 horas ganhariam:

a) R$ 16.560,00
b) R$ 17.560,00
c) R$ 26.560,00
d) R$ 29.440,00
e) R$ 30.540,00

187 **(Santa Casa-SP)** Sabe-se que 4 máquinas, operando 4 horas por dia, durante 4 dias, produzem 4 toneladas de certo produto. Quantas toneladas do mesmo produto seriam produzidas por 6 máquinas daquele tipo, operando 6 horas por dia, durante 6 dias?

a) 8
b) 15
c) 10,5
d) 13,5
e) 14

188 **(FEP-PA)** Para asfaltar 1 km de estrada, 30 homens gastaram 12 dias trabalhando 8 horas por dia. Vinte homens, para asfaltar 2 km da mesma estrada, trabalhando 12 horas por dia, gastarão:

a) 6 dias
b) 12 dias
c) 24 dias
d) 28 dias

189 **(Puccamp-SP)** Operando 12 horas por dia, 20 máquinas de mesmo rendimento produzem 6.000 peças em 6 dias. Com 4 horas a menos de trabalho diário, 15 daquelas máquinas produzirão 4.000 peças em:

a) 8 dias
b) 9 dias
c) 9 dias e 6 horas
d) 8 dias e 12 horas
e) 10 dias e 10 horas

190 **(Faap-SP)** Numa campanha de divulgação do vestibular, o diretor mandou confeccionar cinquenta mil folhetos. A gráfica realizou o serviço em cinco dias, utilizando duas máquinas de mesmo rendimento, oito horas por dia. O diretor precisou fazer nova encomenda. Desta vez, sessenta mil folhetos. Nessa ocasião, uma das máquinas estava quebrada. Para atender o pedido, a gráfica prontificou-se a trabalhar 12 horas por dia, executando o serviço em:

a) 5 dias
b) 8 dias
c) 10 dias
d) 12 dias

191 **(Unicamp-SP)** Uma obra será executada por 13 operários (de mesma capacidade de trabalho) trabalhando durante 11 dias com jornada de trabalho de 6 horas por dia. Decorridos 8 dias do início da obra, 3 operários adoeceram e a obra deverá ser concluída pelos operários restantes no prazo estabelecido anteriormente.

Qual deverá ser a jornada diária de trabalho dos operários restantes nos dias que faltam para a conclusão da obra no prazo previsto?

a) 7 h 42 min
b) 7 h 44 min
c) 7 h 46 min
d) 7 h 48 min
e) 7 h 50 min

192 Dois tratores com a mesma capacidade de produção, trabalhando juntos 6 h por dia, aram uma área de 4 km^2 em 8 dias. Que área seria arada em 3 dias por 5 tratores como esses trabalhando juntos 8 h por dia?

193 Renato fez uma viagem de automóvel em 9 dias, rodando 6 horas por dia à velocidade média de 80 km/h. Se Renato tivesse rodado 8 h por dia à velocidade média de 90 km/h, em quantos dias ele teria concluído essa viagem?

194 Cinco moinhos elétricos, com a mesma velocidade de produção, moem 10 t de trigo em 8 dias, trabalhando juntos 12 h por dia. Quantas toneladas de trigo seriam moídas por 4 desses moinhos trabalhando juntos 15 h por dia durante 9 dias?

195 Três colheitadeiras, com a mesma velocidade de produção, trabalhando juntas 8 h por dia, colhem 400 ha de soja em 40 dias. Quantas dessas colheitadeiras, trabalhando juntas 9 h por dia, seriam necessárias para colher 900 ha de soja em 60 dias?

PAULO FRIDMAN/SAMBAPHOTO

196 Produzindo 180.000 L a cada 2 h, um poço de petróleo abastece 3.000 veículos de uma cidade durante 5 dias. Supondo que todos os veículos consumam igualmente, que quantidade de litros de petróleo deveria ser produzida a cada 5 h para abastecer 8.000 veículos durante 6 dias?

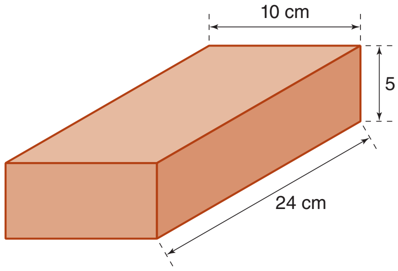
197 Três máquinas de mesma velocidade de produção, trabalhando 4 h diárias durante 6 dias, produzem juntas 15.000 tijolos. Quantas dessas máquinas seriam necessárias para produzir 25.000 tijolos trabalhando 3 h diárias durante 5 dias?

198 Um sistema coletor de energia solar para o aquecimento de água é composto, basicamente, de dois elementos: um painel que absorve a energia térmica solar e um depósito acumulador de água quente. A energia coletada pelo painel é diretamente proporcional à sua área.

GALO IMAGES - NEIL OVERY/OTHER IMAGES

Dois painéis coletores de energia solar, com 5 m^2 cada um, absorvem 80 kWh em 4 dias. Quantos painéis de 8 m^2 cada um seriam necessários para absorver 288 kWh em 3 dias?

199 Para a fabricação de determinada quantidade de tijolos maciços com a forma de bloco retangular com 24 cm de comprimento por 10 cm de largura e 5 cm de altura cada um, são necessários 1.800 kg de barro cozido.



Quantos quilogramas de barro cozido seriam necessários para fabricar a mesma quantidade de tijolos se o comprimento, a largura e a altura de cada tijolo fossem 20 cm, 11 cm e 6 cm, respectivamente? (Resolva esse problema de dois modos diferentes. No primeiro modo, aplique uma regra de três composta, considerando as grandezas: comprimento, largura, altura do tijolo e quantidade de barro. No segundo modo, aplique uma regra de três simples, considerando as grandezas: volume do tijolo e quantidade de barro.)

200 Um salão possui a forma de um paralelepípedo de comprimento 24 m, largura 6 m e altura 3 m. Um especialista calculou que para manter o interior desse salão a uma temperatura agradável são necessários 6 aparelhos de ar-condicionado. Quantos desses aparelhos seriam necessários para manter essa temperatura em um salão sob a forma de um paralelepípedo de comprimento 18 m, largura 5 m e altura 3,2 m?

(Resolva esse problema de dois modos diferentes. No primeiro modo, aplique uma regra de três composta, considerando as grandezas: comprimento, largura, altura do salão e quantidade de aparelhos. No segundo modo, aplique uma regra de três simples, considerando as grandezas: volume interno do salão e quantidade de aparelhos.)

201 **(Colégio Naval-RJ)** Se k abelhas, trabalhando k meses do ano, durante k dias do mês, durante k horas por dia, produzem k litros de mel; então, o número de litros de mel produzidos por w abelhas, trabalhando w horas por dia, em w dias e em w meses do ano será:

a) $\frac{k^3}{w^2}$ b) $\frac{w^5}{k^3}$ c) $\frac{k^4}{w^3}$ d) $\frac{w^3}{k^4}$ e) $\frac{w^4}{k^3}$

Uma breve incursão pela teoria dos números

Divisão em $\mathbb{Z}$

Tradicionalmente, em Matemática, dá-se o nome de "Teoria dos Números" à teoria que estuda os números inteiros e suas propriedades. O nome mais adequado seria "Teoria dos Números Inteiros", pois existem outros conjuntos numéricos além de $\mathbb{Z}$. No entanto, conservaremos a tradição. Por isso, tenha em mente que todos os números citados neste tópico são inteiros.

Muitos dos conceitos que vamos apresentar você já aprendeu no ensino fundamental, mas uma revisão é essencial.

Algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$

Dados os números inteiros a e b, com $b \neq 0$, existe uma única maneira de expressar a em função de b na forma $a = b \cdot q + r$, com $\{q, r\} \subset \mathbb{Z}$, e $0 \leq r < |b|$. Os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de a por b. Quando $r = 0$, dizemos que a é divisível por b ou, ainda, que a divisão é exata.

Exemplos

a) $\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \Rightarrow 13 = 5 \cdot 2 + 3$

b) $\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 18 = 6 \cdot 3 + 0$

Como o resto é zero, dizemos que 18 é divisível por 6.

b) A divisão de inteiros, de modo que o quociente e o resto sejam inteiros, pode apresentar resultados inesperados. Esteja sempre atento ao resto, que deve ser positivo ou nulo e menor que o módulo do dividendo. Embora existam métodos para o cálculo do quociente e do resto, vamos determiná-los por tentativa e erro.

$\begin{array}{r|l} -8 & 3 \\ \hline 1 & -3 \end{array} \Rightarrow -8 = 3 \cdot (-3) + 1$

Propriedades da divisão em $\mathbb{Z}$

P.1 Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tal que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. O resto da divisão de $(a + b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a + r_b)$ por n.

Exemplo

$$\begin{array}{r|l} 29 & 5 \\ \hline 4 & 5 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

O resto da divisão da soma dos dividendos $(29 + 38 = 67)$ por 5 é igual ao resto da divisão da soma dos restos $(4 + 3 = 7)$ por 5. Observe: $\begin{array}{r|l} 67 & 5 \\ \hline 2 & 13 \end{array}$ e $\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$.

Restos iguais

Nota:

Essa propriedade pode ser estendida para mais de dois dividendos:

Sejam $a_1, a_2, 3_3, \ldots, a_k$ e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que $r_{a_1}, r_{a_2}, r_{a_3}, \ldots, r_{a_k}$ sejam, respectivamente, os restos das divisões de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ por n. O resto da divisão de $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_{a_1} + r_{a_2} + r_{a_3} + \ldots + r_{a_k})$ por n.

P.2 Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. O resto da divisão de $(a - b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a - r_b)$ por n.

P.3 Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. O resto da divisão de $(a \cdot b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a \cdot r_b)$ por n.

Nota:

Essa propriedade pode ser estendida para mais de dois dividendos:
Sejam $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que $r_{a_1}, r_{a_2}, r_{a_3}, ..., r_{a_k}$ sejam, respectivamente, os restos das divisões de $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ por n. O resto da divisão de $(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_k)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_{a_1} \cdot r_{a_2} \cdot r_{a_3} \cdot ... \cdot r_{a_k})$ por n.

P.4 Sejam a um número inteiro, n um número natural não nulo e r_a o resto da divisão de a por n. O resto da divisão de a^p por n é igual ao resto da divisão de $(r_a)^p$ por n, para qualquer número natural p.

Exemplos

a) Vamos determinar o resto r da divisão de 15^{10} por 13. Inicialmente, dividimos 15 por 13, obtendo resto 2. Assim, o resto r da divisão de 15^{10} por 13 é igual ao resto da divisão de 2^{10} por 13.

Como $2^{10} = 1.024$ e

$$\begin{array}{r|l} 1.024 & 13 \\ \hline 10 & 78 \end{array}$$

concluímos que $r = 10$.

b) Como

$$\begin{array}{r|l} 17 & 8 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

temos que o resto r da divisão de 17^{23} por 8 é igual ao resto da divisão de 1^{23} por 8, isto é, $r = 1$.

Exercícios resolvidos

26 Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. Provar que o resto da divisão de $(a + b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a + r_b)$ por n.

Resolução

Indicando por q_a e q_b, respectivamente, os quocientes inteiros das divisões de a e b por n, temos, pelo algoritmo da divisão (P.1):

$a = q_a \cdot n + r_a$ e $b = q_b \cdot n + r_b$, com

$0 \leq r_a < |n|$ e $0 \leq r_b < |n|$

Logo, $a + b = q_a \cdot n + r_a + q_b \cdot n + r_b$, ou seja:

$a + b = (q_a + q_b) \cdot n + r_a + r_b$ (I)

Sendo r e q, respectivamente, o resto e o quociente da divisão de $r_a + r_b$ por n, temos:

$r_a + r_b = q \cdot n + r, 0 \leq r < |n|$ (II)

Substituímos (II) em (I):

$a + b = (q_a + q_b) \cdot n + q \cdot n + r$, que é equivalente a:

$a + b = (q_a + q_b + q) \cdot n + r$, com $0 \leq r < |n|$

Logo, r também é o resto da divisão de $a + b$ por n.

27 Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. Provar que o resto da divisão de $(a \cdot b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a \cdot r_b)$ por n.

Resolução

Indicando por q_a e q_b, respectivamente, os quocientes inteiros das divisões de a e b por n, temos, pelo algoritmo da divisão (P.1):

$a = q_a \cdot n + r_a$ e $b = q_b \cdot n + r_b$, com $0 \leq r_a < |n|$ e $0 \leq r_b < |n|$

Logo, $ab = (q_a \cdot n + r_a)(q_b \cdot n + r_b)$, ou seja:
$ab = q_a \cdot q_b \cdot n^2 + q_a \cdot n \cdot r_b + r_a \cdot q_b \cdot n + r_a \cdot r_b$
ou ainda:
$ab = (q_a \cdot q_b \cdot n + q_a \cdot r_b + r_a \cdot q_b) \cdot n + r_a \cdot r_b$ (I)
Sendo r e q, respectivamente, o resto e o quociente da divisão de $r_a \cdot r_b$ por n, temos: $r_a \cdot r_b = q \cdot n + r, 0 \leq r < |n|$ (II)
Substituímos (II) em (I):
$a \cdot b = (q_a \cdot q_b \cdot n + q_a \cdot r_b + r_a \cdot q_b) \cdot n + q \cdot n + r$, que é equivalente a:
$a \cdot b = (q_a \cdot q_b \cdot n + q_a \cdot r_b + r_a \cdot q_b + q) \cdot n + r$, com $0 \leq r < |n|$
Logo, r também é o resto da divisão de $a \cdot b$ por n.

28 Sejam a um número inteiro, n um número natural não nulo e r_a o resto da divisão de a por n. Provar que o resto da divisão de a^p por n é igual ao resto da divisão de $(r_a)^p$ por n, para qualquer número natural p.

Resolução

Sejam q e r, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por n, isto é:
$a = q \cdot n + r, 0 \leq r < |n|$
Elevando ao expoente p ambos os membros dessa igualdade, temos:
$a^p = (q \cdot n + r)^p$

I. Para $p = 0$, o resultado é imediato.

II. Para $p = 1$, a igualdade toma a forma: $a = q \cdot n + r$. Vamos aplicar a propriedade P.2, demonstrada no exercício resolvido 26.

$\begin{array}{r|l} qn & n \\ \hline 0 & q \end{array}$ e $\begin{array}{r|l} r & n \\ \hline r & 0 \end{array}$

(O resto dessa segunda divisão é r porque, por (I), $r < |n|$.)

Pela propriedade P.1, o resto da divisão de $(qn + r)$ por n é igual ao resto da divisão de $(0 + r)$ por n. Logo, o resto da divisão de a^1 por n é igual ao resto da divisão de r^1 por n, que é igual a r.

III. Para $p > 1$, a igualdade (I) toma a forma:

$a^p = (q \cdot n + r)^p = \underbrace{(qn + r)(qn + r)(qn + r) \cdot ... \cdot (qn + r)}_{p \text{ fatores iguais a } (q_n + r)}$

Por (I), o resto da divisão de a por n é igual ao resto da divisão de r por n, que é igual a r.

Por P.3, o resto da divisão de $(qn + r)(qn + r)(qn + r) \cdot ... \cdot (qn + r)$ por n é igual ao resto da divisão do produto $\underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot ... \cdot r}_{p \text{ fatores iguais a } r}$ por n. Logo, o resto da divisão de a^p por n é igual ao resultado da divisão de r^p por n.

29 Provar que o algarismo das unidades de qualquer número inteiro é igual ao resto da divisão desse inteiro por 10.

Resolução

Faremos a demonstração para números inteiros positivos. Para os negativos, a demonstração é análoga.
Todo número inteiro positivo p pode ser representado sob a forma:
$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, em que $a_1, a_2, a_3, ..., a_0$ são algarismos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Podemos então representar o número p como:
$p = 10(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + a_{n-2} \cdot 10^{n-3} + ... + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0$
Pelo algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$, dividindo p por 10, encontramos os números q e r tais que:
$p = 10q + r$, com $0 \leq r < 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + a_{n-2} \cdot 10^{n-3} + ... + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0 = 10q + r$,
ou seja:
$10(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + a_{n-2} \cdot 10^{n-3} + ... + a_2 \cdot 10 + a_1) - 10q = r - a_0$,
ou ainda:
$10(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + a_{n-2} \cdot 10^{n-3} + ... + a_2 \cdot 10 + a_1 - q) = r - a_0$
Assim, temos que $r - a_0$ é divisível por 10, mas como $0 \leq r < 10$ e $1 \leq a_0 \leq 9$, o único valor possível para a diferença $r - a_0$ é zero; logo, $r = a_0$, isto é, o algarismo (a_0) das unidades do número p é igual ao resto r da divisão de p por 10.

Exercícios propostos

202 Dê um exemplo numérico que ilustre cada uma das propriedades.

I. Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. O resto da divisão de $(a + b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a + r_b)$ por n.

II. Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. O resto da divisão de $(a - b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a - r_b)$ por n.

III. Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. O resto da divisão de $(a \cdot b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a \cdot r_b)$ por n.

IV. Sejam a um número inteiro, n um número natural não nulo e r_a o resto da divisão de a por n. O resto da divisão de a^p por n é igual ao resto da divisão de $(r_a)^p$ por n, para qualquer número natural p.

203 **(UFG-GO)** O quociente de um número inteiro b por 20 é 7 e o resto é o maior possível. O número b é:

a) 140 **b)** 147 **c)** 146 **d)** 150 **e)** 159

204 **(Puccamp-SP)** Seja x um número natural que ao ser dividido por 9 deixa resto 5 e ao ser dividido por 3 deixa resto 2. Sabendo que a soma dos quocientes dessas divisões é 9, podemos afirmar que *x é igual a*:

a) 28 **b)** 35 **c)** 27 **d)** 33 **e)** 23

205 Aplicando o algoritmo da divisão, efetue as divisões a seguir de modo que o quociente e o resto sejam inteiros.

a) $17 \,\underline{|\,8\,}$ **b)** $3 \,\underline{|\,7\,}$ **c)** $14 \,\underline{|\,-3\,}$ **d)** $-8 \,\underline{|\,5\,}$

206 Entre todos os números naturais de 250 a 1.200, determine:

a) o maior número divisível por 23.

b) o menor número divisível por 23.

207 Sejam a, b e n números inteiros, com $n \neq 0$, tais que r_a e r_b sejam, respectivamente, os restos das divisões de a e b por n. Prove que o resto da divisão de $(a - b)$ por n é igual ao resto da divisão de $(r_a - r_b)$ por n.

208 Se o resto da divisão do número inteiro x por 7 é 3, calcule o resto da divisão de $(x - 100)$ por 7.

209 Qual é o resto da divisão de 3^{50} por 8?

210 Qual é o resto da divisão de 2^{48} por 14?

211 Qual é o algarismo das unidades do número 3^{32}?

212 Qual é o resto da divisão de $3^{20} + 3^{40} + 3^{80}$ por 8?

213 Prove que o número $35^{15} - 35^{23} - 35^{32} + 35^{41}$ é divisível por 34.

214 O número $2^{88} - 1$ é:

a) divisível por 5.

b) divisível por 3.

c) divisível por 27.

d) divisível por 89.

e) divisível por 43.

215 **(Unicamp-SP)** É possível encontrar dois números inteiros, ambos divisíveis por 7, e tais que a divisão de um pelo outro deixe resto 39? Justifique sua resposta.

216 Seja n um número inteiro positivo, com $n < 100$, cuja divisão por 4 deixa resto 3 e por 5 deixa resto 4. Quais são os possíveis valores de n?

217 Seja n um número inteiro negativo, com $n > -50$, cuja divisão por 6 deixa resto 2 e por 9 deixa resto 5. Quais são os possíveis valores de n?

218 **(Vunesp)** O percurso circular de um autódromo é de 20 km. Os pontos marcantes do autódromo são: A, que é o ponto de partida; B, que dista 5 km de A, no sentido do percurso; C, que dista 3 km de B, no sentido do percurso; D, que dista 4 km de C, no sentido do percurso; e E, que dista 5 km de D, no sentido do percurso. Um carro percorre 367 km do autódromo e para. Parará, então, mais perto de:

a) A **b)** B **c)** C **d)** D **e)** E

Múltiplos e divisores

Definição

Um número inteiro a é **múltiplo** de um número inteiro não nulo b se, e somente se, existe um inteiro k tal que $a = kb$. Dizemos também que b é **divisor** de a.

Notas:

1. Dizer que b é **divisor** de a equivale a dizer que b é **fator** de a, ou ainda, que b **divide** a.
2. Se a divisão de um número inteiro a por um número inteiro b é exata, então a é múltiplo de b e b é divisor de a.

Exemplos

a) 10 é múltiplo de 5, pois existe o inteiro 2 tal que $10 = 2 \cdot 5$. Podemos dizer, também, que 5 é divisor de 10.

b) -18 é múltiplo de 6, pois existe o inteiro -3 tal que $-18 = -3 \cdot 6$. Podemos dizer, também, que 6 é divisor de -18.

c) Para obter o conjunto M(3), de todos os múltiplos de 3, basta multiplicar esse número por todos os números inteiros, obtendo:
$M(3) = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, ...\}$

Definição

Um número inteiro n é **primo** se, e somente se, possui exatamente quatro divisores distintos, que são: $1, -1, n$ e $-n$.

Exemplos

a) 7 é um número primo, pois possui exatamente quatro divisores distintos, que são: $1, -1, 7$ e -7.

b) -3 é um número primo, pois possui exatamente quatro divisores distintos, que são: $1, -1, 3$ e -3.

c) 8 não é um número primo, pois possui mais de quatro divisores distintos, que são: $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8$ e -8.

d) 1 não é um número primo, pois possui menos de quatro divisores distintos, que são: 1 e -1.

Nota:

A palavra "primo", nesse contexto, significa "primeiro". Os números primos são os primeiros no sentido de que eles e seus produtos, dois a dois, três a três, quatro a quatro etc., juntamente com os números 0, 1 e -1, geram o conjunto $\mathbb{Z}$.

Definição

Os números inteiros não nulos que possuem mais de quatro divisores distintos são chamados de números **compostos**.

Exemplo

O número 12 é composto, pois tem mais de quatro divisores distintos, que são: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12$ e -12.

Nota:

A denominação "número inteiro composto" decorre do fato de que esse tipo de número é composto de produtos de números primos; por exemplo, o número 12 pode ser obtido pelo produto de números primos:
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
Observe que 0, 1 e -1 não podem ser obtidos pelo produto de números primos, por isso não são compostos.

Teorema do reconhecimento de um número primo

> Um número inteiro positivo a é primo se não é divisível por nenhum dos números primos positivos cujos quadrados não o excedem.

Exemplo

Para verificar se 89 é um número primo, consideremos os primos positivos cujos quadrados não superam 89; são eles: 2, 3, 5 e 7. Dividindo 89 por esses números primos, constatamos que 89 não é divisível por nenhum deles; logo, 89 é primo.

Nota:

Se um número positivo a é primo, então o oposto de a também é primo. Assim, para verificar se um número inteiro $-a$ é primo, com $a > 0$, basta verificar se o número positivo a é primo.

Teorema fundamental da aritmética

> Todo número inteiro composto c pode ser expresso na forma:
> $\pm (p_1)^{\alpha_1} \cdot (p_2)^{\alpha_2} \cdot (p_3)^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot (p_n)^{\alpha_n}$
> em que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ são números primos positivos distintos e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ são números inteiros positivos. Essa decomposição do número c em fatores primos é **única**, desconsiderando a ordem dos fatores.

Exemplos

a) Existe uma única decomposição em fatores primos do número 2.520:

$$\begin{array}{r|l} 2.520 & 2 \\ 1.260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 2.520 = \underbrace{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}_{\text{Decomposição em fatores primos}}$$

b) A decomposição em fatores primos pode ser aplicada na determinação dos divisores de um número inteiro. Como modelo, vamos obter o conjunto D(24), dos divisores de 24. Inicialmente decompomos 24 em fatores primos positivos:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

O número 1, os fatores à direita da barra e os produtos desses fatores tomados dois a dois, três a três e quatro a quatro são todos os divisores positivos de 24:
$1, 2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 \cdot 2, 3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Os números assim obtidos e seus opostos formam o conjunto D(24):
$D(24) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24, -24\}$

Definição

O **máximo divisor comum** entre os números inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, não todos nulos, que indicamos por mdc$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, é o maior divisor que esses números têm em comum.

Exemplos

a) Para calcular o mdc(12, 18, 14), podemos, inicialmente, determinar o conjunto D(12), dos divisores de 12; o conjunto D(18), dos divisores de 18; e o conjunto D(14), dos divisores de 14:

$D(12) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12\}$

$D(18) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 12, -12\}$

$D(14) = \{1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14\}$

Em seguida, determinamos o conjunto dos divisores comuns a 12, 18 e 14:

$D(12) \cap D(18) \cap D(14) = \{1, -1, 2, -2\}$

Finalmente, como o maior número desse conjunto é 2, temos: mdc(12, 18, 14) = 2

b) Para calcular o mdc(8, 9), inicialmente determinamos o conjunto D(8), dos divisores de 8, e o conjunto D(9), dos divisores de 9:

$D(8) = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$ e $D(9) = \{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$

O conjunto dos divisores comuns a 8 e 9 é:

$D(8) \cap D(9) = \{1, -1\}$

Como o maior número desse conjunto é 1, temos:

mdc(8, 9) = 1

Definição

O **mínimo múltiplo comum** entre os números inteiros **não nulos** $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, que indicamos por mmc$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, é o **menor múltiplo positivo** que esses números têm em comum.

Exemplo

Para calcular o mmc(6, 4, 8), podemos, inicialmente, determinar o conjunto M(6), dos múltiplos de 6; o conjunto M(4), dos múltiplos de 4; e o conjunto M(8), dos múltiplos de 8:

- $M(4) = \{0, 4, -4, 8, -8, 12, -12, 16, -16, 20, -20, 24, -24, 32, -32, ...\}$
- $M(6) = \{0, 6, -6, 12, -12, 18, -18, 24, -24, 30, -30, 36, -36, ...\}$
- $M(8) = \{0, 8, -8, 16, -16, 24, -24, 32, -32, 40, -40, ...\}$

Em seguida, determinamos o conjunto dos múltiplos comuns a 4, 6 e 8:

$M(4) \cap M(6) \cap M(8) = \{0, 24, -24, 48, -48, ...\}$.

Finalmente, como o menor número **positivo** desse conjunto é 24, temos:

mmc(4, 6, 8) = 24

Nota:

Se pelo menos um dos números inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ é igual a zero, definimos: mmc$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = 0$

Definição

Dois ou mais números inteiros são **primos entre si** se, e somente se, o máximo divisor comum entre eles é o número 1.

Exemplos

a) Os números 8 e 9 são primos entre si, pois:
mdc(8, 9) = 1

b) Os números −4, 7 e 12 são primos entre si, pois:
mdc(−4, 7, 12) = 1

c) Os números 6 e 8 **não** são primos entre si, pois:
mdc(6, 8) = 2

Propriedades dos múltiplos e divisores

P.1 Se a e b são números inteiros, não ambos nulos, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = \text{mdc}(a, b)$.

Exemplos

a) 6 e 8 são números inteiros e mdc(6, 8) = 2; logo, existem números inteiros m e n tais que $m \cdot 6 + n \cdot 8 = 2$. Por exemplo: $m = -1$ e $n = 1$, ou $m = -5$ e $n = 4$.

b) 4 e 9 são inteiros e mdc(4, 5) = 1; logo, existem números inteiros m e n tais que $m \cdot 4 + n \cdot 9 = 1$. Por exemplo: $m = -2$ e $n = 1$, ou $m = -11$ e $n = 5$.

c) −15 e 10 são inteiros e mdc(−15, 10) = 5; logo, existem números inteiros m e n tais que $m \cdot (-15) + n \cdot 10 = 5$. Por exemplo: $m = 1$ e $n = 2$.

P.2 Seja $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$. Se a é divisor de b e a é divisor de c, então a é divisor da soma $b + c$.

Exemplo

6 é divisor de 12 e 6 é divisor de 18; então, 6 é divisor da soma 12 + 18.

P.3 Seja $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$. Se a e b são números primos entre si e a é divisor de bc, então a é divisor de c.

Exemplo

4 e 9 são números primos entre si. Se 4 é divisor de $9 \cdot c$, então 4 é divisor de c.

P.4 Seja $\{p, q, n\} \subset \mathbb{Z}$, com $n > 0$. Se p e q são primos entre si, então p e q^n são primos entre si.

Exemplo

9 e 2 são primos entre si, então 9 e 2^4 são primos entre si.

P.5 Seja $\{p, a, b\} \subset \mathbb{Z}$. Se p é um número primo e p é divisor do produto ab, então p é divisor de a ou p é divisor de b.

Exemplo

7 é um número primo. Se 7 é divisor do produto ab de números inteiros, então 7 é divisor de a ou 7 é divisor de b.

P.6 O módulo do produto de dois números inteiros a e b é igual ao produto do mdc pelo mmc entre eles, isto é:
$|ad| = \text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b)$

Exemplo

Considerando os números inteiros 8 e −12, temos que mdc(8, −12) = 4 e mmc(8, −12) = 24. Observe que $|8 \cdot (-12)| = 4 \cdot 24$

Exercícios resolvidos

30 Provar que todo número inteiro n de três algarismos iguais é múltiplo de 37.

Resolução

Seja n um número inteiro positivo cujos algarismos das unidades, das dezenas e das centenas é x, isto é, o número é da forma:

$$\underbrace{\boxed{x}}_{\text{centenas}}\ \underbrace{\boxed{x}}_{\text{dezenas}}\ \underbrace{\boxed{x}}_{\text{unidades}}$$

Temos:

$n = 100x + 10x + x = 111x$

Como 111 é múltiplo de 37, pois $111 = 37 \cdot 3$, concluímos que $111x$, que é o número n, é múltiplo de 37. Observe que essa conclusão vale também para os números negativos, pois, se $111x$ é múltiplo de 37, o número $-111x$ também é múltiplo de 37.

31 Sendo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$, provar que: Se a é divisor de b e a é divisor de c, então a é divisor da soma $b + c$.

Resolução

Se a é divisor de b e a é divisor de c, então existem inteiros m e n tais que $b = ma$ e $c = na$. Adicionando, membro a membro, essas duas últimas igualdades, obtemos $b + c = ma + na$, ou seja, $b + c = (m + n)a$; como $m + n$ é inteiro, temos que a é divisor de $b + c$.

32 Provar que existem infinitos números primos.

Resolução

Vamos supor que seja finito o conjunto de números primos positivos, isto é, que exista o maior número primo positivo p.

Nessa suposição, consideremos o número inteiro a que tenha uma unidade a mais que o produto de todos os números primos positivos e distintos que existem, isto é:

$a = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot p) + 1$

Como a é maior que p, e este é o maior primo que existe, temos que a não é primo. Portanto, a é um número composto, isto é, a é um produto de números primos. Porém, a não é múltiplo de nenhum dos primos que existem, pois, se o fosse, qualquer primo k deveria ser divisor de $a - 1$. Ora, sendo k um divisor de a, deveria ser também divisor de 1, mas isso é falso, pois não há número primo que seja divisor de 1.

Observe, portanto, que ao admitir a existência do maior número primo positivo chegamos a uma contradição. Logo, não existe o maior número primo, e, portanto, existem infinitos números primos positivos.

(*Nota*: Para cada número inteiro primo positivo existe seu oposto, que também é primo. Logo, existem infinitos números inteiros primos positivos e infinitos negativos.)

33 Provar que um número inteiro positivo a é primo se não é divisível por nenhum dos números primos positivos cujos quadrados não o excedem.

Resolução

Nessa demonstração, admitiremos apenas números inteiros positivos e utilizaremos o seguinte fato: se k é um múltiplo de r, isto é, $k = rs$, temos as equivalências:

I) $r^2 < k \Leftrightarrow s > r$

e

II) $r^2 > k \Leftrightarrow s < r$

Vamos admitir que um número inteiro positivo N não seja divisível por nenhum dos números primos cujos quadrados não o excedem. Seja a o maior número primo nessas condições.

Se N é divisível por algum número primo b, com $b > a$, o quociente q dessa divisão, que também é divisor de N, é menor que b (pois $b^2 > N$).

Resumindo, $N = bq$ e $b^2 > N \Rightarrow q < b$, o que nos leva a concluir que $q = 1$, pois:

- Se q fosse primo, q seria um divisor primo de N, com $q < b$, o que contraria a suposição de que N não é divisível por nenhum número primo menor que b.
- Se q fosse composto, teria fatores primos menores que ele e, portanto, menores que b (pois $q < b$), o que contraria a suposição de que N não é divisível por nenhum número primo menor que b.

Assim, constatamos que $q = 1$ e, portanto, $N = b \cdot 1$. Como b é primo, concluímos que N é primo.

34 Usando o critério demonstrado no exercício anterior, mostrar que o número 127 é primo.

Resolução

Consideremos os números primos positivos cujos quadrados não excedam 127; esses números são: 2, 3, 5, 7 e 11. (Não é preciso considerar os negativos.)

Dividindo 127 por cada um desses números primos, constatamos que nenhuma das divisões é exata; logo, 127 é primo.

35 Sendo $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$, provar que, se a e b são números primos entre si e a é divisor de bc, então a é divisor de c.

Resolução

Pela propriedade P.1, dos múltiplos e divisores, temos que existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = \text{mdc}(a, b)$, ou seja, $ma + nb = 1$. Multiplicamos por c ambos os membros dessa última igualdade, obtendo: $mac + nbc = c$.

Como a é divisor de a e, por hipótese, também é divisor de bc, temos que a é divisor de mac e também de nbc; pela propriedade P.2, temos que a é divisor de $mac + nbc$; como $mac + nbc = c$, concluímos que a é divisor de c.

36 Provar que, se o número $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{Z}^*$ e $a \in \mathbb{Z}$, não é inteiro, então é irracional.

Resolução

Observando que $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a$ ou, ainda, $\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n - a = 0$ (I), provaremos que, se p e q são números primos entre si e $\frac{p}{q}$ é raiz da equação (I), então p é divisor de a e $q = \pm 1$.

Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação (I), então $\left(\frac{p}{q}\right)^n - a = 0$ ou, ainda, $\frac{p^n}{q^n} = a$ e, portanto: $p^n = aq^n$ (II)

A equação (II) pode ser representada por: $p \cdot p^{n-1} = a \cdot q^n$; logo, p é divisor de $a \cdot q^n$; mas p e q são primos entre si, portanto p e q^n também são primos entre si; então, p é divisor de a.

Analogamente, a equação (II) pode ser representada por: $p^n = a \cdot q^{n-1} \cdot q$; logo, q é divisor de p^n; mas q e p^n são primos entre si, portanto $q = \pm 1$.

Resumindo, provamos que, se a equação $x^n = a$ tem raiz racional, ela é inteira; logo, se a raiz real dessa equação não é inteira, ela é irracional.

Observando que $x^n - a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x = \sqrt[n]{a}, \text{ se } n \text{ é ímpar}\right) \text{ ou } \left(x = \pm\sqrt[n]{a}, \text{ se } n \text{ é par}\right)$, concluímos que $\sqrt[n]{a}$ ou é um número inteiro ou é um número irracional.

Por exemplo, são irracionais os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[7]{3}$, pois nenhum deles é inteiro.

37 Um número inteiro a dividido por 7 deixa resto 4 e dividido por 3 deixa resto 2. Determinar o resto da divisão do número a pelo produto $7 \cdot 3$.

Resolução

Indicamos por q_1 e q_2, respectivamente, os quocientes das divisões de a por 7 e por 5; e indicamos por q e r, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a pelo produto 21:

$$\begin{array}{r|l} a & 7 \\ \hline 4 & q_1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} a & 3 \\ \hline 2 & q_2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} a & 21 \\ \hline r & q \end{array}$$

Pelo algoritmo da divisão, temos:

$a = 7q_1 + 4$ (I)
$a = 3q_2 + 2$ (II)
$a = 21q + r$, com $0 \leqslant r < 21$ (III)

Substituímos (III) em (I) e em (II), obtemos:

$21q + r = 7q_1 + 4 \Rightarrow r = 7q_1 + 4 - 21q$, ou ainda, $r = 7(q_1 - 3q) + 4$ (IV)

$21q + r = 3q_2 + 2 \Rightarrow r = 3q_2 + 2 - 21q$, ou ainda, $r = 3(q_2 - 7q) + 2$ (V)

Assim:

- De (IV), r tem 4 unidades a mais que um múltiplo de 7, e de (III) $0 \leqslant r < 21$; logo: $r \in \{4, 11, 18\}$
- De (V), r tem 2 unidades a mais que um múltiplo de 3, e de (III) $0 \leqslant r < 21$; logo: $r \in \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$.

Como $\{4, 11, 18\} \cap \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\} = \{11\}$, concluímos que $r = 11$.

38 Em um número natural n de quatro algarismos, o algarismo que representa as unidades é a, o que representa as dezenas é b, o que representa as centenas é c e o que representa os milhares é d. Provar que n é divisível por 3 se, e somente se, a soma $(a + b + c + d)$ é um múltiplo de 3.

Resolução

$n = 1.000d + 100c + 10b + a =$
$= 999d + d + 99c + c + 9b + b + a =$
$= 3(333d + 33c + 3b) + (d + c + b + a)$

Como $3(333d + 33c + 3b)$ é múltiplo de 3, a soma $3(333d + 33c + 3b) + (d + c + b + a)$ será múltiplo de 3 se, e somente se, $d + c + b + a$ for múltiplo de 3.

(*Nota*: Essa propriedade que demonstramos para um número natural de quatro algarismos pode ser estendida para um número natural com qualquer número de algarismos. A demonstração é feita do mesmo modo.)

39 Provar que o número inteiro $3k^3 + 5k$ é divisível por 2 para qualquer valor inteiro da variável k.

Resolução

Sendo r o resto da divisão de k por 2, temos $r = 0$ ou $r = 1$.

Observando que os restos das divisões de 3 e 5 por dois são, respectivamente, 1 e 1, temos que o resto da divisão de $3k^3 + 5k$ por 2 é igual ao resto da divisão de $\underbrace{1}_{\substack{\text{Resto da}\\\text{divisão de}\\\text{3 por 2}}} \cdot r^3 + \underbrace{1}_{\substack{\text{Resto da}\\\text{divisão de}\\\text{5 por 2}}} \cdot r$ por 2.

- para $r = 0$, temos: $r^3 + r = 0^3 + 0 = 0$
- para $r = 1$, temos: $r^3 + r = 1^3 + 1 = 2$

Para qualquer valor inteiro possível de r, temos que $r^3 + r$ é divisível por 2, isto é, o resto da divisão de $r^3 + r$ por 2 é zero. Como o resto da divisão de $3k^3 + 5k$ é igual ao resto da divisão de $1r^3 + 1r$ por 2, concluímos que $3k^3 + 5k$ é divisível por 2 para qualquer valor inteiro de k.

40 Dois números inteiros a e b são tais que $ab = 1.512$ e $\text{mdc}(a, b) = 2$. Qual é o $\text{mmc}(a, b)$?

Resolução

Pela propriedade P.6, temos que
$|ab| = \text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b)$; portanto:
$1.512 = 2 \cdot \text{mmc}(a, b) \Rightarrow \text{mmc}(a, b) = 756$

Exercícios propostos

219 Redija a definição de cada um dos conceitos a seguir, dando um exemplo numérico para cada um.

I. Múltiplo de um número inteiro não nulo n.
II. Divisor de um número inteiro n.
III. Número inteiro primo.
IV. Número inteiro composto.
V. Máximo divisor comum entre os números inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, não todos nulos.
VI. Mínimo múltiplo comum entre os números inteiros não nulos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$.
VII. Números inteiros primos entre si.

220 Uma locadora cobra 5 reais pela diária de cada filme alugado. Cláudia alugou 3 filmes durante alguns dias. Qual das alternativas a seguir apresenta uma afirmação verdadeira sobre o total, em real, pago por Cláudia à locadora, qualquer que seja o número de dias de aluguel desses filmes?

a) Esse total é múltiplo de 4.
b) Esse total é múltiplo de 8.
c) Esse total é múltiplo de 15.
d) Esse total é múltiplo de 10.
e) Esse total é múltiplo de 6.

221 Dê um exemplo numérico que ilustre cada uma das propriedades.

I. Se a e b são números inteiros, não ambos nulos, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = \text{mdc}(a, b)$.
II. Seja $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$. Se a é divisor de b e a é divisor de c, então a é divisor da soma $b + c$.

III. Seja $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$. Se a e b são números primos entre si e a é divisor de bc, então a é divisor de c.

IV. Seja $\{p, q, n\} \subset \mathbb{Z}$, com $n > 0$. Se p e q são primos entre si, então p e q^n são primos entre si.

V. Seja $\{p, a, b\} \subset \mathbb{Z}$. Se p é um número primo e p é divisor do produto ab, então p é divisor de a ou p é divisor de b.

VI. O módulo do produto de dois números inteiros a e b é igual ao produto do mdc pelo mmc entre eles, isto é:
$|ad| = \text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b)$

222 **(UFMT)** Sobre o número natural $n = 2^{40} - 1$, considere as seguintes afirmativas:

I. n é um múltiplo de 31.
II. n é um múltiplo de 5.
III. n é um número primo.
IV. n é um número par.

Estão corretas as afirmativas:

a) III e IV. **c)** II e IV. **e)** I e II.
b) II e III. **d)** I e III.

223 **(FGV-SP)** Em uma divisão o quociente é 202 e o resto é 26. A soma do dividendo com o divisor é 5.710. Então o dividendo é um número:

a) múltiplo de 11.
b) múltiplo de 5.
c) múltiplo de 7.
d) múltiplo de 3.
e) múltiplo de 4.

224 Considerando uma divisão em que o dividendo a, o divisor b, o quociente q e o resto r são inteiros, prove que:

a) $a - r$ é múltiplo de b.
b) $a + b - r$ é múltiplo de b.

225 **(Fuvest-SP)** Seja A o conjunto dos 1.993 primeiros números inteiros estritamente positivos.

a) Quantos múltiplos de 15 pertencem ao conjunto A?
b) Quantos números pertencentes a A não são múltiplos nem de 3 nem de 5?

226 Sem efetuar divisões, demonstre que todo número inteiro n de três algarismos iguais é múltiplo de 111.

227 Prove que, se um número inteiro a é múltiplo de um número inteiro b, então a é múltiplo de qualquer divisor de b.

228 Em um número natural n de quatro algarismos, o algarismo que representa as unidades é a, o que representa as dezenas é b, o que representa as centenas é c e o que representa os milhares é d. Prove que n é divisível por 9 se, e somente se, a soma $(a + b + c + d)$ é um múltiplo de 9.

229 Quais dos números abaixo são primos?

a) 101
b) 323
c) 401
d) 389

230 **(Fuvest-SP)** Sejam a e b números naturais e p um número primo.

a) Se p divide $a^2 + b^2$ e p divide a, então p divide b.
b) Se p divide ab, então p divide a e p divide b.
c) Se p divide $a + b$, então p divide a e p divide b.
d) Se a divide p, então a é primo.
e) Se a divide b e p divide b, então p divide a.

(*Nota*: Dizer que x divide y equivale a dizer que x é divisor de y.)

231 **(UFMG)** Na divisão de um número inteiro n por 7, o quociente é um inteiro e o resto é 3; então:

a) $(n + 3)$ é múltiplo de 7.
b) $(n - 3)$ é múltiplo de 7.
c) $(n - 4)$ é múltiplo de 7.
d) $(n + 4)$ é múltiplo de 7.
e) $\frac{n}{3}$ é múltiplo de 7.

232 Decompondo em fatores primos dois números x e y, obtemos:
$x = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 7$ e $y = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 11$. Qual é a decomposição em fatores primos do número $x + y$?

233 Dê um exemplo numérico que ilustre cada uma das propriedades a seguir:

I. Sejam a e b dois números inteiros positivos tais que:
$a = (p_1)^{\alpha_1} \cdot (p_2)^{\alpha_2} \cdot (p_3)^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot (p_n)^{\alpha_n}$ e
$b = (p_1)^{\beta_1} \cdot (p_2)^{\beta_2} \cdot (p_3)^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot (p_n)^{\beta_n}$
em que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ são números primos positivos distintos e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ são números inteiros positivos quaisquer. Para que b seja divisor de a, é necessário e suficiente que:
$\alpha_1 \geqslant \beta_1, \alpha_2 \geqslant \beta_2, \alpha_3 \geqslant \beta_3, \ldots, \alpha_n \geqslant \beta_n$

II. Para que um número inteiro positivo a seja múltiplo de um inteiro positivo $b = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n$, em que quaisquer dois números entre $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ são números primos entre si, a deve ser divisível por cada um dos fatores $b_1, b_2, b_3, \ldots$ e b_n.

234 Qual dos números abaixo é divisor de $2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7$?

a) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7$ **b)** $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

235 Considere o número $x = 2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^7$ e o número $y = 2^n \cdot 3^2 \cdot 5^4$. Determine o maior número natural n de modo que x seja divisível por y.

236 **(PUC-SP)** Qual é o menor número natural não nulo pelo qual se deve multiplicar 2.310 para se obter um múltiplo de 1.300?

237 Mostre que, se m é um número ímpar, então $m^2 - 1$ é divisível por 4.

238 **(Fuvest-SP)** Mostre que, se m é um número ímpar, então $m^2 - 1$ é divisível por 8.

239 **(Unicamp-SP)** Mostre que 3 divide $n^3 - n$, qualquer que seja o número inteiro n.

240 Prove que $10^n + 10^{n-1}$ é múltiplo de 11, qualquer que seja o número natural não nulo n.

241 O processo descrito a seguir para o cálculo do mdc entre dois números inteiros positivos a e b, com $a \geqslant b$, é conhecido por "algoritmo de Euclides".

Divide-se a por b.

- *Se a divisão é exata, b é o mdc entre a e b.*
- *Se a divisão não é exata, divide-se b pelo resto r_1 da divisão anterior.*

- *Se a divisão é exata, r_1 é o mdc entre a e b.*
- *Se a divisão não é exata, divide-se r_1 pelo resto r_2 da divisão anterior.*
- *E assim sucessivamente, até se obter um resto zero. O último número considerado divisor é o mdc entre a e b.*

Esse processo pode ser apresentado pelo seguinte dispositivo:

Quocientes →		q_1	q_2	...	...	q_{n+1}
	a	b	r_1	...	r_{n-1}	r_n
Restos →	r_1	r_2	...	r_n	0	

Por exemplo, vamos calcular o mdc(92, 84):

Quocientes →		1	10	2
	92	84	8	4
Restos →	8	4	0	

Logo: mdc(92, 84) = 4

Aplicando esse algoritmo, calcule:

a) mdc(324, 144)

b) mdc(150, 35)

c) mdc(240, 177)

d) mdc(128, 105, 42)

(*Nota*: Vale a propriedade associativa no cálculo do mdc, isto é: mdc(128, 105, 42) = mdc[mdc(128, 105), 42] = mdc[128, mdc(105, 42)])

242 A propriedade P.1 dos múltiplos e divisores garante-nos que se a e b são números inteiros, não ambos nulos, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = \text{mdc}(a, b)$. Note que existe mais de um par de números m e n que satisfaz esse tipo de igualdade; por exemplo, para o mdc(8, 6) = 2, temos:

$2 = 1 \cdot 8 + (-1) \cdot 6$

$2 = -2 \cdot 8 + 3 \cdot 6$

$2 = -5 \cdot 8 + 7 \cdot 6$

etc.

O algoritmo de Euclides fornece-nos um método para encontrar um par de números inteiros m e n tal que $ma + nb = \text{mdc}(a, b)$. Por exemplo, mdc(60, 42) = 6, que pelo algoritmo de Euclides é obtido da seguinte maneira:

Quocientes →		1	2	3
	60	42	18	6
Restos →	18	6	0	

Aplicando o algoritmo da divisão para cada número da linha do meio, da esquerda para a direita, até conseguir relacionar 60, 42 e 6, obtemos um par de números m e n. Observe:

$60 = 42 \cdot 1 + 18$ (I)

$42 = 18 \cdot 2 + 6$ (II)

Observe que essas igualdades já relacionam os números que nos interessam: 60, 42 e 6. Isolamos o mdc na igualdade (II):

$6 = 42 - 18 \cdot 2$ (III)

De (I), temos:

$18 = 60 - 42$ (IV)

Substituímos (IV) em (III):

$6 = 42 - (60 - 42) \cdot 2 \Leftrightarrow 6 = 3 \cdot 42 + (-2) \cdot 60$

Assim, uma possibilidade para m e n é: $m = 3$ e $n = -2$

Aplique esse método para a obtenção de m e n nos seguintes casos:

a) $\text{mdc}(6, 4) = m \cdot 6 + n \cdot 4$

b) $\text{mdc}(88, 32) = m \cdot 88 + n \cdot 32$

c) $\text{mdc}(93, 66) = m \cdot 93 + n \cdot 66$

d) $\text{mdc}(252, 198) = m \cdot 252 + n \cdot 198$

243 Consideremos as decomposições em fatores primos de dois ou mais números inteiros positivos. O mínimo múltiplo comum entre esses números é o produto de **todos** os fatores primos desses números, de modo que, se um fator primo é comum a dois ou mais números, toma-se esse fator com o maior expoente com que ele aparece nas decomposições. Por exemplo, sejam a e b os números:

$a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$

$b = 2^4 \cdot 5 \cdot 11$

O mmc entre eles é: $2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$

Aplicando esse processo, calcule:

a) mmc(288, 378)

b) mmc(980, 825, 273)

244 O cálculo do mmc entre dois ou mais números pode ser agilizado por meio do dispositivo prático apresentado a seguir no cálculo do mmc(60, 18, 189).

Dispõem-se os números 60, 18 e 189 alinhados à esquerda de uma barra vertical.
Dividem-se por um fator primo, colocado à direita da barra, os números da esquerda da barra que tiverem esse fator, pondo então o resultado da divisão sob cada número que atuou como dividendo. Os números que não têm esse fator primo são repetidos na linha seguinte. Repete-se o procedimento com cada nova linha de números à esquerda da barra até que se obtenha uma linha formada apenas por "1" à esquerda da barra. O mmc é o produto de todos os fatores primos da direita da barra.

$$\begin{array}{rrr|l} 60, & 18, & 189 & 2 \\ 30, & 9, & 189 & 2 \\ 15, & 9, & 189 & 3 \\ 5, & 3, & 63 & 3 \\ 5, & 1, & 21 & 3 \\ 5, & 1, & 7 & 5 \\ 1, & 1, & 7 & 7 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{mmc}(60, 18, 189) = \\ = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3.780 \end{array}$$

Aplicando esse processo, calcule:

a) mmc(720, 2.100)

b) mmc(450, 264, 126, 750)

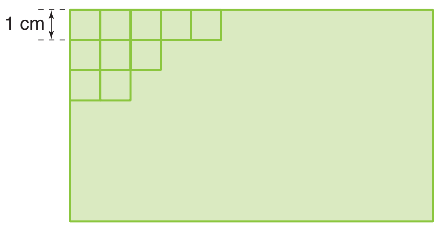
245 Os números a_1, a_2, a_3, ..., a_n, d e k envolvidos nas propriedades a seguir são inteiros. Dê um exemplo numérico que ilustre cada uma delas. (Dê os exemplos considerando o mdc de apenas dois ou três números.)

I. Se mdc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = d, então todo divisor comum aos números a_1, a_2, a_3, ... e a_n também é divisor de d.
II. Se mdc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = d, então mdc(ka_1, ka_2, ka_3, ..., ka_n) = kd
III. Se mdc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = d e k é um fator comum a a_1, a_2, a_3, ... e a_n, então mdc($a_1 : k$, $a_2 : k$, $a_3 : k$, ..., $a_n : k$) = $d : k$
IV. Se em um conjunto de números inteiros o menor número positivo divide todos os demais, então esse menor número é o mdc entre todos os números do conjunto.
V. Dividindo dois ou mais números inteiros pelo mdc entre eles, os quocientes obtidos serão primos entre si.

246 Os números a_1, a_2, a_3, ..., a_n, p e k envolvidos nas propriedades a seguir são inteiros. Dê um exemplo numérico que ilustre cada uma delas. (Dê os exemplos considerando o mmc de apenas dois ou três números.)

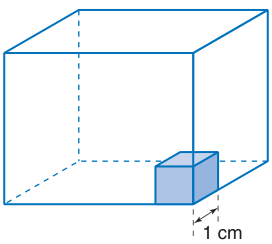
I. Se mmc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = p, então todo múltiplo comum aos números a_1, a_2, a_3, ..., a_n também é múltiplo de p.
II. Se mmc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = p, então mmc(ka_1, ka_2, ka_3, ..., ka_n) = kp
III. Se mmc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) = d e k é um fator comum a a_1, a_2, a_3, ..., a_n, com $k \neq 0$, então mmc($a_1 : k$, $a_2 : k$, $a_3 : k$, ..., $a_n : k$) = $p : k$
IV. Se em um conjunto de números inteiros o maior número positivo é múltiplo de todos os demais, então esse maior número é o mmc entre todos os números do conjunto.
V. O mmc entre dois ou mais números primos entre si é o produto desses números.

247 Quadriculando um retângulo, obtemos 84 quadradinhos de lado 1 cm:



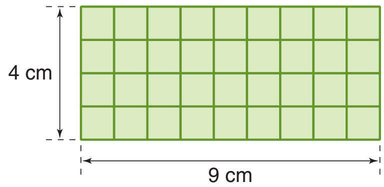
A medida, em centímetro, de um dos lados do retângulo é um número primo maior que 3. Qual é esse número?

248 Com 60 cubinhos de 1 cm de aresta, colocados um ao lado ou acima do outro, formou-se um paralelepípedo.



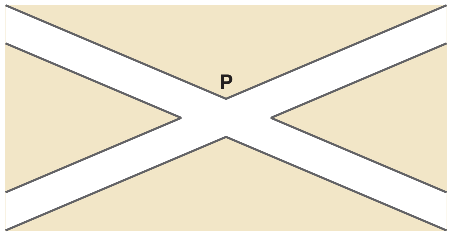
Duas das arestas desse paralelepípedo têm como medidas, em centímetro, números primos maiores que 2. Quais são essas medidas?

249 Usando 36 quadradinhos com 1 cm em cada lado, quero formar um retângulo colocando um quadradinho junto do outro. Um retângulo possível é:



Quais são as medidas, em centímetro, dos lados de todos os retângulos que posso formar?

250 Dois trens de carga, trafegando em linhas diferentes, passam várias vezes ao dia por um cruzamento P.



Os horários foram programados para que nunca os trens estejam simultaneamente no ponto P, o que acarretaria um acidente. Se esses trens só trafegam das 5 h às 17 h, qual das alternativas abaixo apresenta uma programação de horários que não põe em perigo os comboios?

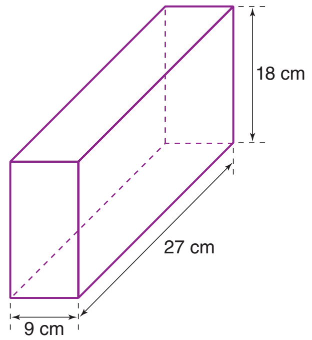
a) Um dos trens deve passar por P em horários divisores de 18 h e o outro em divisores de 24 h.
b) Um dos trens deve passar por P em horários divisores de 18 h e o outro em divisores de 16 h.

251 Em uma granja foram recolhidos três balaios de ovos: um com 270, outro com 72 e o terceiro com 126 ovos. Esses ovos serão embalados em caixas com o mesmo número de ovos e com o maior número possível. Quantos ovos terá cada caixa?

252 Três barras de ferro têm comprimento 12 m, 8 m e 16 m. Cortando-as em pedaços de mesmo tamanho e de maior comprimento possível, qual será o comprimento de cada pedaço? Quantos pedaços serão obtidos?

253 Uma escola promoverá uma excursão para uma visita às cavernas de Iporanga. Para isso, devem ser alugados ônibus, todos com a mesma capacidade de passageiros. Os 210 alunos do Ensino Médio viajarão em ônibus separados dos 462 alunos do Ensino Fundamental. Sabendo que todos os ônibus devem partir lotados e com todos os passageiros sentados, qual deve ser a capacidade máxima de cada ônibus? Com essa capacidade, quantos ônibus serão necessários para transportar os alunos do Ensino Fundamental?

254 Um paralelepípedo de isopor tem dimensões 9 cm, 27 cm e 18 cm.



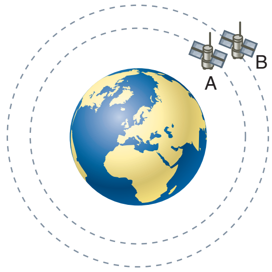
Quero cortar esse paralelepípedo em cubinhos de mesmo tamanho e de maior aresta possível, de modo que todo o isopor seja aproveitado. Qual deve ser a medida de cada aresta desses cubinhos?

255 Três navios cargueiros, A, B e C, fazem viagens do porto de Santos ao porto de Vitória. O navio A parte do porto de Santos a cada 6 dias, o navio B a cada 8 dias e o navio C a cada 9 dias. Hoje eles partiram juntos do porto de Santos. Daqui a quanto tempo se dará a próxima partida dos três navios juntos do porto de Santos?

256 Da estação rodoviária de uma grande cidade, partem ônibus para o Rio de Janeiro de três companhias diferentes, A, B e C. Da companhia A partem ônibus a cada 45 minutos, da B partem a cada 30 minutos e da C, a cada 54 minutos. Sabendo que exatamente às 7 h os ônibus das três companhias partiram juntos com destino ao Rio de Janeiro, a que horas desse mesmo dia eles partirão juntos novamente com esse destino?

257 Um moinho produz 45 kg de farinha de trigo por minuto. A farinha é embalada em sacos com 35 kg cada um. Qual é o menor número possível de minutos que o moinho deve trabalhar para que toda a farinha produzida seja embalada?

258 Dois satélites artificiais A e B têm órbita circular ao redor da Terra. O satélite A completa uma volta em torno da Terra em 9 h, enquanto B completa uma volta em 12 h. Neste instante, ambos estão exatamente sobre a cidade de Belo Horizonte. O próximo encontro dos satélites sobre essa cidade se dará daqui a quanto tempo?



259 O planeta Mercúrio completa uma volta em torno do Sol em 88 dias e o planeta Vênus, em 224 dias. Neste instante Mercúrio e Vênus estão, respectivamente, nos pontos A e B de suas órbitas. O próximo instante em que esses planetas estarão simultaneamente nessas mesmas posições se dará daqui a quanto tempo?

260 Todos os dias, pela manhã, Pedro e seu pai correm em uma pista circular de 1.200 m de comprimento. Pedro percorre 6 m em cada segundo e seu pai percorre 8 m em cada segundo. Se neste momento ambos passaram juntos pelo ponto de partida da pista, a próxima vez que eles passarão novamente juntos por esse ponto será daqui a quantos minutos?

GABARITO

1 a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{1}$

2 a) 1,2 b) 0,75 c) 0,0001

3 $\frac{10}{6}$ e $\frac{5}{3}$

4 Resposta possível: $\frac{36}{20}$ e $\frac{72}{40}$

5 b

6 a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{2}{3}$

7 a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{1}$ e) $\frac{2}{1}$ f) $\frac{1}{2}$

8 $\frac{9}{2}$ m/s

9 e

10 a) V b) F c) F d) F e) F f) V

11 d

12 e

13 e

14 e

15 $\frac{4}{1}$

16 a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{11}{5}$ d) $\frac{5}{4}$

17 a) $\frac{2}{1}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$

18 a) V b) F c) V

19 São proporcionais.

20 Não são proporcionais.

21 Formam uma proporção.

22 a) 5 b) $\frac{27}{2}$ c) $\frac{20}{3}$ d) 3 e) $\frac{1}{2}$

23 360 m^2

24 490 mL

25 128 g

26 90 g

27 12 g

28 90.000 votos

29 375

30 60 cm^2

31 3.200

32 R$ 1.500,00

33 41,4 s

34 10

35 1

36 $x = 10$, $y = 6$ e $z = 20$

37 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ e $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

38 $\frac{a+3}{3} = \frac{b+6}{6}$

39 a

40 12 e 30

41 $x = 12$ e $y = 20$

42 16 L

43 51 kg

44 48 cm^2

45 14 m^3 de areia e 4 m^3 de cimento

46 e

47 e

48 e

49 d

50 e

51 $\frac{a-5}{5} = \frac{b-8}{8}$

52 24 e 18

53 24 e 40

54 O comprimento era 25 m e a altura 15 m.

55 200 mL

56 a) 2 b) $b = 8$ e $c = 18$

57 $x = 4$, $y = 2$ e $z = 6$

58 $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$ e $d = 4$

59 José, Marcelo e Alex devem receber R$ 6.000,00, R$ 8.000,00 e R$ 4.000,00, respectivamente.

60 a) $x = 6$ e $y = 14$ b) $x = 16$ e $y = 8$ c) $x = 12$ e $y = 18$ d) $x = 6$, $y = 4$ e $z = 2$ e) $x = 4$ e $y = 5$

61 $a = 2$, $b = 4$ e $c = 6$

62 $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ e $d = 4$

63 a) 4,8 b) 3,625 c) 1,75 d) 5

64 R$ 2.900,00

65 R$ 1.212,50

66 c

67 c

68 c

69 d

70 d

71 a) 6,5 b) $\approx 3{,}02$ c) $\approx 3{,}69$ d) 3,6 e) 3,01

72 R$ 198,80

73 1,635 m

74 R$ 5.220,00

75 $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^9 \cdot 30 + 6 \cdot 10^6 \cdot 25}{1{,}2 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10^6} \approx 29{,}98$

76 **a)** 72,2 **b)** 3

77 a

78 80 mulheres e 40 homens

79 70 mulheres

80 90 km/h

81 66 km

82 58,5 min

83 3.300 km

84 **a)** 1 h 15 min **b)** 70 L

85 a

86 $\approx$ 324,5 hab./km^2

87 $\approx$ 320.156 habitantes

88 $\approx$ 706.8 km^2

89 1.900

90 0,32 g/cm^3

91 1,5 cm^3

92 14,9 g/cm^3

93 $\approx$ 16,37 g/cm^3

94 b

95 2.890 m

96 300 km

97 b

98 e

99 b

100 45 cm

101 1 : 20.000

102 e

103 d

104 **a)** São diretamente proporcionais.
b) Não são diretamente proporcionais.
c) São diretamente proporcionais.

105 $x = 10$, $y = 6$ e $z = 6$

106 27 cm^3

107 Beto tem 2,1 m de estatura e Ricardo, 1,98 m.

108 15, 10 e 5, repectivamente

109 4,4, 2,6 e 9,6, respectivamente

110 5 kg

111 1.800 L na primeira etapa, 2.700 L na segunda e 1.350 L na terceira

112 Vicente recebeu R$ 120,00, Cláudio R$ 160,00 e Álvaro R$ 240,00.

113 200 pequenos, 400 médios e 600 grandes

114 108 cm^2

115 36 dm^3

116 27.000 L e 36.000 L

117 A, B e C produziram 72, 48 e 60 pratos, respectivamente

118 d

119 Luíza deve receber R$ 27.000,00, Márcia R$ 12.000,00 e Roberta R$ 10.000,00.

120 c

121 Os prejuízos de Eduardo, Armando e Renata foram de R$ 72.000,00, R$ 60.000,00 e R$ 30.000,00, respectivamente.

122 **a)** São inversamente proporcionais.
b) Não são inversamente proporcionais.
c) São inversamente proporcionais.

123 $x = 3$ e $y = 4$

124 $x = \frac{1}{24}$, $y = \frac{1}{12}$ e $z = \frac{5}{2}$

125 36, 18 e 12, respectivamente

126 4, 16 e 32, respectivamente

127 As residências A, B e C tiveram descontos de R$ 8,00, R$ 16,00 e R$ 32,00, respectivamente.

128 **a)** R$ 512,00, R$ 320,00 e R$ 448,00, respectivamente
b) R$ 320,00, R$ 800,00 e R$ 160,00, respectivamente

129 As áreas dos municípios A, B e C são 90 km^2, 135 km^2 e 270 km^2, respectivamente.

130 As bolas A, B e C têm volumes 10 cm^3, 15 cm^3 e 30 cm^3, respectivamente.

131 $a = 8$ cm, $b = 4$ cm e $c = 2$ cm

132 Leandro, Vagner e Pedro consomem 1.350 calorias, 1.200 calorias e 1.080 calorias, respectivamente.

133 Nelson, Cláudio e Edna devem receber R$ 600,00, R$ 1.200,00 e R$ 400,00, respectivamente.

134 As torneiras A, B e C têm vazões de 20 L/min, 15 L/min e 10 L/min, respectivamente.

135 Nas caixas A, B, C e D foram colocados 96, 48, 32 e 12 cubos, respectivamente.

136 b

137 d

138 d

139 b

140 c

141 54

142 96

143 50.000.000 de glóbulos vermelhos

144 240 voltas

145 0,5 kg

146 8,1 h

147 e

148 3,6 h

149 e

150 d

151 4 dias
152 21 min
153 2,25 min
154 5 min
155 300 pregos
156 87.500 kg
157 10 h
158 1,2 g
159 252 cL
160 18 cm^2
161 13,5 L
162 1,6 m
163 450 m
164 108 dias
165 375 azulejos
166 2,7 h
167 1.275 L
168 75 voltas
169 c
170 a
171 c
172 1.650 L
173 3 máquinas
174 10 km
175 81 recipientes
176 1.500 m
177 480 mudas
178 243 m^3
179 R$ 18.400,00
180 R$ 20,00
181 937,5 m^3
182 10 dias
183 a
184 12 máquinas
185 b
186 a
187 d
188 c
189 a
190 b
191 d
192 5 km^2
193 6 dias
194 11,25 t
195 4 colheitadeiras
196 1.440.000 L
197 8 máquinas
198 6 painéis
199 1.980 kg
200 4 aparelhos
201 e
202 Resposta possível:

I. $\begin{array}{r|l} 9 & \underline{5} \\ 4 & 1 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 13 & \underline{5} \\ 3 & 2 \end{array}$

O resto da divisão de 9 + 13 por 5 é igual ao resto da divisão de 4 + 3 por 5, isto é:

$\begin{array}{r|l} 22 & \underline{5} \\ 2 & 4 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 7 & \underline{5} \\ 2 & 1 \end{array}$

Restos iguais

II. $\begin{array}{r|l} 14 & \underline{4} \\ 2 & 3 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 5 & \underline{4} \\ 1 & 1 \end{array}$

O resto da divisão de 14 − 5 por 4 é igual ao resto da divisão de 2 − 1 por 4, isto é:

$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{4} \\ 1 & 2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 1 & \underline{4} \\ 1 & 0 \end{array}$

Restos iguais

III. $\begin{array}{r|l} 20 & \underline{7} \\ 6 & 2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 9 & \underline{7} \\ 2 & 1 \end{array}$

O resto da divisão de $20 \cdot 9$ por 7 é igual ao resto da divisão de $6 \cdot 2$ por 7, isto é:

$\begin{array}{r|l} 180 & \underline{7} \\ 5 & 25 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 12 & \underline{7} \\ 5 & 1 \end{array}$

Restos iguais

IV. $\begin{array}{r|l} 5 & \underline{3} \\ 2 & 1 \end{array}$

O resto da divisão de 5^4 por 3 é igual ao resto da divisão de 2^4 por 3, isto é:

$\begin{array}{r|l} 625 & \underline{3} \\ 1 & 208 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r|l} 16 & \underline{3} \\ 1 & 5 \end{array}$

Restos iguais

203 e
204 e
205 **a)** quociente 2 e resto 1
b) quociente 0 e resto 3
c) quociente −4 e resto 2
d) quociente −2 e resto 2
206 **a)** 1.196 **b)** 253
207 Indicando por q_a e q_b respectivamente, os quocientes inteiros das divisões de a e b por n, temos, pelo algoritmo da divisão (P.1):
$a = q_a \cdot n + r_a$ e $b = q_b \cdot n + r_b$, com $0 \leqslant r_a < |n|$ e $0 \leqslant r_b < |n|$
Logo, $a - b = q_a \cdot n + r_a - q_b \cdot n - r_b$, ou seja,
(I) $a - b = (q_a - q_b) \cdot n + (r_a - r_b)$
Sendo r e q, respectivamente, o resto e o quociente da divisão de $r_a - r_b$ por n, temos:
(II) $r_a - r_b = q \cdot n + r$, $0 \leqslant r < |n|$
Substituímos (II) em (I):
$a - b = (q_a - q_b) \cdot n + q \cdot n + r$, que é equivalente a:
$a - b = (q_a - q_b + q) \cdot n + r$, com $0 \leqslant r < |n|$
Logo, r também é o resto da divisão de $a - b$ por n.

208 1

209 1

210 8

211 1

212 3

213 O resto da divisão de 35 por 34 é 1:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 34 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Sendo r_1, r_2, r_3 e r_4 os respectivos restos das divisões de 35^{15}, 35^{23}, 35^{32} e 35^{41} por 34, temos que esses restos são respectivamente iguais aos restos das divisões de 1^{15}, 1^{23}, 1^{32} e 1^{41} por 34; logo: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$
O resto da divisão de $35^{15} - 35^{23} - 35^{32} + 35^{41}$ por 34 é igual ao resto r da divisão de
$r_1 - r_2 - r_3 + r_4 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ por 34.
Portanto, $r = 0$, com o que concluímos que $35^{15} - 35^{23} - 35^{32} + 35^{41}$ é divisível por 34.

214 b

215 Não é possível, pois supondo que existam os números inteiros a, b, q_a, q_b e k tais que:
$a = 7q_a$ (I)
$b = 7q_b$ (II)
$a = kb + 39$ (III)
temos pela substituição de (I) e (II) em (III):
$7q_a = 7kq_b + 39 \Rightarrow 7(q_a - kq_b) = 39$
Como $(q_a - kq_b)$ é um número inteiro, concluímos que essa igualdade é absurda, pois 39 não é divisível por 7. Logo, não existem os números inteiros a e b nas condições enunciadas.

216 19, 39, 59, 79 e 99

217 -4, -22 e -40

218 c

219
I. Múltiplo de um número inteiro não nulo n é qualquer produto da forma $n \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$.
II. Divisor de um número inteiro n é qualquer número inteiro não nulo k tal que $k \cdot p = n$, para algum p inteiro.
III. Um número n inteiro é primo se, e somente se, possui exatamente quatro divisores distintos: $1, -1, n$ e $-n$.
IV. Um número inteiro é composto se, e somente se, possui mais de quatro divisores distintos.
V. O máximo divisor comum entre os números inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, não todos nulos, é o maior número inteiro que divide todos esses números simultaneamente.
VI. O mínimo múltiplo comum entre os números inteiros não nulos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ é o menor múltiplo positivo comum a esses números.
VII. Dois ou mais números inteiros são primos entre si se, e somente se, o máximo divisor comum entre eles é 1.

220 c

221
I. Observando que mdc(8, 6) = 2, temos que existem os números inteiros $m = 1$ e $n = -1$ tais que $m \cdot 8 + n \cdot 6 = \text{mdc}(8, 6)$.
II. 5 é divisor de 15 e 5 é divisor de 10; logo, 5 é divisor de 15 + 10.
III. 8 e 15 são primos entre si, pois mdc(8, 15) = 1. Como 8 é divisor de $3.960 = 15 \cdot 264$, concluímos que 8 é divisor de 264.
IV. Como 3 e 4 são primos entre si, temos que 3 e 4^{53} são primos entre si.
V. Como 5 é primo e é divisor de $40 = 10 \cdot 4$, temos que 5 é divisor de pelo menos um dos fatores 10 ou 4.
VI. Como mdc(−8, 6) = 2 e mmc(−8, 6) = 24, temos:
$|-8 \cdot 6| = \text{mdc}(-8, 6) \cdot \text{mmc}(-8, 6) = 2 \cdot 24 = 48$

222 e

223 d

224 **a)** $a = bq + r \Rightarrow a - r = bq$; logo, $a - r$ é múltiplo de b.
b) $a = bq + r \Rightarrow a - r = bq$. Adicionando b a ambos os membros dessa igualdade, obtemos: $a + b - r = b + bq \Rightarrow a + b - r = b(1 + q)$. Logo, $a + b - r$ é múltiplo de b.

225 **a)** 132 **b)** 1.063

226 Considerando que os três algarismos do número n sejam iguais a x, temos: $n = 100x + 10x + x = 111x$. Logo, n é múltiplo de 111.

227 Sendo c um divisor qualquer de b, temos: (I) $b = ck$, com $\{c, k\} \subset \mathbb{Z}$. Como a é múltiplo de b, temos que existe um inteiro n tal que: (II) $a = nb$. Substituindo (I) em (II), concluímos que $a = ckn$; logo, a é múltiplo de c.

228 O número n pode ser representado por:
$n = 1.000d + 100c + 10b + a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = 999d + 99c + 9b + (a + b + c + d)$. Como 9 é divisor das três primeiras parcelas dessa adição, concluímos que 9 é divisor de n se, e somente se, 9 é divisor de $(a + b + c + d)$.

229 São primos os números 101, 401 e 389

230 a

231 b

232 $2^{10} \cdot 3^{12}$

233
I. $a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^3$ e $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
II. $a = 240$ e $b = 5 \cdot 8 \cdot 3$

234 $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

235 $n = 5$

236 130

237 Sendo m um número ímpar, temos: $m = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim: $m^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 - 4k = 4(k^2 + k)$. Como $k^2 + k$ é um número inteiro, concluímos que $4(k^2 + k)$ é múltiplo de 4.

238 No exercício anterior, vimos que $m^2 - 1 = 4(k^2 + k)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Temos duas possibilidades: k é par ou k é ímpar, isto é, $k = 2n$ ou $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.
Para a primeira possibilidade, temos:
$4[(2n)^2 + 2n] = 8[2n^2 + n]$; logo, $m^2 - 1$ é múltiplo de 8. Para a segunda possibilidade, temos:
$4[(2n + 1)^2 + 2n + 1] = 8[2n^2 + 3n + 1]$; logo, $m^2 - 1$ é múltiplo de 8.

239 $n^3 - n = n(n + 1)(n - 1)$. Como em qualquer produto de três números inteiros consecutivos um dos fatores é múltiplo de 3, concluímos que $n^3 - n$ é múltiplo de 3.

240 $10^n + 10^{n-1} = 10^{n-1}(10 + 1) = 11 \cdot 10^{n-1}$.
Como n é um número natural não nulo, temos que 10^{n-1} é um número natural; logo, $11 \cdot 10^{n-1}$ é múltiplo de 11.

241 **a)** 36 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 1

242 **a)** $m = 1$ e $n = -1$ **c)** $m = 5$ e $n = -7$
b) $m = -1$ e $n = 3$ **d)** $m = 4$ e $n = -5$

243 **a)** 6.048 **b)** 2.102.100

244 **a)** 25.200 **b)** 693.000

245
I. mdc(12, 8) = 4 e 2 é divisor comum de 12 e 8; logo, 2 é divisor de mdc(12, 8).
II. mdc(20, 16) = 4; logo, mdc($7 \cdot 20$, $7 \cdot 16$) = $7 \cdot 4$.
III. mdc(36, 54) = 9 e 3 é divisor comum de 36 e 54; logo, mdc(36 : 3, 54 : 3) = 9 : 3.
IV. No conjunto {6, 12, −18}, o número 6 é divisor comum de 12 e −18; logo, mdc(6, 12, −18) = 6.
V. Temos que mdc(8, 10) = 2. Dividindo 8 e 10 por 2, obtemos 4 e 5, respectivamente. Note que 4 e 5 são primos entre si.

246
I. Como 60 é múltiplo comum de 15 e 10, concluímos que 60 é múltiplo comum do mmc(15, 10).
II. Como mmc(18, 4) = 36, temos que mmc($5 \cdot 18$, $5 \cdot 4$) = $5 \cdot 36$.
III. Como mmc(16, 24) = 8 e 4 é fator comum de 16 e 24, temos que mmc(16 : 4, 24 : 4) = 8 : 4.
IV. No conjunto {75, 25, 15}, o número 75 é múltiplo de 25 e 15; logo, mmc(75, 25, 15) = 75.
V. 8, 10 e 9 são primos entre si; logo, mmc(8, 10, 9) = $8 \cdot 10 \cdot 9$ = 720.

247 7

248 3 cm e 5 cm

249 1 cm e 36 cm; 2 cm e 18 cm; 3 cm e 12 cm; 4 cm e 9 cm; 6 cm e 6 cm.

250 b

251 18 ovos

252 9 pedaços de 4 m cada um

253 A capacidade de cada ônibus deve ser de 42 lugares. Serão necessários 11 ônibus para transportar os alunos do ensino fundamental.

254 9 cm

255 72 dias

256 11 h 30 min

257 7 min

258 36 h

259 2.464 dias

260 10 min

RESOLUÇÃO

1 a) $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ b) $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$ c) $\frac{16}{8} = \frac{2}{1}$

2 a) $\frac{12}{10} = 1{,}2$ c) $\frac{1}{10.000} = 0{,}0001$

b) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

3 $\frac{20}{12} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

4 $\frac{18}{10} = \frac{36}{20} = \frac{72}{40}$

5 Indicando por v e c as capacidades do vaso e do copo, respectivamente, temos:

$\frac{v}{c} = \frac{18}{4} \Rightarrow v = \frac{18c}{4} = 4{,}5c$

Logo, a capacidade do vaso é quatro vezes e meia a capacidade do copo.

Alternativa **b**.

6 a) $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

7 a) $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ c) $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$

b) $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ d) $\frac{18}{6} = \frac{3}{1}$ f) $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

8 $\frac{180\text{ m}}{40\text{ s}} = \frac{9}{2}\text{ m/s}$

9 $\frac{2{,}1\text{ cm}}{42\text{ m}} = \frac{2{,}1\text{ cm}}{4.200\text{ cm}} = \frac{1}{2.000}$

Alternativa **e**.

10 Indicando por a e b os conteúdos das embalagens A e B, respectivamente, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$$

Assim:

a) V, pois $a = \frac{2b}{5} = 0{,}4b$

b) F, pois $b = \frac{5a}{2} = 2{,}5a$

c) F, conforme a justificativa do item a.

d) F, pois $b > a$, conforme a justificativa do item b.

e) F, pois os conteúdos podem ser $a = 2k$ e $b = 5k$, para qualquer constante positiva k.

f) V, pois $\frac{200}{b} = \frac{2}{5} \Rightarrow b = 500$

11 $\frac{V_1}{V_2} = 0{,}75 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{4}{3}$

Alternativa **d**.

12 $\frac{x}{5} = \frac{8}{y} \Rightarrow xy = 40$

Alternativa **e**.

13 $\frac{x}{y} = 1{,}2 \Rightarrow x > y$ (I)

$\frac{z}{y} = 0{,}4 \Rightarrow z < y$ (II)

Por (I) e (II), concluímos que $z < y < x$

Alternativa **e**.

14 Indicando por C_G e C_S as capacidades do Aquífero Guarani e do reservatório da Sabesp, temos:

$\frac{C_G}{C_S} = \frac{30.000\text{ km}^3}{20.000.000\text{ L}} = \frac{3 \cdot 10^{16}\text{ L}}{2 \cdot 10^7\text{ L}} = 1{,}5 \cdot 10^9 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_G = 1{,}5 \cdot 10^9\ C_S$

Alternativa **e**.

15 Indicando por C e P as idades de Cristina e Paulo, respectivamente, temos:

$\frac{C}{P} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P}{C} = \frac{4}{1}$

Logo, a razão da idade de Paulo para a idade de Cristina é $\frac{4}{1}$.

16 a) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$

b) $\frac{A_2}{A_1} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{A_1 + A_2}{A_2} = \frac{18 + 15}{15} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$

d) A inversa de $\frac{2A_1}{3A_2}$ é dada por:

$\frac{3A_2}{2A_1} = \frac{3 \cdot 15}{2 \cdot 18} = \frac{45}{36} = \frac{5}{4}$

17 a) $\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{24}{12} = \frac{2}{1}$

b) $\frac{V_{II}}{V_I} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{V_I}{V_I + V_{II}} = \frac{24}{24 + 12} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

d) A inversa de $\frac{5V_I}{4V_{II}}$ é dada por:

$\frac{4V_{II}}{5V_I} = \frac{4 \cdot 12}{5 \cdot 24} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

18 a) V, pois o produto dos extremos é igual ao produto dos meios: $6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$

b) F, pois $2 \cdot 7 \neq 6 \cdot 3$

c) V, pois $4 \cdot 4 \neq 5 \cdot 8$

19 Temos que $\frac{4}{10} = \frac{6}{15}$; logo, os números 4 e 6 são, respectivamente, proporcionais aos números 10 e 15.

20 Temos que $\frac{3}{4} \neq \frac{6}{12}$; logo, os números 3 e 6 não são, respectivamente, proporcionais a 4 e 12.

21 Temos que $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$; logo, os números 2, 3, 6 e 9 formam uma proporção, nessa ordem.

22 a) $\frac{2}{x} = \frac{6}{15} \Rightarrow 6x = 30$

$\therefore x = \frac{30}{6} = 5$

b) $\frac{x}{3} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2x = 27$

$\therefore x = \frac{27}{2}$

c) $\frac{4}{3} = \frac{x}{5} \Rightarrow 3x = 20$

$\therefore x = \frac{20}{3}$

d) $\frac{x+1}{6} = \frac{x-1}{3} \Rightarrow 6x - 6 = 3x + 3$

$\therefore 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

e) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{6x} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{8}{6x}$

$\therefore 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

23 Indicando por b a área do terreno B, em metro quadrado, temos:

$\frac{300}{b} = \frac{5}{6} \Rightarrow b = \frac{1.800}{5} = 360$

Logo, a área do terreno B é 360 m^2.

24 Indicando por x a capacidade do jarro, em mililitro, temos:

$\frac{x}{210} = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \frac{1.470}{3} = 490$

Logo, a capacidade do jarro é 490 mL.

25 Indicando por y a massa do oxigênio, em grama, temos:

$\frac{16}{y} = \frac{1}{8} \Rightarrow y = 128$

Logo, a massa de oxigênio é 128 g.

26 Indicando por s a quantidade de sal, em grama, temos:

$\frac{s}{240} = \frac{3}{8} \Rightarrow s = \frac{720}{8} = 90$

Logo, a quantidade de sal é 90 g.

27 Indicando por q a quantidade de níquel, em grama, temos:

$\frac{9}{q} = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \frac{36}{3} = 12$

Logo, a moeda contém 12 g de níquel.

28 Indicando por x a quantidade de votos do candidato A, temos:

$\frac{450}{800} = \frac{x}{160.000} \Rightarrow x = 90.000$

Logo, o candidato A terá 90.000 votos.

29 Indicando por r o número estimado de rãs, temos:

$\frac{12}{50} = \frac{90}{r} \Rightarrow r = 375$

Logo, o número estimado de rãs do charco é 375.

30 Indicando por l a largura do retângulo, em centímetro, temos que o comprimento, em centímetro, é $l + 4$.

Assim:

$\frac{l+4}{l} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5l = 3l + 12$

$\therefore 2l = 12 \Rightarrow l = 6$

Logo, a área A do retângulo é dada por:

$A = 6 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 60 \text{ cm}^2$

31 Indicando por L o número de pontos de Luiz, temos que o número de pontos de Pedro é $L + 800$.

Assim:

$\frac{L+800}{L} = \frac{5}{4} \Rightarrow 5L = 4L + 3.200$

$\therefore L = 3.200$

Logo, Luiz fez 3.200 pontos na partida final.

32 Indicando por C o salário de Carlos, temos que o salário de João é C − 500.

Assim:

$\frac{C}{C - 500} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3C - 1.500 = 2C$

$\therefore C = 1.500$

Logo, o salário de Carlos é R$ 1.500,00.

33 Indicando por x o tempo, em segundo, para o escoamento de 135.000 L de água, temos:

$\frac{75.000}{23} = \frac{135.000}{x} \Rightarrow x = 41,4$

Logo, 135.000 L de água escoam pela comporta em 41,4 s.

34 $\frac{x}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow x = 10$

35 $\frac{3x-1}{6} = \frac{4x+1}{15} \Rightarrow 45x - 15 = 24x + 6$

$\therefore 21x = 21 \Rightarrow x = 1$

36 $\frac{4}{x} = \frac{y}{15} = \frac{8}{z} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 20 \\ 5y = 30 \\ 2z = 40 \end{cases}$

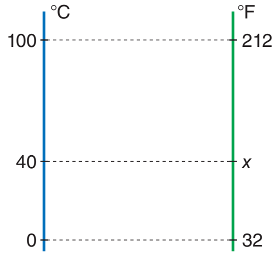
$\therefore x = 10, y = 6 \text{ e } z = 20$

37 $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{b}{a}$

38 $\frac{a}{3} + 1 = \frac{b}{6} + 1 \Rightarrow \frac{a+3}{3} = \frac{b+6}{6}$

39



$\frac{40 - 0}{100 - 0} = \frac{x - 32}{212 - 32} \Rightarrow \frac{40}{100} = \frac{x - 32}{180}$

$\therefore 100x - 3.200 = 7.200 \Rightarrow 100x = 10.400$

$\therefore x = 104$

Alternativa **a**.

40 Indicando por x e y os números procurados, temos:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 42 & \text{(I)} \\ \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{2+5}{5} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\dfrac{42}{y} = \dfrac{7}{5} \Rightarrow y = 30$

Substituindo y por 30 em (I), obtemos:

$x + 30 = 42 \Rightarrow x = 12$

Logo, os números procurados são 12 e 30.

41
$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5} \\ x + y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{3+5}{5} & \text{(I)} \\ x + y = 32 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\dfrac{32}{y} = \dfrac{8}{5} \Rightarrow y = 20$

Substituindo y por 20 em (II), obtemos:

$x + 20 = 32 \Rightarrow x = 12$

42 Indicando por a e g os volumes, em litro, de álcool e gasolina, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + g = 40 \\ \dfrac{a}{g} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + g = 40 & \text{(I)} \\ \dfrac{a+g}{g} = \dfrac{2+3}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\dfrac{40}{g} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow g = 24$

Substituindo g por 24 em (I), obtemos:

$a + 24 = 40 \Rightarrow a = 16$

Logo, a mistura contém 16 L de álcool e 24 L de gasolina.

43 Indicando por P e R as massas, em quilograma, de Paulo e Roberto, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} P + R = 119 \\ \dfrac{P}{R} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + R = 119 & \text{(I)} \\ \dfrac{P+R}{R} = \dfrac{4+3}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\dfrac{119}{R} = \dfrac{7}{3} \Rightarrow R = 51$

Logo, a massa de Roberto é 51 kg.

44
$$\begin{cases} x + y = 14 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 14 & \text{(I)} \\ \dfrac{x+y}{y} = \dfrac{4+3}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\dfrac{14}{y} = \dfrac{7}{3} \Rightarrow y = 6$

Substituindo y por 6 em (I), obtemos:

$x + 6 = 14 \Rightarrow x = 8$

Logo, a área A do retângulo é dada por:

$A = 8 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$

45 Indicando por A e C as quantidades, em metro cúbico, de areia e cimento, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} A + C = 18 \\ \dfrac{C}{A} = \dfrac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + C = 18 & \text{(I)} \\ \dfrac{C+A}{A} = \dfrac{2+7}{7} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\dfrac{18}{A} = \dfrac{9}{7} \Rightarrow A = 14$

Substituindo A por 14 em (I), obtemos:

$14 + C = 18 \Rightarrow C = 4$

Logo, para realizar o serviço são necessários 14 m^3 de areia e 4 m^3 de cimento.

46 Calculando a razão entre a área alagada e a potência produzida para cada usina, temos:

Tucuruí: $\dfrac{2.430 \text{ km}^2}{4.240 \text{ MW}} \approx 0{,}57 \text{ km}^2/\text{MW}$

Sobradinho: $\dfrac{4.214 \text{ km}^2}{1.050 \text{ MW}} \approx 4{,}01 \text{ km}^2/\text{MW}$

Itaipu: $\dfrac{1.350 \text{ km}^2}{12.600 \text{ MW}} \approx 0{,}11 \text{ km}^2/\text{MW}$

Ilha Solteira: $\dfrac{1.077 \text{ km}^2}{3.230 \text{ MW}} \approx 0{,}33 \text{ km}^2/\text{MW}$

Furnas: $\dfrac{1.450 \text{ km}^2}{1.312 \text{ MW}} \approx 1{,}11 \text{ km}^2/\text{MW}$

Como a maior razão foi obtida para a usina de Sobradinho, concluímos que o maior prejuízo ambiental corresponde a essa usina.

Alternativa **e**.

47 Indicando por p a quantidade de litros de água potável contaminada, temos:

$\dfrac{10}{10^7} = \dfrac{1.000}{p} \Rightarrow p = 10^9$

Alternativa **e**.

48 Indicando por A a área da cidade, em metro quadrado, temos:

$\dfrac{A}{40} = \dfrac{10.000}{0{,}08} \Rightarrow A = 5.000.000$

Logo, a área da cidade é 5.000.000 m^2.

Alternativa **e**.

49 Indicando por x o tempo procurado, em anos, temos:

$\dfrac{45}{4{,}5 \cdot 10^9} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x \approx 10.000$

Alternativa **d**.

50 Pedro Álvares Cabral chegou ao Brasil há 500 anos, aproximadamente. Comprimindo-se a idade real da Terra em apenas um ano, a fração x, desse ano, equivalente a 500 anos reais é dada por:

$\dfrac{500}{4.500.000.000} = \dfrac{x}{1} \Rightarrow x \approx 0{,}0000001$ ano

Convertendo esse tempo para segundos, obtemos a aproximação:

$$x \approx 3{,}1 \text{ s}$$

Logo, na escala adotada, Pedro Álvares Cabral chegou ao Brasil 3,1 segundos antes da meia-noite de 31 de Dezembro.

Alternativa **e**.

51 $\dfrac{a}{5} - 1 = \dfrac{b}{8} - 1 \Rightarrow \dfrac{a-5}{5} = \dfrac{b-8}{8}$

52 Indicando por x e y, com $x > y$, os dois números procurados, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{3} \\ x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{y} = \dfrac{4-3}{3} & \text{(I)} \\ x - y = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\frac{6}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 18$

Substituindo y por 18 em (II), obtemos:

$x - 18 = 6 \Rightarrow x = 24$

Logo, os números são 24 e 18.

53 Indicando por x e y, com $x > y$, os números procurados, temos:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{3}{5} \\ x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y - x}{x} = \frac{3 - 5}{5} \\ x - y = 16 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{y - x}{x} = -\frac{2}{5} & \text{(I)} \\ y - x = -16 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$-\frac{16}{x} = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = 40$

Substituindo x por 40 em (II), obtemos:

$y - 40 = -16 \Rightarrow y = 24$

Logo, os números procurados são 24 e 40.

54 Indicando, respectivamente, por c e h o comprimeto e a altura, em metro, temos:

$$\begin{cases} \frac{c}{h} = \frac{5}{3} \\ c - h = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c - h}{h} = \frac{5 - 3}{3} & \text{(I)} \\ c - h = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\frac{10}{h} = \frac{2}{3} \Rightarrow h = 15$

Substituindo h por 15 em (II), obtemos:

$c - 15 = 10 \Rightarrow c = 25$

Logo, os branquiossauros podiam atingir 25 m de comprimento e 15 m de altura.

55 Indicando, respectivamente, por x e y a quantidade de água colocada na panela e a quantidade de água evaporada, em mililitro, temos:

$$\begin{cases} x - y = 600 \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 600 & \text{(I)} \\ \frac{x - y}{y} = \frac{4 - 1}{1} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{600}{y} = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 200$

Logo, a quantidade de água evaporada foi de 200 mL.

56 a) $\frac{a}{d} = \frac{b}{4} = \frac{c}{9} \Rightarrow \frac{a + b + c}{d + 4 + 9} = \frac{a}{d} = \frac{b}{4} = \frac{c}{9} = 2$

b) Do item a, temos:

$\frac{b}{4} = \frac{c}{9} = 2 \Rightarrow b = 8 \text{ e } c = 18$

57
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 & \text{(I)} \\ \frac{x + y + z}{6 + 3 + 9} = \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{12}{18} = \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = 2 \text{ e } z = 6$

58
$$\begin{cases} a + b + c + d = 20 \\ \frac{a}{3} = \frac{b}{9} = \frac{c}{12} = \frac{d}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 20 & \text{(I)} \\ \frac{a + b + c + d}{3 + 9 + 12 + 6} = \frac{a}{3} = \frac{b}{9} = \frac{c}{12} = \frac{d}{6} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{20}{30} = \frac{a}{3} = \frac{b}{9} = \frac{c}{12} = \frac{d}{6} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 6 \text{ e } c = 8 \text{ e } d = 4$

59
$$\begin{cases} x + y + z = 18.000 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18.000 & \text{(I)} \\ \frac{x + y + z}{3 + 4 + 2} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{18.000}{9} = \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2} \Rightarrow x = 6.000 \text{ e } y = 8.000 \text{ e } z = 4.000$

Logo, José, Marcelo e Alex devem receber R$ 6.000,00, R$ 8.000,00 e R$ 4.000,00 respectivamente.

60 a)
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 & \text{(I)} \\ \frac{x + y}{y} = \frac{3 + 7}{7} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{20}{y} = \frac{10}{7} \Rightarrow y = 14$

Substituindo y por 14 em (I), concluímos:

$x + 14 = 20 \Rightarrow x = 6$

b)
$$\begin{cases} x - y = 8 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 8 & \text{(I)} \\ \frac{x - y}{y} = \frac{2 - 1}{1} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{8}{y} = \frac{1}{1} \Rightarrow y = 8$

Substituindo y por 8 em (I), concluímos:

$x - 8 = 8 \Rightarrow x = 16$

c)
$$\begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 6 \\ \frac{x - y}{y} = \frac{2 - 3}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y - x = 6 & \text{(I)} \\ \frac{y - x}{y} = \frac{1}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{6}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 18$

Substituindo y por 18 em (I), concluímos:

$18 - x = 6 \Rightarrow x = 12$

d)
$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 & \text{(I)} \\ \frac{x + y + z}{3 + 2 + 1} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{12}{6} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow x = 6 \text{ e } y = 4 \text{ e } z = 2$$

e) $\begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{x}{12} = \dfrac{y}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{12}{15} \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} x + y = 9 & \text{(I)} \\ \dfrac{x + y}{y} = \dfrac{12 + 15}{15} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{9}{y} = \frac{27}{15} \Rightarrow y = 5$$

Substituindo y por 5 em (I), concluímos:

$x + 5 = 9 \Rightarrow x = 4$

61 $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{9} \Rightarrow \dfrac{a}{3} = \dfrac{4b}{24} = \dfrac{5c}{45}$

$$\therefore \frac{a + 4b + 5c}{3 + 24 + 45} = \frac{a}{3} = \frac{4b}{24} = \frac{5c}{45}$$

Como $a + 4b + 5c = 48$, concluímos:

$$\frac{48}{72} = \frac{a}{3} = \frac{4b}{24} = \frac{5c}{45} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 4 \text{ e } c = 6$$

62 $\begin{cases} a + 3b + c + 2d = 18 \\ \dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{9} = \dfrac{d}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3b + c + 2d = 18 \\ \dfrac{a}{3} = \dfrac{3b}{18} = \dfrac{c}{9} = \dfrac{2d}{24} \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} a + 3b + c + 2d = 18 & \text{(I)} \\ \dfrac{a + 3b + c + 2d}{3 + 18 + 9 + 24} = \dfrac{a}{3} = \dfrac{3b}{18} = \dfrac{c}{9} = \dfrac{2d}{24} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{18}{54} = \frac{a}{3} = \frac{3b}{18} = \frac{c}{9} = \frac{2d}{24} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 2 \text{ e } c = 3$$

e $d = 4$

63 a) $\bar{x} = \dfrac{2 + 3 + 5 + 8 + 6}{5} = 4{,}8$

b) $\bar{x} = \dfrac{3{,}5 + 4{,}0 + 2{,}8 + 4{,}2}{4} = 3{,}625$

c) $\bar{x} = \dfrac{1 + 0 + 6 + 0 + 3 + 1 + 1 + 2}{8} = 1{,}75$

d) $\bar{x} = \dfrac{8{,}21 + 3{,}04 + 2{,}75 + 6{,}00}{4} = 5$

64 $\bar{x} = \dfrac{2.700 + 2.900 + 3.100}{3} = 2.900$

Logo, a média de contribuição de cada um foi de R\$ 2.900,00.

65 $\bar{x} = \dfrac{312.825}{258} = 1.212{,}50$

Logo, o salário médio por operário é R\$ 1.212,50.

66 A média $\bar{x}$ de tempo por eleitor, nos cinco primeiros votos, é dada por:

$$\bar{x} = \frac{1 \text{ min } 28 \text{ s} + 2 \text{ min } 04 \text{ s} + 1 \text{ min } 50 \text{ s} + 1 \text{ min } 16 \text{ s} + 1 \text{ min } 22 \text{ s}}{5} =$$

$= 1$ min 36 s

Logo, o tempo previsto para os 400 eleitores é $400 \cdot (1 \text{ min } 36 \text{ s}) = 640 \text{ min} = 10 \text{ h } 40 \text{ min}$

Alternativa **c**.

67 Sejam $n_{21}, n_{20}, n_{19}, \ldots, n_1$ as notas dos 21 alunos em ordem decrescente. Indicando por $\overline{x_A}$ e $\overline{x_B}$ as médias das notas dos grupos A e B, antes da transferência da nota n_{11}, e por $\overline{\overline{x_A}}$ e $\overline{\overline{x_B}}$ as médias após a transferência, temos:

$$\overline{x_A} = \frac{n_{21} + n_{20} + n_{19} + \ldots + n_{12} + n_{11}}{11}$$

$$\overline{x_B} = \frac{n_{10} + n_9 + n_8 + \ldots + n_1}{10}$$

$$\overline{\overline{x_A}} = \frac{n_{21} + n_{20} + n_{19} + \ldots + n_{12}}{10}$$

$$\overline{\overline{x_B}} = \frac{n_{11} + n_{10} + n_9 + \ldots + n_1}{11}$$

I. Para comparar $\overline{x_A}$ com $\overline{\overline{x_A}}$, calculamos a diferença $\overline{\overline{x_A}} - \overline{x_A}$, obtendo:

$$\overline{\overline{x_A}} - \overline{x_A} = \frac{n_{21} + n_{20} + n_{19} + \ldots + n_{12} - 10n_{11}}{110}$$

Como n_{11} é menor que cada uma das parcelas $n_{21}, n_{20}, n_{19}, \ldots$ e n_{12}, concluímos que $\overline{\overline{x_A}} - \overline{x_A} > 0$ e, portanto:

$$\overline{\overline{x_A}} > \overline{x_A}$$

II. Para comparar $\overline{x_B}$ com $\overline{\overline{x_A}}$, calculamos a diferença $\overline{x_B} - \overline{\overline{x_B}}$, obtendo:

$$\overline{x_B} - \overline{\overline{x_B}} = \frac{n_{10} + n_9 + n_8 + \ldots + n_1 - 10n_{11}}{110}$$

Como n_{11} é maior que cada uma das parcelas $n_{10}, n_9, n_8, \ldots$ e n_1, concluímos que $\overline{x_B} - \overline{\overline{x_B}} < 0$ e, portanto:

$$\overline{\overline{x_B}} > \overline{x_B}$$

Por (I) e (II), podemos afirmar que as médias aritméticas dos dois grupos aumentaram após a transferência da nota n_{11} do grupo A para o grupo B.

Alternativa **c**.

68 Indicando os cem números por $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{98}$, x e y, temos:

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{98} + x + y}{100} = 9{,}83 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{98} = 983 - x - y$$

$$\therefore \frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{98}}{98} = \frac{983 - x - y}{98} = 8{,}5$$

Assim temos:

$$\begin{cases} \dfrac{983 - x - y}{98} = 8{,}5 \\ 3x - 2y = 125 \end{cases} \Rightarrow x = 85 \text{ e } y = 65$$

Alternativa **c**.

69 $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 16$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 80$

Para que x_5 seja o maior possível, x_1, x_2, x_3 e x_4 devem ser os menores possíveis, ou seja, 1, 2, 3, 4. Logo:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + x_5}{5} = 16 \Rightarrow 10 + x_5 = 80$$

$x_5 = 70$

Alternativa **d**.

70 A média $\overline{x}_B$ de investimentos do Brasil na França, em milhões de dólares, é dada por:

$$\overline{x}_B = \frac{367 + 357 + 354 + 539 + 280}{5} = 379{,}4$$

A média $\overline{x}_F$ de investimentos da França no Brasil, em milhões de dólares, é dada por:

$$\overline{x}_F = \frac{825 + 485 + 1.458 + 744 + 1.214}{5} = 945{,}2$$

Assim, concluímos que os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores em 565,80 milhões de dólares.

Alternativa **d**.

71 a) $\dfrac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 15 \cdot 2}{4 + 1 + 3 + 2} = 6{,}5$

b) $\dfrac{3{,}2 \cdot 3 + 4{,}1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 3{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot 6}{3 + 2 + 1 + 1 + 6} \approx 3{,}02$

c) $\dfrac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 9 \cdot 4}{6 + 3 + 4} \approx 3{,}69$

d) $\dfrac{4{,}25 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3{,}4 \cdot 5 + 6{,}8 \cdot 1}{4 + 3 + 5 + 1} = 3{,}6$

e) $\dfrac{5{,}2 \cdot 1{,}4 + 3{,}0 \cdot 1{,}6 + 2{,}4 \cdot 5}{1{,}4 + 1{,}6 + 5} = 3{,}01$

72 $\dfrac{189{,}00 \cdot 10 + 195{,}00 \cdot 18 + 204{,}00 \cdot 32}{10 + 18 + 32} = 198{,}80$

Logo, o preço médio da cesta básica foi R$ 198,80.

73 $\dfrac{1{,}68 \cdot 50 + 1{,}60 \cdot 120 + 1{,}70 \cdot 30}{50 + 120 + 30} = 1{,}635$

Logo, a estatura média das mulheres dessa região é 1,635 m.

74 $\dfrac{100 \cdot 45 \cdot 18 + 120 \cdot 45 \cdot 8 + 180 \cdot 45 \cdot 4}{18 + 8 + 4} = 5.220$

Logo, o salário médio mensal desses professores é R$ 5.220,00.

75 A média $\overline{x}$ de idade, em anos, da população da reunião de A e T é dada por:

$$\overline{x} = \frac{30 \cdot 1.200.000.000 + 25 \cdot 6.000.000}{1.206.000.000} \approx 29{,}975$$

Logo, $\overline{x} > 29{,}9$

76 a) A média $\overline{x}$, antes da atribuição dos 5 pontos, é dada por:

$$\overline{x} = \frac{8 \cdot 65 + 12 \cdot 77}{20} = 72{,}2$$

b) Indicando por r o número de alunos reprovados, após a atribuição dos pontos extras, temos:

$$\frac{r \cdot 68{,}8 + (20 - r) \cdot 80}{20} = 77{,}2 \Rightarrow r = 5$$

Logo, dos alunos reprovados inicialmente, 3 foram aprovados.

77 A nota média $\overline{x}$ é dada por:

$$\overline{x} = \frac{6{,}40 \cdot 30 + 5{,}20 \cdot 50}{30 + 50} = 5{,}65$$

Alternativa **a**.

78 Indicando por m o número de mulheres, temos que o número de homens é $120 - m$. Assim:

$$\frac{35m + 50(120 - m)}{120} = 40 \Rightarrow m = 80$$

Logo, o grupo é formado por 80 mulheres e 40 homens.

79 Indicando por m o número de mulheres, temos que o número de homens é $100 - m$. Assim:

$$\frac{380m + 520(100 - m)}{100} = 422 \Rightarrow m = 70$$

Logo, há 70 mulheres no grupo.

80 A velocidade média v é dada por:

$$v = \frac{270 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 90 \text{ km/h}$$

81 A distância d, em km, é dada por:

$$82{,}5 = \frac{d}{0{,}8} \Rightarrow d = 66$$

Logo, a distância entre Ribeirão Preto e São Joaquim da Barra é 66 km.

82 O tempo t, em hora, é dado por:

$$80 = \frac{78}{t} \Rightarrow t = 0{,}975$$

Logo, Paulo fez a viagem em 0,975 h, o que equivale a 58,5 minutos.

83 Indicando por d a distância, em quilômetro, entre São Paulo e Boa Vista, e por t o tempo, em hora, gasto para o avião a hélice percorrer a distância d, temos:

$$\begin{cases} 275 = \dfrac{d}{t} \\[2ex] 660 = \dfrac{d}{t - 7} \end{cases} \Rightarrow t = 12 \text{ e } d = 3.300$$

Logo, a distância entre São Paulo e Boa Vista é 3.300 km.

84 a) O tempo t, em hora, é dado por:

$$200 = \frac{250}{t} \Rightarrow t = 1{,}25$$

Logo, o avião percorre 250 km em 1,25 h, o que equivale a 1 h 15 min.

b) A quantidade mínima q de combustível, em litro, é dada por:

$q = 35 \cdot (1{,}25 + 0{,}75) = 70$

Logo, para a viagem de 250 quilômetros o avião deve estar abastecido com pelo menos 70 L de combustível.

85 Sendo c o comprimento do circuito, em km, e v a velocidade, em km/h, para que o piloto complete o circuito em 5 minutos, temos:

$$\begin{cases} v = \dfrac{c}{\frac{1}{12}} \\[3ex] v + 12 = \dfrac{c}{\frac{1}{12} - \frac{1}{60}} \end{cases} \Rightarrow v = 48 \text{ e } c = 4$$

Logo, o circuito tem 4 km de comprimento.

Alternativa **a**.

86 A densidade demográfica d de Caruaru em 2009 é dada por:

$$d = \frac{298.500 \text{ hab}}{920 \text{ km}^2} \approx 324{,}5 \text{ hab/km}^2$$

87 O número n de habitantes de Vitória, em 2009, é dado por:

$$3.428{,}53 = \frac{n}{93{,}38} \Rightarrow n \approx 320.156$$

Logo, Vitória tinha, em 2009, aproximadamente 320.156 habitantes.

88 A área A de Salvador, em quilômetro quadrado, é dada por:

$$4.241{,}74 = \frac{2.998.056}{A} \Rightarrow A \approx 706{,}8$$

Logo, a área de Salvador é 706,8 km^2, aproximadamente.

89 $\frac{800 + x}{10 + 17} = 100 \Rightarrow x = 1.900$

90 A densidade d da rolha é dada por:

$$d = \frac{1{,}92 \text{ g}}{6 \text{ cm}^3} = 0{,}32 \text{ g/cm}^3$$

91 O volume V da moeda, em centímetro cúbico, é dado por:

$$3{,}25 = \frac{4{,}875}{V} \Rightarrow V = 1{,}5$$

Logo, o volume da moeda é 1,5 cm^3.

92 Sendo V o volume de ouro da coroa, que é igual ao volume de prata, sendo d a densidade da coroa, em grama por centímetro cúbico, temos:

$$d = \frac{19{,}3\ V + 10{,}5\ V}{2\ V} \Rightarrow d = 14{,}9$$

Logo, a densidade da coroa é 14,9 g/cm^3.

93 Sendo v e $2v$ os volumes de prata e ouro da coroa, a densidade d, em grama por centímetro cúbico, é calculada por:

$$d = \frac{19{,}3 \cdot 2v + 10{,}5 \cdot v}{3v} \Rightarrow d \approx 16{,}37$$

Logo, a densidade da coroa é aproximadamente 16,37 g/cm^3.

94 O volume V de combustível, em litros, para completar 16 voltas é dado pela regra de três:

Volume (litros)	distância (km)
75	100
V	112

De onde obtemos: V = 84 L.

A massa m, em quilograma, do combustível necessário para as 16 voltas e dada pela regra de três:

Massa (kg)	Volume (litro)
0,78	1
m	84

De onde obtemos: m = 63 kg.

Logo, ao retornar à pista, o carro deve ter, no mínimo, (605 + 63) kg, ou seja, 668 kg.

Alternativa **b**.

95 Sendo c o comprimento real, em centímetro, temos:

$$\frac{3{,}4}{c} = \frac{1}{85.000} \Rightarrow c = 289.000$$

Assim, o comprimento real c é 289.000 cm, o que equivale a 2.890 m.

96 Indicando por c a distância, em centímetro, entre Curitiba e Florianópolis, temos:

$$\frac{1}{7.500.000} = \frac{4}{c} \Rightarrow c = 30.000.000$$

Convertendo essa medida para quilômetro, obtemos:

c = 300 km

97 Sendo c a distância real, em centímetro, temos:

$$\frac{1}{10.000.000} = \frac{1{,}7}{c} \Rightarrow c = 17.000.000$$

Convertendo essa medida para metro, obtemos:

c = 170.000 m

Alterntiva **b**.

98 Indicando por c a distância real, em centímetro, temos:

$$\frac{1}{25.000.000} = \frac{1{,}5}{c} \Rightarrow c = 37.500.000$$

Convertendo essa medida para quilômetro, obtemos:

c = 375 km

Alterntiva **e**.

99 Sendo c a medida real do lado do quadrado, em centímetro, temos:

$$\frac{1}{500.000} = \frac{7}{c} \Rightarrow c = 3.500.000$$

Convertendo essa medida para quilômetro, obtemos:

c = 35 km

Logo, a área A da reserva é dada por:

A = 35^2 km^2 = 1.225 km^2

Alternativa **b**.

100 Sendo c o comprimento real, em centímetro, temos:

$$\frac{1}{9} = \frac{5}{c} \Rightarrow c = 45$$

Logo, a blusa terá 45 cm de comprimento.

101 $\frac{3 \text{ cm}}{600 \text{ m}} = \frac{3 \text{ cm}}{60.000 \text{ cm}} = \frac{1}{20.000}$

Logo, a escala adotada foi 1 : 20.000

102 $\frac{5 \text{ cm}}{250 \text{ km}} = \frac{5 \text{ cm}}{25.000.000 \text{ cm}} = \frac{1}{5.000.000}$

Alternativa **e**.

103 Indicando por c e l as medidas do desenho, em centímetro, correspondentes a 36 m e 28,5 m, respectivamente, temos:

$$\frac{1}{150} = \frac{c}{3.600} \Rightarrow c = 24$$

$$\frac{1}{150} = \frac{l}{2.850} \Rightarrow l = 19$$

Assim, o desenho deve ocupar um retângulo de dimensões 19 cm e 24 cm. Acrescentando 2 cm a cada uma dessas dimensões, obtêm-se as medidas da folha, ou seja, 21 cm × 26 cm.

Alternativa **d**.

104 a) $\frac{1}{4} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24}$
Logo, as sequências são diretamente proporcionais.

b) $\frac{4}{10} \neq \frac{8}{15}$
Logo, as sequências não são diretamente proporcionais.

c) $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{1}$

Logo, as sequências são diretamente proporcionais.

105 $\frac{8}{4} = \frac{x}{5} = \frac{12}{y} = \frac{z}{3} \Rightarrow x = 10$ e $y = 6$ e $z = 6$

106 Indicando por l e h, respectivamente, a largura e a altura do paralelepípedo, em centímetro, temos:

$$\frac{6}{4} = \frac{l}{2} = \frac{h}{1} \Rightarrow l = 3 \text{ e } h = \frac{3}{2}$$

Logo, o volume V do paralelepípedo é dado por:

$$V = \left(6 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}\right) \text{cm}^3 = 27 \text{ cm}^3$$

107 Indicando, respectivamente, por b e r as estaturas, em metro, de Beto e Ricardo, temos:

$$\frac{2{,}07}{6{,}9} = \frac{b}{7} = \frac{r}{6{,}6} \Rightarrow b = 2{,}1 \text{ e } r = 1{,}98$$

Assim, a estatura de Beto é 2,1 m e a de Ricardo é 1,98 m.

108 $\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 30 & \text{(I)} \\ \frac{x + y + z}{3 + 2 + 1} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{30}{6} = \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \Rightarrow x = 15$ e $y = 10$ e $z = 5$

109 $\begin{cases} x + y + z = 16{,}6 \\ \frac{x}{2{,}2} = \frac{y}{1{,}3} = \frac{z}{4{,}8} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 16{,}6 & \text{(I)} \\ \frac{x + y + z}{2{,}2 + 1{,}3 + 4{,}8} = \frac{x}{2{,}2} = \frac{y}{1{,}3} = \frac{z}{4{,}8} & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{16{,}6}{8{,}3} = \frac{x}{2{,}2} = \frac{y}{1{,}3} = \frac{z}{4{,}8} \Rightarrow x = 4{,}4$ e $y = 2{,}6$ e $z = 9{,}6$

110 Indicando, respectivamente, por g, r e c as quantidades, em quilograma, de água, areia e cimento, temos:

$\begin{cases} g + r + c = 45 \\ \frac{g}{2} = \frac{r}{6} = \frac{c}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g + r + c = 45 & \text{(I)} \\ \frac{g + r + c}{2 + 6 + 1} = \frac{g}{2} = \frac{r}{6} = \frac{c}{1} & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{45}{9} = \frac{g}{2} = \frac{r}{6} = \frac{c}{1} \Rightarrow g = 10$ e $r = 30$ e $c = 5$

Logo, as quantidades de água, areia e cimento são 10 kg, 30 kg e 5 kg, respectivamente.

111 Indicando, respectivamente, por p, s e t as quantidades, em litro, despejadas pela torneira nas 1ª, 2ª e 3ª etapas, temos:

$\begin{cases} p + s + t = 5.850 \\ \frac{p}{2} = \frac{s}{3} = \frac{t}{1{,}5} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} p + s + t = 5.850 & \text{(I)} \\ \frac{p + s + t}{2 + 3 + 1{,}5} = \frac{p}{2} = \frac{s}{3} = \frac{t}{1{,}5} & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{5.850}{6{,}5} = \frac{p}{2} = \frac{s}{3} = \frac{t}{1{,}5} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 1.800$ e $s = 2.700$ e $t = 1.350$

Logo, as quantidades de água despejadas pela torneira nas 1ª, 2ª e 3ª etapas são, respectivamente, 1.800 L, 2.700 L e 1.350 L.

112 Indicando, respectivamente, por V, C e A os valores, em real, recebidos por Vicente, Cláudio e Álvaro, temos:

$\begin{cases} V + C + A = 520 \\ \frac{V}{3} = \frac{C}{4} = \frac{A}{6} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} V + C + A = 520 & \text{(I)} \\ \frac{V + C + A}{3 + 4 + 6} = \frac{V}{3} = \frac{C}{4} = \frac{A}{6} & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{520}{13} = \frac{V}{3} = \frac{C}{4} = \frac{A}{6} \Rightarrow V = 120$ e $C = 160$ e $A = 240$

Logo, Vicente, Cláudio e Álvaro receberam, respectivamente, R$ 120,00, R$ 160,00 e R$ 240,00.

113 Indicando, respectivamente, por p, m e g as quantidades de recipientes pequenos, médios e grandes, temos:

$\begin{cases} p + m + g = 1.200 \\ \frac{p}{1} = \frac{m}{2} = \frac{g}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} p + m + g = 1.200 & \text{(I)} \\ \frac{p + m + g}{1 + 2 + 3} = \frac{p}{1} = \frac{m}{2} = \frac{g}{3} & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{1.200}{6} = \frac{p}{1} = \frac{m}{2} = \frac{g}{3} \Rightarrow p = 200$ e $m = 400$ e $g = 600$

Logo, foram usados 200 recipientes pequenos, 400 médios e 600 grandes.

114 Indicando, respectivamente, por c e l o comprimento e a largura do retângulo, em centímetro, temos:

$\begin{cases} c + l = 21 \\ \frac{c}{8} = \frac{l}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + l = 21 & \text{(I)} \\ \frac{c + l}{8 + 6} = \frac{c}{8} = \frac{l}{6} & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$\frac{21}{14} = \frac{c}{8} = \frac{l}{6} \Rightarrow c = 12$ e $l = 9$

Logo, a área A do retângulo é dada por:

$A = (12 \cdot 9)$ cm² $= 108$ cm²

115 Indicando, respectivamente, por C, L e H o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo, em decímetro, temos:

$$\begin{cases} C + L + H = 11 \\ \dfrac{C}{1} = \dfrac{L}{\frac{1}{2}} = \dfrac{H}{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + L + H = 11 & \text{(I)} \\ \dfrac{C + L + H}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \dfrac{C}{1} = \dfrac{L}{\frac{1}{2}} = \dfrac{H}{\frac{1}{3}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\dfrac{11}{\frac{11}{6}} = \dfrac{C}{1} = \dfrac{L}{\frac{1}{2}} = \dfrac{H}{\frac{1}{3}} \Rightarrow C = 6 \text{ e } L = 3 \text{ e } H = 2$$

Logo, o volume V do paralelepípedo é dado por:

$V = (6 \cdot 3 \cdot 2)\ \text{dm}^3 = 36\ \text{dm}^3$

116 Indicando, respectivamente, por x e y as capacidades, em litro, das piscinas menor e maior, temos:

$$\begin{cases} x + y = 63.000 \\ \dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 63.000 & \text{(I)} \\ \dfrac{x + y}{18 + 24} = \dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{24} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\dfrac{63.000}{42} = \dfrac{x}{18} = \dfrac{y}{24} \Rightarrow x = 27.000 \text{ e } y = 36.000$$

Logo, as capacidades das piscinas são 27.000 L e 36.000 L.

117 Indicando, respectivamente, por a, b e c as produções das máquinas A, B e C, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 180 \\ \dfrac{a}{12} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{c}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 180 & \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c}{12 + 8 + 10} = \dfrac{a}{12} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{c}{10} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\dfrac{180}{30} = \dfrac{a}{12} = \dfrac{b}{8} = \dfrac{c}{10} \Rightarrow a = 72 \text{ e } b = 48 \text{ e } c = 60$$

Logo, as máquinas A, B e C produziram 72, 48 e 60 pratos, respectivamente.

118 Indicando por A_{I}, A_{II} e A_{III} as áreas, em metro quadrado, dos depósitos I, II e III, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}} = 90 \\ \dfrac{A_{\text{I}}}{90} = \dfrac{A_{\text{II}}}{60} = \dfrac{A_{\text{III}}}{120} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}} = 90 & \text{(I)} \\ \dfrac{A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}}}{90 + 60 + 120} = \dfrac{A_{\text{I}}}{90} = \dfrac{A_{\text{II}}}{60} = \dfrac{A_{\text{III}}}{120} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\dfrac{90}{270} = \dfrac{A_{\text{I}}}{90} = \dfrac{A_{\text{II}}}{60} = \dfrac{A_{\text{III}}}{120} \Rightarrow A_{\text{I}} = 30 \text{ e } A_{\text{II}} = 20 \text{ e } A_{\text{III}} = 40$$

Assim, a largura l do depósito III, em metro, é dada por:

$10l = 40 \Rightarrow l = 4$

Alternativa **d**.

119 O lucro deve ser dividido em partes diretamente proporcionais aos produtos $18.000 \cdot 6$, $12.000 \cdot 4$ e $20.000 \cdot 2$. Assim, indicando por L, M e R as partes que devem receber Luíza, Márcia e Roberta, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} L + M + R = 49.000 \\ \dfrac{L}{108.000} = \dfrac{M}{48.000} = \dfrac{R}{40.000} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L + M + R = 49.000 & \text{(I)} \\ \dfrac{L + M + R}{108.000 + 48.000 + 40.000} = \dfrac{L}{108.000} = \dfrac{M}{48.000} = \dfrac{R}{40.000} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\dfrac{49.000}{196.000} = \dfrac{L}{108.000} = \dfrac{M}{48.000} = \dfrac{R}{40.000} \Rightarrow$$

$\Rightarrow L = 27.000$ e $M = 12.000$ e $R = 10.000$

Logo, Luíza, Márcia e Roberta devem receber R\$ 27.000,00, R\$ 12.000,00 e R\$ 10.000,00, respectivamente.

120 O lucro L deve ser dividido em partes diretamente proporcionais aos produtos $6 \cdot 5.000$, $12 \cdot 2.500$ e $9 \cdot 3.000$. Assim, indicando, respectivamente, por A, C e E as partes do lucro que devem receber Antônio, Carlos e Ernesto, temos:

$$\begin{cases} A + C + E = L \\ \dfrac{A}{30.000} = \dfrac{C}{30.000} = \dfrac{E}{27.000} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C + E = L \ \text{(I)} \\ \dfrac{A + C + E}{30.000 + 30.000 + 27.000} = \dfrac{A}{30.000} = \dfrac{C}{30.000} = \dfrac{E}{27.000} \ \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{L}{87.000} = \frac{A}{30.000} = \frac{C}{30.000} = \frac{E}{27.000} \Rightarrow A = \frac{10L}{29} \text{ e } C = \frac{10L}{29} \text{ e } E = \frac{9L}{29}$$

Alternativa **c**.

121 O prejuízo deve ser dividido em partes diretamente proporcionais aos produtos $10 \cdot 24.000$, $8 \cdot 25.000$ e $5 \cdot 20.000$. Assim, indicando, respectivamente, por E, A e R as partes do prejuízo que cabem a Eduardo, Armando e Renata, temos:

$$\begin{cases} E + A + R = 162.000 \\ \dfrac{E}{240.000} = \dfrac{A}{200.000} = \dfrac{R}{100.000} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E + A + R = 162.000 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{E + A + R}{240.000 + 200.000 + 100.000} = \dfrac{E}{240.000} = \dfrac{A}{200.000} = \dfrac{R}{100.000} \ \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{162.000}{540.000} = \frac{E}{240.000} = \frac{A}{200.000} = \frac{R}{100.000} \Rightarrow$$

$\Rightarrow E = 72.000$ e $A = 60.000$ e $R = 30.000$

Logo, as partes do prejuízo que couberam a Eduardo, Armando e Renata foram R$ 72.000,00, R$ 60.000,00 e R$ 30.000,00, respectivamente.

122 **a)** $2 \cdot 14 = 4 \cdot 7 = 1 \cdot 28$

Logo, as sequências são inversamente proporcionais.

b) $12 \cdot 5 = 4 \cdot 15 = 6 \cdot 10 \neq 3 \cdot 30$

Logo, as sequências não são inversamente proporcionais.

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8}$

Logo, as sequências são inversamente proporcionais.

123 $9 \cdot 20 = x \cdot 60 = y \cdot 45 \Rightarrow x = 3$ e $y = 4$

124 $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = x \cdot 12 = 6 \cdot y = z \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{24}$ e $y = \frac{1}{12}$ e $z = \frac{5}{2}$

125
$$\begin{cases} x + y + z = 66 \\ \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{\frac{1}{4}} = \dfrac{z}{\frac{1}{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 66 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{x + y + z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{\frac{1}{4}} = \dfrac{z}{\frac{1}{6}} \ \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{66}{\frac{11}{12}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} \Rightarrow x = 36 \text{ e } y = 18 \text{ e } z = 12$$

126
$$\begin{cases} x + y + z = 52 \\ \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 52 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{x + y + z}{\frac{1}{2} + 2 + 4} = \dfrac{x}{\frac{1}{2}} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{4} \ \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{52}{\frac{13}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = 16 \text{ e } z = 32$$

127 Indicando, respectivamente, por a, b e c os descontos das residências A, B e C, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 56 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{28}} = \dfrac{b}{\frac{1}{14}} = \dfrac{c}{\frac{1}{7}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 56 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c}{\frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7}} = \dfrac{a}{\frac{1}{28}} = \dfrac{b}{\frac{1}{14}} = \dfrac{c}{\frac{1}{7}} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{56}{\frac{7}{28}} = \frac{a}{\frac{1}{28}} = \frac{b}{\frac{1}{14}} = \frac{c}{\frac{1}{7}} \Rightarrow a = 8 \text{ e } b = 16 \text{ e } c = 32$$

Logo, as residências A, B e C tiveram descontos de R$ 8,00, R$ 16,00 e R$ 32,00, respectivamente.

128 a) $\begin{cases} x + y + z = 1.280 \\ \dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1.280 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{x + y + z}{8 + 5 + 7} = \dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{1.280}{20} = \frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow x = 512 \text{ e } y = 320 \text{ e } z = 448$$

Logo, as quantias diretamente proporcionais a 8,5 e 7 são R$ 512,00, R$ 320,00 e R$ 448,00, respectivamente.

b) $\begin{cases} a + b + c = 1.280 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{5}} = \dfrac{b}{\frac{1}{2}} = \dfrac{c}{\frac{1}{10}} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 1.280 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}} = \dfrac{a}{\frac{1}{5}} = \dfrac{b}{\frac{1}{2}} = \dfrac{c}{\frac{1}{10}} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{1.280}{\frac{8}{10}} = \frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{1}{10}} \Rightarrow a = 320 \text{ e } b = 800 \text{ e } c = 160$$

Logo, as quantias inversamente proporcionais a 5, 2 e 10 são R$ 320,00, R$ 800,00 e R$ 160,00, respectivamente.

129 Indicando, respectivamente, por a, b e c as áreas, em quilômetro quadrado, dos municípios A, B e C, temos.

$$\begin{cases} a + b + c = 495 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{120}} = \dfrac{b}{\frac{1}{80}} = \dfrac{c}{\frac{1}{40}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 495 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c}{\frac{1}{120} + \frac{1}{80} + \frac{1}{40}} = \dfrac{a}{\frac{1}{120}} = \dfrac{b}{\frac{1}{80}} = \dfrac{c}{\frac{1}{40}} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{495}{\frac{11}{240}} = \frac{a}{\frac{1}{120}} = \frac{b}{\frac{1}{80}} = \frac{c}{\frac{1}{40}} \Rightarrow a = 90 \text{ e } b = 135 \text{ e } c = 270$$

Logo, as áreas dos municípios A, B e C são 90 km^2, 135 km^2 e 270 km^2, respectivamente.

130 Indicando, respectivamente, por a, b e c os volumes, em centímetro cúbico, das bolas A, B e C, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 55 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{6}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{c}{\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 55 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \dfrac{a}{\frac{1}{6}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{c}{\frac{1}{2}} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{55}{\frac{11}{12}} = \frac{a}{\frac{1}{6}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = 10 \text{ e } b = 15 \text{ e } c = 30$$

Logo, as bolas A, B e C têm 10 cm^3, 15 cm^3 e 30 cm^3, respectivamente.

131 $\begin{cases} a + b + c = 14 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{6}} = \dfrac{b}{\frac{1}{12}} = \dfrac{c}{\frac{1}{24}} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 14 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}} = \dfrac{a}{\frac{1}{6}} = \dfrac{b}{\frac{1}{12}} = \dfrac{c}{\frac{1}{24}} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{14}{\frac{7}{24}} = \frac{a}{\frac{1}{6}} = \frac{b}{\frac{1}{12}} = \frac{c}{\frac{1}{24}} \Rightarrow a = 8,\ b = 4 \text{ e } c = 2$$

Logo, as alturas são: $a = 8$ cm, $b = 4$ cm e $c = 2$ cm

132 Indicando, respectivamente, por L, V e P os consumos diários, em calorias, de Leandro, Vagner e Pedro, temos:

$$\begin{cases} L + V + P = 3.630 \\ \dfrac{L}{\frac{1}{80}} = \dfrac{V}{\frac{1}{90}} = \dfrac{P}{\frac{1}{100}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L + V + P = 3.630 \quad \text{(I)} \\ \dfrac{L + V + P}{\frac{1}{80} + \frac{1}{90} + \frac{1}{100}} = \dfrac{L}{\frac{1}{80}} = \dfrac{V}{\frac{1}{90}} = \dfrac{P}{\frac{1}{100}} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{3.630}{\frac{242}{7.200}} = \frac{L}{\frac{1}{80}} = \frac{V}{\frac{1}{90}} = \frac{P}{\frac{1}{100}} \Rightarrow L = 1.350 \text{ e } V = 1.200$$

e $P = 1.080$

Logo, os consumos diários de Leandro, Vagner e Pedro são de 1.350, 1.200 e 1.080 calorias, respectivamente.

133 A divisão mais justa, segundo o critério do pai, é a divisão de R$ 2.200,00 em partes inversamente proporcionais ao número de faltas de cada um.

Assim, indicando por N, C e E as quantias que devem receber Nelson, Cláudio e Edna, respectivamente temos:

$$\begin{cases} N + C + E = 2.200 \\ \dfrac{N}{\frac{1}{8}} = \dfrac{C}{\frac{1}{4}} = \dfrac{E}{\frac{1}{12}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N + C + E = 2.200 & \text{(I)} \\ \dfrac{N + C + E}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \dfrac{N}{\frac{1}{8}} = \dfrac{C}{\frac{1}{4}} = \dfrac{E}{\frac{1}{12}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{2.200}{\frac{11}{24}} = \frac{N}{\frac{1}{8}} = \frac{C}{\frac{1}{4}} = \frac{E}{\frac{1}{12}} \Rightarrow N = 600 \text{ e } C = 1.200 \text{ e } E = 400$$

Logo, Nelson, Cláudio e Edna devem receber R$ 600,00, R$ 1.200,00, e R$ 400,00, respectivamente.

134 Indicando, respectivamente, por a, b e c as vazões, em litro por minuto, das torneiras dos aquários A, B e C, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 45 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{6}} = \dfrac{b}{\frac{1}{8}} = \dfrac{c}{\frac{1}{12}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 45 & \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}} = \dfrac{a}{\frac{1}{6}} = \dfrac{b}{\frac{1}{8}} = \dfrac{c}{\frac{1}{12}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), respectivamente, temos:

$$\frac{45}{\frac{9}{24}} = \frac{a}{\frac{1}{6}} = \frac{b}{\frac{1}{8}} = \frac{c}{\frac{1}{12}} \Rightarrow a = 20 \text{ e } b = 15 \text{ e } c = 10$$

Logo, as torneiras A, B e C têm vazões de 20, 15 e 10 L/min, respectivamente.

135 Indicando, respectivamente, por a, b, c e d as quantidades de cubos das caixas A, B, C e D, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 188 \\ \dfrac{a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{c}{\frac{1}{6}} = \dfrac{d}{\frac{1}{16}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 188 & \text{(I)} \\ \dfrac{a + b + c + d}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16}} = \dfrac{a}{\frac{1}{2}} = \dfrac{b}{\frac{1}{4}} = \dfrac{c}{\frac{1}{6}} = \dfrac{d}{\frac{1}{16}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{188}{\frac{47}{48}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{d}{\frac{1}{16}} \Rightarrow a = 96 \text{ e } b = 48 \text{ e}$$

$c = 32$ e $d = 12$.

Logo, nas caixas A, B, C e D foram colocados 96, 48, 32 e 12 cubos, respectivamente.

136 Indicando, respectivamente, por E e J as partes das despesas que cabem ao senhor Edson e ao senhor José, temos:

$$\begin{cases} E + J = 5.600 \\ \dfrac{E}{\frac{1}{5}} = \dfrac{J}{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E + J = 5.600 & \text{(I)} \\ \dfrac{E + J}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}} = \dfrac{E}{\frac{1}{5}} = \dfrac{J}{\frac{1}{3}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{5.600}{\frac{8}{15}} = \frac{E}{\frac{1}{5}} = \frac{J}{\frac{1}{3}} \Rightarrow E = 2.100 \text{ e } J = 3.500$$

Logo, a parte da despesa que cabe ao senhor Edson é de R$ 2.100,00.
Alternativa **b**.

137 Pelo enunciado, temos que $yx^2 = k$, em que k é constante. Assim:

$$15 \cdot 3^2 = y \cdot 4^2 \Rightarrow y = \frac{135}{16}$$

Alternativa **d**.

138 Grandeza é toda característica que pode ser expressa por uma medida. Logo, dentre as características apresentadas nas alternativas, a única que não é grandeza é a tristeza.

Alternativa **d**.

139 Os produtos das três dimensões resulta no volume do paralelepípedo.
Alternativa **b**.

140 De acordo com as informações, temos:

I. Para uma secção transversal constante, multiplicando-se por uma constante positiva k o comprimento do fio, tem-se que a resistência também é multiplicada por k.
Assim, o comprimento e a resistência são diretamente proporcionais.

II. Para um comprimento constante, multiplicando-se por uma constante positiva k a área da secção transversal, tem-se que a resistência é dividida por k.
Assim, a área da secção transversal é inversamente proporcional à resistência.

III. Para a resistência constante, multiplicando-se por uma constante positiva k o comprimento do fio, tem-se que a área da secção transversal também é multiplicada por k. Assim, o comprimento do fio é diretamente proporcional à área da secção transversal.
Alternativa **c**.

141 Indicando por n o número de copos, temos a regra de três:

Massa (g)		Número de copos
100	———	48
112,5	———	n

Com as grandezas "massa" e "número de copos" são diretamente proporcionais, concluímos:

$$\frac{100}{48} = \frac{112.5}{n} \Rightarrow n = 54$$

Logo, seriam fabricados 54 copos.

142 Indicando por n o número de páginas, temos a regra de três:

Número de páginas		Número de caracteres por página
120	———	2.400
n	———	3.000

Como as grandezas "número de páginas" e "número de caracteres por página" são inversamente proporcionais, concluímos:

$120 \cdot 2.400 = n \cdot 3.000 \Rightarrow n = 96$

Logo, o livro teria 96 páginas.

143 Indicando por n o número de "glóbulos vermelhos", temos a regra de três:

Número de glóbulos vermelhos		Volume de sangue (mm³)
35.000.000	———	7
n	———	10

Como as grandezas "número de glóbulos vermelhos" e "volume de sangue" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{35.000.000}{7} = \frac{n}{10} \Rightarrow n = 50.000.000$

Logo, em 10 mm^3 de sangue há 50.000.000 de glóbulos vermelhos.

144 Indicando por n o número de voltas, temos a regra de três:

Diâmetro (cm)		Número de voltas
20	———	180
15	———	n

Como as grandezas "diâmetro" e "número de voltas" são inversamente proporcionais, concluímos:

$20 \cdot 180 = 15 \cdot n \Rightarrow n = 240$

Logo, a roda menor girou 240 voltas.

145 Indicando por x a quantidade, em quilograma, de açúcar, temos a regra de três:

Massa da mistura (kg)		Massa de açúcar (kg)
90	———	15
3	———	x

Como as grandezas "massa da mistura" e "massa de açúcar" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{90}{15} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 0,5$

Logo, em 3 kg da mistura há 0,5 kg de açúcar.

146 Indicando por t o tempo, em horas, temos a regra de três:

Número de tratores		Tempo (h)
3	———	5,4
2	———	t

Como as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais, concluímos:

$3 \cdot 5,4 = 2 \cdot t \Rightarrow t = 8,1$

Logo, dois tratores realizariam o trabalho em 8,1 h.

147 Temos a regra de três:

Número de caracteres		Tempo (min)
1.000	———	x
1.400	———	$x + 2$

Como as grandezas "número de caracteres" e "tempo" são diretamente proporcionais, obtemos:

$\frac{1.000}{x} = \frac{1.400}{x+2} \Rightarrow x = 5$

Logo, a impressora imprime 1.000 caracteres em 5 minutos. Portanto, ela imprime 2.000 caracteres em 10 minutos.

Alternativa **e**.

148 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Temperatura (°C)		Tempo (h)
150	———	t
180	———	3

Como as grandezas "temperatura" e "tempo" são inversamente proporcionais, concluímos:

$150t = 180 \cdot 3 \Rightarrow t = 3,6$

Logo, o ferro deve permanecer ligado durante 3,6 h.

149 Indicando por n o número de campos de futebol, temos a regra de três:

Tempo (s)		Número de campos de futebol
8	———	1
$32 \cdot 10^6$	———	n

Como as grandezas "tempo" e "número de campos de futebol" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{8}{1} = \frac{32 \cdot 10^6}{n} \Rightarrow n = 4 \cdot 10^6 = 40.000$

Alternativa **e**.

150 Indicando por m a massa de carvão, temos a regra de três:

Massa de carvão (kg)		Consumo de energia (kWh)
1	———	10
m	———	200.000.000

Como as grandezas "massa de carvão" e "consumo de energia" são diretamente proporcionais, obtemos:

$\frac{1}{10} = \frac{m}{200.000.000} \Rightarrow m = 20.000.000 \text{ kg} =$
$= 20.000 \text{ t}$

Indicando por n o número de caminhões, temos a regra de três:

Número de caminhões		Massa (t)
1	———	10
n	———	20.000

Como as grandezas "número de caminhões" e "massa" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{1}{10} = \frac{n}{20.000} \Rightarrow n = 2.000$

Logo, são necessários 2.000 caminhões.

Alternativa **d**.

151 Indicando por x o número de dias, temos a regra de três:

Número de dias	Número de horas por dia
6	8
x	12

Como as grandezas "número de dias" e "número de horas por dia" são inversamente proporcionais, concluímos:

$6 \cdot 8 = x \cdot 12 \Rightarrow x = 4$

Logo, o trabalho seria concluído em 4 dias.

152 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Velocidade (caracteres/s)	Tempo (min)
12	28
16	t

Como as grandezas "velocidade" e "tempo" são inversamente proporcionais, concluímos:

$12 \cdot 28 = 16 \cdot t \Rightarrow t = 21$

Logo, o trabalho poderá ser concluído em 21 minutos.

153 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Velocidade (rpm)	Tempo (min)
45	3,9
78	t

Como as grandezas "velocidade" e "tempo" são inversamente proporcionais, concluímos:

$45 \cdot 3{,}9 = 78 \cdot t \Rightarrow t = 2{,}25$

Logo, a música é executada em 2,25 minutos.

154 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Velocidade (km/h)	Tempo (min)
75	6
90	t

Como as grandezas "velocidade" e "tempo" são inversamente proporcionais, concluímos:

$75 \cdot 6 = 90 \cdot t \Rightarrow t = 5$

Logo, o automóvel percorreria o trajeto em 5 minutos.

155 Indicando por n o número de pregos, temos a regra de três:

Número de pregos	Tempo (s)
53	10,6
x	60

Como as grandezas "número de pregos" e "tempo" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\dfrac{53}{10{,}6} = \dfrac{x}{60} \Rightarrow x = 300$

Logo, a máquina fabrica 300 pregos em 1 minuto.

156 Indicando por m a massa, temos a regra de três.

Área (m^2)	Massa (kg)
3,8	1.250
266	m

Como as grandezas "área" e "massa" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\dfrac{3{,}8}{266} = \dfrac{1.250}{m} \Rightarrow m = 87.500$

Logo, a laje suporta 87.500 kg.

157 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Número de carros	Tempo (h)
2	15
3	t

Como as grandezas "número de carros" e "tempo" são inversamente proporcionais, concluímos:

$2 \cdot 15 = 3 \cdot t \Rightarrow t = 10$

Logo, a piscina seria esvaziada em 10 horas.

158 Indicando por m a massa de hidrogênio, temos a regra de três.

Massa de água (g)	Massa de hidrogênio (g)
13,5	1,5
10,8	m

Como as grandezas "massa de água" e "massa de hidrogênio" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\dfrac{13{,}5}{1{,}5} = \dfrac{10{,}8}{m} \Rightarrow m = 1{,}2$

Logo, em 10,8 g de água há 1,2 g de hidrogênio.

159 Indicando por x o volume da mistura que contém 0,18 L de etanol, temos a regra de três:

Volume da mistura (L)	Volume de etanol (L)
6,3	0,3
x	0,18

Como as grandezas "volume da mistura" e "volume de etanol" são diretamente proporcionais, obtemos:

$\dfrac{6{,}3}{0{,}3} = \dfrac{x}{0{,}18} \Rightarrow x = 3{,}78$

Assim, a quantidade, em litro, que deve ser retirada da mistura inicial é:

$(6{,}3 - 3{,}78)$ L $= 2{,}52$ L

Convertendo esse volume para centilitro, obtemos 252 cL.

160 Indicando por A a área da região $C'M'N'$, temos a regra de três:

Comprimento do arco (cm)	Área da região (cm^2)
6	12
9	A

Como os raios dos círculos são iguais, temos que o comprimento do arco é diretamente proporcional à área da região; assim, concluímos:

$\dfrac{6}{12} = \dfrac{9}{A} \Rightarrow A = 18$

Logo, a área da região $C'M'N'$ é 18 cm^2.

161 Indicando por q a quantidade de litros de água do aquário B, temos a regra de três:

Altura (cm)		Número de litros de água
16	——	12
18	——	q

Como os paralelepípedos têm as mesmas dimensões, as grandezas "altura" e "número de litros de água" são diretamente proporcionais; assim, concluímos:

$\frac{16}{12} = \frac{18}{q} \Rightarrow q = 13{,}5$

Logo, no aquário B há 13,5 L de água.

162 Indicando por l a largura do retângulo, temos a regra de três:

Comprimento (m)		Largura (m)
1,5	——	1,2
2	——	l

Como as grandezas "comprimento" e "largura" são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{1{,}5}{1{,}2} = \frac{2}{l} \Rightarrow l = 1{,}6$

Logo, a largura do retângulo é 1,6 m.

163 Indicando por x a distância percorrida pela sombra, temos a regra de três:

Altura do avião (m)		Distância percorrida pela sombra (m)
180	——	600
135	——	x

Como as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{180}{600} = \frac{135}{x} \Rightarrow x = 450$

Logo, a sombra percorreu 450 m.

164 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Tempo (dias)		Velocidade (cm/h)
120	——	54
t	——	60

Como as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais, concluímos:

$120 \cdot 54 = \mathrm{t} \cdot 60 \Rightarrow \mathrm{t} = 108$

Logo, o trabalho teria sido concluído em 108 dias.

165 Indicando por n o número de azulejos, temos a regra de três:

Área de cada azulejo (cm^2)		Número de azulejos
225	——	900
540	——	n

Como as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais, concluímos:

$225 \cdot 900 = 540 \cdot n \Rightarrow n = 375$

Logo, seriam necessários 375 azulejos.

166 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Número de torneiras		Tempo (h)
3	——	4,5
5	——	t

Como as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais, concluímos:

$3 \cdot 4{,}5 = 5 \cdot \mathrm{t} \Rightarrow \mathrm{t} = 2{,}7$

Logo, 5 torneiras encheriam o tanque em 2,7 horas.

167 Indicando por n o número de litros de óleo, temos a regra de três:

Número de caldeiras		Número de litros de óleo
2	——	510
5	——	n

Como as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{2}{510} = \frac{5}{n} \Rightarrow n = 1.275$

Logo, para manter em funcionamento 5 caldeiras, seriam necessários 1.275 L de óleo diesel.

168 Indicando por n o número de voltas, temos a regra te três:

Número de dentes		Número de voltas
36	——	100
48	——	n

Como as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais, concluímos:

$36 \cdot 100 = 48 \cdot n \Rightarrow n = 75$

Logo, quando a maior dá 100 voltas a menor dá 75 voltas.

169 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Área (m^2)		Tempo (h)
5.100	——	3
11.900	——	t

Como as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{5.100}{3} = \frac{11.900}{\mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{t} = 7$

Logo, a varredeira limpará a área de 11.900 m^2 em 7 horas.

Alternativa **c**.

170 Indicando por t o tempo de trabalho diário, temos a regra de três:

Número de dias		Tempo de trabalho diário (h)
15	——	7
21	——	t

Como as grandezas relacionadas são inversamente proporcionais, concluímos:

$15 \cdot 7 = 21 \cdot \mathrm{t} \Rightarrow \mathrm{t} = 5$

Logo, o secretário poderia ter trabalhado 5 horas por dia, ou seja, 2 horas diárias a menos do que trabalhou.

Alternativa **a**.

171 As informações do enunciado nos permitem concluir que, se com determinado volume de gasolina um carro percorre uma distância d, então com o mesmo volume de álcool ele percorrerá $0{,}7d$. Assim, indicando por x a distância percorrida com 10 L de álcool, temos a regra de três:

Distância percorrida com gasolina	Distância percorrida com álcool
d	$0{,}7d$
x	10

Como as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais, concluímos:

$$\frac{d}{0{,}7d} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{10}{0{,}7} \approx 14$$

Logo, se o automóvel percorre 10 km com certo volume de álcool, então com o mesmo volume de gasolina o automóvel percorre cerca de 14 km.

Alternativa **c**.

172 Indicando por x o número de litros consumidos, temos a regra de três:

Número de dias		Número de caminhões		Consumo (L)	
8	↑	12	↑	1.440	↑
10		11		x	

Logo, $\frac{1.440}{x} = \frac{8}{10} \cdot \frac{12}{11} \Rightarrow x = 1.650$

Logo, seriam consumidos 1.650 L de combustível.

173 Indicando por n o número de máquinas, temos:

Número de máquinas		Produção (m)		Tempo (h)	
2	↑	720	↑	10	↓
n		540		5	

Invertendo a última razão, obtemos:

Número de máquinas		Produção (m)		Tempo (h)	
2	↑	720	↑	5	↑
n		540		10	

Logo, $\frac{2}{n} = \frac{720}{540} \cdot \frac{5}{10} \Rightarrow n = 3$

Concluímos, então, que seriam necessárias 3 máquinas.

174 Indicando por d a distância, temos a regra de três:

Consumo (L)		Distância (km)		Velocidade (km/h)	
2	↑	10	↑	60	↓
3		d		90	

Invertendo a última razão, obtemos:

Consumo (L)		Distância (km)		Velocidade (km/h)	
2	↑	10	↑	90	↑
3		d		60	

Logo, $\frac{10}{d} = \frac{2}{3} \cdot \frac{90}{60} \Rightarrow d = 10$

Concluímos, então, que o automóvel deve percorrer 10 km.

175 Indicando por n o número de recipientes, temos a regra de três:

Número de torneiras		Número de recipientes		Tempo (h)	
2	↑	45	↑	10	↑
3		n		12	

Logo, $\frac{45}{n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{12} \Rightarrow n = 81$

Concluímos, então, que poderiam ser cheios 81 recipientes.

176 Indicando por x o comprimento, temos a regra de três:

Comprimento (m)		Largura (m)		Massa (kg)	
30	↑	60	↓	40	↑
x		90		3.000	

Invertendo a segunda razão, temos:

Comprimento (m)		Largura (m)		Massa (kg)	
30	↑	90	↑	40	↑
x		60		3.000	

Logo, $\frac{30}{x} = \frac{90}{60} \cdot \frac{40}{3.000} \Rightarrow x = 1.500$

Concluímos, então, que o comprimento seria de 1.500 m.

177 Indicando por n o número de mudas, temos a regra de três:

Número de mudas diárias		Área (ha)		Tempo (dias)	
900	↑	500	↑	20	↓
n		400		30	

Invertendo a última razão, temos:

Número de mudas diárias		Área (ha)		Tempo (dias)	
900	↑	500	↑	30	↑
n		400		20	

Logo, $\frac{900}{n} = \frac{500}{400} \cdot \frac{30}{20} \Rightarrow n = 480$

Concluímos, então, que deveriam ser plantadas 480 mudas diárias.

178 Indicando por v o volume de terra, temos a regra de três:

Número de caminhões		Volume de terra (m^3)		Número de viagens por caminhão	
2	↑	144	↑	8	↑
3		v		9	

Logo, $\frac{144}{v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} \Rightarrow v = 243$

Concluímos, então, que poderiam ser transportados 243 m^3 de terra.

179 Indicando por x a quantia que gastaria o empresário, temos a regra de três:

Quantia (R$)	Número de recipientes	Capacidade do recipiente (L)
18.000 ↑	150 ↑	60 ↑
x	230	40

Logo, $\frac{18.000}{x} = \frac{150}{230} \cdot \frac{60}{40} \Rightarrow x = 18.400$

Concluímos, então, que o empresário gastaria R$ 18.400,00.

180 Indicando por x o valor da nova despesa semanal, temos a regra de três:

Número de lâmpadas	Tempo de funcionamento semanal (h)	Despesa semanal (R$)
30 ↑	120 ↑	40 ↑
20	90	x

Logo, $\frac{40}{x} = \frac{30}{20} \cdot \frac{120}{90} \Rightarrow x = 20$

Concluímos, então, que a nova despesa semanal foi de R$ 20,00.

181 Indicando por x o consumo de água, temos a regra de três:

Número de habitantes	Consumo (m^3)	Tempo (dias)
180.000 ↑	1.125 ↑	30 ↑
225.000	x	20

Logo, $\frac{1.125}{x} = \frac{180.000}{225.000} \cdot \frac{30}{20} \Rightarrow x = 937{,}5$

Concluímos, então, que o consumo de água da cidade será de 937,5 m^3.

182 Indicando por t o tempo, temos a regra de três:

Número de frangos	Quantidade de ração (kg)	Tempo (dias)
2.500 ↓	1.680 ↑	6 ↑
6.800	7.616	t

Invertendo a primeira razão, obtemos:

Número de frangos	Quantidade de ração (kg)	Tempo (dias)
6.800 ↑	1.680 ↑	6 ↑
2.500	7.616	t

Logo, $\frac{6}{t} = \frac{6.800}{2.500} \cdot \frac{1.680}{7.616} \Rightarrow t = 10$

Concluímos, então, que serão consumidos 7.616 kg de ração em 10 dias.

183 Indicando por x a quantidade, em kg, de alimentos arrecadados pelos 50 alunos, durante 20 dias e trabalhando 4 horas por dia, temos a regra de três:

Número de alunos	Número de dias	Número de horas por dia	Quantidade arrecadada (kg)
20 ↑	10 ↑	3 ↑	120 ↑
50	20	4	x

Logo, $\frac{120}{x} = \frac{20}{50} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow x = 800$

Logo, a quantidade Q de alimento arrecadada em toda a campanha é dada por:

Q = (120 + 800) kg = 920 kg

Alternativa **a**.

184 Indicando por n o número de máquinas, temos a regra de três:

Número de máquinas	Número de uniformes	Tempo (dias)
16 ↑	720 ↑	6 ↓
n	2.160	24

Invertendo a última razão, obtemos:

Número de máquinas	Número de uniformes	Tempo (dias)
16 ↑	720 ↑	24 ↑
n	2.160	6

Logo, $\frac{16}{n} = \frac{720}{2.160} \cdot \frac{24}{6} \Rightarrow n = 12$

Concluímos, então, que serão necessárias 12 máquinas.

185 Indicando por x o gasto mensal, temos a regra de três:

Número de dias	Número de horas por dia	Gasto (R$)
10 ↑	6 ↑	1.026 ↑
4	30	x

Logo, $\frac{1.026}{x} = \frac{10}{4} \cdot \frac{6}{30} \Rightarrow x = 2.052$

Concluímos, então, que o gasto mensal será de R$ 2.052,00.

Alternativa **b**.

186 Indicando por x o valor que ganhariam os 23 operários, temos a regra de três:

Número de operários	Número de dias	Número de horas por dia	Quantia (R$)
15 ↑	9 ↑	8 ↑	10.800 ↑
23	12	6	x

Logo, $\frac{10.800}{x} = \frac{15}{23} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{6} \Rightarrow x = 16.560$

Concluímos, então, que os 23 operários receberiam R$ 16.560,00.

Alternativa **a**.

187 Indicando por x a quantidade do produto, temos a regra de três:

Número de máquinas	Número de dias	Número de horas por dia	Quantidade (t)
4 ↑	4 ↑	4 ↑	4 ↑
6	6	6	x

Logo, $\frac{4}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow x = 13{,}5$

Cocluímos, então, que seriam produzidas 13,5 t do produto.

Alternativa **d**.

188 Indicando por x o tempo gasto, temos a regra de três:

Comprimento (km)	Número de homens	Número de dias	Número de horas por dia
1 ↑	30 ↓	12 ↑	8 ↓
2	20	x	12

Invertendo a segunda e a última razões, obtemos:

Comprimento (km)	Número de homens	Número de dias	Número de horas por dia
1 ↑	20 ↑	12 ↑	12 ↑
2	30	x	8

Logo, $\frac{12}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{12}{8} \Rightarrow x = 24$

Concluímos que os 20 homens gastarão 24 dias.
Alternativa **c**.

189 Indicando por x o tempo, em dias, temos a regra de três:

Número de máquinas	Número de peças	Número de dias	Número de horas por dia
20 ↓	6.000 ↑	6 ↑	12 ↓
15	4.000	x	8

Invertendo a primeira e a última razões, temos:

Número de máquinas	Número de peças	Número de dias	Número de horas por dia
15 ↑	6.000 ↑	6 ↑	8 ↑
20	4.000	x	12

Logo, $\frac{6}{x} = \frac{15}{20} \cdot \frac{6.000}{4.000} \cdot \frac{8}{12} \Rightarrow x = 8$

Concluímos, então, que a produção será concluída em 8 dias.
Alternativa **a**.

190 Indicando por x o tempo, em dias, temos a regra de três:

Número de folhetos	Número de dias	Número de horas por dia	Número de máquinas
50.000 ↑	5 ↑	8 ↓	2 ↓
60.000	x	12	1

Invertendo as duas últimas razões, temos:

Número de folhetos	Número de dias	Número de horas por dia	Número de máquinas
50.000 ↑	5 ↑	12 ↑	1 ↑
60.000	x	8	2

Logo, $\frac{5}{x} = \frac{50.000}{60.000} \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 8$

Concluímos, então, que os 60.000 folhetos foram confeccionados em 8 dias.
Alternativa **b**.

191 Indicando por x o número de horas por dia de trabalho dos operários restantes, temos a regra de três:

Número de operários	Número de dias	Número de horas por dia	Fração da obra
13 ↓	11 ↓	6 ↑	1 ↑
10	3	x	$\frac{3}{11}$

Invertendo as duas primeiras razões, obtemos:

Número de operários	Número de dias	Número de horas por dia	Fração da obra
10 ↑	3 ↑	6 ↑	1 ↑
13	11	x	$\frac{3}{11}$

Logo, $\frac{6}{x} = \frac{10}{13} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{\frac{3}{11}} \Rightarrow x = 7{,}8$ h

Convertendo para hora e minutos, obtemos x = 7h 48 min.
Alternativa **d**.

192 Indicando por A a área arada, temos a regra de três:

Número de tratores	Número de horas por dias	Área (km²)	Número de dias
2 ↑	6 ↑	4 ↑	8 ↑
5	8	A	3

Logo, $\frac{4}{A} = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{3} \Rightarrow A = 5$

Concluímos, então, que a área arada seria de 5 km².

193 Indicando por n o número de dias, temos a regra de três:

Número de dias	Número de horas por dia	Velocidade (km/h)
9 ↑	6 ↓	80 ↓
n	8	90

Invertendo a primeira razão, temos:

Número de dias	Número de horas por dia	Velocidade (km/h)
n ↓	6 ↓	80 ↓
9	8	90

Logo, $\frac{n}{9} = \frac{6}{8} \cdot \frac{80}{90} \Rightarrow n = 6$

Concluímos, então, que Renato teria concluído a viagem em 6 dias.

194 Indicando por x a quantidade, em tonelada, de trigo que seria moído, temos a regra de três:

Número de moinhos	Quantidade de trigo moído (t)	Número de dias	Número de horas por dia
5 ↑	10 ↑	8 ↑	12 ↑
4	x	9	15

Logo, $\frac{10}{x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{15} \Rightarrow x = 11{,}25$

Concluímos, então, que seriam moídas 11,25 t de trigo.

195 Indicando por n o número de colheitadeiras, temos a regra de três:

Número de colheitadeiras	Número de horas por dia	Área (ha)	Número de dias
3 ↑	8 ↓	400 ↑	40 ↓
n	9	900	60

Invertendo a primeira e a terceira razões, obtemos:

Número de colheitadeiras	Número de horas por dia	Área (ha)	Número de dias
n ↓	8 ↓	900 ↓	40 ↓
3	9	400	60

Logo, $\frac{n}{3} = \frac{8}{9} \cdot \frac{900}{400} \cdot \frac{40}{60} \Rightarrow n = 4$

Concluímos, então, que seriam necessárias 4 colheitadeiras.

196 Indicando por x a quantidade de litros que deveria ser produzida, temos:

Produção (L)	Tempo de produção (h)	Número de veículos	Tempo de duração da produção (dias)
180.000 ↑	2 ↑	3.000 ↑	5 ↑
x	5	8.000	6

Logo, $\frac{180.000}{x} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3.000}{8.000} \cdot \frac{5}{6}$

Concluímos, então, deveriam ser produzidos 1.440.000 L de petróleo.

197 Indicando por n o número de máquinas, temos:

Número de máquinas	Número de horas por dia	Número de dias	Número de tijolos
3 ↑	4 ↓	6 ↓	15.000 ↑
n	3	5	25.000

Invertendo a primeira e a última razões, obtemos:

Número de máquinas	Número de horas por dia	Número de dias	Número de tijolos
n ↓	4 ↓	6 ↓	25.000 ↓
3	3	5	15.000

Logo, $\frac{n}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{25.000}{15.000} \Rightarrow n = 8$

Concluímos, então, que seriam necessárias 8 máquinas.

198 Indicando por n o número de painéis, temos a regra de três.

Número de painéis	Área de cada painel (m^2)	Energia absorvida (kWh)	Número de dias
2 ↑	5 ↓	80 ↑	4 ↓
n	8	288	3

Invertendo a primeira e a terceira razões, obtemos:

Número de painéis	Área de cada painel (m^2)	Energia absorvida (kWh)	Número de dias
n ↓	5 ↓	288 ↓	4 ↓
2	8	80	3

Logo, $\frac{n}{2} = \frac{5}{8} \cdot \frac{288}{80} \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow n = 6$

Concluímos, então, que seriam necessários 6 painéis.

199 Indicando por x a massa, em kg, de barro cozido que seria necessário, temos a regra de três:

Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)	Massa (kg)
24 ↑	10 ↑	5 ↑	1.800 ↑
20	11	6	x

Logo, $\frac{1.800}{x} = \frac{24}{20} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{5}{6} \Rightarrow x = 1.980$

Concluímos, então, que seriam necessários 1.980 kg de barro cozido.

Outro modo

Cada tijolo de dimensões 24 cm × 10 cm × 5 cm tem volume 1.200 cm^3 e cada tijolo de dimensões 20 cm × 11 cm × 6 cm tem volume 1.320 cm^3. Assim, indicando por x a massa procurada, temos a regra de três simples:

Volume do tijolo (cm^3)	Massa (kg)
1.200	1.800
1.320	x

Como as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, concluímos:

$$\frac{1.200}{1.320} = \frac{1.800}{x} \Rightarrow x = 1.980$$

Logo, seriam necessários 1.980 kg de barro cozido.

200 Indicando por n o número de aparelhos que seriam necessários, temos a regra de três:

Comprimento (m)	Largura (m)	Altura (m)	Número de aparelhos
24 ↑	6 ↑	3 ↑	6 ↑
18	5	3,2	n

Logo, $\frac{6}{n} = \frac{24}{18} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{3,2} \Rightarrow n = 4$

Concluímos, então, que seriam necessários 4 aparelhos.

Outro modo

A capacidade do salão de dimensões 24 m × 6 m × 3 m é 432 m^3 e a capacidade do salão de dimensões 18 m × 5 m × 3,2 m é 288 m^3. Assim, indicando por n o número de aparelhos que seriam necessários, temos a regra de três simples:

Capacidade (m^3)	Número de aparelhos
432	6
288	n

Como as grandezas relacionadas são diretamente proporcionais, concluímos:

$\frac{432}{6} = \frac{288}{n} \Rightarrow n = 4$

Logo, seriam necessários 4 aparelhos.

201 Indicando por n o número litros de mel, temos a regra de três:

Número de abelhas	Número de meses	Número de dias	Número de horas	Número de litros
k ↑	k ↑	k ↑	k ↑	k ↑
w	w	w	w	n

Logo, $\frac{k}{n} = \frac{k}{w} \cdot \frac{k}{w} \cdot \frac{k}{w} \cdot \frac{k}{w} \Rightarrow n = \frac{w^4}{k^3}$

Alternativa **e**.

202 Resposta possível:

I. $\begin{array}{r|l} 9 & \underline{5} \\ 4 & 1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 13 & \underline{5} \\ 3 & 2 \end{array}$

O resto da divisão de 9 + 13 por 5 é igual ao resto da divisão de 4 + 3 por 5, isto é:

$\begin{array}{r|l} 22 & \underline{5} \\ 2 & 4 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 7 & \underline{5} \\ 2 & 1 \end{array}$

Restos iguais

II. $\begin{array}{r|l} 14 & \underline{4} \\ 2 & 3 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 5 & \underline{4} \\ 1 & 1 \end{array}$

O resto da divisão de 14 − 5 por 4 é igual ao resto da divisão de 2 − 1 por 4, isto é:

$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{4} \\ 1 & 2 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 1 & \underline{4} \\ 1 & 0 \end{array}$

Restos iguais

III. $\begin{array}{r|l} 20 & \underline{7} \\ 6 & 2 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 9 & \underline{7} \\ 2 & 1 \end{array}$

O resto da divisão de 20 · 9 por 7 é igual ao resto da divisão de 6 · 2 por 7, isto é:

$\begin{array}{r|l} 180 & \underline{7} \\ 5 & 25 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 12 & \underline{7} \\ 5 & 1 \end{array}$

Restos iguais

IV. $\begin{array}{r|l} 5 & \underline{3} \\ 2 & 1 \end{array}$

O resto da divisão de 5^4 por 3 é igual ao resto da divisão de 2^4 por 3, isto é:

$\begin{array}{r|l} 625 & \underline{3} \\ 1 & 208 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 16 & \underline{3} \\ 1 & 5 \end{array}$

Restos iguais

203 O maior resto possível é 19. Assim, pelo algoritmo da divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} b & \underline{20} \\ 19 & 7 \end{array} \Rightarrow b = 7 \cdot 20 + 19$$

$\therefore b = 159$

Alternativa **e**.

204 $\begin{array}{r|l} x & \underline{9} \\ 5 & q_1 \end{array} \Rightarrow x = 9_{q_1} + 5$ (*)

$\begin{array}{r|l} x & \underline{3} \\ 2 & q_2 \end{array} \Rightarrow x = 3q_2 + 2$

Assim, temos:

$$\begin{cases} 9_{q_1} + 5 = 3q_2 + 2 \\ q_1 + q_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow q_1 = 2 \text{ e } q_2 = 7$$

Substituindo q_1 por 2 em (*), concluímos:

$x = 9 \cdot 2 + 5 = 23$

Alternativa **e**.

205 a) $\begin{array}{r|l} 17 & \underline{8} \\ r & q \end{array} \Rightarrow q = 2$ e $r = 1$

b) $\begin{array}{r|l} 3 & \underline{7} \\ r & q \end{array} \Rightarrow q = 0$ e $r = 3$

c) $\begin{array}{r|l} 14 & \underline{-3} \\ r & q \end{array} \Rightarrow q = -4$ e $r = 2$

d) $\begin{array}{r|l} -8 & \underline{5} \\ r & q \end{array} \Rightarrow q = -2$ e $r = 2$

206 a) $\begin{array}{r|l} 1.200 & \underline{23} \\ 4 & 52 \end{array}$

Logo, o maior número natural n, com $n \leq 1.200$ e n divisível por 23, é dado por:

$$n = 1.200 - 4 = 1.196$$

b) $\begin{array}{r|l} 250 & \underline{23} \\ 20 & 10 \end{array}$

Logo, o menor número natural m, com $m \geq 250$ e m divisível por 23, é dado por:

$$m = 250 - 20 + 23 = 253$$

207 Indicando por q_a e q_b, respectivamente, os quocientes inteiros das divisões de a e b por n, temos, pelo algoritmo da divisão (P.1):

$a = q_a \cdot n + r_a$ e $b = q_b \cdot n + r_b$, com $0 \leq r_a < |n|$ e $0 \leq r_b < |n|$

Logo, $a - b = q_a \cdot n + r_a - q_b \cdot n - r_b$, ou seja,

(I) $a - b = (q_a - q_b) \cdot n + (r_a - r_b)$

Sendo r e q, respectivamente, o resto e o quociente da divisão de $r_a - r_b$ por n, temos:

(II) $r_a - r_b = q \cdot n + r$, $0 \leq r < |n|$

Substituímos (II) em (I):

$a - b = (q_a - q_b) \cdot n + q \cdot n + r$, que é equivalente a:

$a - b = (q_a - q_b + q) \cdot n + r$, com $0 \leq r < |n|$

Logo, r também é o resto da divisão de $a - b$ por n.

208 Temos

$$\begin{array}{r|l} x & \underline{7} \\ 3 & q \end{array} \text{ e } \begin{array}{r|l} 100 & \underline{7} \\ 2 & 14 \end{array}$$

Pelo teorema demonstrado no exercício anterior, temos que o resto da divisão de $(x - 100)$ por 7 é igual ao resto da divisão de $(3 - 2)$ por 7. Como

$$\begin{array}{r|l} 1 & \underline{7} \\ 1 & 0 \end{array}$$

concluímos que o resto da divisão de $(x - 100)$ por 7 é 1.

209 Temos $3^{50} = (3^2)^{25} = 9^{25}$ e

$$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{8} \\ 1 & 1 \end{array}$$

Pela propriedade P.4 da divisão em $\mathbb{Z}$, temos que o resto da divisão de 9^{25} por 8 é igual ao resto da divisão de 1^{25} por 8. Como $1^{25} = 1$ e

$$\begin{array}{r|l} 1 & \underline{8} \\ 1 & 0 \end{array}$$

concluímos que o resto da divisão de 9^{25} por 8 é 1.

210 Temos $2^{48} = (2^4)^{12} = 16^{12}$ e

$$\begin{array}{r|l} 16 & \underline{14} \\ 2 & 1 \end{array}$$

Pela propriedade P.4 da divisão em $\mathbb{Z}$, temos que o resto da divisão de 16^{12} por 14 é igual ao resto da divisão de 2^{12} por 14. Como $2^{12} = (2^4)^3 = 16^3$, aplicando novamente a P.4, temos que o resto da divisão de 16^3 por 14 é igual ao resto da divisão de 2^3 por 14.

Como $2^3 = 8$ e

$$\begin{array}{r|l} 8 & \underline{14} \\ 8 & 0 \end{array}$$

concluímos que o resto da divisão de 16^3 por 14 é 8, portanto o resto da divisão de 2^{48} por 14 é 8.

211 O algarismo das unidades de qualquer número inteiro é igual ao resto da divisão desse inteiro por 10, conforme foi demonstrado no exercício resolvido 29.

Como $3^{32} = (3^4)^8 = 81^8$ e

$$\begin{array}{r|l} 81 & \underline{10} \\ 1 & 8 \end{array}$$

temos que o resto da divisão de 81^8 por 10 é igual ao resto da divisão de 1^8 por 10. Como $1^8 = 1$ e

$$\begin{array}{r|l} 1 & \underline{10} \\ 1 & 0 \end{array}$$

concluímos que o resto da divisão de 81^8 por 10 é 1, portanto o algarismo das unidades do número 3^{32} é 1.

212 Temos que:

$3^{20} + 3^{40} + 3^{80} = (3^2)^{10} + (3^2)^{20} + (3^2)^{40} =$
$= 9^{10} + 9^{20} + 9^{40}$ e

$$\begin{array}{r|l} 9 & \underline{8} \\ 1 & 1 \end{array}$$

Assim:

- o resto da divisão de 9^{10} por 8 é igual ao resto r_1 da divisão de 1^{10} por 8, portanto $r_1 = 1$;
- o resto da divisão de 9^{20} por 8 é igual ao resto r_2 da divisão de 1^{20} por 8, portanto $r_2 = 1$;
- o resto da divisão de 9^{40} por 8 é igual ao resto r_3 da divisão de 1^{40} por 8, portanto $r_3 = 1$.

Pela propriedade P.1 da divisão em $\mathbb{Z}$, temos que o resto da divisão de $3^{20} + 3^{40} + 3^{80}$ por 8 é igual ao resto r da divisão de $r_1 + r_2 + r_3$ por 8, ou seja,

$$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{8} \\ 3 & 0 \end{array}$$

Logo, $r = 3$

213 O resto da divisão de 35 por 34 é 1:

$$\begin{array}{r|l} 35 & \underline{34} \\ 1 & 1 \end{array}$$

Sendo r_1, r_2, r_3 e r_4 os respectivos restos das divisões de 35^{15}, 35^{23}, 35^{32} e 35^{41} por 34, temos que esses restos são respectivamente iguais aos restos das divisões de 1^{15}, 1^{23}, 1^{32} e 1^{41} por 34; logo: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$

O resto da divisão de $35^{15} - 35^{23} - 35^{32} + 35^{41}$ por 34 é igual ao resto r da divisão de $r_1 - r_2 - r_3 + r_4 =$
$= 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ por 34. Portanto, $r = 0$, com o que concluímos que $35^{15} - 35^{23} - 35^{32} + 35^{41}$ é divisível por 34.

214 Temos que $2^{88} = (2^2)^{44} = 4^{44}$ e

$$\begin{array}{r|l} 4 & \underline{3} \\ 1 & 1 \end{array}$$

Assim, o resto da divisão de 4^{44} por 3 é igual ao resto r_1 da divisão de 1^{44} por 3; logo, $r_1 = 1$.

Temos, portanto, que o resto r_2 da divisão de $4^{44} - 1$ por 3 é igual ao resto da divisão de $r_1^{44} - 1$ por 3; logo, $r_2 = 0$

Concluímos, então, que $4^{44} - 1$, que é igual a $2^{88} - 1$, é divisível por 3.

Alternativa **b**.

215 Não é possível, pois supondo que existam os números inteiros a, b, q_a, q_b e k tais que:

$a = 7q_a$ (I)
$b = 7q_b$ (II)
$a = kb + 39$ (III)

temos pela substituição de (I) e (II) em (III):

$7q_a = 7kq_b + 39 \Rightarrow 7(q_a - kq_b) = 39$

Como $(q_a - kq_b)$ é um número inteiro, concluímos que essa igualdade é absurda, pois 39 não é divisível por 7. Logo, não existem os números inteiros a e b nas condições enunciadas.

216 $\begin{array}{r|l} n & \underline{4} \\ 3 & q_1 \end{array} \Rightarrow n = 4q_1 + 3$ (I)

$\begin{array}{r|l} n & \underline{5} \\ 4 & q_2 \end{array} \Rightarrow n = 5q_2 + 4$ (II)

De (I) e (II), temos $4q_1 + 3 = 5q_2 + 4$, ou seja,

$$q_1 = \frac{5q_2 + 1}{4}$$

Como $\{q_1, q_2, n\} \subset Z_+^*$ e $n < 100$, temos os seguintes valores possíveis:

q_2	q_1	n
3	4	19
7	9	39
11	14	59
15	19	79
19	24	99

Logo, os possíveis valores de n são: 19, 39, 59, 79 e 99.

217 $\begin{array}{r|l} n & \underline{6} \\ 2 & q_1 \end{array} \Rightarrow n = 6q_1 + 2$ (I)

$\begin{array}{r|l} n & \underline{9} \\ 5 & q_2 \end{array} \Rightarrow n = 9q_2 + 5$ (II)

De (I) e (II), temos que $6q_1 + 2 = 9q_2 + 5$, ou seja,

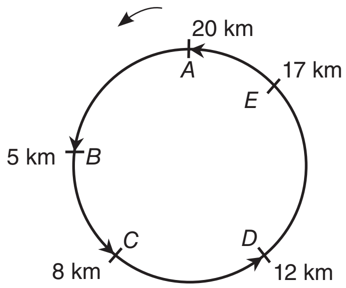
$$q1 = \frac{3q_2 + 1}{2}$$

Como $\{q_1, q_2, n\} \subset Z_-^*$ e $n > -50$, temos os seguintes valores possíveis:

q_2	q_1	n
-1	-1	-4
-3	-4	-22
-5	-7	-40

Logo, os possíveis valores de n são: -4, -22 e -40.

218



Dividindo 367 por 20, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 367 & 20 \\ \cline{2-2} 7 & 18 \end{array}$$

Logo, o carro percorreu 18 voltas e mais 7 km; portanto, ele parou mais próximo do ponto C.
Alternativa **c**.

219 I. Múltiplo de um número inteiro não nulo n é qualquer produto da forma $n \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

II. Divisor de um número inteiro n é qualquer número inteiro não nulo k tal que $k \cdot p = n$, para algum p inteiro.

III. Um número n inteiro é primo se, e somente se, possui exatamente quatro divisores distintos: 1, -1, n e $-n$.

IV. Um número inteiro é composto se, e somente se, possui mais de quatro divisores distintos.

V. O máximo divisor comum entre os números inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, não todos nulos, é o maior número inteiro que divide todos esses números simultaneamente.

VI. O mínimo múltiplo comum entre os números inteiros não nulos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ é o menor múltiplo positivo comum a esses números.

VII. Dois ou mais números inteiros são primos entre si se, e somente se, o máximo divisor comum entre eles é 1.

220 Indicando por t o total, em reais, pago por Cláudia e por n o número de dias de locação, temos:
$t = 5 \cdot 3 \cdot n \Rightarrow t = 15n$
Logo, t é múltiplo de 15.
Alternativa **c**.

221 I. Observando que mdc(8, 6) = 2, temos que existem os números inteiros $m = 1$ e $n = -1$ tais que $m \cdot 8 + n \cdot 6 = \text{mdc}(8,6)$.

II. 5 é divisor de 15 e 5 é divisor de 10; logo, 5 é divisor de 15 + 10.

III. 8 e 15 são primos entre si, pois mdc(8, 15) = 1. Como 8 é divisor de $3.960 = 15 \cdot 264$, concluímos que 8 é divisor de 264.

IV. Como 3 e 4 são primos entre si, temos que 3 e 4^{53} são primos entre si.

V. Como 5 é primo e é divisor de $40 = 10 \cdot 4$, temos que 5 é divisor de pelo menos um dos fatores 10 ou 4.

VI. Como mdc$(-8, 6) = 2$ e mmc$(-8, 6) = 24$, temos:
$|-8 \cdot 6| = \text{mdc}(-8, 6) \cdot \text{mmc}(-8, 6) = 2 \cdot 24 = 48$

222 $n = 2^{40} - 1 = (2^{20})^2 - 1 = (2^{20} + 1)(2^{20} - 1) =$
$= (2^{20} + 1)[(2^{10})^2 - 1] =$
$= (2^{20} + 1)(2^{10} + 1)(2^{10} - 1)$
$\therefore\ n = (2^{20} + 1) \cdot 1.025 \cdot 1.023$

- Como 1.023 é múltiplo de 31, temos que n é múltiplo de 31; portanto, a afirmação (I) é verdadeira;
- Como 1.025 é múltiplo de 5, temos que n é múltiplo de 5; portanto, a afirmação (II) é verdadeira;
- Como n possui divisores diferentes de ±1 e de $\pm$n, conforme verificado acima, temos que a afirmação (III) é falsa;
- Cada um dos fatores do produto $(2^{20} + 1) \cdot 1.025 \cdot 1.023$ é ímpar; logo, n é ímpar; portanto, a afirmação (IV) é falsa.

Alternativa **e**.

223 Indicando por D o dividendo, temos:

$$\begin{array}{r|l} D & 5.710 - D \\ \cline{2-2} 26 & 202 \end{array} \Rightarrow D = 202(5.710 - D) + 26$$

$\therefore\ D = 5.682$
Logo, dividendo é um múltiplo de 3.
Alternativa **d**.

224 **a)** $a = bq + r \Rightarrow a - r = bq$; logo, $a - r$ é múltiplo de b.

b) $a = bq + r \Rightarrow a - r = bq$. Adicionando b a ambos os membros dessa igualdade, obtemos: $a + b - r = b + bq \Rightarrow a + b - r = b(1 + q)$. Logo, $a + b - r$ é múltiplo de b.

225 **a)** Dividindo 1.993 por 15, temos:

$$\begin{array}{r|l} 1.993 & 15 \\ \cline{2-2} 13 & 132 \end{array}$$

Logo, o conjunto A possui 132 múltiplos de 15.

b) O conjunto A possui 664 múltiplos de 3, 398 múltiplos de 5, e 132 múltiplos de 15. Assim, o total de múltiplos de 3 ou de 5 que pertencem a A é dado por:
$664 + 398 - 132 = 930$
Logo, o total de números que pertencem a A e não são múltiplos de 3 nem de 5 é dado por:
$1.993 - 930 = 1.063$

226 Considerando que os três algarismos do número n sejam iguais a x, temos:
$n = 100x + 10x + x = 111x$
Logo, n é múltiplo de 111.

227 Sendo c um divisor quaquer de b, temos: (I) $b = ck$, com $\{c, k\} \subset \mathbb{Z}$. Como a é múltiplo de b, temos que existe um inteiro n tal que: (II) $a = nb$. Substituindo (I) em (II), concluímos que $a = ckn$; logo, a é múltiplo de c.

228 O número n pode ser representado por:
$n = 1.000d + 100c + 10b + a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ n = 999d + 99c + 9b + (a + b + c + d)$.
Como 9 é divisor das três primeiras parcelas dessa adição, concluímos que 9 é divisor de n se, e somente se, 9 é divisor de $(a + b + c + d)$.

229 **a)** Os números primos positivos cujos quadrados não excedem 101 são 2, 3, 5 e 7. Dividindo 101 por esses números primos, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 101 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 101 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 33 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 101 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 101 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 14 \end{array}$$

Como 101 não é divisível por nenhum dos números primos positivos cujos quadrados não o excedem, concluímos que 101 é primo.

b) Os números primos positivos cujos quadrados não excedem 323 são 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 289. Dividindo 323 por esses números primos, obtemos:

$\begin{array}{r|l} 323 & \underline{\;2\;} \\ 1 & 161 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 323 & \underline{\;3\;} \\ 2 & 107 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 323 & \underline{\;5\;} \\ 3 & 64 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 323 & \underline{\;7\;} \\ 1 & 46 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 323 & \underline{\;11\;} \\ 4 & 29 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 323 & \underline{\;13\;} \\ 11 & 24 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 323 & \underline{\;17\;} \\ 0 & 19 \end{array}$

Como 323 é divisível por 17, concluímos que 323 não é primo.

c) Os números primos positivos cujos quadrados não excedem 401 são 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17. Dividindo 401 por esses números, obtemos:

$\begin{array}{r|l} 401 & \underline{\;2\;} \\ 1 & 200 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 401 & \underline{\;3\;} \\ 2 & 133 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 401 & \underline{\;5\;} \\ 1 & 80 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 401 & \underline{\;7\;} \\ 2 & 57 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 401 & \underline{\;11\;} \\ 5 & 36 \end{array}$ $\quad\begin{array}{r|l} 401 & \underline{\;13\;} \\ 11 & 30 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 401 & \underline{\;17\;} \\ 10 & 23 \end{array}$

Como 401 não é divisível por nenhum dos números primos positivos cujos quadrados não o excedem, concluímos que 401 é um número primo.

d) Os números primos positivos cujos quadrados não excedem 389 são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19. Efetuando a divisão de 389 por esses números, constatamos que nenhuma das divisões é exata; logo, 389 é primo.

230 Se p divide $a^2 + b^2$ e p divide a, então, existem números naturais não nulos r e s tal que:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = rp & \text{(I)} \\ a = sp & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:
$s^2p^2 + b^2 = rp \Rightarrow b^2 = (r - s^2p)\,p$
de onde deduzimos que p divide b^2.
Como p é primo e divide b^2, concluímos que p divide b.
Alternativa **a**.

231 $\begin{array}{l|l} n & \underline{\;7\;} \\ 3 & q \end{array} \Rightarrow n = 7q + 3$

$\therefore\ n - 3 = 7q$
Logo, $(n - 3)$ é múltiplo de 7.
Alternativa **b**.

232 $x + y = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 7 + 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 11 = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot (7 + 11) =$
$= 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 18 = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^{10} \cdot 3^{12}$
Logo, a decomposição de $x + y$ em fatores primos é $2^{10} \cdot 3^{12}$.

233 I. $a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^3$ e $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
II. $a = 240$ e $b = 5 \cdot 8 \cdot 3$

234 Para que um número n seja divisor de $2^1 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^1$, n deve ser a forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N}$ e $a \leq 1$, $b \leq 5$, $c \leq 3$ e $d \leq 1$.
Assim, dentre os números apresentados, apenas o número $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ é divisor de $2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7$.

235 Para que x seja divisível por y, devemos ter $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 5$. Logo, o maior valor possível de n é 5.

236 Decompondo em fatores primos os números 2.310 e 1.300, obtemos:
$2.310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ e $1.300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13$
Para que o número n, com $n \in \mathbb{N}^*$, seja múltiplo de 1.300, devemos ter:
$n = 2^a \cdot 3 \cdot 5^b \cdot 7 \cdot 13^c \cdot 11$,
com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{N}$ e $a \geq 2$, $b \geq 2$ e $c \geq 1$. Assim, o menor número n divisível por 1.300 é:
$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 =$
$= \underbrace{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)}_{2.310} \cdot \underbrace{(2 \cdot 5 \cdot 13)}_{130}$
Portanto, o menor número natural não nulo pelo qual se deve multiplicar 2.310 para se obter um múltiplo de 1.300 é 130.

237 Sendo m um número ímpar, temos: $m = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim: $m^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 +$ $+ 4k + 1 - 1 = 4k^2 - 4k = 4(k^2 + k)$. Como $k^2 + k$ é um número inteiro, concluímos que $4(k^2 + k)$ é múltiplo de 4.

238 No exercício anterior, vimos que $m^2 - 1 = 4(k^2 +$ $+ k)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Temos duas possibilidades: k é par ou k é ímpar, isto é, $k = 2n$ ou $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Para a primeira possibilidade, temos: $4[(2n)^2 +$ $+ 2n] = 8[2n^2 + n]$; logo, $m^2 - 1$ é múltiplo de 8. Para a segunda possibilidade, temos: $4[(2n +$ $+ 1)^2 + 2n + 1] = 8[2n^2 + 3n + 1]$; logo, $m^2 - 1$ é múltiplo de 8.

239 $n^3 - n = n(n + 1)(n - 1)$. Como em qualquer produto de três números inteiros consecutivos um dos fatores é múltiplo de 3, concluímos que $n^3 - n$ é múltiplo de 3.

240 $10^n + 10^{n-1} = 10^{n-1}(10 + 1) = 11 \cdot 10^{n-1}$. Como n é um número natural não nulo, temos que 10^{n-1} é um número natural; logo, $11 \cdot 10^{n-1}$ é múltiplo de 11.

241 **a)**

	2	4
324	144	36
36	0	

Logo, mdc(324, 144) = 36

b)

	4	3	2
150	35	10	5
10	5	0	

Logo, mdc(150, 35) = 5

c)

	1	2	1	4	4
240	177	63	51	12	3
63	51	12	3	0	

Logo, mdc(240, 177) = 3

d) mdc(128, 105, 42) = mdc[(128, 105), 42]

	1	4	1	1	4	3
128	105	23	13	10	3	1
23	13	10	3	1	0	

Logo, mdc(128, 105) = 1
Assim:
mdc(128, 105, 42) = mdc[(128, 105), 42] =
= mdc(1,42) = 1

242 a)

	1	2
6	4	2
2	0	

$6 = 4 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 2 = 6 + 4 \cdot (-1)$

$\therefore\ 2 = \underbrace{1}_{m} \cdot 6 + \underbrace{(-1)}_{n} \cdot 4$

Logo, uma possibilidade é:
$m = 1$ e $n = -1$.

b)

	2	1	3
88	32	24	8
24	8	0	

$\begin{cases} 88 = 32 \cdot 2 + 24 & \text{(I)} \\ 32 = 1 \cdot 24 + 8 & \text{(II)} \end{cases}$

Isolando o mdc em (II), obtemos:
$8 = 32 - 1 \cdot 24$ (III)
De (I), obtemos:
$24 = 88 - 32 \cdot 2$ (IV)
Substituindo (IV) em (III), concluímos:
$8 = 32 - 1(88 - 32 \cdot 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow 8 = \underbrace{(-1)}_{m} \cdot 88 + \underbrace{3}_{n} \cdot 32$

Assim, uma possibilidade é:
$m = -1$ e $n = 3$

c)

	1	2	2	4
93	66	27	12	3
27	12	3	0	

$93 = 66 \cdot 1 + 27$ (I)
$66 = 27 \cdot 2 + 12$ (II)
$27 = 12 \cdot 2 + 3$ (III)
Isolando o mdc em (III), obtemos:
$3 = 27 - 12 \cdot 2$ (IV)
De (II), obtemos:
$12 = 66 - 27 \cdot 2$ (V)
Substituímos (V) em (IV), obtendo:
$3 = 27 - (66 - 27 \cdot 2) \cdot 2$
$\therefore\ 3 = 5 \cdot 27 - 2 \cdot 66$ (VI)
De (I), temos: $27 = 93 - 66 \cdot 1$ (VII)
Substituímos (VII) em (VI), obtendo:
$3 = 5 \cdot (93 - 66 \cdot 1) - 2 \cdot 66$
$\therefore\ 3 = \underbrace{5}_{m} \cdot 93 + \underbrace{(-7)}_{n} \cdot 66$

Assim, uma possibilidade é:
$m = 5$ e $n = -7$

d)

	1	3	1	2
252	198	54	36	18
54	36	18	0	

$252 = 198 \cdot 1 + 54$ (I)
$198 = 54 \cdot 3 + 36$ (II)
$54 = 36 \cdot 1 + 18$ (III)
Isolando o mdc em (III), obtemos:
$18 = 54 - 36 \cdot 1$ (IV)
De (II), obtemos:
$36 = 198 - 54 \cdot 3$ (V)
Substituímos (V) em (IV), obtendo:
$18 = 54 - (198 - 54 \cdot 3) \cdot 1$
$\therefore\ 18 = 4 \cdot 54 - 1 \cdot 198$ (VI)
De (I), obtemos: $54 = 252 - 198 \cdot 1$ (VII)
Substituímos (VII) em (VI), obtendo:
$18 = 4 \cdot (252 - 198 \cdot 1) - 1 \cdot 198$
$\therefore\ 18 = \underbrace{4}_{m} \cdot 252 + \underbrace{(-5)}_{n} \cdot 198$

Assim, uma possibilidade é:
$m = 4$ e $n = -5$

243 a) $288 = 2^5 \cdot 3^2$ e $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$
Logo, mmc(288, 378) $= 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 = 6.048$

b) $980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$
$825 = 3 \cdot 5^2 \cdot 11$
$273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$
Logo, mmc(980, 825, 273) $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 =$
$= 2.102.100$

244 a)

720, 2.100	2
360, 1.050	2
180, 525	2
90, 525	2
45, 525	3
15, 175	3
5, 175	5
1, 35	5
1, 7	7
1, 1	

Logo, mmc(720, 2.100) $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 25.200$

b)

450, 264, 126, 750	2
225, 132, 63, 375	2
225, 66, 63, 375	2
225, 33, 63, 375	3
75, 11, 21, 125	3
25, 11, 7, 125	5
5, 11, 7, 25	5
1, 11, 7, 5	5
1, 11, 7, 1	7
1, 11, 1, 1	11
1, 1, 1, 1	

Logo, mmc(450, 264, 126, 750) $=$
$= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 = 693.000.$

245 I. mdc(12, 8) = 4 e 2 é divisor comum de 12 e 8; logo, 2 é divisor de mdc(12, 8).
II. mdc(20, 16) = 4; logo, mdc($7 \cdot 20$, $7 \cdot 16$) $= 7 \cdot 4$.
III. mdc(36, 54) = 9 e 3 é divisor comum de 36 e 54; logo, mdc(36 : 3, 54 : 3) = 9 : 3.
IV. No conjunto {6, 12, −18}, o número 6 é divisor comum de 12 e −18; logo, mdc(6, 12, −18) = 6.
V. Temos que mdc(8, 10) = 2. Dividindo 8 e 10 por 2, obtemos 4 e 5, respectivamente. Note que 4 e 5 são primos entre si.

246 I. Como 60 é múltiplo comum de 15 e 10, concluímos que 60 é múltiplo comum do mmc(15, 10).
II. Como mmc(18, 4) = 36, temos que mmc($5 \cdot 18$, $5 \cdot 4$) $= 5 \cdot 36$.
III. Como mmc(16, 24) = 8 e 4 é fator comum de 16 e 24, temos que mmc(16 : 4, 24 : 4) = 8 : 4.
IV. No conjunto {75, 25, 15}, o número 75 é múltiplo de 25 e 15; logo, mmc(75, 25, 15) = 75.
V. 8, 10 e 9 são primos entre si; logo, mmc(8, 10, 9) $= 8 \cdot 10 \cdot 9 = 720$.

247 $\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 84 = 7 \cdot 2^2 \cdot 3$

Logo, o número pedido é 7.

248 $\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Logo, as medidas procuradas são 3 cm e 5 cm.

249 Os divisores naturais de 36 são 1, 2, 3, 4, 6 e 9. Dividindo 36 por esses divisores, obtemos:

$\begin{array}{r|l} 36 & 1 \\ \hline 0 & 36 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ \hline 0 & 18 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ \hline 0 & 12 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 36 & 4 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 36 & 6 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 36 & 9 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$

Logo: $36 = 36 \cdot 1$
$36 = 18 \cdot 2$
$36 = 12 \cdot 3$
$36 = 9 \cdot 4$
$36 = 6 \cdot 6$
$36 = 4 \cdot 9$
mesmo retângulo

Concluímos, então, que as medidas dos lados dos retângulos são: 36 cm e 1 cm; 18 cm e 2 cm; 12 cm e 3 cm; 9 cm e 4 cm; 6 cm e 6 cm.

250 a) Sendo, respectivamente, A e B os conjuntos dos divisores de 18 h e de 24 h, no intervalo de 5 h às 17 h, temos:
$A = \{6, 9\}$ e $B = \{6, 8, 12\}$
Como A e B têm o elemento 6 comum, isso significa que às 6 h os trens estariam simultaneamente no ponto P. Logo, essa programação de horários provocaria um acidente.

b) Sendo, respectivamente, C e D os conjuntos de divisores de 18 h e de 16 h, no intervalo de 5 h às 17 h, temos:
$C = \{6, 9\}$
$D = \{8, 16\}$
Como C e D não têm elemento em comum, concluímos que essa programação de horários não põe em perigo os comboios.

Alternativa **b**.

251 mdc(270, 72, 126) = 18
Logo, cada caixa terá 18 ovos.

252 mdc(12, 8, 16) = 4
Logo, cada pedaço terá 4 m de comprimento e serão obtidos 9 pedaços (12 : 4 + 8 : 4 + 16 : 4).

253 mdc(210, 462) = 42
Logo, a capacidade de cada ônibus é de 42 passageiros.
Assim, para transportar os alunos do ensino fundamental serão necessários 11 ônibus (462 : 42).

254 mdc(9, 27, 18) = 9
Logo, a medida de cada aresta dos cubinhos deve ser de 9 cm.

255 mmc(6, 8, 9) = 72
Logo, a próxima partida dos três navios juntos do porto de Santos será daqui a 72 dias.

256 mmc(45, 30, 54) = 270
Logo, os ônibus partirão novamente juntos às 7 h + 270 min, ou seja, às 11 h 30 min.

257 O menor inteiro positivo que multiplicado por 45 resulta em um múltiplo de 35 é 7, pois
$45 = 3^2 \cdot 5$ e $35 = 5 \cdot 7$
Logo, o menor tempo que o moinho deve trabalhar para que toda a farinha produzida seja embalada é 7 min.

258 mmc(9, 12) = 36
Logo, os dois satélites se encontrarão novamente sobre Belo Horizonte daqui a 36 horas.

259 mmc(88, 224) = 2.464
Logo, o próximo instante em que Mercúrio e Vênus ocuparão novamente as posições A e B será daqui a 2.464 dias.

260 Indicando, respectivamente, por t_1 e t_2 os tempos em que Pedro e seus pais percorrem uma volta completa da pista, temos:
$t_1 = (1.200 : 6)\text{s} = 200$ s
$t_2 = (1.200 : 8)\text{s} = 150$ s
Como mmc(200, 150) = 600, concluímos que o próximo instante em que ambos passarão novamente pelo ponto de partida será daqui a 600 s, ou seja, 10 min.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Como 15 bilhões de anos correspondem a 1 ano, temos:

15.000.000.000 anos ——— 12 meses
x anos ——— 1 mês

$$x = \frac{15.000.000.000}{12} = 1.250.000.000$$

Portanto, no calendário, 1 mês corresponde a 1.250.000.000 anos.

2 Supondo que cada mês tenha 30 dias, calculamos:

30 dias ——— 1.250.000.000 anos
1 dia ——— y anos

$$y = \frac{1.250.000.000}{30} \approx 41.666.667$$

Assim, 1 dia do calendário corresponde a aproximadamente 41.666.667 anos.

3 A idade da Terra é 4,5 bilhões de anos e os dinossauros surgiram há 220 milhões de anos.
Como 4,5 bilhões de anos correspondem a 1 ano, temos:

4.500.000.000 anos ——— 365 dias
220.000.000 anos ——— z dias

$$z = \frac{220.000.000 \cdot 365}{4.500.000.000} \approx 18$$

Logo, se representássemos a idade da Terra por 1 ano, os dinossauros teriam surgido há aproximadamente 18 dias.

Exercícios propostos

1 $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$
$B = \{0, 3, 5, 7, 9, 12\}$
$C = \{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$

2 a) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$
$\therefore\ x = \pm 3$
$A = \{-3, 3\}$

b) Todo número inteiro x é tal que $x^2 \geq 0$; logo:
$B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

c) Todo número inteiro $x \neq 0$ é tal que $x^2 > 0$; logo:
$C = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$

d) Apenas o número inteiro 0 (zero) satisfaz a inequação $x^2 \leq 0$; logo:
$D = \{0\}$

e) Não existe número inteiro x tal que $x^2 < 0$; logo:
$E = \varnothing$

f) A fração $\frac{1}{x} = 0$ não se anula para nenhum valor atribuído a x; logo:
$F = \varnothing$

g) Conjunto dos números naturais maiores que 56 e menores ou igual a 118.
$G = \{57, 58, 59, ..., 116, 117, 118\}$

h) Conjunto dos números inteiros negativos.
$H = \{..., -4, -3, -2, -1\}$

i) Conjunto dos números naturais maiores ou igual a 70.
$I = \{70, 71, 72, 73, 74, ...\}$

3 a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; logo, A é finito.

b) $B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; logo, B é infinito.

c) $C = \{-3, 3\}$; logo, C é finito.

d) $D = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$; logo, D é infinito.

e) $E = \{0\}$; logo, E é finito.

4 $A = \{\frac{x}{x}$ é um número ímpar e maior que 1$\}$

5 $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

6 a) V, pois r é um conjunto de pontos, sendo A um deles.

b) F, pois não se usa a relação de inclusão entre elemento e conjunto.

c) V, pois o elemento do conjunto $\{A\}$, que é o ponto A, pertence ao conjunto de pontos r.

d) F, pois essa afirmação significa que $\overrightarrow{AB}$ é um elemento de r, quando, na verdade, os pontos pertencentes a $\overrightarrow{AB}$ é que são elementos de r.

e) V, pois todos os elementos (pontos) de $\overrightarrow{AB}$ pertencem ao conjunto de pontos r.

f) V, pois todos os elementos (pontos) de $\overrightarrow{DE}$ pertencem ao conjunto de pontos $\overrightarrow{AE}$.

g) V, pois cada extremo de $\overline{AC}$ é elemento do conjunto de pontos $\overline{AC}$.

h) F, pois não se usa a relação de inclusão entre elemento e conjunto.

7 a) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{5\}, \{8\}, \{5, 8\}\}$

b) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{6\}\}$

c) $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$

8 O conjunto E tem 5 elementos; logo, ele possui $2^5 = 32$ subconjuntos.

9 Como os dois conjuntos são iguais, então $x = 3$ e $y = 1$.

10 a) F, pois, por exemplo, para $n(B) = 3$ temos, $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ com 16 e 8 elementos, respectivamente.

b) F, pela mesma justificativa do item **a**.

c) V, pois sendo n o número de elementos de B, o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, ou seja, o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é duas vezes o número de elementos de $\mathcal{P}(B)$.

d) F, pela mesma justificativa do item **c**.

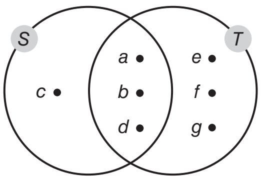
e) V, pois, para $n = 0$, temos que o número de elementos de $\mathcal{P}(B)$ é $2^0 = 1$.

11
- Como $D \subset E$ e $E \subset F$, deduzimos que:
  $D \subset F$ (I)
  Além disso, é dado: $F \subset D$ (II)
  Por (I) e (II), concluímos que $D = F$.
- Como $E \subset F$ e $F \subset D$, deduzimos que:
  $E \subset D$ (III)
  Além disso, é dado: $D \subset E$ (IV)
  Por (III) e (IV), concluímos que $D = E$.
  Assim, temos $D = F$ e $D = E$, concluindo então que $D = E = F$.

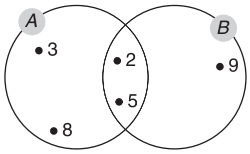
Alternativa **c**.

12 **a)** $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b) $A \cap B = \{0, 1, 2\}$
c) $A \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
d) $A \cap D = \varnothing$
e) $A \cup B \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
f) $A \cap B \cap C = \{0, 1, 2\}$
g) $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$
h) $(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
i) $(A \cap D) \cup (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

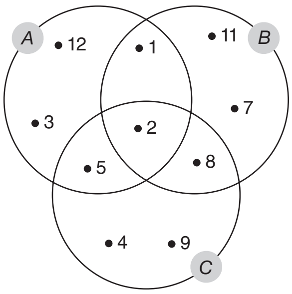
13



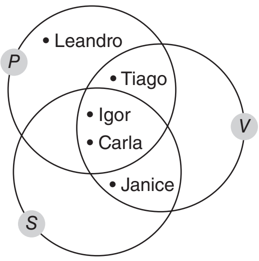
14



15



16



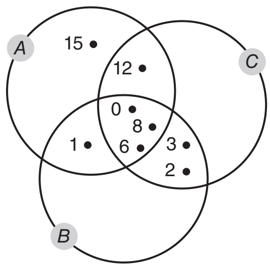
Sendo P o conjunto de pessoas que tocam piano, V o conjunto de pessoas que tocam violão e S o conjunto de pessoas que tocam saxofone, temos:
a) {Igor, Carla, Tiago, Janice, Leandro}
b) {Igor, Carla, Tiago}
c) $\varnothing$

17 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = D \cup F$
Alternativa **b**.

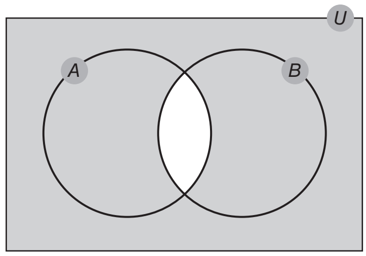
18 **a)** V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overline{AC}$ temos $X \in \overline{AB}$ ou $X \in \overline{BC}$; e para qualquer $X \in \overline{AB}$ ou $X \in \overline{BC}$ temos $X \in \overline{AC}$.
b) V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overline{BC}$ temos $X \in \overline{AC}$ ou $X \in \overline{BD}$; e para qualquer $X \in \overline{AC}$ ou $X \in \overline{BD}$ temos $X \in \overline{BC}$.
c) V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overrightarrow{AC}$ temos $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overline{AB}$; e para qualquer $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overline{AB}$ temos $X \in \overrightarrow{AC}$.
d) V, pois para qualquer ponto X pertencente a r temos $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overrightarrow{CB}$; e para qualquer $X \in \overrightarrow{BC}$ ou $X \in \overrightarrow{CB}$ temos $X \in r$.
e) F, pois $B \in (\overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{BA})$ e $B \notin (r - \overline{BC})$.
f) V, pois para qualquer ponto X pertencente a $\overline{BC}$ temos $X \in \overline{AD}$ ou $X \in \overline{BC}$; e para qualquer $X \in \overline{AD}$ ou $X \in \overline{BC}$ temos $X \in \overline{BC}$.
g) F, pois $A \in (\overline{AD} \cup \overline{BC})$ e $A \notin \overline{BC}$.
h) F, pois $\overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}$.

19 **a)** $F - E = \{1, 2, 9\}$
b) $G - E = \{5, 7\}$
c) $(E \cup G) - F = \{5, 7\}$
d) $(F - G) \cup (G - F) = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
e) $\complement_F^E \{1, 2, 9\}$
f) $\complement_F^{(E \cap G)} \{1, 2, 3, 9\}$
g) $\complement_F^G$ não existe, pois $G \not\subset F$
h) $\complement_E^E = \varnothing$
i) $\complement_F^{\varnothing} = F = \{1, 2, 3, 8, 6, 4, 9\}$

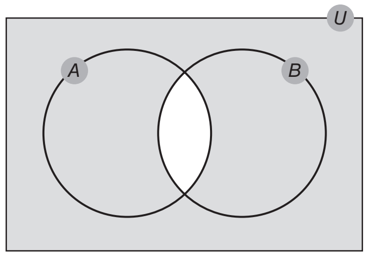
20



21 **a)** $A' \cup B'$



b) $(A \cap B)'$



Observe que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

22 a) Temos:
$A - B = \{p \mid p$ é estado da região Sul do Brasil$\} =$
$= \{$PR, SC, RS$\}$

b) Temos: $B - A = \{q \mid q$ é estado da região Sudeste do Brasil$\} = \{$SP, RJ, MG, ES$\}$

c) Não existe o conjunto $\complement_A^B$, pois $A \not\subset B$ e $\complement_A^A = \varnothing$.

23 a) $\overline{A} = \{x \in U \mid x$ é mulher$\}$

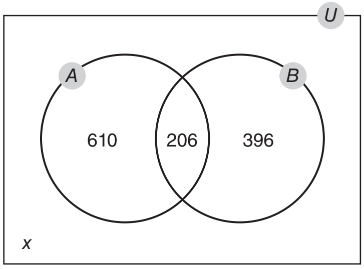
b) $\overline{B} = \{y \in U \mid y$ tem menos de 16 anos de idade$\}$

c) $\overline{C} = \{z \in U \mid z$ tem mais de 20 anos de idade$\}$

d) $\overline{B \cap C} = \{p \in U \mid p$ tem menos de 16 anos ou mais de 20 anos de idade$\}$

e) $\overline{B} \cup \overline{C} = \{q \in U \mid q$ tem menos de 16 anos ou mais de 20 anos de idade$\}$

24 Sejam:
- U o conjunto dos 2.200 entrevistados;
- A o conjunto dos entrevistados que já estiveram na região Nordeste;
- B o conjunto dos entrevistados que já estiveram na região Norte.

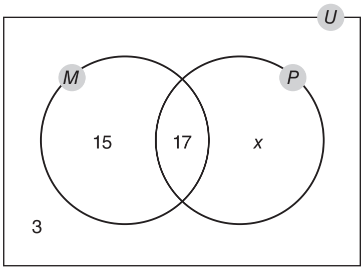


$x + 610 + 206 + 396 = 2.200$

$\therefore\ x = 988$

Logo, 988 pessoas entrevistadas nunca estiveram em nenhuma das duas regiões.

25 Sejam:
- U o conjunto dos 47 candidatos;
- M o conjunto dos que já trabalharam em montagem;
- P o conjunto dos que já trabalharam em pintura.

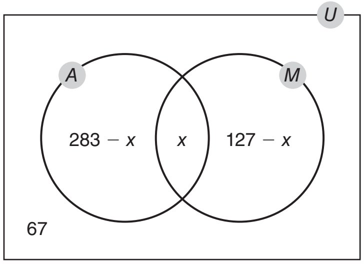


$x + 17 + 15 + 3 = 47$

$\therefore\ x = 12$

Logo, 12 candidatos trabalharam apenas em pintura.

26 Sejam:
- U o conjunto dos 400 jovens entrevistados;
- A o conjunto dos jovens que já dirigiram automóvel;
- B o conjunto dos jovens que já dirigiram motocicleta.



Como n(U) = 400, temos:

$67 + 283 - x + x + 127 - x = 400$

Daí, $x = 77$

Portanto, 77 jovens já dirigiram os dois tipos de veículo.

27 Sejam:
- U o conjunto dos funcionários da empresa;
- A o conjunto dos funcionários com mais de 20 anos de idade;
- B o conjunto dos funcionários com menos de 40 anos de idade.

Vamos supor que a empresa tenha x funcionários.

Então: $n(A \cup B) = x$; $n(A) = 0{,}60x$; $n(B) = 0{,}64x$

Sabemos que:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

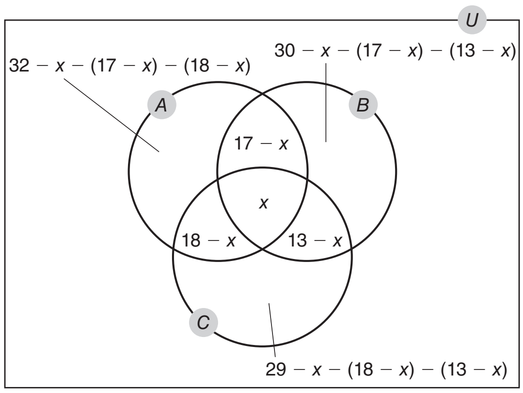
Logo: $x = 0{,}60x + 0{,}64x - n(A \cap B)$

$\therefore\ n(A \cap B) = 0{,}24x$

Portanto, 24% dos funcionários têm mais de 20 anos e menos de 40 anos de idade.

Professor: como foi pedido o valor relativo (porcentagem), poderíamos ter admitido que a empresa possui 100 funcionários, facilitando assim os cálculos.

28 Sejam:
- U o universo dos professores da escola;
- A o conjunto dos professores que lecionam no prédio A;
- B o conjunto dos professores que lecionam no prédio B;
- C o conjunto dos professores que lecionam no prédio C.



Logo, $x - 3 + x + 18 - x + 17 - x + x + 13 - x +$
$+ x - 2 = 51 \Rightarrow x = 8$

Concluímos, então, que 8 professores lecionam nos três prédios.

29 a) F b) V c) V d) V e) V f) F g) V h) V i) V j) V

30 a) $g = 4{,}22222... \Rightarrow 10g = 42{,}22222...$

$\therefore\ 10g - g = 42{,}22222... - 4{,}22222... \Rightarrow 9g = 38$

$\therefore\ g = \dfrac{38}{9}$

b) $g = 5{,}64646464... \Rightarrow 100g = 564{,}64646464...$

$\therefore\ 100g - g = 559 \Rightarrow 99g = 559$

$\therefore\ g = \dfrac{559}{99}$

31 a) 4
b) 4
c) Não existe.

32 a) irracional
b) racional
c) racional
d) irracional
e) irracional
f) irracional
g) racional
h) irracional
i) irracional
j) irracional

33 $a = 0$; $b = -9$; $c = \dfrac{5}{6}$; $d = \sqrt{7}$

34 Para $n = 2$:

Vamos obter números irracionais na forma $\sqrt{a}$, com $a \in \mathbb{N}$, de modo que $5 < \sqrt{a} < 6$.

Como $5 = \sqrt{25}$ e $6 = \sqrt{36}$, basta escolher um natural a que seja maior que 25 e menor que 36.

Exemplos: $\sqrt{28} = 5{,}291502...$ e $\sqrt{35} = 5{,}916079...$

Para $n = 3, 4, 5, ...$, obtemos, de modo análogo, outros números irracionais compreendidos entre 5 e 6.

35 A média aritmética entre dois números reais a e b, com $a < b$, é um número x tal que $a < x < b$. Aplicando essa propriedade, temos:

I. A média aritmética entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ é $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$, um número irracional. Pela propriedade temos:

$\sqrt{2} < \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}$

II. A média aritmética entre $\sqrt{2}$ e $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ é $\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$, um número irracional. Pela propriedade anterior e pela parte (I), temos:

$\sqrt{2} < \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} < \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}$

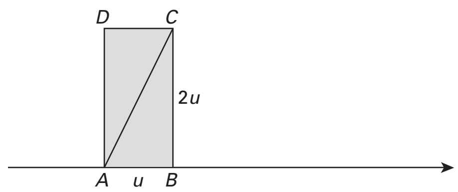
Por (I) e (II), obtivemos os números irracionais $\dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$ e $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$, compreendidos entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

36 $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ e $\sqrt{3} = 1{,}732050808...$

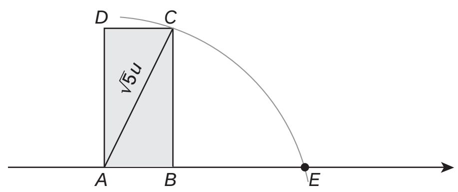
Então, $\sqrt{2} < 1{,}5 < \sqrt{3}$ e $\sqrt{2} < 1{,}6 < \sqrt{3}$, ou seja, 1,5 e 1,6 são números racionais compreendidos entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

37 a) F
b) V
c) F
d) V
e) V
f) F
g) F
h) F; por exemplo: $0 \cdot \sqrt{2} = 0$
i) V
j) V

38 Seja um retângulo em que um dos lados é o segmento $\overline{AB}$ e o lado $\overline{BC}$ tem comprimento $2u$, conforme mostra a figura:



Pelo Teorema de Pitágoras, temos que a diagonal $\overline{AC}$ mede $\sqrt{5}u$; usando um compasso, com a ponta-seca em A e raio AC, desenhamos o arco que intercepta a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E:



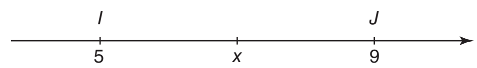
Assim, o comprimento de $\overline{AE}$ é $\sqrt{5}u$.

39 a) $d = 15 - 5 = 10$

b) $d = 4 - (-4) = 8$

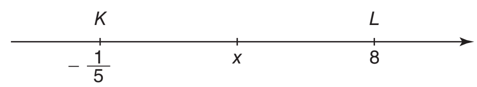
c) $d = \dfrac{23}{4} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{17}{4}$

d) Sendo x a abcissa do ponto médio de $\overline{IJ}$, temos:



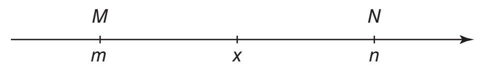
$x - 5 = 9 - x \Rightarrow x = 7$

e) Sendo x a abscissa do ponto médio de $\overline{KL}$, temos:



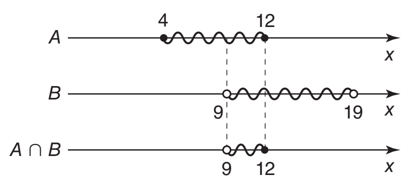
$x - \left(-\dfrac{1}{5}\right) = 8 - x \Rightarrow x = \dfrac{39}{10}$

f) Sendo x a abscissa do ponto médio de $\overline{MN}$, temos:



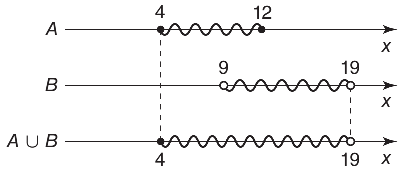
$x - m = n - x \Rightarrow x = \dfrac{m + n}{2}$

40 a)



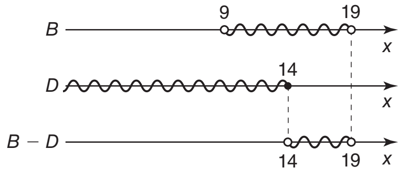
Logo, $A \cap B =]9, 12]$.

b)



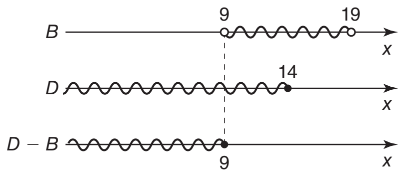
Logo, $A \cup B = [4, 19[$.

c)



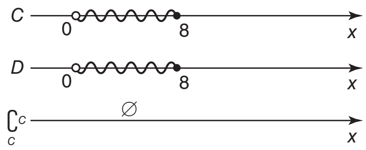
Logo, $B - D =]14, 19[$.

d)



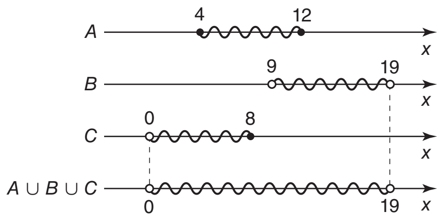
Logo, $D - B =]-\infty, 9]$.

e)



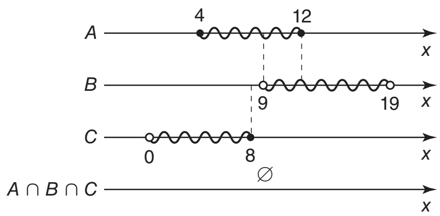
Logo, $\complement_C^C = \varnothing$

f)



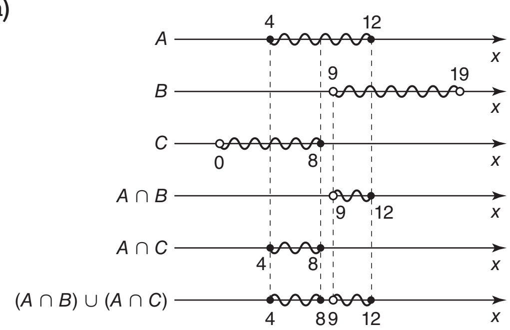
Logo, $A \cup B \cup C =]0, 19[$.

g)



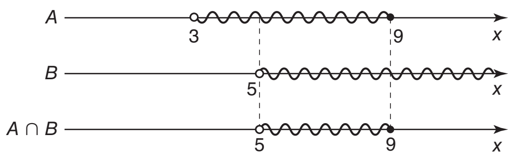
Logo, $A \cap B \cap C = \varnothing$.

h)



Logo, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = [4, 8] \cup]9, 12]$.

41

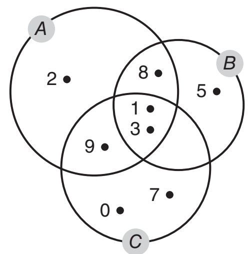


$x \in]5, 9]$; logo, $x \notin [10, 15]$.
Alternativa **e**.

Exercícios complementares

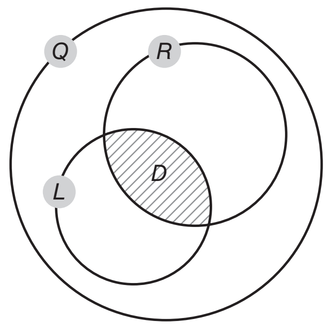
Exercícios técnicos

1



2 **a)** F, pois essa afirmação significa que r é um elemento de α, quando, na verdade, os pontos pertencentes a r é que são elementos de α.
b) V, pois A e B são pontos distintos de r que pertencem a α e, portanto, todos os pontos de r pertencem a α.
c) V, pois $D \in r$ e $r \subset \alpha$.
d) F, pois não se usa a relação de inclusão entre elemento e conjunto.
e) V, pois $\overline{AB} \subset r$ e $r \subset \alpha$; logo, $\overline{AB} \subset \alpha$.
f) F, pois essa afirmação significa que $\overline{AB}$ é um elemento de α, quando, na verdade, os pontos pertencentes a $\overline{AB}$ é que são elementos de α.
g) F, pois o ponto C pertence a s e não pertence a α.

3



a) V, pois todo losango é quadrilátero.
b) V, pois todo quadrado é retângulo.
c) F, pois todo quadrado é losango.
d) V, pois todo retângulo é quadrilátero.
e) V, pois todo retângulo é quadrilátero.
f) F, pois existe losango que não é quadrado.

4 Um conjunto com 8 elementos possui $2^8 = 256$ subconjuntos.

5 $2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7$
$\therefore n = 7$
Portanto, F possui 7 elementos.

6 a) V, pois {1} é um subconjunto de A, e todo subconjunto de A é elemento de $\mathcal{P}(A)$.

b) V, pois, por conceituação primitiva, 1 é elemento de A.

c) F, pois os elementos de $\mathcal{P}(A)$ são os subconjuntos de A, e 1 não é subconjunto de A.

d) F, pois, como {1} é subconjunto de A, concluímos que {1} é elemento de $\mathcal{P}(A)$, e não subconjunto de A.

e) V, pois {1} é elemento de $\mathcal{P}(A)$.

f) F, pois, como 1 e 2 pertencem a A, concluímos que {1, 2} é subconjunto de A, e não elemento de A.

g) V, pois {1, 2} é subconjunto de A, e todo subconjunto de A é elemento de $\mathcal{P}(A)$.

h) V, pois 1 e 2 pertencem a A.

i) V, pois A é subconjunto de A, e todo subconjunto de A é elemento de $\mathcal{P}(A)$.

j) F, pois A é elemento de $\mathcal{P}(A)$, e não subconjunto de $\mathcal{P}(A)$.

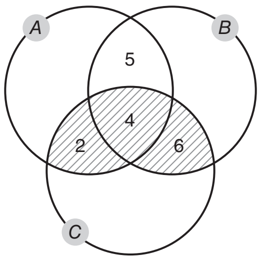
k) V, pois $\varnothing$ é subconjunto de A, e todo subconjunto de A é elemento de $\mathcal{P}(A)$.

l) V, pois $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto.

m) V, pois $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto.

n) F, pois $\varnothing$ é subconjunto de A, e não elemento de A.

7



No diagrama, destacamos $(A \cup B) \cap C$:

$\therefore\ n((A \cup B) \cap C) = 2 + 4 + 6 = 12$

8 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) =$

$= \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\}$

Logo, $A \cup (B \cap C) = A \cup B$.

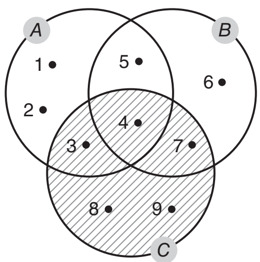
Alternativa **d**.

9 Se $x \in [A \cap (B \cup C)]$, então $x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$.

Logo, $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$.

Alternativa **e**.

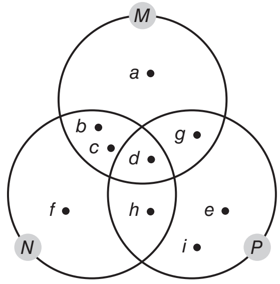
10



$C = \{3, 4, 7, 8, 9\} \Rightarrow n(C) = 5$

Alternativa **c**.

11

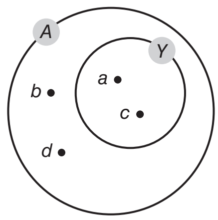


12 O conjunto y é tal que $Y \subset A$ e $A - Y = B \cap C$.

Se $Y \subset A$, então $A - Y = \complement_A Y$.

Além disso, $B \cap C = \{b, d\}$.

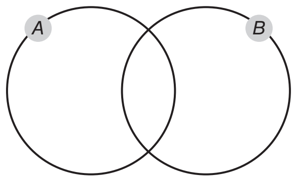
Logo, $\complement_A Y = \{b, d\}$ e, como $A = \{a, b, c, d\}$, resulta $Y = \{a, c\}$



Alternativa **e**.

13 Dois conjuntos quaisquer, A e B, ou têm intersecção não vazia ou são disjuntos. Analisemos cada uma das possibilidades:

1ª possibilidade: $A \cap B \neq \varnothing$



Para contar os elementos de $A \cup B$, vamos inicialmente contar os elementos de A (figura 1) e depois os elementos de B (figura 2):

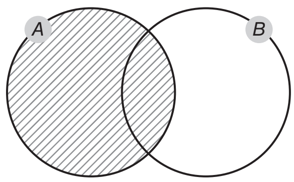


figura 1

A região hachurada representa os elementos já contados em *A*.

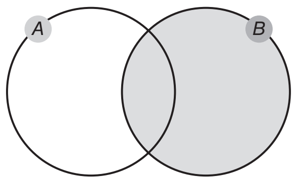


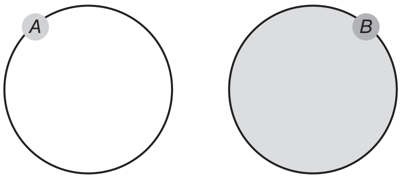
figura 2

A região cinza representa os elementos já contados em *B*.

Observe que a intersecção de A e B foi contada **duas vezes**: uma vez quando contamos os elementos de A e outra vez quando contamos os elementos de B. Para corrigir esse "erro" devemos subtrair dessa contagem o número de elementos de $A \cap B$, isto é, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

2^{a} possibilidade: $A \cap B = \varnothing$

Se os conjuntos A e B forem **disjuntos**, isto é, $A \cap B = \varnothing$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.



Portanto, vale também a identidade obtida na primeira possibilidade:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Alternativa **d**.

14 A maior diferença ocorre quando x e y são, respectivamente, o maior e o menor números possíveis nas condições enunciadas. Assim:

$x = 975$; $y = 204$ e, portanto:

$x - y = 975 - 204 = 771$

15 Sendo $y = x + 1$, com $x \in \mathbb{Z}_+^*$, temos:

a) $2x + 3y = 2x + 3(x + 1) = 5x + 3$ (par ou ímpar)

b) $3x + 2y = 3x + 2(x + 1) = 5x + 2$ (par ou ímpar)

c) $xy + 1 = \underbrace{x(x + 1)}_{\text{par}} + 1 = \underbrace{x^2 + x}_{\text{par}} + 1$ (ímpar)

d) $2xy + 2 = 2(xy + 1)$ (par)

e) $x + y + 1 = x + x + 1 + 1 = 2(x + 1)$ (par)

Logo, $xy + 1$ é necessariamente ímpar.

Alternativa **c**.

16 **a)** $g = 3{,}255555... \Rightarrow \begin{cases} 10g = 32{,}55555... \\ 100g = 325{,}55555... \end{cases}$

$\therefore\ 100g - 10g = 293$

$\therefore\ g = \dfrac{293}{90}$

b) $g = 2{,}1233333... \Rightarrow \begin{cases} 100g = 212{,}33333... \\ 1.000g = 2.123{,}33333... \end{cases}$

$\therefore\ 1.000g - 100g = 1.911$

$\therefore\ g = \dfrac{1.911}{900} = g = \dfrac{637}{300}$

17 São os números inteiros não positivos.

18 $5\sqrt{3} = 8{,}660254038...$

Assim, os números inteiros entre 5 e $5\sqrt{3}$ são 6, 7 e 8:

3 números.

19 **a)** $0{,}13131... = \dfrac{13}{99}$ (racional)

b) $\dfrac{\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{2}$ (racional)

c) $\sqrt{64} = 8$ (racional)

d) $\sqrt{3}$ (irracional)

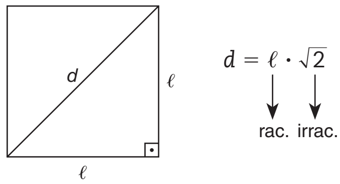
e) $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ (racional)

Alternativa **d**.

20 x será irracional se for uma dízima não periódica.

Alternativa **e**.

21 **e)** perímetro $= 4\ell$ é racional; logo, ℓ é racional.



O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Logo, $d = \ell\sqrt{2}$ é irracional.

Alternativa **e**.

22 Pelas propriedades dos números irracionais:

a) V, por P4

b) F, por P5

c) V, pois $\dfrac{\alpha}{r} = \alpha \cdot \left(\dfrac{1}{r}\right)$. Como $\dfrac{1}{r} \in \mathbb{Q}$, por P4, $\dfrac{\alpha}{r}$ é irracional.

d) F, por P2

e) V, por P3

23 I. F, pois $\{2, 3\} \subset \mathbb{N}$, porém $2 - 3 \notin \mathbb{N}$.

II. V, por P2

III. F, pois poderíamos ter $x = \dfrac{3}{2}$ e $y = \dfrac{2}{3}$.

IV. F, pois $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{8}\right\} \subset \mathbb{Q}'$, porém $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4 \in \mathbb{Q}$.

Alternativa **a**.

24 $(2x + y - z)^2 + (x - y)^2 + (z - 3)^2 = 0$

De acordo com essa igualdade, devemos ter:

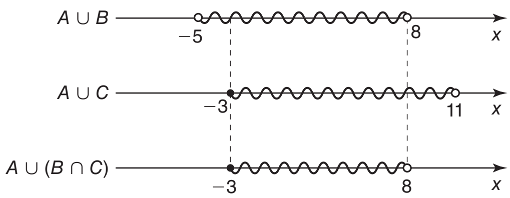
$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, vem: $x = 1$, $y = 1$, $z = 3$.

Portanto, $x + y + z = 1 + 1 + 3 = 5$.

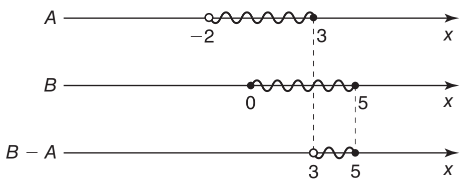
Alternativa **c**.

25 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Logo, $A \cup (B \cap C) = [-3, 8[$.

26



$B - A =]3, 5]$, portanto os números inteiros que estão em $B - A$ são 4 e 5.

Alternativa **c**.

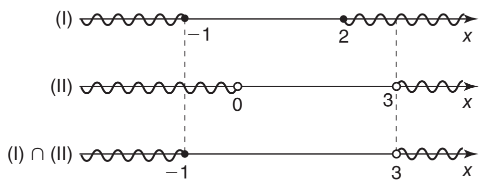
27 $\pi - \sqrt{2} \approx 3{,}14 - 1{,}41 = 1{,}73$

Logo, $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

Alternativa **c**.

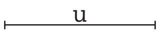
28 I. $x \notin\ ]-1, 2[$; logo, $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$

II. $x < 0$ ou $x > 3$

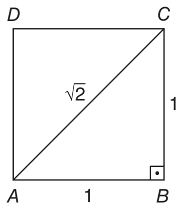


Então, $x \leqslant -1$ ou $x > 3$.

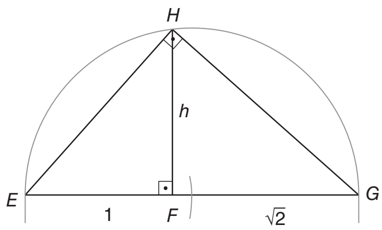
Alternativa **a**.

29 

- Construção do segmento de reta de medida $\sqrt{2}$.



- Construção do segmento de reta de medida $\sqrt[4]{2}$.



No triângulo *EHG*, temos:

$h^2 = 1 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow h = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

Logo, a medida do segmento $\overline{FH}$ é $\sqrt[4]{2}$.

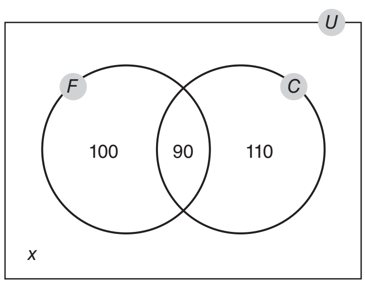
Exercícios contextualizados

30 Sejam:

U o conjunto dos 320 deputados;

F o conjunto dos deputados que votaram a favor da CPI do futebol;

C o conjunto dos deputados que votaram a favor da CPI do caixa 2.



$x + 100 + 90 + 110 = 320 \Rightarrow x = 20$

Logo, 20 deputados votaram contra a instalação das CPIs.

Alternativa **e**.

31 Sejam:

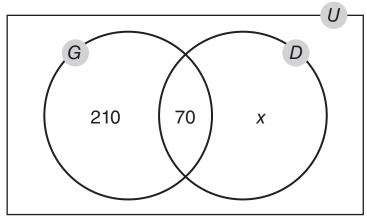
- *U* o conjunto das 700 pessoas pesquisadas;
- *G* o conjunto das pessoas que tiveram gripe;
- *D* o conjunto das pessoas que tiveram dengue.

De acordo com o texto, temos:

$n(G \cap D) = 0{,}1 \cdot 700 = 70$

$n[(G \cup D) - D] = 0{,}3 \cdot 700 = 210$

$n(G \cup D) = 0{,}5 \cdot 700 = 350$



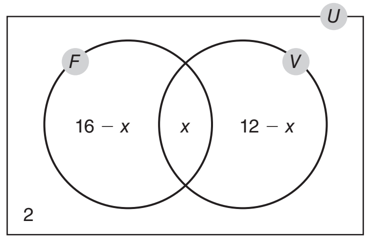
$210 + 70 + x = 350 \Rightarrow x = 70$

Logo, 70 pessoas tiveram apenas dengue.

Alternativa **e**.

32 Sejam:

- *U* o conjunto de 20 estudantes;
- *F* o conjunto dos estudantes que jogam futebol;
- *V* o conjunto dos estudantes que jogam voleibol.



$2 + 16 - x + x + 12 - x = 20 \Rightarrow x = 10$

Assim, obtemos:

$16 - x = 16 - 10 = 6$

Portanto, 6 alunos jogam apenas futebol.

Alternativa **b**.

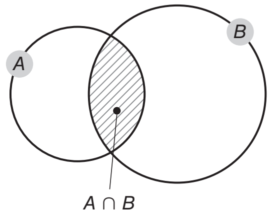
33 Sejam:

- *A* conjunto dos candidatos com notas superiores ou iguais a 4,0;
- *B* conjunto dos candidatos com notas inferiores ou iguais a 6,0.

$n(A) = 2.300$; $n(B) = 2.700$; $n(A \cup B) = 3.000$

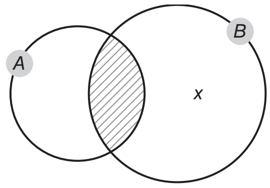
a) $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$\therefore\ n(A \cap B) = 2.300 + 2.700 - 3.000 = 2.000$



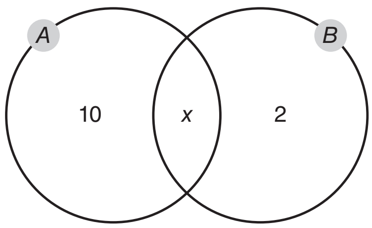
Logo, 2.000 candidatos obtiveram notas maiores ou iguais a 4,0 e menores ou iguais a 6,0.

b) $x = n(B) - n(A \cap B) = 2.700 - 2.000 = 700$



Logo, 700 candidatos obtiveram notas menores que 4.

34 Representando o diagrama, temos:



$n(A \cup B) = 15 \Rightarrow 10 + x + 2 = 15$

$\therefore\ x = 3$

Logo, 3 pessoas utilizam os produtos A e B.

35 Sejam:

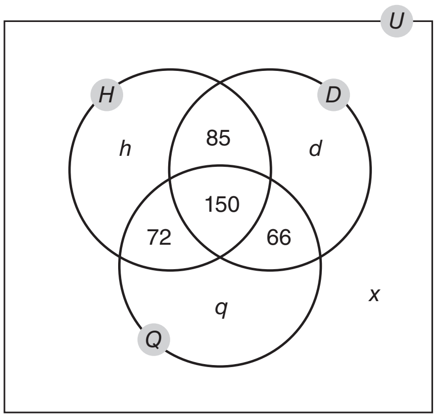
- U o conjunto dos 1.210 alunos do Ensino Médio do colégio;
- H o conjunto dos alunos que leram *Helena*;
- D o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro*;
- Q o conjunto dos alunos que leram *Quincas Borba*.

De acordo com o enunciado, temos:

$n(H \cap D \cap Q) = 150$

$n(H \cap D) = 235;\ n(H \cap Q) = 222;\ n(D \cap Q) = 216$

$n(H) = 487;\ n(D) = 449;\ n(Q) = 465$



a) $d + 85 + 150 + 66 = 449 \Rightarrow d = 148$

Logo, 148 alunos leram apenas o romance *Dom Casmurro*.

b) $h + 85 + 150 + 72 = 487 \Rightarrow h = 180$

$q + 72 + 150 + 66 = 465 \Rightarrow q = 177$

$n(H \cup D \cup Q) = n(H) + d + q + 66$

$\therefore\ n(H \cup D \cup Q) = 878$

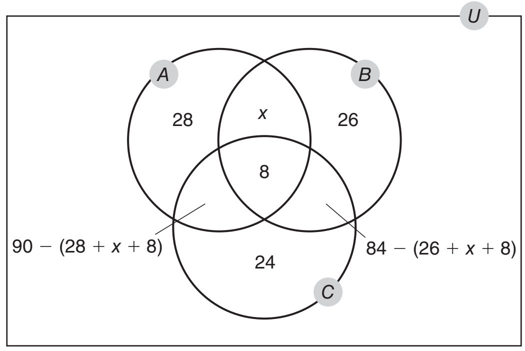
Sabemos que $x = n(U) - n(H \cup D \cup Q)$.

$x = 1.210 - 878 \Rightarrow x = 332$

Logo, 332 alunos responderam "não" às três perguntas.

36 Sejam:

- U o grupo de pessoas entrevistadas;
- A o conjunto das pessoas entrevistadas que frequentam a livraria A;
- B o conjunto das pessoas entrevistadas que frequentam a livraria B;
- C o conjunto das pessoas entrevistadas que frequentam a livraria C.



Como 86 pessoas entrevistadas frequentam a livraria C, temos:

$54 - x + 8 + 50 - x + 24 = 86 \Rightarrow x = 25$

Assim, concluímos:

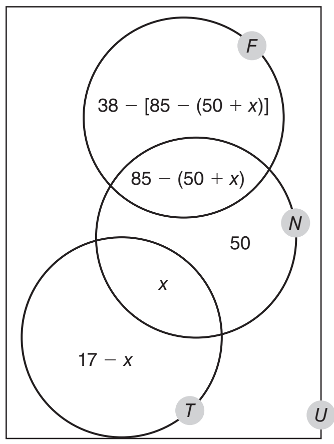
a) O número de pessoas entrevistadas que frequentam apenas uma livraria é dado por: $28 + 26 + 24$, ou seja, 78 pessoas.

b) O número de pessoas entrevistadas que frequentam pelo menos duas livrarias é dado por: $29 + 8 + 25 + 25$, ou seja, 87 pessoas.

c) O total de pessoas ouvidas nessa pesquisa é dado por: $78 + 87$, ou seja, 165 pessoas.

37 Sejam:

- U o conjunto dos associados do clube;
- N o conjunto dos inscritos em natação;
- T o conjunto dos inscritos em tênis;
- F o conjunto dos inscritos em futebol.



Como o número de associados inscritos só para aulas de futebol excede em 10 o número de inscritos só para aulas de tênis, temos:

$38 - [85 - (50 + x)] = 17 - x + 10 \Rightarrow x = 12$

Concluímos, então, que o número de associados inscritos para aulas de futebol e natação, simultaneamente, é dado por: $85 - (50 + 12)$, ou seja, 23 associados.

38 De acordo com o enunciado, temos: $5x + 10y = 100$, em que x é o número de notas de 5 reais e y é o número de notas de 10 reais.

Simplificando e isolando x, obtemos: $x = 2(10 - y)$.

Como $10 - y \in \mathbb{Z}$, resulta que x é um número par.

Então, o número de notas de R$ 5,00 é par.

Alternativa **c**.

39 Sejam $2n$ e $2n + 2$ os comprimentos dos dois caibros, que podem ser expressos por $2n$ e $2(n + 1)$.
Como n e $n + 1$ são números naturais consecutivos, temos que um deles é ímpar e o outro é par e, portanto, esses números são primos entre si. Logo, o máximo divisor comum entre $2n$ e $2(n + 1)$ é 2.
Temos, então:
$67 \cdot 2 = 2n + 2(n + 1) \Rightarrow n = 33$
Assim, concluímos que os comprimentos dos caibros são 66 dm e 68 dm.

40 a)
$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ min} & \text{———} & x \text{ L} \\ 1{,}8 \text{ min} & \text{———} & n \text{ L} \end{array}$$
Logo, $n = 1{,}8x = \dfrac{9x}{5}$.
n deve ser inteiro positivo; logo, x deve ser múltiplo positivo de 5.
Se $x = 5$, então $n = 9$.
Portanto, uma resposta possível é: $x = 5$.

b)
$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ min} & \text{———} & x \text{ L} \\ 3 \text{ min} & \text{———} & n \text{ L} \end{array}$$
Logo, $n = 3x$.
n deve ser racional não inteiro
Se $x = 1{,}5$, então $n = 4{,}5$.
Portanto, uma resposta possível é: $x = 1{,}5$.

c)
$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ min} & \text{———} & x \text{ L} \\ 2{,}3 \text{ min} & \text{———} & n \text{ L} \end{array}$$
Logo, $n = 2{,}3x$.
Se x é racional, n é racional, pois o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

41 a) A distância percorrida de A até B, caminhando sempre para o norte ou para o leste, é $8x$.
Se $x = 1$, então $d_{A,\,B} = 8$.
b) Se $x = 0{,}4$, então $d_{A,\,B} = 3{,}2$.
c) Se $x = \sqrt{2}$, então $d_{A,\,B} = 8\sqrt{2}$.
d) $d_{A,\,B} = 8x$
Se x é racional, $8x$ é racional, pois o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.
e) $d_{A,\,B} = 8x$
Se x é irracional, $8x$ é irracional, pois o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

42 A distância entre a Terra e um planeta anão é:
$5 \cdot 10^9$ km $= 5 \cdot 10^{15}$ mm
A distância entre a Terra e a estrela Alfa de Centauro é:
$41 \cdot 10^{12}$ km $= 41 \cdot 10^{18}$ mm
Assim, indicando por x a medida pedida, em milímetro, temos:
$$\frac{41 \cdot 10^{18}}{10^3} = \frac{5 \cdot 10^{15}}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 10^{18}}{41 \cdot 10^{18}} = \frac{5}{41}$$
$\therefore\ x \approx 0{,}12$ mm
Alternativa **a**.

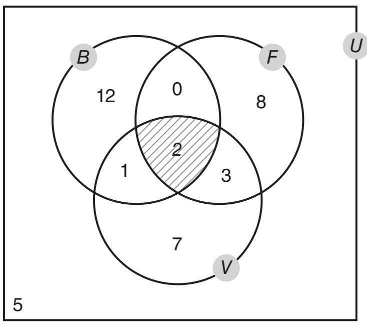
43 I. Adotando o ano de 365 dias e indicando por x o tempo, em hora, temos a regra de três:
$$\begin{array}{ccc} \text{Anos} & & \text{Horas} \\ 4{,}5 \cdot 10^9 & \text{———} & 45 \cdot 365 \cdot 24 \\ x & \text{———} & 1 \end{array}$$
$\therefore\ x = \dfrac{4{,}5 \cdot 10^9}{45 \cdot 365 \cdot 24}$ horas ≈ 11.415 anos
Alternativa **d**.

II. Indicando por y o tempo, em ano, temos a regra de três:
$$\begin{array}{ccc} \text{Anos} & & \text{Anos} \\ 4{,}5 \cdot 10^9 & \text{———} & 45 \\ 15 \cdot 10^9 & \text{———} & y \end{array}$$
$\therefore\ y = \dfrac{45 \cdot 15 \cdot 10^9}{4{,}5 \cdot 10^9}$ horas $= 150$ anos
Alternativa **b**.

Análise da resolução

Sendo U o universo dos alunos da classe, e B, F e V os conjuntos dos alunos da classe inscritos em basquete, futebol e vôlei respectivamente, temos:

- 5 alunos não se inscreveram em nenhuma das modalidades; logo, indicamos esse número em $U - (B \cup F \cup V)$.
- 2 alunos se inscreveram nas três modalidades; logo, indicamos esse número no conjunto $B \cap F \cap V$.
- 12 alunos se inscreveram apenas em basquete, 8 apenas em futebol e 7 apenas em vôlei; logo, indicamos esses números respectivamente em: $B - (F \cup V)$, $F - (B \cup V)$ e $V - (B \cup F)$.
- 23 alunos não se inscreveram em basquete, 25 não se inscreveram em futebol e 25 não se inscreveram em vôlei; logo, indicamos os números 3, 1 e 0 nos conjuntos $(V \cap F) - B$, $(B \cap V) - F$ e $(B \cap F) - V$.



Assim, concluímos:
a) O número de alunos que se inscreveram em pelo menos duas modalidades é dado por:
$$1 + 0 + 3 + 2 = 6$$
b) O número de alunos da classe é dado por:
$$12 + 8 + 7 + 1 + 0 + 3 + 2 + 5 = 38$$

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

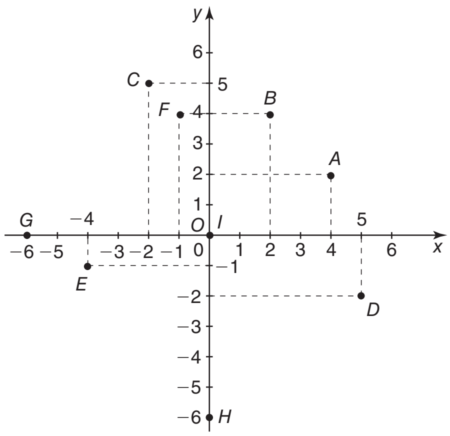
Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 $y = 15x$

Exercícios propostos

1



2 $A \in Oy \Leftrightarrow p - 7 = 0$ e, portanto, $p = 7$

3 $B \in Ox \Leftrightarrow 4k^2 - 36 = 0$ e, portanto, $k = 3$ ou $k = -3$

4 $C \in \text{IQ} \Leftrightarrow r - 2 > 0$ e, portanto, $r > 2$

5 $C \in \text{IIQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 8 < 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases}$ e, portanto, $-2 < m < \dfrac{8}{5}$

6 $\begin{cases} 3a - 2b = 10 \\ a + b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{32}{5}$ e $b = \dfrac{23}{5}$

7 $\Delta x = 3$; $\Delta y = 4$

$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

A escala do mapa é 1 : 10.000.

Logo, $AB = 50.000$ cm $= 500$ m.

8 I. **a)** $B\ (-30°, -60°)$

b) $D\ (0°, +30°)$

c) $C\ (+30°, -90°)$

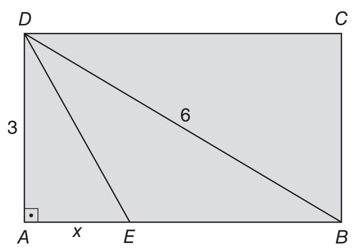
d) $F\ (+30°, +90°)$

e) $A\ (+60°, +30°)$

f) $E\ (-30°, +120°)$

II. Ásia

9



Sendo S a área do triângulo BDE, temos $S = \dfrac{EB \cdot AD}{2}$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$(AB)^2 = (BD)^2 - (AD)^2 = 6^2 - 3^2 = 27$

$\therefore\ AB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Como $EB = AB - AE \Rightarrow EB = 3\sqrt{3} - x$

Logo:

$S = y = \dfrac{(3\sqrt{3} - x) \cdot 3}{2}$

$\therefore\ y = \dfrac{9\sqrt{3} - 3x}{2}$

10 **a)**

Horas semanais trabalhadas	Ganho pelas horas trabalhadas (R$)
20	240,00
32	384,00
44	528,00
46	559,20
50	621,60

b) Sim, pois a cada número de horas semanais trabalhadas associa-se um único valor ganho.

c) $y = 12x$, com $0 \leqslant x \leqslant 44$

d) $y = 12 \cdot 44 + 15{,}60 \cdot (x - 44)$, com $x > 44 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 528 + 15{,}60(x - 44)$, com $x > 44$

11 **a)** $(0{,}9)^3 \cdot 20.000 = 14.580$

b) $(0{,}9)^x \cdot 20.000$

c) $y = 20.000 \cdot (0{,}9)^x$

d) Sim, pois a cada tempo de uso (em ano) associa-se um único valor de mercado do automóvel.

12 **a)**

Tempo (min)	Volume (L)
1	26
x	y

$y = 26x$

b) Sim, pois a cada tempo decorrido associa-se um único volume de água despejada.

13 **a)** 1.001, 1.002, 1.003, ..., 1.050

b) Não, pois cada número de assento está associado a mais de um número de ônibus.

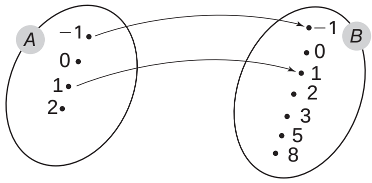
14 **a)**

Temperatura (°C)	Comprimento da coluna (mm)
−15	16
−10	24
−5	32
0	40
5	48
10	56
15	64

b) Sim, pois a cada temperatura associa-se um único comprimento da coluna de mercúrio.

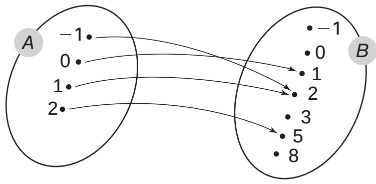
c) $y = 40 + \frac{8x}{5}$

15 **a)**



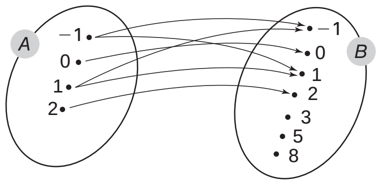
Não é função de A em B.

b)



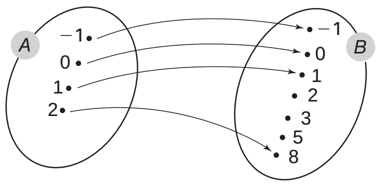
É função de A em B.

c)



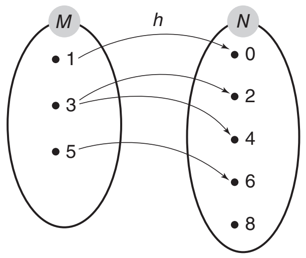
Não é função de A em B.

d)



É função de A em B.

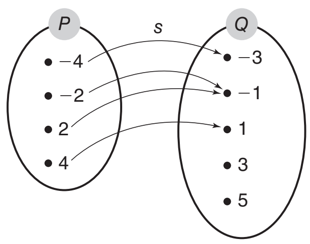
16 **a)**



b) $D(h) = \{1, 3, 5\}$
$CD(h) = N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
$Im(h) = \{0, 2, 4, 6\}$

c) A relação h não é função de M em N, pois existe elemento em M (o elemento 3) que está associado, por h, a mais de um elemento de N.

17 **a)**



b) $D(s) = \{-4, -2, 2, 4\}$
$CD(s) = Q = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$
$Im(s) = \{-3, -1, 1\}$

c) A relação s é função de P em Q, pois qualquer elemento de P está associado, por s, a um único elemento de Q.

18 **a)** $f(-2) = -7$
b) $f(0) = -1$
c) $f(3) + f(5) = 6 + 6 = 12$

19 **a)** $f(0) = 5 - 0 = 5$
b) $f(3) = 5 - 3 = 2$
c) $f(-2) = 5 - (-2) = 7$
d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

20 **a)** $f(2) = \frac{1 + 2^2}{2} = \frac{5}{2}$

b) $f(-2) = \frac{1 + (-2)^2}{-2} = -\frac{5}{2}$

c) $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{17}{4}$

d) $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{-\frac{1}{4}} = \frac{1 + \frac{1}{16}}{-\frac{1}{4}} = -\frac{17}{4}$

21 $g(1) = 1^3 - 1 + 1 = 1$
$g(-1) = (-1)^3 - (-1) + 1 = 1$
$g(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$
$g(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -5$
$g(0) = 0^3 - 0 + 1 = 1$
$g(3) = 3^3 - 3 + 1 = 25$
$Im(g) = \{-5, 1, 7, 25\}$

22 $\frac{x^2 - 12}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$
$\therefore\ x = 6$ ou $x = -2$

Logo, os elementos do domínio de f que têm imagem 4 são os números 6 e -2.

23 $\frac{x - 1}{x + 5} = 2 \Rightarrow x = -11$

$\frac{x - 1}{x + 5} = 0 \Rightarrow x = 1$

$\frac{x - 1}{x + 5} = -\frac{41}{7} \Rightarrow x = -\frac{33}{8}$

$A = \left\{-11, 1, -\frac{33}{8}\right\}$

24 **a)** Para $x = 100$, temos:

$P = 50 + \frac{200}{100} = 52$

Logo, o comprador deve pagar 52 dólares por saca.

b) Para $x = 200$, temos:

$P = 50 + \frac{200}{200} = 51$

Logo, o comprador deve pagar 51 dólares por saca.

c) Para $P = 54$, temos:

$54 = 50 + \frac{200}{x} \Rightarrow x = 50$

Logo, o comprador adquiriu 50 sacas.

25 $\begin{cases} f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 16 \\ f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) = 7 \end{cases}$

Temos, portanto, o sistema:

$\begin{cases} 4a + 2b = 16 \\ a - b = 7 \end{cases}$

Resolvendo-o, obtemos: $a = 5$ e $b = -2$.

26 Fazendo $x = 2$, temos:

$f(2 \cdot 2) = 2f(2) + f(2) \Rightarrow f(4) = 3f(2)$

$\therefore\ 6 = 3f(2) \Rightarrow f(2) = 2$

Fazendo $x = 4$, temos:

$f(8) = 2f(4) + f(2) = 2 \cdot 6 + 2 = 14$

Fazendo $x = 8$, temos:

$f(16) = 2f(8) + f(2) = 2 \cdot 14 + 2 = 30$

27 a) $f(3 \cdot 1) = f(3) + f(1) \Rightarrow f(3) = f(3) + f(1)$

$\therefore\ 1 = 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

b) $f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) \Rightarrow f(9) = 2 \cdot f(3)$

$\therefore\ f(9) = 2 \cdot 1 \Rightarrow f(9) = 2$

c) $f(3 \cdot 9) = f(3) + f(9) \Rightarrow f(27) = 1 + 2$

$\therefore\ f(27) = 3$

d) $f\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(1) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ 0 = 1 + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$

e) $f\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right) = f\left(\sqrt{3}\right) + f\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3) = 2 \cdot f\left(\sqrt{3}\right)$

$\therefore\ 1 = 2 \cdot f\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}$

28 $v(0) = 720 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b = 720$

$\therefore\ b = 720$

$v(12) = 0 \Rightarrow a \cdot 12^2 + b = 0$

$\therefore\ 144a + 720 = 0 \Rightarrow a = -5$

Como $a = -5$ e $b = 720$, temos:

$v(t) = -5t^2 + 720$

Assim:

$v(10) = -5 \cdot 10^2 + 720 = -500 + 720 = 220$

Logo, no 10º mês, 220 frangos estavam vivos.

Alternativa **d**.

29 a) Condição de existência: $x \geq 0$. Logo: $D(f) = \mathbb{R}_+$

b) Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

c) Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

d) Condição de existência: $x \neq 3$ e $x \neq -3$.

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$

e) Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

f) Condição de existência: $x \neq 6$ e $x \neq -6$ e $x \geq 2$

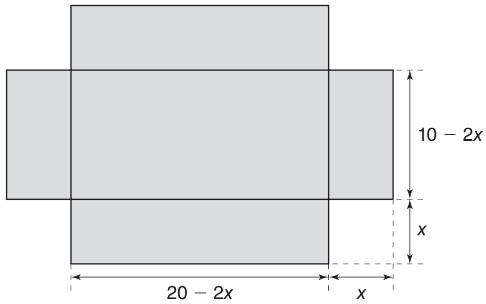
Essa condição pode ser expressa, simplesmente, por $x \geq 2$ e $x \neq 6$.

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ e } x \neq 6\}$

g) Condição de existência: $x \neq 0$. Logo: $D(f) = \mathbb{R}^*$

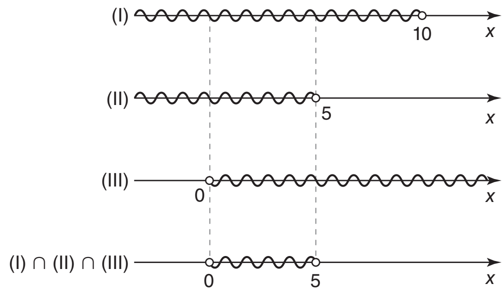
30 Não, pois para $x = 5$ teríamos $f(5) = \frac{2}{0}$, que não é definido.

31



a) $V(x) = (20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x$

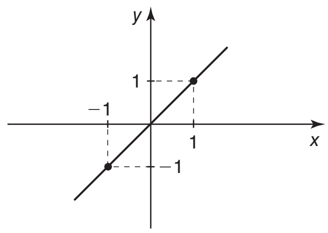
b) $\begin{cases} 20 - 2x > 0 \\ 10 - 2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 10 \ \text{(I)} \\ x < 5 \ \text{(II)} \\ x > 0 \ \text{(III)} \end{cases}$



Logo: $D(V) =]0, 5[$

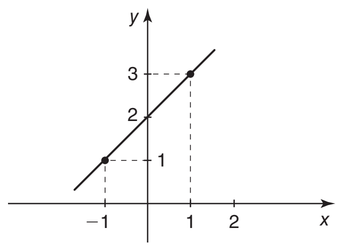
32 a)

x	y
−1	−1
0	0
1	1



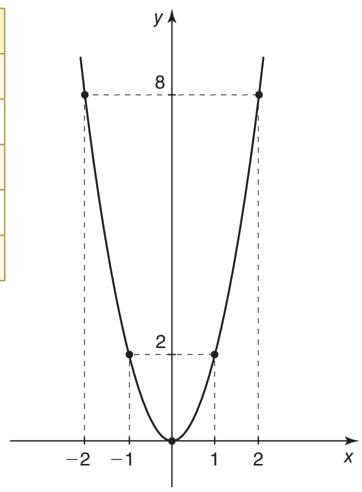
b)

x	y
−1	1
0	2
1	3



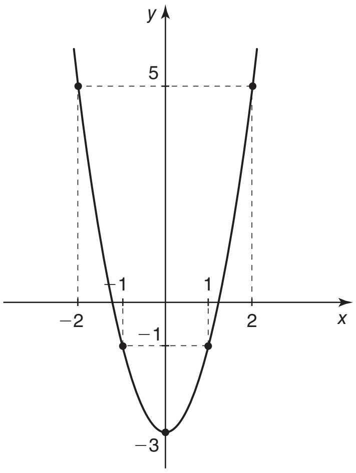
c)

x	y
−2	8
−1	2
0	0
1	2
2	8



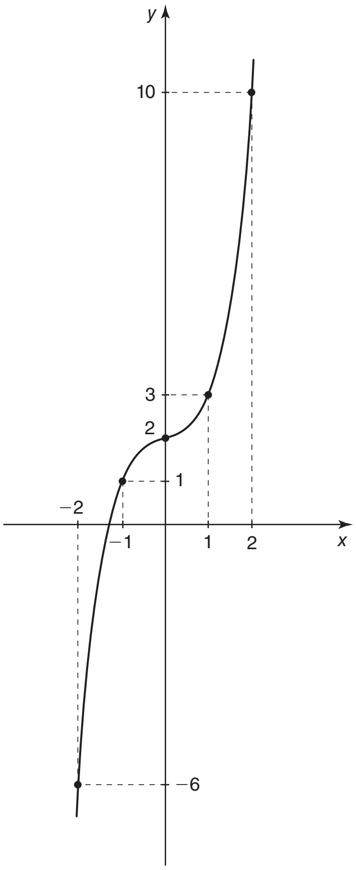
d)

x	y
-2	5
-1	-1
0	-3
1	-1
2	5



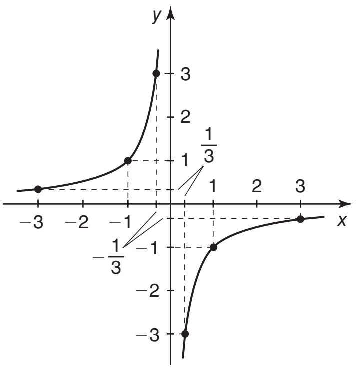
e)

x	y
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10



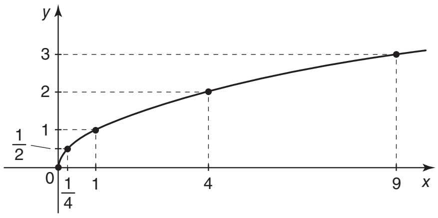
f)

x	y
-3	$\frac{1}{3}$
-1	1
$-\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{3}$	-3
1	-1
3	$-\frac{1}{3}$



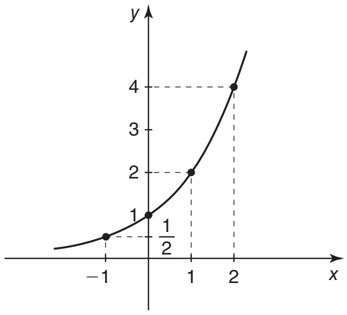
g)

x	y
0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	1
4	2
9	3



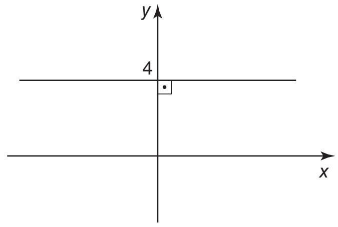
h)

x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



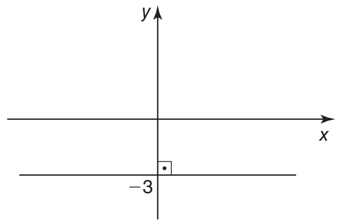
i) $y = 4$

x	y
0	4
2	4



j) $y = -3$

x	y
0	-3
2	-3



33 **a)** I. Se $x = 0$, então $y = 5 \cdot 0 = 0$

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = 5$

Logo, em f, x e y são diretamente proporcionais.

b) I. Se $x = 0$, então $y = \frac{0}{3} = 0$

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$

Logo, em g, x e y são diretamente proporcionais.

c) I. Se $x = 0$, então $y = 0 + 3 = 3 \neq 0$

Logo, em h, x e y não são diretamente proporcionais.

d) $0 \notin D(s)$

O fato de $0 \notin D(s)$ não descarta a possibilidade de x e y serem diretamente proporcionais, pois (I) é condicional, isto é, **se** $x = 0$, então $y = 0$. Como, neste caso, x não pode ser zero, as variáveis x e y serão diretamente proporcionais se for obedecida apenas a condição II.

Temos:

Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = 4$

Logo, em s, x e y são diretamente proporcionais.

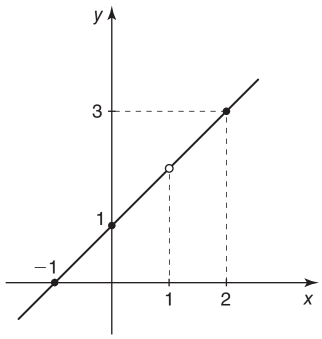
e) (Ver comentário no item **d**.)
Como, neste caso, x não pode ser zero, as variáveis x e y serão diretamente proporcionais se for obedecida apenas a condição II.
Temos:
Se $x \in [1, 10]$, então $\frac{y}{x} = \frac{1}{5}$
Logo, em t, x e y são diretamente proporcionais.

f) I. Se $x = 0$, então $y = 0^2 = 0$
II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = x$, em que x é variável.
Logo, em *u*, x e y não são diretamente proporcionais.

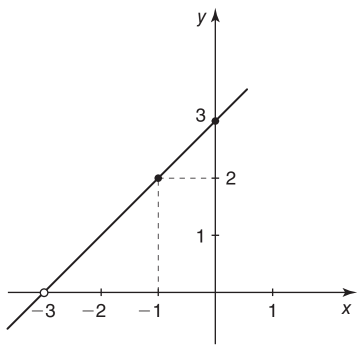
g) I. Se $x = 0$, então $y = 0$
II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = 0$
Logo, em *v*, x e y são diretamente proporcionais.

34 O gráfico de uma função $y = f(x)$, em que x e y são diretamente proporcionais, está contido em uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

35 a) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, se $x \neq 1$
Logo, $f(x) = x + 1$, com $x \neq 1$.



b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = x + 3$, se $x \neq -3$
Logo, $g(x) = x + 3$, com $x \neq -3$.

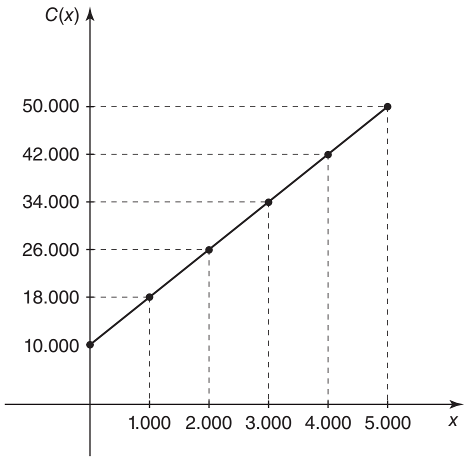


36 a) Sejam C_f o custo fixo e C_v o custo variável e x o número de litros de xampu produzidos. Então, temos:
$C_f = 10.000$ e $C_v = 8x$

Logo, o custo total é:
$C(x) = 10.000 + 8x$

x	$C(x)$
0	10.000
1.000	18.000
2.000	26.000
3.000	34.000
4.000	42.000
5.000	50.000

b)

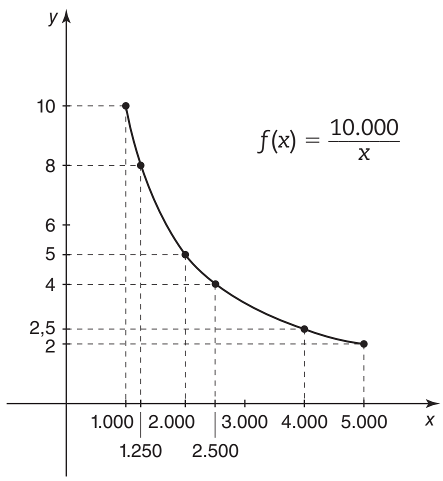


c)

x	$\frac{10.000}{x}$
1.000	10
1.250	8
2.000	5
4.000	2,5
5.000	2

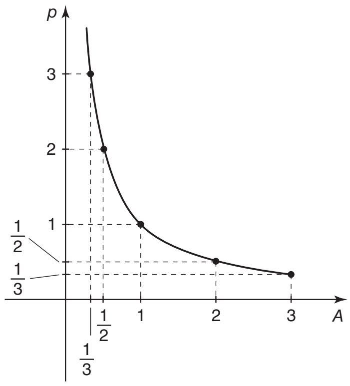
Os valores correspondentes nas duas colunas são inversamente proporcionais, pois o produto de dois elementos correspondentes quaisquer é constante.

d)



37

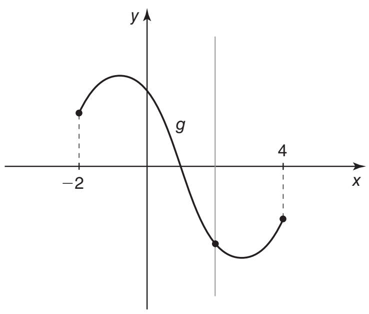
A	$p = \frac{1}{A}$
$\frac{1}{3}$	3
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$



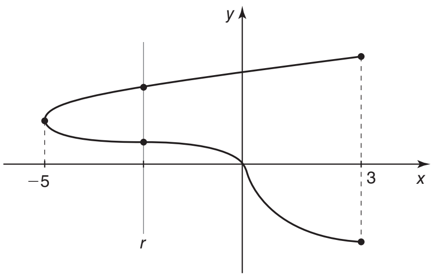
Alternativa **b**.

38 **a)** $f(-4) = 8$
b) $f(-2) = 0$
c) $f(0) = -4$
d) $f(1) = 5$
e) $f(3)$ não está definida, pois $3 \notin D(f)$.

39 Sim, pois qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, com $x \in [-2, 4]$, intercepta o gráfico em um único ponto.



40 Não, porque existe pelo menos uma reta paralela ao eixo Oy que intercepta o gráfico em mais de um ponto; por exemplo, a reta r.



41 $D(f) =]1, 7]$; $Im(f) = [-2, 8[$

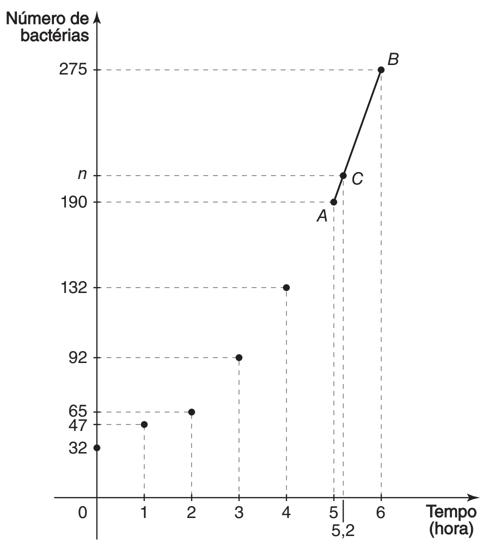
42 $D(f) =]-1, 6]$; $Im(f) = \{-2\} \cup [0, 7]$

43 **a)** 7%
b) 5%
c) 3%
d)

Mês	Taxa de inflação (%)
1	6
2	8
3	9
4	7
5	6
6	9
7	9
8	9
9	8
10	6
11	5
12	9

e) Sim, pois a cada mês está associado um único valor da taxa de inflação.

44 **a)** (0, 32) é um ponto do gráfico; logo, no instante zero havia 32 bactérias.
b) $275 - 190 = 85$
Logo, da 5ª para a 6ª hora, a população aumentou em 85 bactérias.
c) $190 - 92 = 98$
Logo, da 3ª para a 5ª hora, a população aumentou em 98 bactérias.
d) Sim, pois a cada instante está associado um único número de bactérias.
e) O número n de bactérias no instante 5 h 12 min, que equivale a 5,2 h, pode ser obtido aproximando-se o gráfico por um segmento de reta que una os pontos de abscissas 5 e 6, conforme mostra a figura:



As retas paralelas ao eixo Ox pelos pontos A, B e C concorrem com as transversais Oy e $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{n - 190}{275 - 190} \quad \text{(I)}$$

Analogamente, as retas paralelas ao eixo Oy pelos pontos A, B e C concorrem com as transversais Ox e $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{5{,}2 - 5}{6 - 5} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) concluímos:

$$\frac{n - 190}{275 - 190} = \frac{5{,}2 - 5}{6 - 5} \Rightarrow \frac{n - 190}{85} = \frac{0{,}2}{1}$$

$\therefore\ n - 190 = 17 \Rightarrow n = 207$

Logo, 5 horas e 12 minutos após o início da contagem havia, aproximadamente, 207 indivíduos na cultura de bactérias.

45 a) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$
Logo, as raízes de f são 1 e 3.

b) $5x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$
Logo, a única raiz da função é $-\frac{3}{5}$.

c) $\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$
$\therefore\ x = 3$ ou $x = -3$
Logo, as raízes de f são 3 e -3.

d) $x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$
$\therefore x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$
Logo, as raízes de f são 0, 2 e -2.

e) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$
Logo, a função não tem raiz real, pois o quadrado de um número real nunca é negativo.

f) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0.$
Logo, as raízes de f são 0, 2 e 4.

g) $y = -3$ é uma função constante, isto é, paralela ao eixo das abscissas.
Logo, a função não tem raiz, pois não existe x tal que $f(x) = 0$.

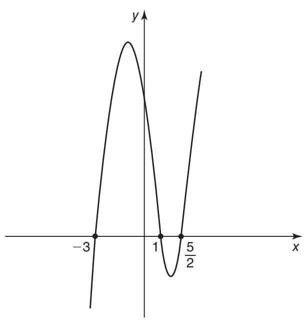
46 $f(-6) = 0,\ f(-3) = 0,\ f(0) = 0,\ f(3) = 0$ e $f(6) = 0$
As raízes de f são: $-6, -3, 0, 3$ e 6.

47 a) As abscissas dos pontos onde o gráfico intercepta o eixo Ox são as raízes da função f, que são as raízes da equação
$x^2 - 6x + 5 = 0$, ou seja, $x = 1$ ou $x = 5$.

b) A ordenada do ponto onde o gráfico intercepta o eixo Oy é $f(0)$, ou seja:
$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$

c) $x = 1$ ou $x = 5$

48 Resposta possível:



49 a) $h(t) = 0 \Rightarrow 3t - t^2 = 0$
$\therefore\ t = 0$ ou $t = 3$
Logo, as raízes da função h são 0 e 3.

b) As raízes indicam os instantes em que a altura da bola, em relação ao campo, foi igual a zero. Assim, no momento do chute ($t = 0$) e 3 segundos após o chute ($t = 3$), a bola esteve em contato com o campo.

c) $h(1{,}5) = 3 \cdot 1{,}5 - (1{,}5)^2 = 2{,}25$
Logo, a altura da bola em relação ao campo, 1,5 segundo após o chute, era 2,25 m.

d) $h(t) = 4 \Rightarrow 3t - t^2 = 4$
$\therefore\ t^2 - 3t + 4 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$
Como $\Delta < 0$, concluímos que a equação não possui raiz real, o que significa que a bola não atingiu 4 m de altura.

50 As raízes da função $f(t) = t^3 - 9t - 9t^2 + 81$ são dadas por:
$t^3 - 9t - 9t^2 + 81 = 0 \Rightarrow t(t^2 - 9) - 9(t^2 - 9) = 0$
$\therefore\ (t - 9) \cdot (t^2 - 9) = 0 \Rightarrow t = 9$ ou $t = 3$ ou $t = -3$
Como o domínio da função é $1 \leq t \leq 12$, concluímos que o nível da água do rio esteve em seu valor médio nos meses 3 e 9, ou seja, em março e setembro.

51

a) V	e) V	i) V
b) F	f) F	j) V
c) V	g) V	
d) F	h) F	

52

a) F	e) F	i) V
b) V	f) V	j) V
c) V	g) V	k) V
d) V	h) F	

53 a) f é crescente em $[-1, 1]$.
b) f é decrescente em $[-3, -1]$ e $[1, 3]$.
c) f é constante em $[3, 5]$.

54 a) f é constante.
b) g é crescente.
c) h é decrescente.
d) p é crescente durante o percurso e constante durante o almoço.

55 Observando o gráfico, percebe-se que o número de animais silvestres manteve-se constante no intervalo de 9 a 12 anos. Nesse intervalo, o número de nascimentos foi igual ao número de mortes.
Alternativa **e**.

56 a) No intervalo $[6, 15]$, temos $x_2 > x_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$; logo, f é crescente em $[6, 15]$.

b) Em cada um dos intervalos $[0, 6]$ e $[15, 24]$, temos $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$; logo, f é decrescente em $[0, 6]$ e $[15, 24]$.

57 I. falsa
II. verdadeira
III. verdadeira
IV. verdadeira
Logo, apenas a afirmação I é falsa.
Alternativa **d**.

58 Sejam x_1 e x_2 dois números reais quaisquer, com $x_2 > x_1$.

Assim, temos:

$x_2 > x_1 \Rightarrow -2x_2 < -2x_1$; e $-2x_2 < -2x_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{5 - 2x_2}_{f(x_2)} < \underbrace{5 - 2x_1}_{f(x_1)}$

Logo, $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, com o que concluímos que a função $f(x) = 5 - 2x$ é decrescente em todo o seu domínio.

59 a) $t_1 > t_2 \Rightarrow 6t_1 > 6t_2$

$\therefore\ 6t_1 + 60 > 6t_2 + 60 \Rightarrow v(t_1) > v(t_2)$

b) acelerado

60 a) $t_1 > t_2 \Rightarrow -10t_1 < -10t_2$

$\therefore\ 90.000 - 10t_1 < 90.000 - 10t_2 \Rightarrow v(t_1) < v(t_2)$

b) esvaziada

61 a) Se a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários aumentar a cada mês.

b) Se a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários diminuir a cada mês.

c) Se a diferença entre o salário médio dos executivos e o salário médio dos outros funcionários permanecer constante.

d) Sim, é possível. Para isso, basta que o salário médio dos executivos aumente menos que o salário dos outros funcionários. Assim, a diferença entre os salários diminuirá e, portanto, a função f irá decrescer.

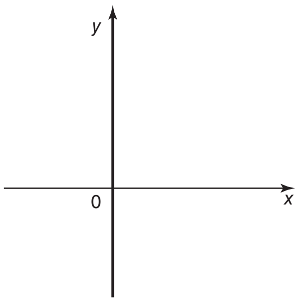
Exercícios complementares

Exercícios técnicos

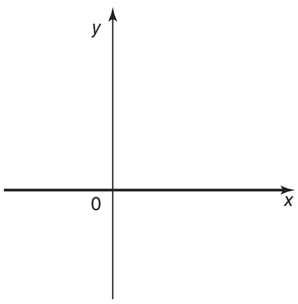
1 A pertence ao eixo Oy se, e somente se, $\frac{4t}{5} + 1 = 0$

Logo, $t = -\frac{5}{4}$.

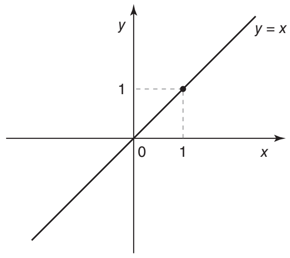
2 a) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com $x = 0$, são representados pelo eixo das ordenadas:



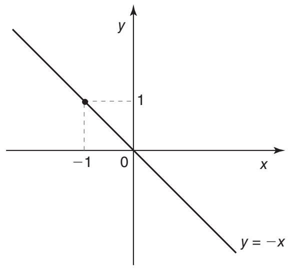
b) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com $y = 0$, são representados pelo eixo das abscissas:



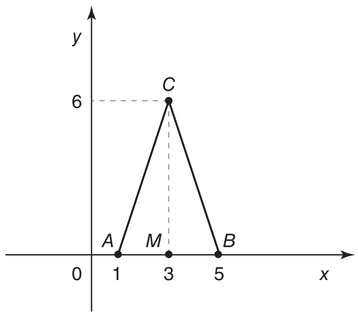
c) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com $y = x$, são representados pela bissetriz dos quadrantes ímpares:



d) Os pontos (x, y) do plano cartesiano, com $y = -x$, são representados pela bissetriz dos quadrantes pares:



3 Representamos o triângulo ABC no plano cartesiano:



Assim, temos:

a) A base $\overline{AB}$ e a altura relativa $\overline{CM}$ medem 4 e 6, respectivamente. Logo, a área S do triângulo ABC é dada por:

$S = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$

b) Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AMC e BMC, temos:

$(AC)^2 = 2^2 + 6^2$ e $(BC)^2 = 2^2 + 6^2$

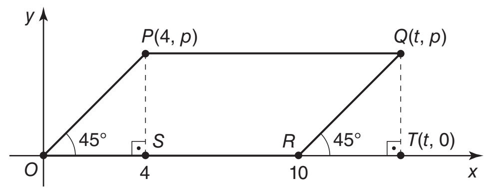
Logo, $AC = BC = 2\sqrt{10}$.

Concluímos, então, que o perímetro p do triângulo ABC é dado por:

$p = AB + BC + AC = 4 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} =$

$= 4\left(1 + \sqrt{10}\right)$

4



$OPQR$ é um paralelogramo; logo, $m(Q\hat{R}T) = m(P\hat{O}S) = 45°$. Portanto, os triângulos QTR e PSO são retângulos isósceles e congruentes entre si.

Assim, temos:

(I) $RT = OS \quad \therefore\ t = 10 + 4 = 14$

(II) $SP = OS \quad \therefore\ p = 4$

$\therefore\ Q(t, p) = Q(14,4)$

5 $\dfrac{f(2)}{f(4)-f(3)} = f(-1) \Rightarrow \dfrac{5}{k-8} = 5$

$\therefore 5k - 40 = 5 \Rightarrow k = 9$

6 a) $f(5) = 3 \cdot 5^2 - 5 = 70$

b) $3x^2 - x = 2 \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$

$\therefore x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{6} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\dfrac{2}{3}$

7 a) $f(2 \cdot 3) = f(2) \cdot f(3) \Rightarrow f(6) = 5 \cdot 8$

$\therefore f(6) = 40$

b) $f(2 \cdot 2) = f(2) \cdot f(2) \Rightarrow f(4) = 5 \cdot 5$

$\therefore f(4) = 25$

c) $f(3 \cdot 3) = f(3) \cdot f(3) \Rightarrow f(9) = 8 \cdot 8 = 64$

$\therefore f(9 \cdot 3) = f(9) \cdot f(3) \Rightarrow f(27) = 64 \cdot 8$

$\therefore f(27) = 512$

d) $f(2 \cdot 4) = f(2) \cdot f(4) \Rightarrow f(8) = 5 \cdot 25 = 125$

$\therefore f(8 \cdot 9) = f(8) \cdot f(9) \Rightarrow f(72) = 125 \cdot 64$

$\therefore f(72) = 8.000$

e) $f(2 \cdot 1) = f(2) \cdot f(1) \Rightarrow 5 = 5 \cdot f(1)$

$\therefore f(1) = 1$

f) $f\left(4 \cdot \dfrac{1}{4}\right) = f(4) \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow f(1) = f(4) \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right)$

$\therefore 1 = 25 \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{25}$

8 a) $\dfrac{3}{x^4 - 5x^2 + 4} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; fazendo $x^2 = y$, temos:

$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \text{ ou } y = 1$

Como $x^2 = y$, temos:

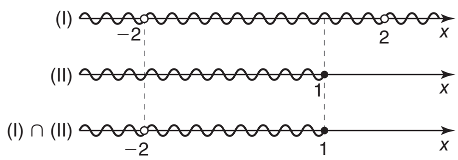
- $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4$
  $\therefore x = 2 \text{ ou } x = -2$
- $y = 1 \Rightarrow x^2 = 1$
  $\therefore x = 1 \text{ ou } x = -1$

Logo:

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, -1, 1, 2\}$

b) $\dfrac{5}{x^4 - 16} + \sqrt{1 - x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

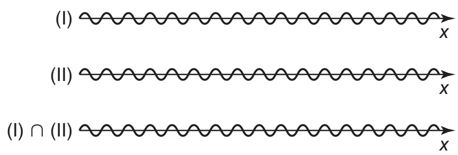
$\underbrace{x^4 - 16 \neq 0}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{1 - x \geqslant 0}_{\text{(II)}}$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ e } x \neq -2\}$

c) $\dfrac{1}{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

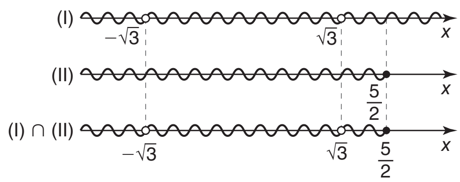
$\underbrace{x^2 + 3 \neq 0}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x^2 + 1 \geqslant 0}_{\text{(II)}}$



$D(u) = \mathbb{R}$

d) $\dfrac{7}{x^2 - 3} + \sqrt{5 - 2x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

$\underbrace{x^2 - 3 \neq 0}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{5 - 2x \geqslant 0}_{\text{(II)}}$



$D(v) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{5}{2} \text{ e } x \neq -\sqrt{3} \text{ e } x \neq \sqrt{3}\right\}$

9 Devemos ter $x^2 - 2x + k \neq 0$ para qualquer x real.

Logo:

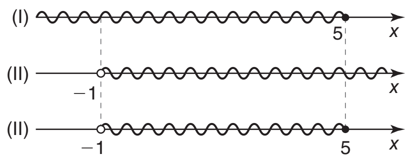
$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k < 0 \Rightarrow 4 - 4k < 0$

$\therefore 4k > 4 \Rightarrow k > 1$

Alternativa **a**.

10 $\sqrt{5 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e

$\underbrace{5 - x \geqslant 0}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x + 1 > 0}_{\text{(II)}}$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 5\} =]-1, 5]$

Alternativa **d**.

11 $y = \sqrt{x^2 + 9}$

Assim: $\underbrace{y \geqslant 0}_{\text{(I)}}$ e $y^2 = x^2 + 9$

$x^2 = y^2 - 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 9}$

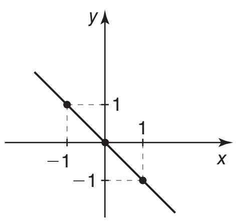
$\therefore y^2 - 9 \geqslant 0 \Rightarrow \underbrace{y \leqslant -3 \text{ ou } y \geqslant 3}_{\text{(II)}}$

Logo, (I) ∩ (II): $y \geqslant 3$.

Alternativa **a**.

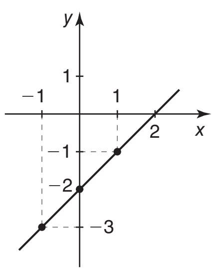
12 a)

x	y
−1	1
0	0
1	−1



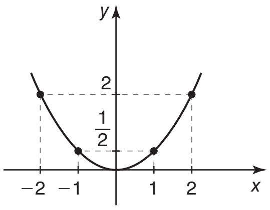
b)

x	y
−1	−3
0	−2
1	−1



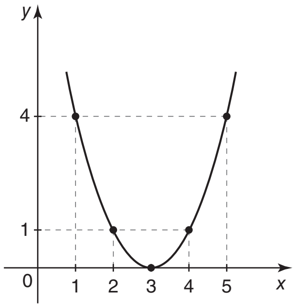
c)

x	y
−2	2
−1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2



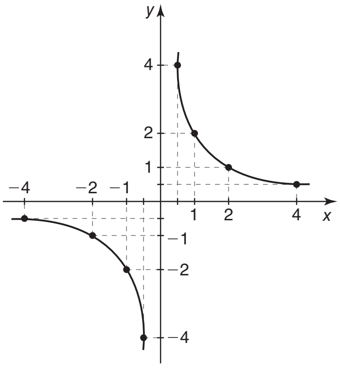
d)

x	y
1	4
2	1
3	0
4	1
5	4



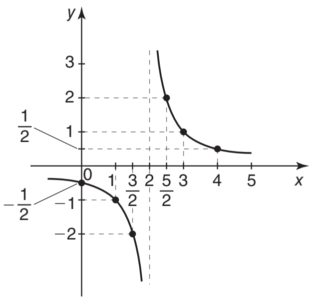
e)

x	y
−4	$-\frac{1}{2}$
−2	−1
−1	−2
$-\frac{1}{2}$	−4
$\frac{1}{2}$	4
1	2
2	1
4	$\frac{1}{2}$



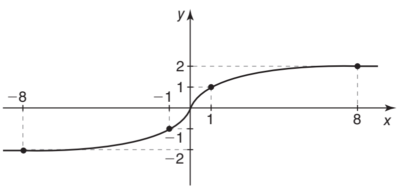
f)

x	y
0	$-\frac{1}{2}$
1	−1
$\frac{3}{2}$	−2
$\frac{5}{2}$	2
3	1
4	$\frac{1}{2}$



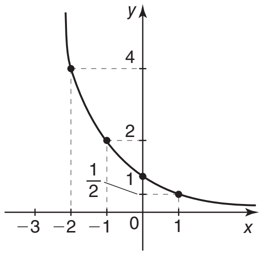
g)

x	y
−8	−2
−1	−1
0	0
1	1
8	2



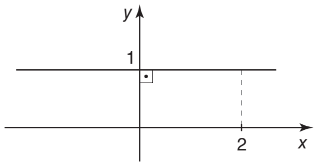
h)

x	y
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$



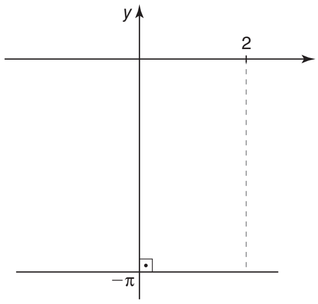
i)

x	y
0	1
2	1

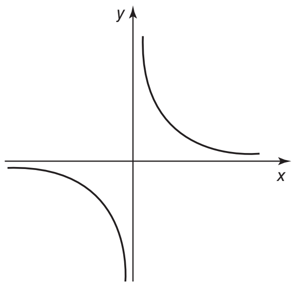


j)

x	y
0	$-\pi$
2	$-\pi$



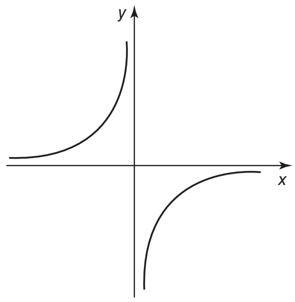
13 a)



$k > 0$

O gráfico é uma hipérbole equilátera cujos ramos estão no 1º e 3º quadrantes.

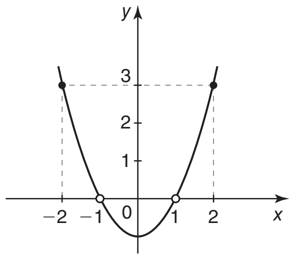
b)



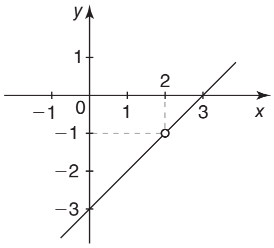
$k < 0$

O gráfico é uma hipérbole equilátera cujos ramos estão no 2º e 4º quadrantes.

14 a) $h(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2 - 1$, se $x \neq -1$ e $x \neq 1$



b) $s(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = x - 3$, se $x \neq 2$



15 a) V c) F e) F
b) V d) V f) V

16 $f(-2) = 7 \Rightarrow -2m + p = 7$
$f(2) = -1 \Rightarrow 2m + p = -1$
Temos o sistema:
$$\begin{cases} -2m + p = 7 & \text{(I)} \\ 2m + p = -1 & \text{(II)} \end{cases}$$
Somando (I) e (II), temos:
$2p = 6 \Rightarrow p = 3$
Substituindo p por 3 em (II), obtemos:
$2m + 3 = -1 \Rightarrow 2m = -4$
$\therefore m = -2$
Logo:
$m - p = -2 - 3 = -5$
Alternativa **b**.

17 a) $f(2) = 0 \Rightarrow \dfrac{2 + a}{2 + b} = 0 \therefore a = -2$ (I)

$f(0) = -1 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = -1$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos:
$\dfrac{-2}{b} = -1 \Rightarrow b = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x + a}{x + b}$; logo: $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

$f(3) = \dfrac{3 - 2}{3 + 2} = \dfrac{1}{5}$ e $f(-1) = \dfrac{-1 - 2}{-1 + 2} = -3$

Então: $f(3) - f(-1) = \dfrac{1}{5} - (-3) = \dfrac{1}{5} + 3$

$\therefore f(3) - f(-1) = \dfrac{16}{5}$

18 Não, porque existe elemento em A (o número 1) que está associado, pela relação, a mais de um elemento de B (os elementos 2 e 5).

19 $D(f) = [2, 6[\cup]7, 9]$; $Im(f) = [-2, 4[\cup [5, 6[$

20 a) $\dfrac{2}{x - 3} - \dfrac{x}{x + 3} = 0 \Rightarrow 2(x + 3) - x(x - 3) = 0$
$\therefore -x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 6$
Logo, as raízes são -1 e 6.
b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
Sendo $x^2 = y$, temos:
$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$
$\therefore y = 4$ ou $y = -1$
Como $x^2 = y$, temos:
- $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4$
  $\therefore x = -2$ ou $x = 2$
- $y = -1 \Rightarrow x^2 = -1$
  $\therefore x \notin \mathbb{R}$

Logo, as raízes são -2 e 2.

c) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x + 1) - 3(x + 1) = 0$
$\therefore (x + 1)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$
$\therefore x = -1$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
Logo, as raízes de $h(x)$ são $-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.
d) $\sqrt{x + 6} - x = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x + 6}\right)^2 = x^2$
$\therefore x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$
$\therefore x = -2$ ou $x = 3$
Verificação:
- Para $x = -2$:
  $\sqrt{-2 + 6} - (-2) = 0 \Rightarrow \sqrt{4} + 2 = 0$
  $\therefore 4 = 0$ (F)
- Para $x = 3$:
  $\sqrt{3 + 6} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{9} - 3 = 0$
  $\therefore 0 = 0$ (V)

Logo, apenas 3 é raiz da função.
e) $\sqrt{x} + 9 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -9$
Não existe x real tal que $\sqrt{x} = -9$.
Logo, a função não tem raiz real.
f) Não existe x tal que $f(x) = 0$; logo, a função não tem raízes reais.
g) Qualquer x, com $x \in \mathbb{R}$, obedece à condição $g(x) = 0$; logo, todo número real é raiz da função.

21 $f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 = 0$
$\therefore 1 + a + b + 3 = 0 \Rightarrow a + b = -4$
Alternativa **b**.

22 Para $(x^2 - 5x + 4)(x^4 - 16) = 0$, temos:
$x^2 - 5x + 4 = 0$ ou $x^4 - 16 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4$ ou $x = 1$ ou $x^2 = 4$ ou $x^2 = -4$ (não convém)
$\therefore x = 4$ ou $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$
Logo, os zeros de $f(x)$ são 4, 1, 2 e -2.
Portanto, a soma dos zeros de $f(x)$ é:
$4 + 1 + 2 + (-2) = 5$
Alternativa **a**.

23 a) $\dfrac{12}{5}$ e) $0 < x < 6$
b) 0 e 6 f) $-3 \leq x < 0$
c) $-3 \leq x < \dfrac{12}{5}$ g) $-3 \leq x < 0$ ou $\dfrac{12}{5} < x < 6$
d) $\dfrac{12}{5} < x \leq 6$ h) $0 < x < \dfrac{12}{5}$

24 Como $f(x) > 0$, $g(x) < 0$ para todo x, com $x \in \mathbb{R}_+$, temos $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ para todo x, com $x \in \mathbb{R}_+$. Concluímos, assim, que todos os pontos do gráfico de h estão abaixo do eixo Ox.
Alternativa **c**.

25 • Sejam x_1 e x_2 reais positivos quaisquer, com $x_2 > x_1$ (I).
Multiplicando por x_2 ambos os membros de (I), obtemos:
$x_2^2 > x_1 \cdot x_2$ (II)
Multiplicando por x_1 ambos os membros de (I), obtemos:
$x_1 \cdot x_2 > x_1^2$ (III)

De (II) e (III), pela propriedade transitiva da relação ">", resulta:

$\underbrace{x_2^2}_{f(x_2)} > \underbrace{x_1^2}_{f(x_1)}$

Logo, $f(x) = x^2$ é crescente para $x > 0$.

- x_1 e x_2 reais negativos quaisquer, com $x_2 > x_1$ (I).
  Multiplicando por x_2 ambos os membros de (I), obtemos:
  $x_2^2 < x_1x_2$ (II)
  Multiplicando por x_1 ambos os membros de (I), obtemos:
  $x_1 \cdot x_2 < x_1^2$ (III)
  De (II) e (III), pela propriedade transitiva da relação "<", resulta:
  $\underbrace{x_2^2}_{f(x_2)} < \underbrace{x_1^2}_{f(x_1)}$
  Logo, $f(x) = x^2$ é decrescente para $x < 0$.

Exercícios contextualizados

26 $P(1, 7)$; $Q(4, 11)$
$PQ = \sqrt{(4 - 1)^2 + (11 - 7)^2} = \sqrt{25} = 5$
Logo, a distância percorrida pelo trem é 5 km.

27
$0 \nearrow 1$
$1 \nearrow 2$
$2 \nearrow 3$
$3 \nearrow 4$
$\vdots \quad \vdots$

a) nenhum
b) 2
c) Não, pois o número zero de andar não está associado a nenhum número de apartamento.

28 a) Em 8 dias o consumo é:
$C = 400 \cdot 8 = 3.200$
Logo, o consumo em 8 dias é 3.200 kWh.
b) $400t = 4.800 \Rightarrow t = 12$
Serão necessários 12 dias.
c) A equação $C = 400t$ mostra que o consumo diário é 400 kWh.
Adicionando 200 kWh por dia, a nova equação é:
$C = 600t$

29 Sendo ganho mensal = x; aluguel = 120; manutenção $= \frac{3x}{4}$, temos:
a) Poupança $\rightarrow P = x - \left(120 + \frac{3x}{4}\right) \rightarrow P = \frac{x}{4} - 120$
b) Sendo $P = 240 \rightarrow 240 = \frac{x}{4} - 120 \rightarrow x =$ R$ 1.440,00

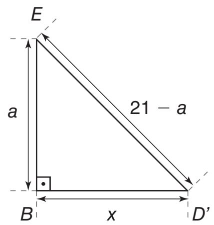
30

	Preço unitário (em reais)	Número de pessoas	Venda
Almoço	15	$120 - x$	$P_A = 15(120 - x)$
Jantar	12	x	$P_J = 12x$
Custo	$120 \cdot 6 = 720$		

$P_A \rightarrow$ preço do almoço; $P_J \rightarrow$ preço do jantar
Lucro = venda − custo
$L = P_A + P_J -$ custo
$L = 15(120 - x) + 12x - 720$
$L = 1.800 - 15x + 12x - 720$
$L = -3x + 1.080$
Alternativa **e**.

31 a) $V(3) = -2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 120$
$\therefore V(3) = 78$
Logo, após 3 horas, restaram 78.000 L.
b) $V(0) = -2 \cdot 0^3 - 8 \cdot 0 + 120$
$\therefore V(0) = 120$
Logo, a capacidade do reservatório é 120.000 L.
c) $V(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 - 8t + 120 = 0$
$\therefore t^2 + 4t - 60 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2}$
$\therefore t = 6$ ou $t = -10$ (não convém)
Logo, serão necessárias 6 horas.
d) 80% de 120 = 96
$V(t) = 96 \Rightarrow -2t^2 - 8t + 120 = 96$
$\therefore t^2 + 4t - 12 = 0$
$t = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$
$\therefore t = 2$ ou $t = -6$ (não convém)
Logo, os técnicos deverão realizar o conserto em 2 horas.

32 Da figura, temos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(21 - a)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow 441 - 42a + a^2 = a^2 + x^2$
$\therefore a = \frac{441 - x^2}{42}$
Logo, a área S do triângulo é dada por:
$S = \frac{x \cdot a}{2} \Rightarrow S = \frac{x \cdot \frac{441 - x^2}{42}}{2}$
$\therefore S = \frac{441x - x^3}{84}$
Alternativa **c**.

33 Temos:
$\begin{cases} S(0) = 0 \\ S(1) = 32 \\ S(2) = 128 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 32 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 128 \end{cases}$
$\therefore \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 32 \\ 4a + 2b + c = 128 \end{cases} \Rightarrow c = 0, b = 0$ e $a = 32$
Logo, $S(t) = 32t^2$
Calculando a distância S, em centímetro, para $t = 2,5$, obtemos:
$S(2,5) = 32 \cdot (2,5)^2 = 200$
Alternativa **d**.

34 a)

Tempo (min)	0	1	2	3	4	5
Produção (m)	0	2	4	6	8	10

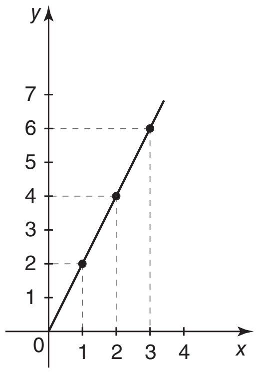
b) Os valores t de tempo e os correspondentes valores p da produção são diretamente proporcionais, pois:

I. Para $t = 0$, temos $p = 0$;

II. Para $t \neq 0$, temos que a razão $\frac{p}{t}$ é constante.

c) $y = 2x$

d)



35 **a)** $\frac{x}{2.200} = \frac{28.800}{1.600} \Rightarrow x = 39.600$

Logo, o gasto com óleo diesel em novembro foi de R$ 39.600,00.

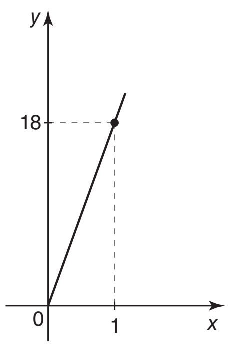
b) $\frac{y}{x} = \frac{28.800}{1.600} = 18 \Rightarrow y = 18x$

c) Sim, porque:

I. Se $x = 0$, então $y = 0$.

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = k$, sendo k uma constante real (no caso, a constante é 18).

d)



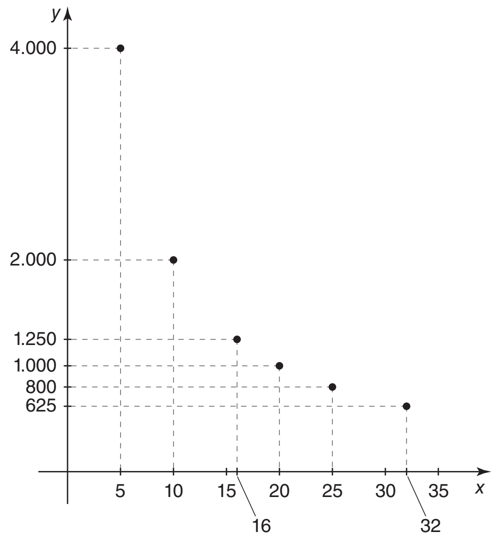
36 **a)** Sendo x o número de litros, temos:

$10 \cdot 2.000 = x \cdot 400 \Rightarrow x = 50$

b) $x \cdot f(x) = 10 \cdot 2.000 \Rightarrow f(x) = \frac{20.000}{x}$, para $x > 0$

c)

x Quantidade, em litro, de agrotóxicos	$f(x)$ População de insetos (número de indivíduos)
5	4.000
10	2.000
16	1.250
20	1.000
25	800
32	625



37 **a)** $0,8 \cdot 60 = 48$

Logo, decorrerão 48 minutos.

b) $6 - 0,8 = 5,2$

Logo, a ação do analgésico permanecerá por 5,2 horas ou 5 horas e 12 minutos.

38 De acordo com o gráfico:

a) 251,20 L

b) 301,44 L

c) A variação será de 301,44 L − 251,20 L = 50,24 L

39 **a)** Pelo gráfico, a altura da planta era 30 cm.

b) O crescimento da planta foi:

30 cm − 25 cm = 5 cm

c) O desenvolvimento na primeira semana foi:

15 cm − 0 cm = 15 cm

Já na segunda semana, foi:

25 cm − 15 cm = 10 cm

E na terceira semana foi:

30 cm − 25 cm = 5 cm

Logo, o maior desenvolvimento ocorreu na primeira semana.

40 **a)** 606 L/s

b) 685 L/s

c) 678,8 L/s = (678,8 · 3.600) L/h = 2.443.680 L/h

Logo, a vazão total nessas duas horas será de 4.887.360 L.

d) 678,8 L/s = (678,8 · 60) L/min = 40.728 L/min

Haverá enchente, pois a vazão é maior que o limite de 40.000 L/min.

41 **a)** [0, 2] **b)** [7, 10] **c)** [2, 7]

42 Dentre os segmentos de reta que compõem o gráfico, o de maior inclinação, em relação ao eixo horizontal, é aquele que une os pontos referentes ao PIB de 1979 e de 1980; por isso concluímos que a maior taxa de variação do PIB ocorreu no período de 1979 a 1980.

Alternativa **e**.

43 Temos:

$p(t) = \frac{t+1}{t} \Rightarrow p(t) = \frac{t}{t} + \frac{1}{t}$

$\therefore p(t) = 1 + \frac{1}{t}$

Sendo t_1 e t_2 dois instantes quaisquer do período que durou a experiência, com $t_2 > t_1$, temos:

$$t_2 > t_1 \Rightarrow \frac{1}{t_2} < \frac{1}{t_1}$$

Adicionando 1 a ambos os membros dessa desigualdade, obtemos:

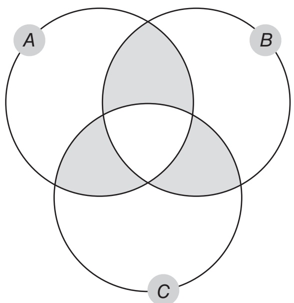
$$1 + \frac{1}{t_2} < 1 + \frac{1}{t_1} \Rightarrow \frac{t_2 + 1}{\underbrace{t_2}_{p(t_2)}} < \frac{t_1 + 1}{\underbrace{t_1}_{p(t_1)}}$$

Assim, concluímos:

$t_2 > t_1 \Rightarrow p(t_2) < p(t_1)$, para quaisquer t_1 e t_2 do período que durou a experiência. Logo, a função p é decrescente em todo o seu domínio.

Exercícios de revisão cumulativa

1



A região sombreada do diagrama representa:

$[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B \cap C)$

Alternativa **d**.

2 As quatro sentenças a seguir são equivalentes entre si:

- $x \notin A$ ou $x \notin B$
- $x \in A'$ ou $x \in B'$
- $x \in (A' \cup B')$
- $x \in (A \cap B)'$

Alternativa **d**.

3 **a)** V, pois, se y fosse racional, teríamos uma soma de dois números racionais igual a um número irracional, o que é absurdo.

b) F, pois $2\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais, mas 2 é racional.

c) F, pois $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ e $\sqrt{6}$ são irracionais, mas $\sqrt{2}$ é irracional.

d) F, pois $\sqrt{\frac{5}{2}}$ é irracional, mas $\frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$.

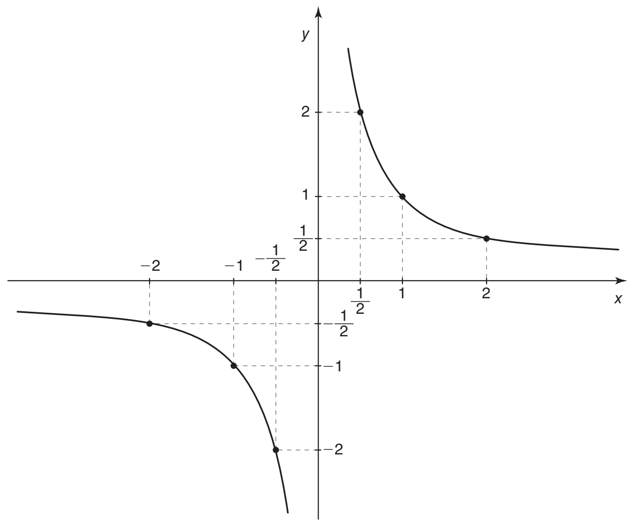
Análise da resolução

a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \frac{1}{x}$, ou seja, $y = \frac{1}{x}$

Como as variáveis x e y são inversamente proporcionais, pois seu produto é constante, $xy = 1$, concluímos que o gráfico dessa função é uma hipérbole equilátera. Para esboçar o gráfico, atribuímos alguns valores a x, obtendo os correspondentes valores de y. Por exemplo:

x	y
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

Assim, esboçamos o gráfico:



b) I. Sendo os números positivos x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$$

Assim, concluímos que para quaisquer números positivos x_1 e x_2 temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

ou seja, f é decrescente em $\mathbb{R}^*_+$

II. Sendo os números negativos x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$$

Assim, concluímos que para quaisquer números negativos x_1 e x_2 temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

ou seja, f é decrescente em $\mathbb{R}^*_-$

[*Nota*: A função f é decrescente em $\mathbb{R}^*_+$ e em $\mathbb{R}^*_-$, porém não podemos dizer que f é decrescente em seu domínio D. Para isto deveríamos ter $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a D, o que não ocorre, pois, por exemplo, -1 e 1 pertencem a D e temos $1 > -1$ e $f(1) > f(-1)$.]

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 Cada 6° do ponteiro representa 1 minuto. Então, 30° representam 5 minutos.

3 20 minutos representam 120°.

Exercícios propostos

1
- $T(x) = 0$, se $2 \leqslant x \leqslant 10$; logo, $T(10) = 0$
- $T(x) = 10x - 100$, se $10 < x \leqslant 20$; logo, $T(20) = 10 \cdot 20 - 100 = 100$

Como $T(10) < 50 < T(20)$, devemos usar a expressão $T(x) = 10x - 100$.

Então:

$50 = 10x - 100 \Rightarrow 10x = 150$

$\therefore\ x = 15$

Logo, o tempo necessário para que a temperatura da água atinja 50 °C equivale a 15 minutos.

Alternativa **c**.

2
- Se $x \leqslant 300$, $f(x) = x$

Se $x > 300$, $f(x) = 300 + 0{,}8 \cdot (x - 300) =$
$= 300 + 0{,}8x - 240$

$\therefore\ f(x) = 60 + \dfrac{4}{5}x$

$$\text{Logo, } f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 300 \\ 60 + \dfrac{4x}{5}, \text{ se } x > 300 \end{cases}$$

Alternativa **e**.

3 a) $F = 40$; $E = 80$

Nesse caso, $E > F$.

Logo, $N = \dfrac{4F + E}{5} = \dfrac{4 \cdot 40 + 80}{5} = 48$.

b) $F = 80$; $E = 40$

Nesse caso, $E < F$.

Então, $N = F = 80$.

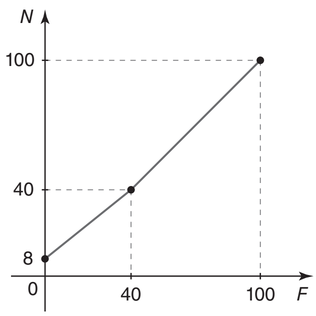
c) $E = 40$

A nota N é dada por:

$$N = \begin{cases} \dfrac{4}{5}F + 8, \text{ se } F < 40 \\ F, \text{ se } F \geqslant 40 \end{cases}$$

Então:

F	N
0	8
40	40
100	100



4 De acordo com a tabela, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 6{,}14, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 12{,}27, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 18{,}41, \text{ se } 20 < x \leqslant 30 \\ 36{,}82, \text{ se } 30 < x \leqslant 60 \\ 61{,}36, \text{ se } x > 60 \end{cases}$$

5 a) $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$; logo, f é par.

b) $g(-x) = \dfrac{(-x)^3}{6} = -\dfrac{x^3}{6} = -g(x)$; logo, g é ímpar.

c) $h(-x) = (-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

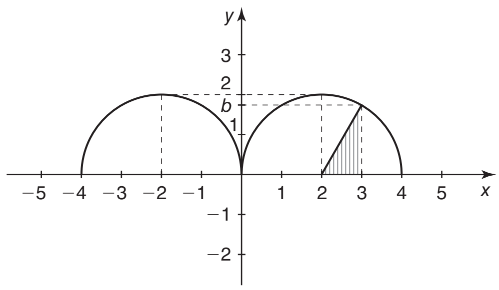
$h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$; logo, h não é par nem ímpar.

d) $r(-x) = \sqrt[5]{-x} = -\sqrt[5]{x} = -r(x)$; logo, r é ímpar.

e) $q(-x) = \dfrac{(-x)^4}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{x^4}{x^2 + 1} = q(x)$; logo, q é par.

6 a) f é par, pois $f(-x) = f(x)$ para qualquer $x \in D$.

b)



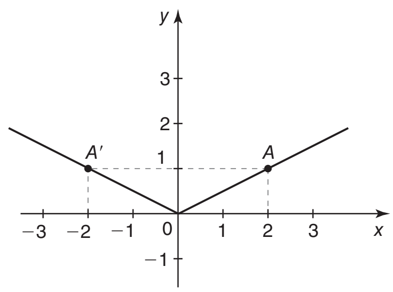
Se $b = f(3)$, então $b > 0$:

$b^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow b^2 + 1 = 4$

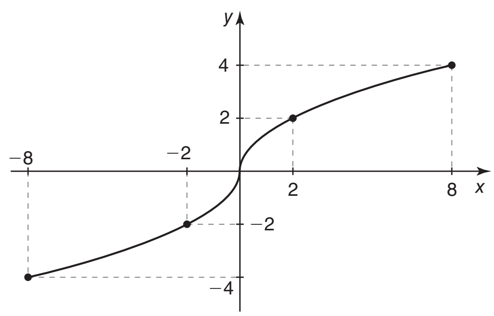
$\therefore\ b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

Logo, $f(3) = \sqrt{3}$.

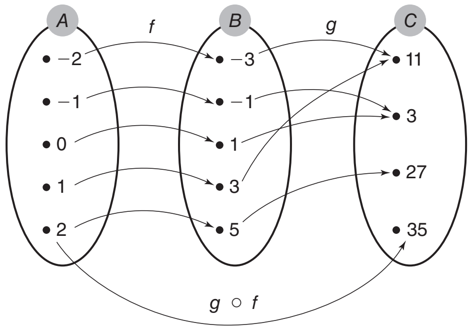
7



8 $f\colon [-8, 8] \to \mathbb{R}$



9



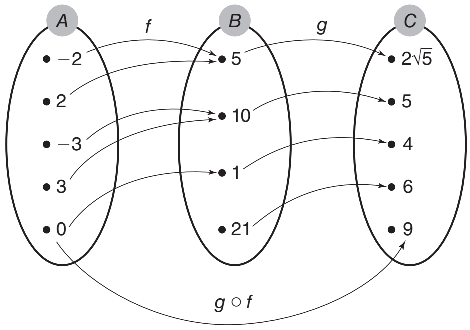
a) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-1) = 3$

b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 11$

c) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 27$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 2 =$
$= (2x + 1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 3$

10



a) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 2\sqrt{5}$

b) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 4$

c) $(g \circ f)(-3) = g(f(-3)) = g(10) = 5$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 15} = \sqrt{x^2 + 16}$

11 a) $(h \circ g \circ f)(8) = (h \circ g)(f(8))$
$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$
Assim:
$(h \circ g)(f(8)) = (h \circ g)(2) = h(g(2))$
$g(2) = 2 + 1 = 3$
Logo:
$h(g(2)) = h(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

b) $(f \circ g \circ h)(1) = (f \circ g)(h(1))$
$h(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$
Assim:
$(f \circ g)(h(1)) = (f \circ g)(5) = f(g(5))$
$g(5) = 5 + 1 = 6$
Logo:
$f(g(5)) = f(6) = \sqrt[3]{6}$

c) $(f \circ h \circ g)(0) = (f \circ h)(g(0))$
$g(0) = 0 + 1 = 1$
Assim:
$(f \circ h)(g(0)) = (f \circ h)(1) = f(h(1))$
$h(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$
Logo:
$f(h(1)) = f(5) = \sqrt[3]{5}$

d) $(g \circ h \circ f)(-1) = (g \circ h)(f(-1))$
$f(-1) = \sqrt[3]{-1} = -1$
Assim:
$(g \circ h)(f(-1)) = (g \circ h)(-1) = g(h(-1))$
$h(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$
Logo:
$g(h(-1)) = g(-1) = -1 + 1 = 0$

e) $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)\left(\sqrt[3]{x}\right) =$
$= h\left(g\left(\sqrt[3]{x}\right)\right) = h\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) = 3\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) + 2 =$
$= 3\sqrt[3]{x} + 5$

f) $[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(3x + 2) =$
$= f(g(3x + 2)) = f(3x + 2 + 1) = f(3x + 3) =$
$= \sqrt[3]{3x + 3}$

g) $[(f \circ h) \circ g](x) = (f \circ h)(g(x)) = (f \circ h)(x + 1) =$
$= f(h(x + 1)) = f[3(x + 1) + 2] = f(3x + 5) =$
$= \sqrt[3]{3x + 5}$

h) $[(g \circ h) \circ f](x) = (g \circ h)(f(x)) = (g \circ h)\left(\sqrt[3]{x}\right) =$
$= g\left(h\left(\sqrt[3]{x}\right)\right) = g\left(3\sqrt[3]{x} + 2\right) = 3\sqrt[3]{x} + 2 + 1 =$
$= 3\sqrt[3]{x} + 3$

12 a) Sendo $f(x) = x^2 + bx$, temos $f(-2) = 0$. Assim:
$(-2)^2 + b(-2) = 0 \Rightarrow 4 - 2b = 0$
$\therefore\ b = 2$
Em $g(x) = ax + 4b$, $g(-2) = 0$ e $b = 2$. Logo:
$a(-2) + 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow -2a + 8 = 0$
$\therefore\ a = 4$

b) De acordo com o item **a**, temos: $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 4x + 8$.
Logo, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x + 8) =$
$= (4x + 8)^2 + 2 \cdot (4x + 8) =$
$= 16x^2 + 64x + 64 + 8x + 16 = 16x^2 + 72x + 80$

13 a) Ao determinar o valor de x para que $x + 5 = 7$, obtemos $x = 2$.
Assim, para $x = 2$:
$f(7) = f(2 + 5) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

b) $x + 5 = t$
$\therefore x = t - 5$
$f(t) = 2 \cdot (t - 5) + 1 = 2t - 9$
Logo, $f(x) = 2x - 9$.

14 a) $t = 1.200$
$x = \dfrac{12t}{2}\ \therefore\ x = \dfrac{12 \cdot 1.200}{2} = 7.200$
$y = \dfrac{x}{2}\ \therefore\ y = \dfrac{7.200}{2} = 3.600$
Logo, foram plantados 3.600 pés de eucalipto.

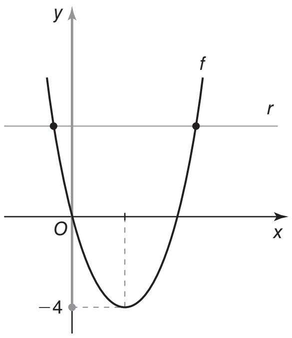
b) $y = f(g(t)) = f(6t) = \dfrac{6t}{2}$
$y = 3t$

15 a) Para $p = 100$, temos:
$x = 22 + \dfrac{600}{100} \Rightarrow x = 28$
Logo:
$y = 60 + 4 \cdot 28 \Rightarrow y = 172$
Portanto, o consumo médio é de 172 kWh.

b) Substituindo x por $22 + \dfrac{600}{p}$ em $y = 60 + 4x$, temos:
$y = 60 + 4 \cdot \left(22 + \dfrac{600}{p}\right) = 60 + 88 + \dfrac{2.400}{p}$
$\therefore y = 148 + \dfrac{2.400}{p}$

16 **a)** f é sobrejetora.
b) g é injetora.
c) h é bijetora.
d) i não é sobrejetora nem injetora.

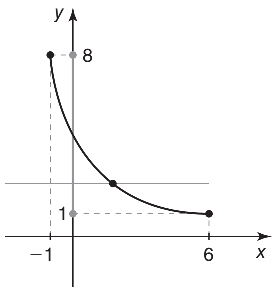
17



$f\colon \mathbb{R} \to [-4, +\infty[$

- f não é injetora, pois a reta r, paralela ao eixo Ox, intercepta o gráfico de f em dois pontos.
- No entanto, f é sobrejetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que passa por um ponto de ordenada y, com $y \geqslant -4$, intercepta o gráfico.

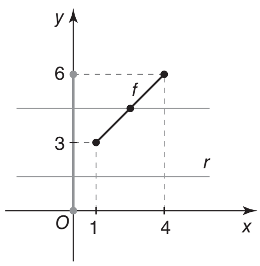
18



$f\colon [-1, 6] \to [1, 8]$

- f é injetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que intercepta o gráfico de f o faz em um único ponto.
- f é sobrejetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que passa por um ponto de ordenada y, com $1 \leqslant y \leqslant 8$, intercepta o gráfico.
- Como f é injetora e sobrejetora, concluímos que f é bijetora.

19



$f\colon [1, 4] \to [0, 6]$

- f é injetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que intercepta o gráfico de f o faz em um único ponto.
- f não é sobrejetora, pois a reta r, que é paralela ao eixo Ox e passa por um ponto de ordenada y, com $0 \leqslant y < 3$, não intercepta o gráfico.

20 **a)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 5$.

- Seja k, com $k \in CD(f)$.
  Resolvendo, na variável x, a equação $f(x) = k$, temos:
  $x^2 - 5 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt{k + 5}$
  Portanto, x é real se, e somente se, $k \geqslant -5$.
  Logo, $Im(f) = [-5, +\infty[$.
  Como $CD(f) = \mathbb{R}$, temos que $Im(f) \neq CD(f)$.
  Portanto, f não é sobrejetora.
- Se $k > -5$, existem dois elementos distintos do domínio de f com a mesma imagem k:
  $x_1 = \sqrt{k + 5}$ e $x_2 = -\sqrt{k + 5}$.
  Logo, a função f não é injetora.
  Concluímos, então, que f não é injetora nem sobrejetora.

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 3x + 2$.
Seja k, com $k \in \mathbb{R}$.
Resolvendo, na variável x, a equação $g(x) = k$, temos:
$3x + 2 = k \Rightarrow x = \dfrac{k - 2}{3}$.
Assim, para qualquer k do contradomínio da função g, a equação $g(x) = k$ tem uma única solução.
Logo, g é bijetora.

c) $h\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$; $h(x) = \dfrac{1}{x}$
Seja k, com $k \in \mathbb{R}^*$.
$h(x) = k$
$\dfrac{1}{x} = k \Rightarrow x = \dfrac{1}{k}$
Assim, para qualquer k do contradomínio da função h, a equação $h(x) = k$ tem uma única solução.
Portanto, h é bijetora.

d) $t\colon R - \{1\} \to \mathbb{R}^*$; $t(x) = \dfrac{5}{x - 1}$
Seja k, com $k \in \mathbb{R}^*$.
$t(x) = k$
$\dfrac{5}{x - 1} = k \Rightarrow x = \dfrac{5 + k}{k}$
Assim, para qualquer k do contradomínio da função t, a equação $t(x) = k$ tem uma única solução.
Logo, t é bijetora.

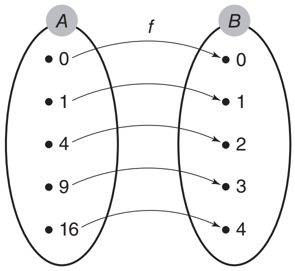
e) $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$; $u(x) = x^2$
Seja k, com $k \in \mathbb{R}_+$
$k = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$
Logo, para qualquer valor do contradomínio de u existe x no domínio tal que $u(x) = k$. Portanto, u é sobrejetora.
Note que u não é injetora, pois para $k > 0$ há dois valores distintos do domínio com a imagem k: $\sqrt{k}$ e $-\sqrt{k}$.

21 A função f é bijetora, pois a cada identificação de placa corresponde uma única identificação do chassi e vice-versa.

22
- O enunciado afirma que há mais de um exemplar com o mesmo título. Isto significa que há elementos distintos do domínio que possuem a mesma imagem e, portanto, f não é injetora.
- Pelo enunciado, todos os livros da biblioteca são catalogados pelo título. Isto significa que para qualquer título de livro catalogado na biblioteca existe pelo menos um exemplar com esse título, ou seja, qualquer elemento do contradomínio de f é imagem de algum elemento do domínio.

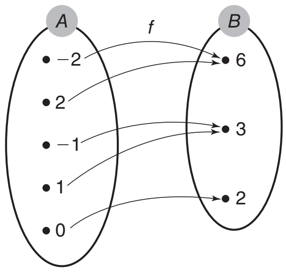
Portanto, f é sobrejetora.

23



Sim, porque f é uma bijeção de A em B e, por isso, a relação inversa f^{-1} também é uma função.

24



Não, pois f não é uma bijeção de A em B e, por isso, a relação inversa f^{-1} não é uma função.

25 Não, pois não há função de A em B que seja bijetora, já que $n(A) \neq n(B)$.

26
- f não é bijetora; logo, não é invertível.
- g é bijetora e, portanto, admite inversa.

27 **a)** $y = 6x - 4$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = 6y - 4$

II. Isolando a variável y: $x = 6y - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{x + 4}{6}$

b) $y = \dfrac{5}{x + 4}$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = \dfrac{5}{y + 4}$

II. Isolando a variável y: $x = \dfrac{5}{y + 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (y + 4) = 5$

$\therefore y = \dfrac{5 - 4x}{x}$

c) $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = \dfrac{2y - 1}{y + 3}$

II. Isolando a variável y: $x = \dfrac{2y - 1}{y + 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (y + 3) = 2y - 1$

$\therefore xy + 3x = 2y - 1 \Rightarrow 2y - xy = 3x + 1$

$\therefore (2 - x)y = 3x + 1$

$\therefore y = \dfrac{3x + 1}{2 - x}$

28 $f(x + 3) = 2x - 1$

$x + 3 = t$

$\therefore x = t - 3$

$f(t) = 2(t - 3) - 1$

$f(t) = 2t - 7$ ou $f(x) = 2x - 7$

I. Trocamos x por y e y por x e obtemos: $x = 2y - 7$

II. Isolando a variável y: $x = 2y - 7 \Rightarrow y = \dfrac{x + 7}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 7}{2}$

Alternativa **a**.

29 $Im(f^{-1}) = D(f)$

$x^5 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^5 \neq 1$

$\therefore x \neq 1$; $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Logo, $Im(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$

30 **a)** Massa (kg) — Deslocamento (grau)

1 ——— 36

x ——— y

$\Rightarrow y = 36x$, com $0 \leq x \leq 10$

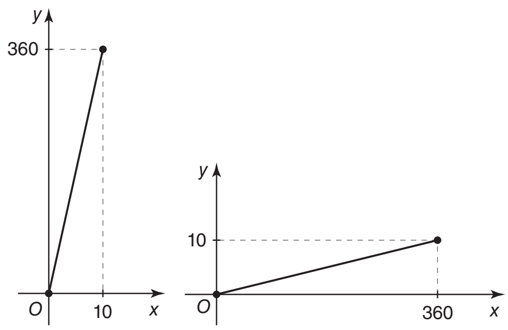
b) Permutando as variáveis x e y da equação do item **a**, obtemos:

$x = 36y$

Logo, $y = \dfrac{x}{36}$, $0° \leq x \leq 360°$.

c) As funções obtidas são inversas uma da outra.

d)



$y = 36x$ $\qquad$ $y = \dfrac{x}{36}$

e) Substituindo x por 6,5 em $y = 36x$, obtemos:

$y = 36 \cdot 6{,}5 = 234$

Logo, o deslocamento é de 234°.

f) Substituindo x por 126 em $y = \dfrac{x}{36}$, obtemos:

$y = \dfrac{126}{36} = 3{,}5$

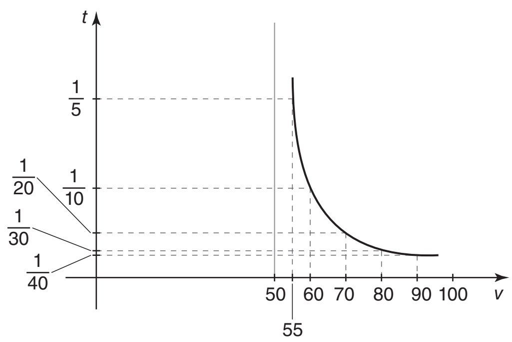
Logo, a massa é 3,5 kg.

31 **a)** $t = \dfrac{1}{v - 50}$, com $v > 50$

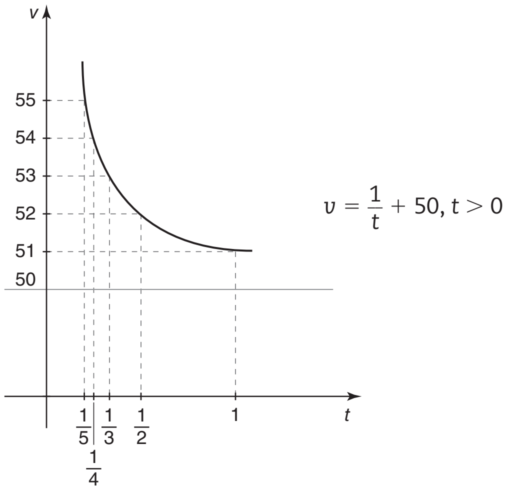
$(v - 50)t = 1 \Rightarrow v - 50 = \dfrac{1}{t}$

$\therefore v = \dfrac{1 + 50t}{t}$

b)



$t = \dfrac{1}{v - 50}$, $v > 50$



c) $v = 60$ km/h

$t = \frac{1}{60 - 50} = \frac{1}{10}$

$\therefore t = 0{,}1$ h

$s = vt$

$\therefore s = 60 \cdot 0{,}1$ km $\Rightarrow s = 6$ km

Logo, o comprimento é 6 km.

d) $t = 0{,}5$ h

$v = \frac{1}{0{,}5} + 50$

$\therefore v = 52$ km/h

$s = vt$

$s = 52 \cdot 0{,}5$ km $\Rightarrow s = 26$ km

Logo, o comprimento é 26 km.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 Como $\frac{7}{31}$, 1 e 3,14 são números racionais e $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$ é um número irracional, temos:

$f\left(\frac{7}{31}\right) = \frac{7}{31}$, $f(1) = 1$, $f(3{,}14) = 3{,}14$

e $f\left(\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Logo, o maior número do conjunto é $f(3{,}14)$.

Alternativa **c**.

2 a) $s(-x) = (-x)^6 + (-x)^2 = x^6 + x^2 = s(x)$; logo, s é par.

b) $t(-x) = (-x)^5 + (-x) = -(x^5 + x) = -t(x)$; logo, t é ímpar.

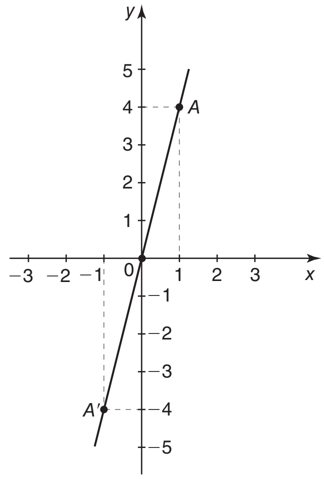
c) $p(-x) = \sqrt{-x}$; p não está definida para $x > 0$; logo, p não é par nem ímpar.

d) $u(-x) = \frac{(-x)^3}{-x - 1} = \frac{-x^3}{-x - 1} = \frac{x^3}{x + 1}$

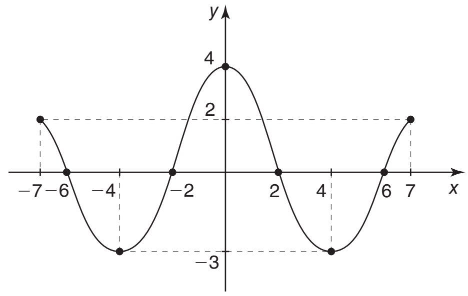
$u(-x) \neq u(x)$ e $u(-x) \neq -u(x)$; logo, u não é par nem ímpar.

e) $v(-x) = \sqrt[3]{-x} + (-x) = -\left(\sqrt[3]{x} + x\right) = -v(x)$; logo, v é ímpar.

3

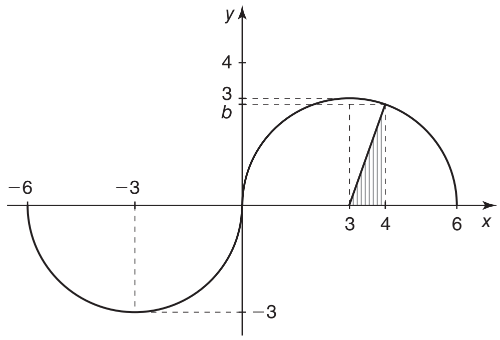


4 $f: [-7, 7] \to \mathbb{R}$



5 a) f é ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$ para qualquer $x \in D$.

b)



Se $b = f(4)$, então $b > 0$ e $b^2 + 1 = 3^2$.

Daí, vem $b = 2\sqrt{2}$

Logo, $f(4) = 2\sqrt{2}$.

6 Para todo x do domínio de f, temos:

$f(-x) + f(-x) = f[(-x)(-x)] \Rightarrow$

$\Rightarrow 2f(-x) = f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x)$

$\therefore 2f(-x) = 2f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

Logo, f é uma função par.

7 a) $f(2) = 5 \cdot 2 - 4 = 6$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6) = 3 \cdot 6 + 6 = 24$

b) $g(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 12$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(12) = 5 \cdot 12 - 4 = 56$

c) $f(1) = 5 \cdot 1 - 4 = 1$

$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = 5 \cdot 1 - 4 = 1$

d) $g(3) = 3 \cdot 3 + 6 = 15$

$(g \circ g)(3) = g(g(3)) = g(15) = 3 \cdot 15 + 6 = 51$

e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot f(x) + 6 =$
$= 3 \cdot (5x - 4) + 6 = 15x - 6$

f) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5 \cdot g(x) - 4 =$
$= 5 \cdot (3x + 6) - 4 = 15x + 26$

g) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 5 \cdot f(x) - 4 =$
$= 5 \cdot (5x - 4) - 4 = 25x - 24$

h) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 6 =$
$= 3 \cdot (3x + 6) + 6 = 9x + 24$

8 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = k \cdot f(x) + 1 =$
$= k \cdot (kx + 1) + 1 = k^2x + (k + 1)$
Como $(f \circ f)(x) = 4x - 1$, resulta:
$k^2x + (k + 1) = 4x - 1$
Identificando os coeficientes, obtemos:
- $k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

e
- $k + 1 = -1 \Rightarrow k = -2$

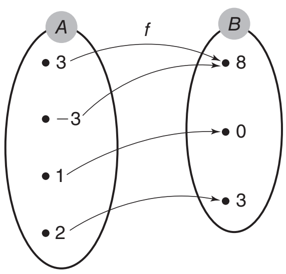
Logo, $k = -2$.

9 $(f \circ g)(x) = 2 \Rightarrow f(x^2 - 2x + 2) = 2$
$\therefore x^2 - 2x + 2 + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$
$\therefore \Delta = -8$
Logo, não existe x tal que $(f \circ g)(x) = 2$.

10 $f(f(x)) = \dfrac{\dfrac{x-2}{x+2} - 2}{\dfrac{x-2}{x+2} + 2} = \dfrac{-x-6}{3x+2}$
Assim, temos:
$f(f(x)) = -1 \Rightarrow \dfrac{-x-6}{3x+2} = -1$
$\therefore 3x + 2 = x + 6 \Rightarrow 2x = 4$
$\therefore x = 2$
Alternativa **c**.

11 Se f é par, então $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$.
Se g é ímpar, então $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -g(-x)$.
I. V
$f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x)$
Logo, $f \cdot g$ é ímpar.
II. V
$f(g(-x)) = f(-g(x))$, pois g é ímpar.
$f(-(g(x)) = f(g(x))$, pois f é par.
Logo, $f(g(x)) = f(g(-x))$ e $f \circ g$ é par.
III. F
$g(f(-x)) = g(f(x))$, pois f é par.
Logo, $g \circ f$ é par.
Alternativa **d**.

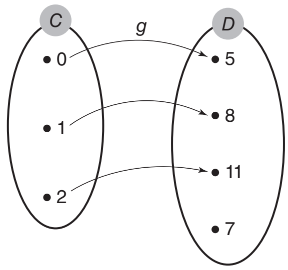
12 a)



$f: A \to B$
$f(x) = x^2 - 1$

f é sobrejetora mas não é injetora; logo, não é bijetora.

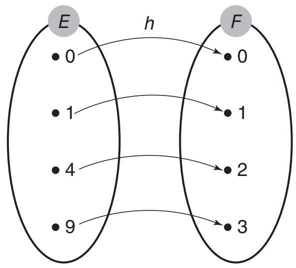
b)



$g: C \to D$
$g(x) = 3x + 5$

g é injetora mas não é sobrejetora; logo, não é bijetora.

c)



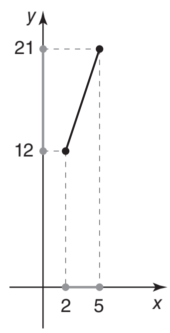
$h: E \to F$
$h(x) = \sqrt{x}$

h é sobrejetora e injetora; logo, é bijetora.

13 Para que exista uma função bijetora $f: A \to B$, com A e B finitos e não vazios, é necessário que A e B tenham o mesmo número de elementos. Como $n(A) \neq n(B)$, concluímos que não existe uma função bijetora de A em B.

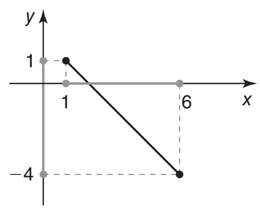
14 $\begin{cases} f(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 12 \\ f(5) = 3 \cdot 5 + 6 = 21 \end{cases}$

Como f é bijetora e $a < b$, temos: $a = 12$ e $b = 21$.

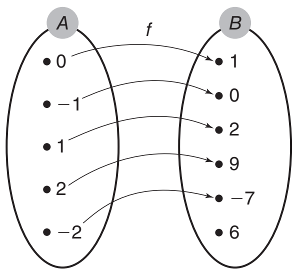


15 $\begin{cases} f(1) = 2 - 1 = 1 \\ f(6) = 2 - 6 = -4 \end{cases}$

Como f é bijetora e $a < b$, temos: $a = -4$ e $b = 1$.



16



Não, pois f não é bijetora e, por isso, a relação inversa f^{-1} não é uma função.

17 a) Não, pois ela não é bijetora.
b) Sim, porque ela é bijetora.

18 a) $y = 7x + 1$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = 7y + 1$

II. Isolando a variável y: $x = 7y + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{x - 1}{7}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{1 - x}$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = \dfrac{y + 2}{1 - y}$

II. Isolando a variável y: $x = \dfrac{y + 2}{1 - y} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (1 - y) = y + 2$

$\therefore x - xy = y + 2 \Rightarrow xy + y = x - 2$

$\therefore y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$

Logo, $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$.

c) $g(x) = \sqrt{x}$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = \sqrt{y}$

II. Isolando a variável y: $x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$

Logo, $g^{-1}(x) = x^2$.

d) $h(x) = 5 + \sqrt[3]{x - 3}$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos:

$x = 5 + \sqrt[3]{y - 3}$

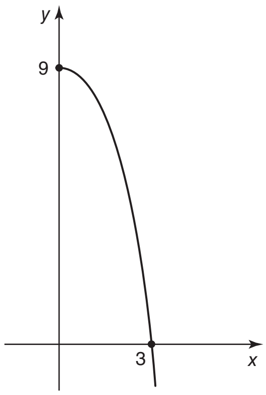
II. Isolando a variável y: $x = 5 + \sqrt[3]{y - 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 5 = \sqrt[3]{y - 3}$

$\therefore y - 3 = (x - 5)^3 \Rightarrow y = (x - 5)^3 + 3$

Logo, $h^{-1}(x) = (x - 5)^3 + 3$.

19 a)



b) $y = 9 - x^2$

I. Trocando x por y e y por x, obtemos: $x = 9 - y^2$

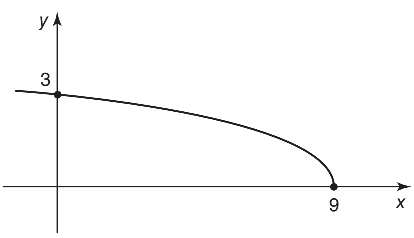
II. Isolando a variável y: $x = 9 - y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{9 - x}$

f^{-1}: $]-\infty, 9] \rightarrow [0, +\infty[$, tal que

$f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x}$

c)



Exercícios contextualizados

20 a) $\left\lfloor \dfrac{-3}{0 + \lfloor 5{,}3 \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{-3}{0 + 5} \right\rfloor = \lfloor -0{,}6 \rfloor = -1$

b) Como x representa a massa, em grama, temos $x \geqslant 0$; assim:

- para x inteiro, a tarifa é $0{,}09 \cdot x$;
- para x não inteiro, temos $x = \lfloor x \rfloor + k$, em que k representa uma massa menor que 1 g. Assim, a tarifa é $0{,}09 \cdot x + 0{,}09$, ou seja, $0{,}09 \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)$

Concluímos , então, que:

$$T(x) = \begin{cases} 0{,}09 \cdot \lfloor x \rfloor, \text{ se } x \text{ é inteiro} \\ 0{,}09 \cdot (\lfloor x \rfloor + 1), \text{ se } x \text{ não é inteiro} \end{cases}$$

21 Fora da promoção, o casal pagaria por 7 dias:

$7 \cdot 150 = 1.050$ reais.

Com a promoção, o casal pagaria por 8 dias:

$3 \cdot 150 + 130 + 110 + 3 \cdot 90 = 960$ reais.

Assim, o casal que aderir ao pacote promocional fará uma economia de

$1.050 - 960 = 90$ reais.

Alternativa **a**.

22

$$\begin{array}{ccc} (x) & & (v) \\ \text{tempo (anos)} & \xrightarrow{\quad g \quad} & \text{média de var. nível do mar (cm)} \\ & f \searrow \quad \text{conc. } CO_2 \text{ (ppm) } (y) \quad \swarrow h & \end{array}$$

Sejam $y = f(x) = x + 320$ e $v = g(x) = \dfrac{x}{5}$

$v = g(x) = h(f(x)) \Rightarrow v = g(y - 320)$

$\therefore v = \dfrac{y - 320}{5} \Rightarrow h(y) = \dfrac{y - 320}{5}$

$\therefore h(400) = \dfrac{400 - 320}{5} = 16$

$\therefore h = 16$ cm

23 a) $C(p(t)) = 0{,}5\, p(t) + 1 =$

$= 0{,}5 \cdot (10 + 0{,}1t^2) + 1 = 5 + 0{,}05t^2 + 1$

$\therefore C(t) = 0{,}05t^2 + 6$

b) $C(t) = 13{,}2$

$0{,}05t^2 + 6 = 13{,}2 \Rightarrow 0{,}05t^2 = 7{,}2$

$\therefore t^2 = \dfrac{7{,}2}{0{,}05} = 144;\ t \geqslant 0$

$\therefore t = \sqrt{144} = 12$

Logo, o tempo necessário é 12 anos.

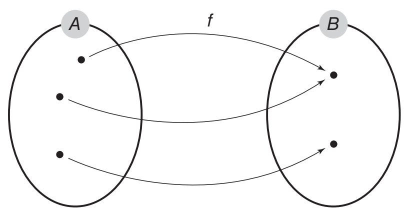
24 $k = c + 273{,}15$

$\therefore c = k - 273{,}15$

$f = 1{,}8c + 32 \Rightarrow f = 1{,}8(k - 273{,}15) + 32$

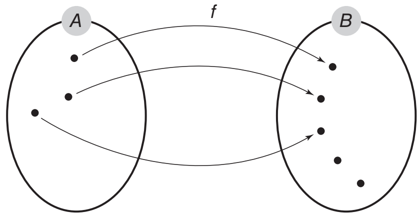
Alternativa **a**.

25 a) f pode não ser injetora, pois é possível que um mesmo cidadão brasileiro tenha dois (ou mais) registros gerais diferentes.



b) f será bijetora se todo cidadão brasileiro que recebeu o registro geral tiver um único registro.

26
- f é injetora, pois não existem números diferentes de CPF associados a um mesmo cidadão brasileiro que vive no Brasil.
- f não é sobrejetora, pois existem cidadãos brasileiros que vivem no Brasil e não têm CPF.
- f não é bijetora, pois não é sobrejetora.



Exercícios de revisão cumulativa

1 $\begin{cases} g + h = 6{,}6777... \\ 10(g + h) = 66{,}7777... \end{cases}$

Subtraindo essas igualdades membro a membro, obtemos:

$10(g + h) - (g + h) = 66{,}777... - 6{,}6777... \Rightarrow$

$\Rightarrow 9(g + h) = 60{,}1$

$\therefore g + h = \dfrac{60{,}1}{9} = \dfrac{601}{90}$

2 $\begin{cases} a + 3 = 8 - b \\ 2b - 5 = 3a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 & \text{(I)} \\ 3a - 2b = -4 & \text{(II)} \end{cases}$

Multiplicando (I) por 2, temos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2a + \cancel{2b} = 10 \\ 3a - \cancel{2b} = -4 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 5a = 6 \quad}$$

$\therefore a = \dfrac{6}{5}$

Substituindo em (I), obtemos:

$\dfrac{6}{5} + b = 5 \Rightarrow b = 5 - \dfrac{6}{5}$

$\therefore b = \dfrac{19}{5}$

3 $f(x) = \sqrt{x}$

A: $f\left(\dfrac{9}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2} \rightarrow$ número racional

B: $f(3) = \sqrt{3} \rightarrow$ número irracional

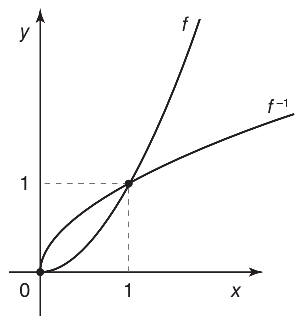
C: $f(\sqrt{15}) = \sqrt{\sqrt{15}} = \sqrt[4]{15} \rightarrow$ número irracional

Portanto, as ordenadas de B e C são números irracionais.

Análise da resolução

a) Os gráficos de duas funções inversas f e f^{1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

De acordo com essa propriedade, os gráficos de f e f^{1} são:



b) A partir do gráfico do item **a**, concluímos que $f^{-1}(x) < f(x)$ para todo x real tal que $x > 1$.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

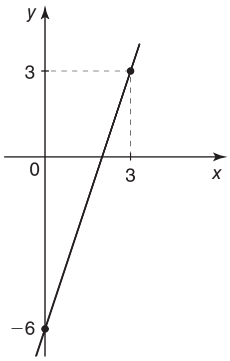
Para pensar

Se, a 0 m, a pressão é 1 atm, a 10 m a pressão será 2 atm. Portanto, a 18 m a pressão será 2,8 atm.

Exercícios propostos

1 a)

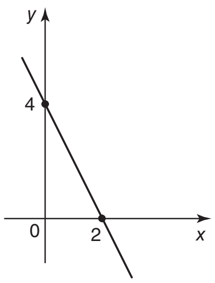
x	y
0	-6
3	3



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

b)

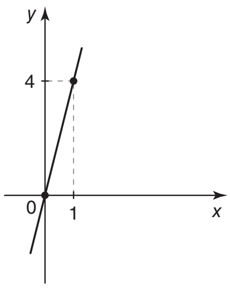
x	y
0	4
2	0



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

c)

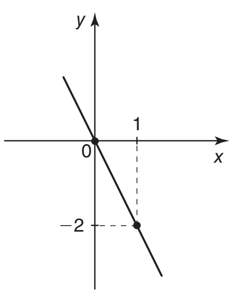
x	y
0	0
1	4



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

d)

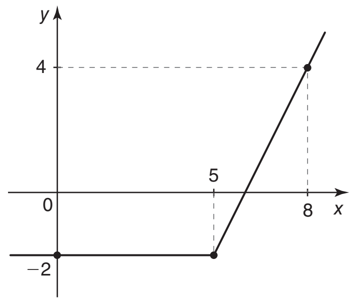
x	y
0	0
1	-2



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

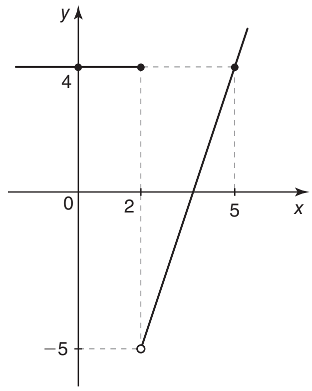
2 a) I. $f(x) = -2$, se $x \leq 5$
II. $f(x) = 2x - 12$, se $x > 5$

x	y
5	-2
8	4



b) I. Para $x \leq 2$ a função é constante, $g(x) = 4$
II. Para $x > 2$, $g(x) = 3x - 11$. Embora x não possa assumir o valor 2, atribuímos a ele esse valor para obter o extremo aberto do gráfico:

x	y
2	-5
5	4

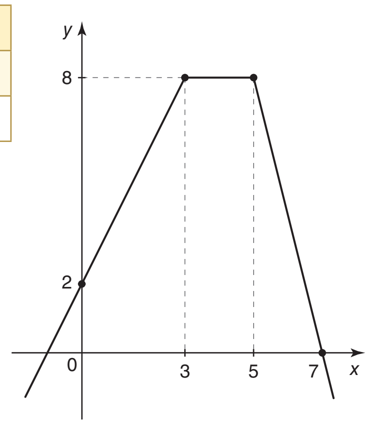


c) I. $h(x) = 2x + 2$, se $x \leq 3$

x	y
0	2
3	8

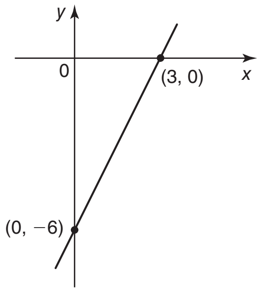
II. $h(x) = 8$, se $3 < x \leq 5$
III. $h(x) = -4x + 28$, se $x > 5$

x	y
5	8
7	0



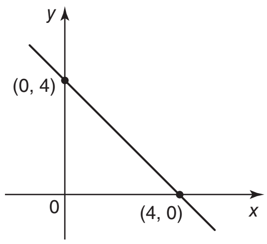
3 a)

x	y
0	−6
3	0



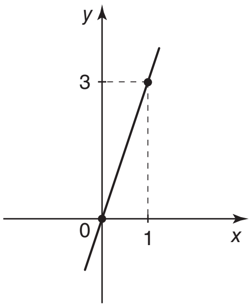
b)

x	y
0	4
4	0



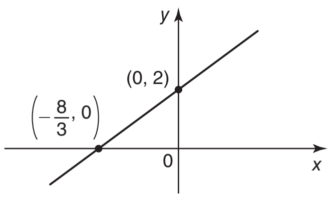
c)

x	y
0	0
1	3



d)

x	y
0	2
$-\frac{8}{3}$	0



4 a) Resposta pessoal.

b) Resposta possível: $y = \frac{5x}{2}$

5 Dados:

$C(x) = 1 + 0{,}1x$

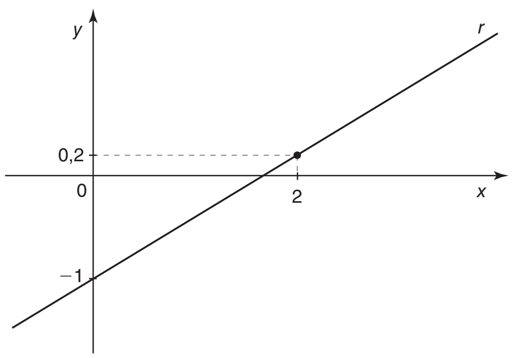
$R(x) = 0{,}7x$

O lucro líquido é dado por $R(x) - C(x)$.

Então, o lucro líquido é:

$0{,}7x - (1 + 0{,}1x) = 0{,}6x - 1$.

Assim, o gráfico da função lucro é formado por pontos do gráfico da função afim $y = 0{,}6x - 1$, que é a reta r a seguir:



Observamos que o gráfico da função lucro não é toda a reta r, pois a variável x da função lucro representa o número de unidades e, portanto, só pode assumir valores naturais. Logo, nenhum dos gráficos do exercício representa fielmente a função lucro, mas o que melhor modela essa função é o que está contido na reta r e possui todos os pontos (x, y), com $x \in \mathbb{N}$.

Alternativa **b**.

6 Os pontos $(0, -4)$ e $(2, 6)$ pertencem ao gráfico;

logo: $\begin{cases} -4 = a \cdot 0 + b & \text{(I)} \\ 6 = a \cdot 2 + b & \text{(II)} \end{cases}$

De (I), obtém-se: $b = -4$

Substituindo b por -4 em (II), resulta:

$6 = 2a + (-4) \Rightarrow 2a = 10$

$\therefore a = 5$

Portanto, $a = 5$ e $b = -4$.

7 $f(x) = kx + 2$

- f é crescente: $k > 0$
- $(1, k^2)$ pertence ao gráfico de f:

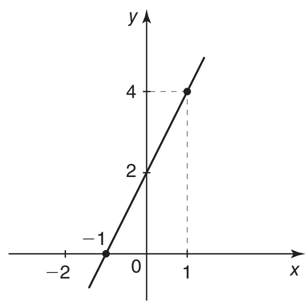
$k^2 = k \cdot 1 + 2 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0$

$\therefore k = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow k = 2$ ou $k = -1$ (não convém)

Logo, $k = 2$ e $f(x) = 2x + 2$.

Gráfico de f

x	y
0	2
1	4

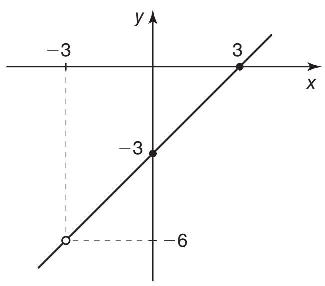


8 Para $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$, temos $x \neq -3$; assim:

$y = \frac{x^2 - 9}{x + 3} \Rightarrow y = \frac{\cancel{(x + 3)} \cdot (x - 3)}{\cancel{x + 3}}$

$\therefore y = x - 3$, com $x \neq -3$

x	y
0	−3
3	0



9 a) A lei de associação é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Como os pontos $(0, 4)$ e $(10, 5)$ pertencem ao gráfico, temos:

$\begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a \cdot 10 + b \end{cases} \Rightarrow b = 4$ e $a = \frac{1}{10}$

Logo, $y = \frac{x}{10} + 4$, com $x \geq 0$.

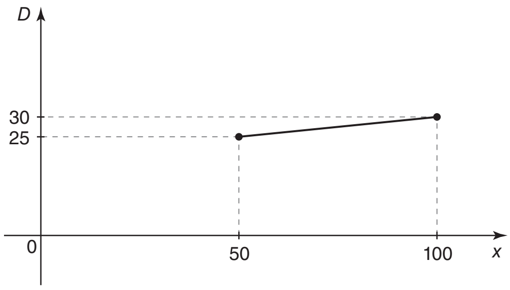
b) A taxa fixa é obtida adotando-se $x = 0$.
$y = 0{,}1 \cdot 0 + 4 = 4$
4 milhões de reais

c) Se $x = 50$, temos: $y = 0{,}1 \cdot 50 + 4 = 9$
9 milhões de reais

10 **a)** $D(100) = 20 + \frac{100}{10} = 30$
Logo, a despesa será R$ 30.000,00.

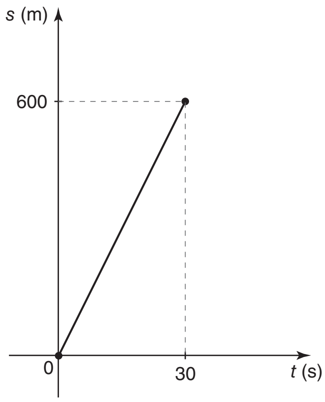
b) $50 = 20 + \frac{x}{10}$
$\frac{x}{10} = 30 \Rightarrow x = 300$
Logo, a empresa terá 300 funcionários.

c) O gráfico da função D para $50 \leqslant x \leqslant 100$ é formado pelos pontos de abscissas naturais do segmento de reta representado a seguir:



11 $v = 20$ m/s (constante)
$s = v \cdot t \Rightarrow s = 20t$

t (s)	s (m)
0	0
30	600



12 A reta que passa pelos pontos (2010; 3,5) e (2030, 5) é gráfico de uma função do tipo $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
Assim:
- para $x = 2010$ e $y = 3{,}5$, obtemos: $3{,}5 = 2010a + b$
- para $x = 2030$ e $y = 5$, obtemos: $5 = 2030a + b$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2010\,a + b = 3{,}5 \\ 2030\,a + b = 5 \end{cases}$

Obtemos: $a = 0{,}075$ e $b = -147{,}25$
Portanto: $y = 0{,}075x - 147{,}25$
Finalmente, atribuindo o valor 2020 à variável x, temos uma estimativa para a população urbana em 2020:
$y = 0{,}075 \cdot 2020 - 147{,}25 \Rightarrow y = 4{,}25$
Logo, a população urbana em 2020 será 4,25 bilhões de pessoas, aproximadamente.
Alternativa **d**.

13 Considerando x como sendo a quantidade de dias em atraso e $M(x)$ o valor pago, conclui-se que a lei da função M é dada por:
$M(x) = 500 + 10 + 0{,}4x$, ou seja:
$M(x) = 510 + 0{,}4x$
Alternativa **c**.

14 Sendo t_i e t_f as temperaturas iniciais e finais, respectivamente, e ℓ_i e ℓ_f o comprimento das barras para t_i e t_f, temos:
- Temperaturas
  $t_i = 50$ °C
  $t_f = 1{,}20 \cdot t_i = 60$ °C
- Comprimentos da barra
  $\ell_i = 0{,}004 \cdot 50 + 79{,}8 = 80$
  $\ell_f = 0{,}004 \cdot 60 + 79{,}8 = 80{,}04$

Logo, o aumento no comprimento da barra foi de $80{,}04 - 80 = 0{,}04$
Assim, o aumento percentual foi de:
$\frac{0{,}04}{80} = 0{,}0005 = 0{,}05\%$
Alternativa **b**.

15 Sabemos que a área plantada é a razão entre a produção e a produtividade. No período considerado, a área plantada (AP), em hectare, é portanto:

Ano 1: $AP = \frac{30 \cdot 10^6}{1.500} = 20.000$

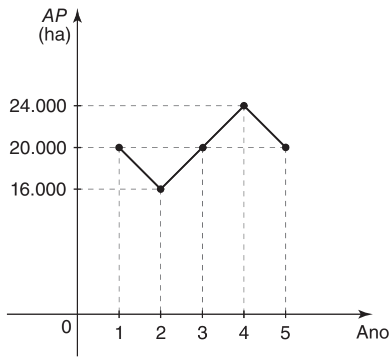
Ano 2: $AP = \frac{40 \cdot 10^6}{2.500} = 16.000$

Ano 3: $AP = \frac{50 \cdot 10^6}{2.500} = 20.000$

Ano 4: $AP = \frac{60 \cdot 10^6}{2.500} = 24.000$

Ano 5: $AP = \frac{80 \cdot 10^6}{4.000} = 20.000$

De acordo com esses dados, o gráfico que melhor representa a área plantada (AP), no período, é:



Alternativa **a**.

16 $\begin{cases} y = ax + b \\ a = 5 \text{ (taxa de variação)} \end{cases}$

Então, $y = 5x + b$.
Como o ponto $A(2, -3)$ pertence à reta, devemos ter:
$-3 = 5 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -13$
Logo, a função afim é dada por $y = 5x - 13$.

17 a) • $a = \frac{3-9}{1-3} = 3$; $y = 3x + b$

• $A(3, 9)$ pertence ao gráfico.
$9 = 3 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 0$
Logo, $y = 3x$.

b) • $a = \frac{6-1}{-3-2} = -1$; $y = -x + b$

• $A(2, 1)$ pertence ao gráfico.
$1 = -1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3$
Logo, $y = -x + 3$.

18 A reta que contém esse gráfico representa uma função afim, isto é, $y = ax + b$ são constantes reais, com $a \neq 0$. Como esse gráfico passa pelos pontos (0, 8) e (8, 5), temos:

$$\begin{cases} 8 = a \cdot 0 + b \\ 5 = a \cdot 8 + b \end{cases} \Rightarrow b = 8 \text{ e } a = -\frac{3}{8}$$

Logo, a função afim é:

$$y = -\frac{3x}{8} + 8$$

Para calcular o tempo, em ano, para que o volume de água remanescente na represa seja 2 mil m³, basta atribuir o valor 2 à variável y, obtendo:

$$2 = -\frac{3x}{8} + 8 \Rightarrow x = 16$$

Portanto, após 16 anos da inauguração, o volume de água será 2 mil m³.

19 a) $a_{AB} = \frac{-2-2}{0-1} = 4$; $a_{BC} = \frac{10-(-2)}{3-0} = 4$

$a_{AB} = a_{BC} \Rightarrow$ A, B e C são colineares.

b) $a_{AB} = \frac{1-3}{1-0} = -2$; $a_{BC} = \frac{4-1}{2-1} = 3$

$a_{AB} \neq a_{BC} \Rightarrow$ A, B e C não são colineares.

20 $a_{AB} = \frac{4-5}{-1-2} = \frac{1}{3}$; $a_{BC} = \frac{P-4}{9-(-1)} = \frac{p-4}{10}$.

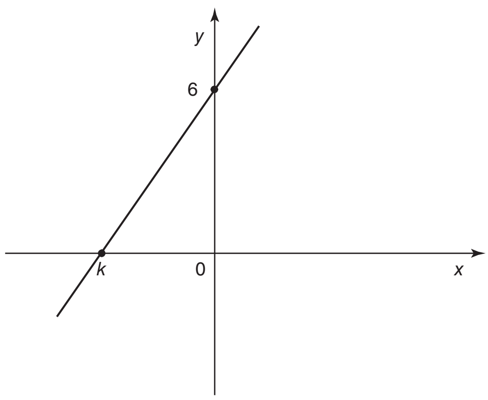
Se A, B e C são colineares, então $a_{AB} = a_{BC}$.
Assim, obtemos:

$$\frac{1}{3} = \frac{p-4}{10} \Rightarrow 3p - 12 = 10$$

$$\therefore p = \frac{22}{3}$$

Portanto, o valor de p para que A, B e C sejam colineares é $\frac{22}{3}$.

21 Como o gráfico de f passa pelo ponto (0, 6) e a taxa de variação é positiva ($a > 0$), temos que f é uma função crescente. Assim, sendo $(k, 0)$ o ponto de intersecção do gráfico com o eixo Ox, devemos ter $k < 0$:



Para que a área do triângulo limitado pelos eixos coordenados e pelo gráfico de f seja 12 unidades, devemos ter:

$$\frac{|k| \cdot 6}{2} = 12 \Rightarrow |k| = 4$$

$\therefore k = 4$ (não convém) ou $k = -4$

Logo, o gráfico da função $y = ax + b$ passa pelos pontos (0, 6) e (−4, 0); portanto:

$$\begin{cases} 6 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot (-4) + b \end{cases} \Rightarrow b = 6 \text{ e } a = \frac{3}{2}$$

22 a) No período de esvaziamento do reservatório, a vazão do registro foi de 4 L por segundo. Portanto, em x segundos desse período foram vazados $4x$ L de água. Assim, a quantidade, em litros de água, contida no reservatório nesse período pode ser expressa por: $y = 400 - 4x$

b) Em qualquer função afim, a taxa de variação é o coeficiente de x. Assim, na função afim do item **a**, a taxa de variação é −4. Essa taxa indica que vazam 4 L de água por segundo do reservatório.

23 a) A velocidade v do automóvel é dada por:

$$v = \frac{14 - (-20)}{17} \text{ km/min} = 2 \text{ km/min}$$

Logo, a abscissa S, em quilômetro, do ponto onde se localiza o automóvel em função do tempo t, em minuto, é dada por: $S = -20 + 2t$

b) A taxa a de variação da função é o coeficiente de t, isto é, $a = 2$.

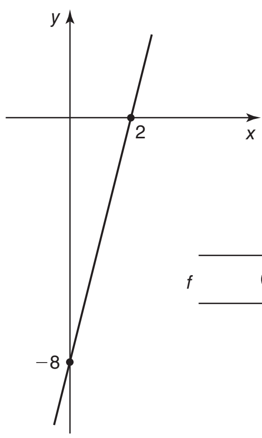
c) A taxa de variação indica que a cada minuto a distância percorrida aumenta 2 km, portanto essa taxa é a velocidade do automóvel.

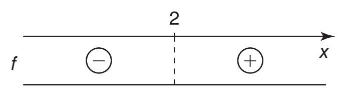
24 Em um sistema cartesiano, consideremos no eixo das abscissas os números dos dias e no eixo das ordenadas os saldos bancários. Assim, o gráfico da função que expressa o saldo bancário y em função do número x do dia passa pelos pontos (1, 2.000) e (21, 3.000). Como esse gráfico é formado por pontos de uma reta, pois a variação é linear, temos que a lei que associa y e x é expressa por uma função afim, $y = ax + b$, em que as constantes reais a e b satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} 2.000 = a \cdot 1 + b \\ 3.000 = a \cdot 21 + b \end{cases} \Rightarrow a = 50 \text{ e } b = 1.950$$

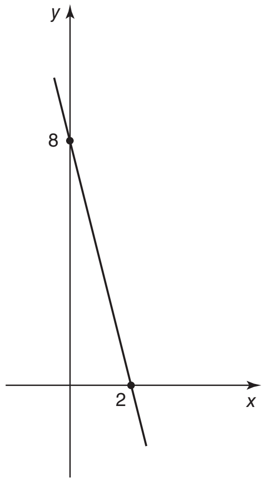
Temos, portanto, a função $y = 50x + 1.950$.

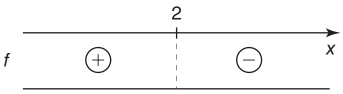
25 a) $f(x) = 4x - 8$





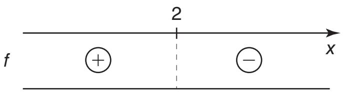
b) $f(x) = -4x + 8$





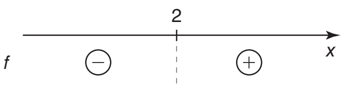
c) Faremos, neste item, o estudo algébrico do sinal de f.

raiz de $f(x)$: $-5x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$
$f(x) > 0$: $-5x + 10 > 0 \Rightarrow x < 2$
$f(x) < 0$: $-5x + 10 < 0 \Rightarrow x > 2$

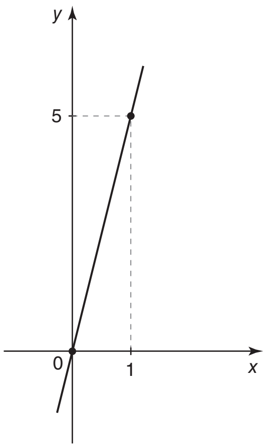


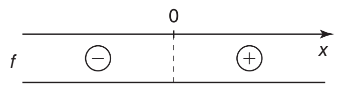
d) Faremos, neste item, o estudo algébrico do sinal de f.

raiz de $f(x)$: $6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$
$f(x) > 0$: $6x - 12 > 0 \Rightarrow x > 2$
$f(x) < 0$: $6x - 12 < 0 \Rightarrow x < 2$

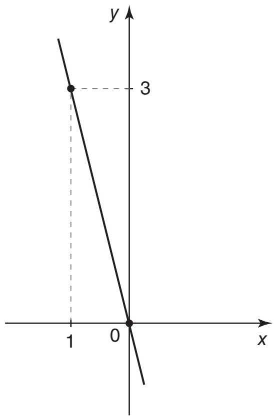


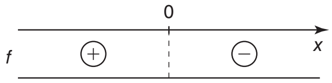
e) $f(x) = 5x$



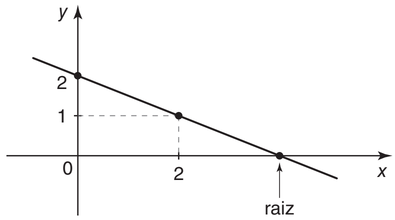


f) $f(x) = -3x$





26



x	y = ax + b
0	2
2	1

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1 - 2}{2 - 0} = -\dfrac{1}{2}$

Pelo gráfico acima, temos:

$b = 2$

Logo, a equação da reta é $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.

Raiz de f: $-\dfrac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$

O gráfico informa que:

- f se anula para $x = 4$;
- f é positiva para $x < 4$;
- f é negativa para $x > 4$.

27 **a)** Seja $y = ax + b$ a equação da reta suporte do segmento representado.

Os pontos (0, 200) e (12, -100) pertencem ao gráfico; logo, temos:

$$\begin{cases} 200 = a \cdot 0 + b \\ -100 = a \cdot 12 + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = -25$ e $b = 200$.

Então, $y = -25x + 200$.

b) $y = 0$

$0 = -25x + 200 \Rightarrow x = 8$

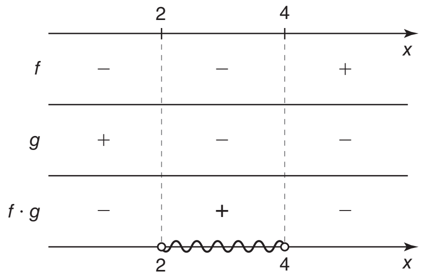
Portanto, a broca atingirá o nível do mar em 8 horas.

c) Para a broca atingir o objetivo, devemos ter: $y = -300$; assim:
$-300 = -25x + 200 \Rightarrow x = 20$
Portanto, serão necessárias 20 horas para a broca atingir o objetivo.

d) Para a broca estar em pontos de altitude positiva, devemos ter: $y > 0$
$-25x + 200 > 0 \Rightarrow x < 8$
Portanto, a broca estará em pontos de altitude positiva por 8 horas.

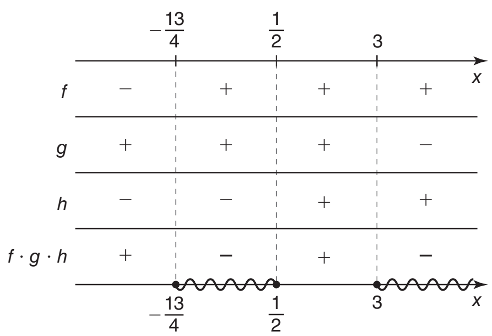
e) Como a broca atinge o objetivo após 20 horas, ela estará em pontos de altitude negativa ($y < 0$) por 12 horas.

28 **a)** Sendo $f(x) = 2x - 8$ e $g(x) = 2 - x$, temos:



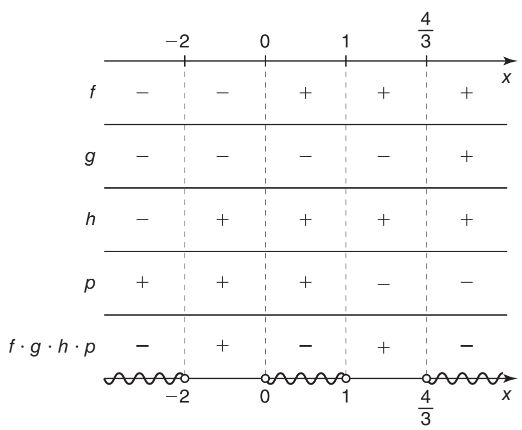
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$.

b) Sendo $f(x) = 4x + 13$, $g(x) = 3 - x$ e $h(x) = 2x - 1$, temos:



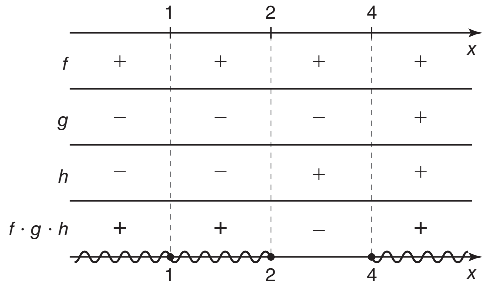
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{13}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geq 3\right\}$.

c) Sendo $f(x) = x$, $g(x) = 3x - 4$, $h(x) = x + 2$ e $p(x) = 1 - x$, temos:



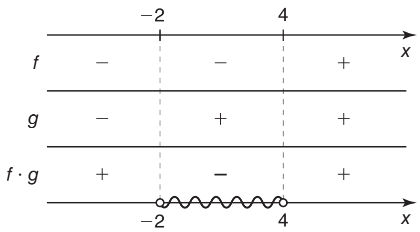
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 0 < x < 1 \text{ ou } x > \dfrac{4}{3}\right\}$.

d) Sendo $f(x) = (x - 1)^6$, $g(x) = (2x - 8)^3$ e $h(x) = x - 2$, temos:



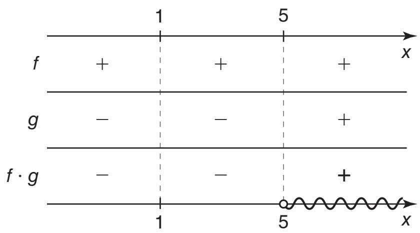
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$.

e) A forma fatorada da expressão $x^2 - 2x - 8$ é $(x - 4)(x + 2)$.
Assim:
$x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) < 0$
Sendo $f(x) = x - 4$ e $g(x) = x + 2$, temos:



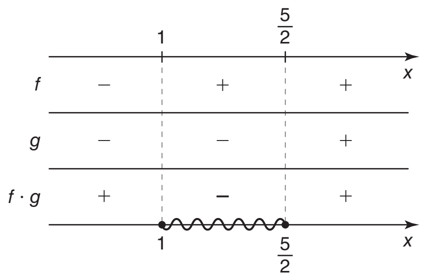
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$.

f) A forma fatorada da expressão $x^2 - 6x + 5$ é $(x - 5)(x - 1)$. Assim:
$(x^2 - 6x + 5)(x - 1) > 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 1)(x - 1) > 0$
Logo, podemos fazer o estudo de sinal da inequação $(x - 1)^2(x - 5) > 0$.
Sendo $f(x) = (x - 1)^2$ e $g(x) = x - 5$, temos:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.

29 Sendo $f(x) = x - 1$ e $g(x) = 2x - 5$, temos:



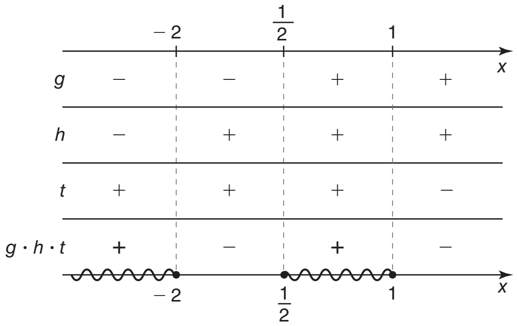
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2}\right\}$.

Logo, o maior número inteiro x que satisfaz a desigualdade $(x - 1)(2x - 5) \leq 0$ é 2.

30 O domínio D da função f é formado por todos os números reais x tais que:

$$(2x - 1)(x + 2)(1 - x) \geqslant 0$$

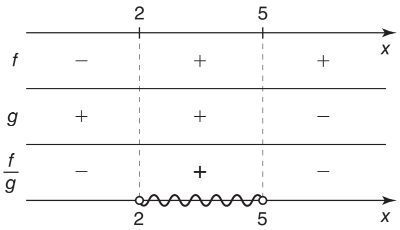
Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = x + 2$ e $t(x) = 1 - x$, obtemos:



Assim, concluímos:

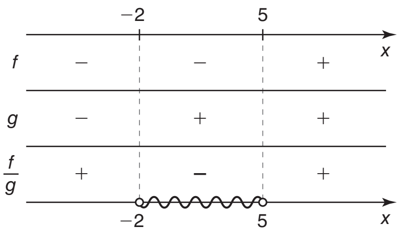
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$

31 a) Sendo $f(x) = 3x - 6$ e $g(x) = 5 - x$, temos:
Condição de existência: $x \neq 5$



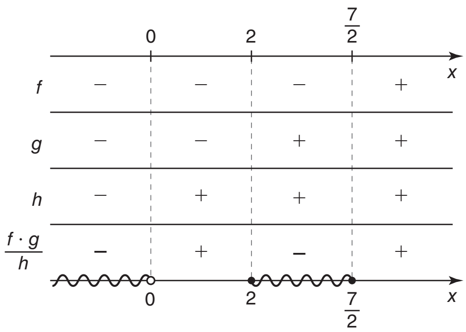
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$.

b) Sendo $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = 3x + 6$, temos:
Condição de existência: $x \neq -2$



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$.

c) Sendo $f(x) = 2x - 7$, $g(x) = x - 2$ e $h(x) = x$, temos:
Condição de existência: $x \neq 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}\right\}$.

32 a) Condição de existência: $x \neq 0$

$\frac{x-2}{x} > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{x} - 1 > 0$

$\therefore -\frac{2}{x} > 0$

Como o numerador de $-\frac{2}{x}$ é negativo, a fração será positiva se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja, $x < 0$.

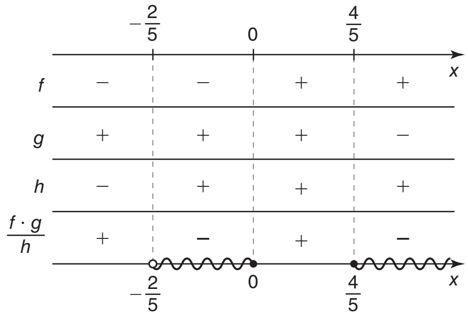
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

b) Condição de existência: $x \neq -\frac{2}{5}$

$\frac{6x}{5x+2} \leqslant x \Rightarrow \frac{6x}{5x+2} - x \leqslant 0$

$\therefore \frac{x(4-5x)}{5x+2} \leqslant 0$

Sendo $f(x) = x$, $g(x) = 4 - 5x$ e $h(x) = 5x + 2$, temos:

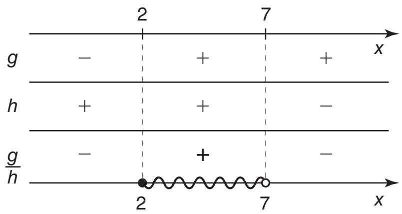


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{5} < x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{4}{5}\right\}$.

33 O domínio D da função f é formado por todos os números reais x tais que:

$$\frac{x-2}{7-x} \geqslant 0$$

Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = x - 2$, $h(x) = 7 - x$, obtemos:



Assim, concluímos:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x < 7\}$

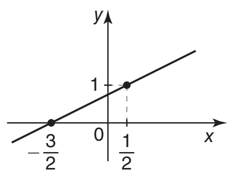
Alternativa **e**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a)

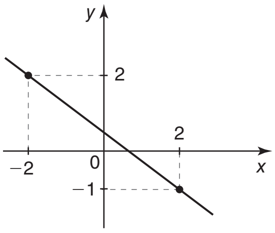
x	y
$-\frac{3}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

b)

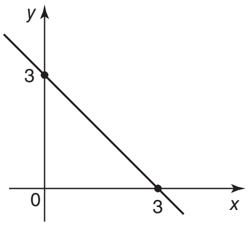
x	y
−2	2
2	−1



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

c)

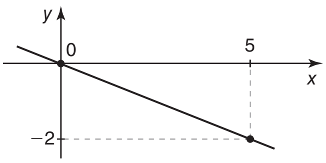
x	y
0	3
3	0



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

d)

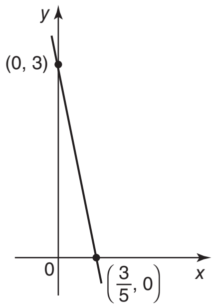
x	y
0	0
5	−2



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

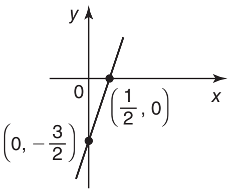
2 a)

x	y
0	3
$\frac{3}{5}$	0



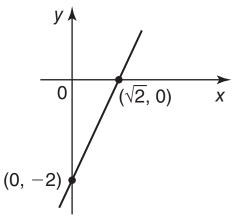
b)

x	y
0	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$	0



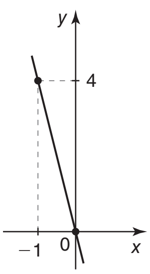
c)

x	y
0	−2
$\sqrt{2}$	0



d)

x	y
0	0
−1	4

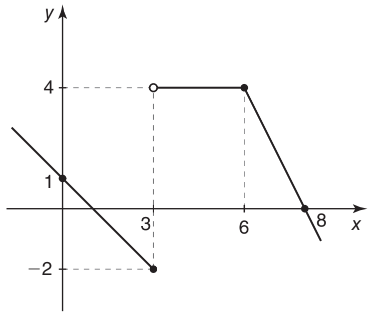


3 a) I. $t(x) = -x + 1$, se $x \leq 3$

x	y
0	1
3	−2

II. $t(x) = 4$, se $3 < x \leq 6$
III. $t(x) = -2x + 16$, se $x > 6$
Embora a variável x não possa assumir o valor 6, atribuímos a ela esse valor para obter o extremo aberto do gráfico:

x	y
6	4
8	0



b) I. $s(x) = -2x + 2$, se $x \leq 2$

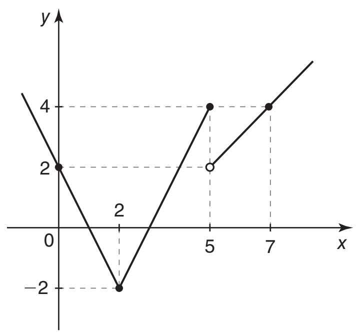
x	y
0	2
2	−2

II. $s(x) = 2x - 6$, se $2 < x \leq 5$

x	y
2	−2
5	4

III. $s(x) = x - 3$, se $x > 5$
Embora a variável x não possa assumir o valor 5, atribuímos a ela esse valor para obter o extremo aberto do gráfico:

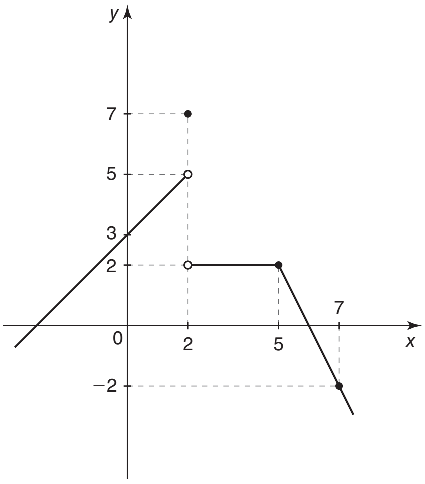
x	y
5	2
7	4



c) I. $q(x) = x + 3$, se $x < 2$

x	y
0	3
2	5

II. $q(x) = 7$, se $x = 2$
III. $q(x) = 2$, se $2 < x \leq 5$
IV. $q(x) = -2x + 12$, se $x > 5$



4 A lei de associação de uma função polinomial do 1º grau é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Os pontos (1, 3) e (−1, −5) pertencem ao gráfico de $y = ax + b$; logo:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 1 + b \\ -5 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = -5 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtém-se: $a = 4$ e $b = -1$.

A lei de associação entre x e y é:

$y = 4x - 1$

- Intersecção do gráfico com o eixo Ox:

  $y = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0$

  $\therefore x = \frac{1}{4}$

- Intersecção do gráfico com o eixo Oy:

  $x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0 - 1$

  $\therefore y = -1$

  Portanto, os pontos de intersecção desse gráfico com os eixos coordenados são

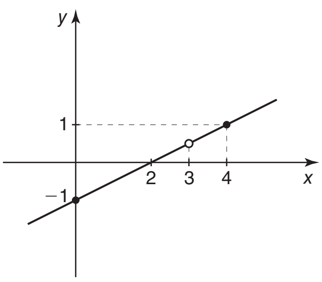
  $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $(0, -1)$.

5 Para $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 6}$, temos $x \neq 3$; assim:

$$y = \frac{(x - 2) \cdot \cancel{(x - 3)}}{2 \cdot \cancel{(x - 3)}}$$

$y = \frac{x}{2} - 1$, com $x \neq 3$.

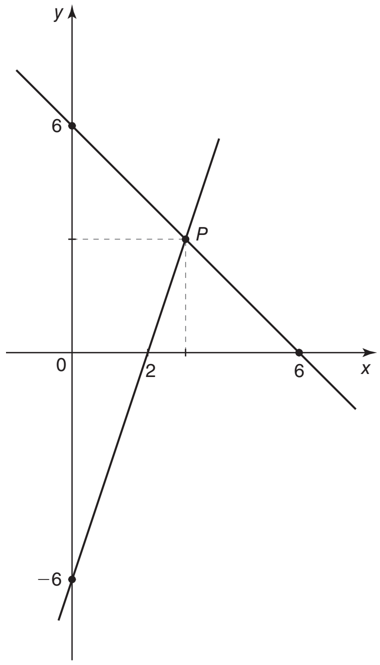
x	y
0	−1
4	1



6 $y = 3x - 6$ (I) $\qquad y = -x + 6$ (II)

x	y
0	−6
2	0

x	y
0	6
6	0



O ponto P, comum aos dois gráficos, é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 3$$

Logo, $P(3, 3)$.

7 De acordo com a figura, $A_{\text{trapézio}} = \frac{k + 4}{2} \cdot 6 = 3k + 12$.

Logo, $3k + 12 = 60$.

$\therefore k = 16$

Assim, os pontos (0, 4) e (6, 16) pertencem à reta r de equação $y = ax + b$; logo,

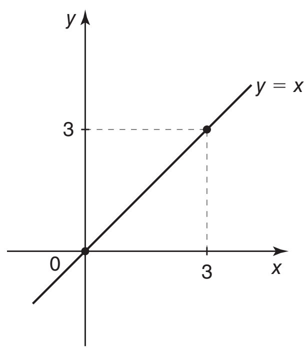
$$\begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 16 = a \cdot 6 + b \end{cases} \Rightarrow b = 4 \text{ e } a = 2$$

Portanto, a equação da reta r é $y = 2x + 4$.

Alternativa **a**.

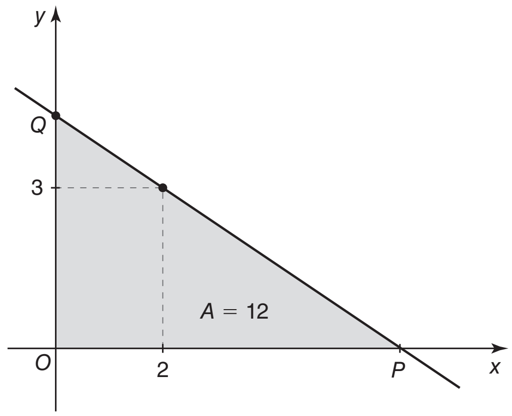
8

x	y
0	0
3	3



$D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}$

9 Há três possibilidades: o triângulo pode estar no 1º, no 2º ou no 4º quadrante. Analisemos a primeira possibilidade:



$y = f(x) = ax + b$

x	y	
0	b	$(b > 0)$
$-\dfrac{b}{a}$	0	$(a < 0)$

$P\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$; $Q(0, b)$

- O triângulo OPQ tem 12 unidades quadradas de área.

  $A = \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{b}{a}\right) \cdot b = -\dfrac{b^2}{2a} = 12$

  Logo, $b^2 + 24a = 0$. (I)
- O ponto (2, 3) pertence ao gráfico.

  $3 = 2a + b \Rightarrow b = 3 - 2a$ (II)

  De (I) e (II), temos: $(3 - 2a)^2 + 24a = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow a = -\dfrac{3}{2}$

  Como $b = 3 - 2a$, deduzimos que:

  $b = 3 - 2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 6$

  Portanto, $y = -\dfrac{3}{2}x + 6$, ou seja, $f(x) = 6 - \dfrac{3x}{2}$.

  Observando que uma das alternativas apresenta essa função, não é necessário analisar as outras duas possibilidades.

  Alternativa **b**.

10 a) $f(1) = 1 \cdot 2 = 2$

$f(3) = 4 + \dfrac{2 + 1}{2} \cdot 1 = \dfrac{11}{2}$

b) $f(t) = 2t$, se $0 \leqslant t \leqslant 2$

$f(t) = 4 + \dfrac{2 + 4 - t}{2} \cdot (t - 2) =$

$= -\dfrac{t^2}{2} + 4t - 2$, se $2 < t \leqslant 4$

11 $\begin{cases} y = ax + b \\ a = -2 \end{cases}$ (taxa de variação)

Então, $y = -2x + b$

Como o ponto $A(-4, 8)$ pertence à reta s, temos:

$8 = -2 \cdot (-4) + b \Rightarrow b = 0$

Logo, a reta s tem equação $y = -2x$.

12 a) • $a = \dfrac{1 - (-1)}{4 - 1} = \dfrac{2}{3}$; $y = \dfrac{2}{3}x + b$

• $A(1, -1)$ pertence ao gráfico; então:

$-1 = \dfrac{2}{3} \cdot 1 + b \Rightarrow b = -\dfrac{5}{3}$

Logo, $y = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{5}{3}$.

b) • $a = \dfrac{-2 - 2}{\dfrac{1}{3} - 1} = 6$; $y = 6x + b$

• $A(1, 2)$ pertence ao gráfico; então:

$2 = 6 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -4$

Logo, $y = 6x - 4$.

13 a) $a_{AB} = \dfrac{1 - 3}{2 - 1} = -2$; $a_{BC} = \dfrac{-1 - 1}{3 - 2} = -2$

$a_{AB} = a_{BC} \Rightarrow$ A, B e C são colineares.

b) $a_{AB} = \dfrac{3 - 1}{2 - 1} = 2$; $a_{BC} = \dfrac{5 - 3}{5 - 2} = \dfrac{2}{3}$

$a_{AB} \neq a_{BC} \Rightarrow$ A, B e C não são colineares.

14 $a_{AB} = \dfrac{(11k - 18) - (3k - 2)}{6 - 2} = 2k - 4$

$a_{BC} = \dfrac{(k + 2) - (11k - 18)}{1 - 6} = 2k - 4$

Como as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ representam funções afins de mesma taxa de variação e têm o ponto B em comum, os pontos A, B e C são colineares para qualquer valor real de k.

15 a) V, pois:

$a_{AB} = \dfrac{f(6) - 2}{6 - (-4)} = \dfrac{f(6) - 2}{10}$

$a_{AC} = \dfrac{g(6) - 2}{6 - (-4)} = \dfrac{g(6) - 2}{10}$

Como $f(6) > g(6)$, resulta que $a_{AB} > a_{AC}$.

b) F, pois, escolhendo $p = -4$ e $q = 8$, temos: $A(-4, 2)$, $B(8, 12)$, $C(-4, 2)$ e $D(8, 6)$.

Então: $a_{AB} = \dfrac{12 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{5}{6}$ e

$a_{CD} = \dfrac{6 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{1}{3}$

Logo, $a_{AB} > a_{CD}$.

c) V, pois a maior taxa de variação possível ocorre quando $k = 8$; então:

$f(k) = f(8) = 12$

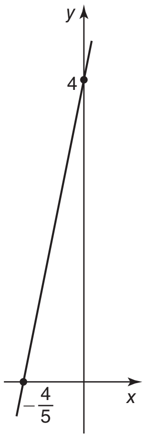
$\therefore\ a = \dfrac{12 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{5}{6}$

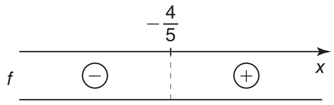
d) F, pois a menor taxa de variação possível ocorre quando $k = -4$; então:

$g(k) = g(-4) = 2$

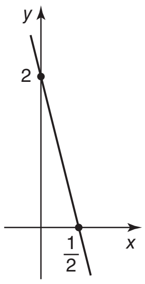
$\therefore\ a = \dfrac{12 - 2}{8 - (-4)} = \dfrac{5}{6} \neq 3$

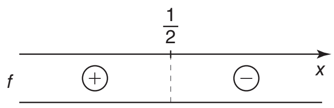
16 a) $f(x) = 5x + 4$



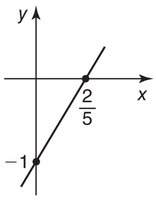


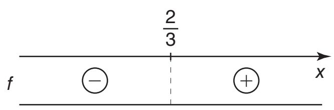
b) $f(x) = -4x + 2$



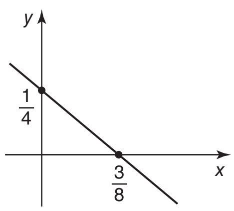


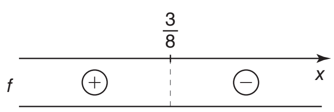
c) $f(x) = \frac{5x}{2} - 1$





d) $f(x) = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}$

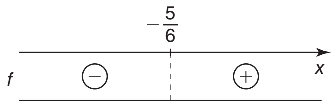




17 a) raiz de $f(x)$: $6x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{6}$

$f(x) > 0$: $6x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{6}$

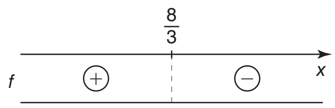
$f(x) < 0$: $6x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{6}$



b) raiz de $f(x)$: $-3x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

$f(x) > 0$: $-3x + 8 > 0 \Rightarrow x < \frac{8}{3}$

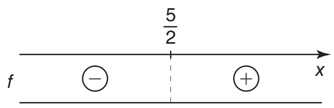
$f(x) < 0$: $-3x + 8 < 0 \Rightarrow x > \frac{8}{3}$



c) raiz de $f(x)$: $\frac{2x}{5} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$f(x) > 0$: $\frac{2x}{5} - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$

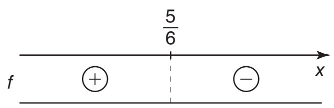
$f(x) < 0$: $\frac{2x}{5} - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{5}{2}$



d) raiz de $f(x)$: $-\frac{4x}{5} + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

$f(x) > 0$: $-\frac{4x}{5} + \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{6}$

$f(x) < 0$: $-\frac{4x}{5} + \frac{2}{3} < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{6}$



18 A função afim f é crescente, pois tem taxa de variação positiva.

$$\begin{cases} \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} > 0 \Rightarrow f(5) > f(4) \quad \text{(I)} \\ f(4) \cdot f(5) < 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) e (II) resulta $f(4) < 0$ e $f(5) > 0$.
A raiz de f é um número compreendido entre 4 e 5, pois $f(4)$ e $f(5)$ têm sinais opostos.
Logo, a afirmação correta é $f(4) < 0$ e $f(5) > 0$.
Alternativa **e**.

19 Os pontos $(-1, 3)$ e $(2, -1)$ pertencem ao gráfico; logo:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot (-1) + b \\ -1 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -\frac{4}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$.

Logo, $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$.

$f(x) \geqslant 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \geqslant 0$

$-\frac{4}{3}x \geqslant -\frac{5}{3} \Rightarrow 4x \leqslant 5$

$\therefore\ x \leqslant \frac{5}{4}$

Alternativa **b**.

20 **a)** Sendo $f(x) = x - 1$, $g(x) = 2x - 3$ e $h(x) = 5x - 6$, temos:

		1		$\frac{6}{5}$		$\frac{3}{2}$	
f	−		+		+		+
g	−		−		−		+
h	−		−		+		+
$f \cdot g \cdot h$	−		+		−		+

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } \frac{6}{5} < x < \frac{3}{2}\right\}$.

b) A forma fatorada da expressão $3x^2 - 2x - 1$ é $(3x + 1)(x - 1)$.
Assim, $3x^2 - 2x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow (3x + 1)(x - 1) \leqslant 0$
Sendo $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x - 1$, temos:

		$-\frac{1}{3}$		1	
f	−		+		+
g	−		−		+
$f \cdot g$	+		−		+

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1\right\}$.

c) A forma fatorada da expressão $x^2 - 2x$ é $x(x - 2)$.
Assim, $x^2 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x(x - 2) \geqslant 0$
Sendo $f(x) = x$ e $g(x) = x - 2$, temos:

		0		2	
f	−		+		+
g	−		−		+
$f \cdot g$	+		−		+

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

d) A forma fatorada da expressão $x^2 - 9$ é $(x + 3)(x - 3)$.
Assim, $x^2 - 9 < 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) < 0$
Sendo $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 3$, temos:

		-3		3	
f	−		+		+
g	−		−		+
$f \cdot g$	+		−		+

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$.

21 Inicialmente, fatoramos o primeiro membro da inequação.
$x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2(x + 2) - (x + 2) =$
$= (x + 2)(x^2 - 1) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$
Assim, temos a inequação equivalente:
$(x + 2)(x + 1)(x - 1) > 0$
Representando $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x - 1$ e $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$ em um quadro de sinais, obtemos:

		-2		-1		1	
f	−		+		+		+
g	−		−		+		+
h	−		−		−		+
$f \cdot g \cdot h$	−		+		−		+

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 1\}$.

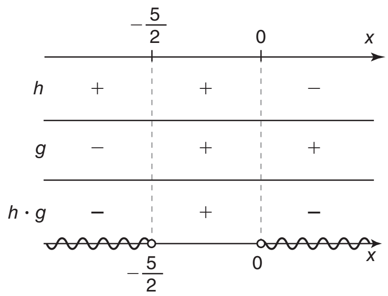
22 $(x - 3)(3x + 1) < -x + 3$
Inicialmente, vamos preparar essa inequação:
$(x - 3)(3x + 1) + (x - 3) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)(3x + 1 + 1) < 0$
$\therefore (x - 3)(3x + 2) < 0$

		$-\frac{2}{3}$		3	
f	−		−		+
g	−		+		+
$f \cdot g$	+		−		+

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 3\right\}$

Logo, o menor número inteiro positivo x tal que $(x - 3)(3x + 1) < -x + 3$ é 1.

23 a) Para $p = -5$, temos a inequação produto: $-5x(2x + 5) < 0$. Estudando a variação de sinal das funções $h(x) = -5x$ e $g(x) = 2x + 5$, temos:



Logo, para $p = -5$, os números reais x para os quais $f(x) \cdot g(x) < 0$ são tais que $x < -\dfrac{5}{2}$ ou $x > 0$.

b) $g(x) \leqslant f(x) \Rightarrow 2x + 5 \leqslant px$
$\therefore (p - 2)x - 5 \geqslant 0$
Como o gráfico da função $h(x) = (p - 2)x - 5$ é uma reta para qualquer valor real de p, temos que a desiqualdade $h(x) \geqslant 0$ ocorre para qualquer $x \in [-8, -1]$ se, e somente se, $h(-8) \geqslant 0$ e $h(-1) \geqslant 0$, ou seja:

$$\begin{cases} -8(p-2) - 5 \geqslant 0 \\ -1(p-2) - 5 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \leqslant \dfrac{11}{8} \\ p \leqslant -3 \end{cases}$$

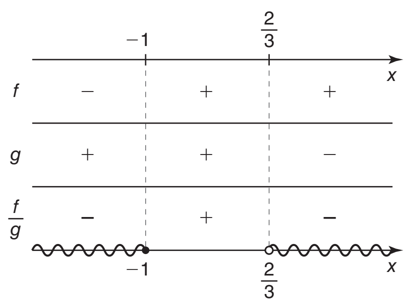
Logo, $p \leqslant -3$.

24 a) Condição de existência: $2x - 8 \neq 0$, que equivale a $x \neq 4$.

Como o numerador de $\dfrac{4}{2x - 8}$ é positivo, a fração será positiva se, e somente se, o denominador for positivo, ou seja:
$2x - 8 > 0 \Rightarrow x > 4$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} =]4, +\infty[$.

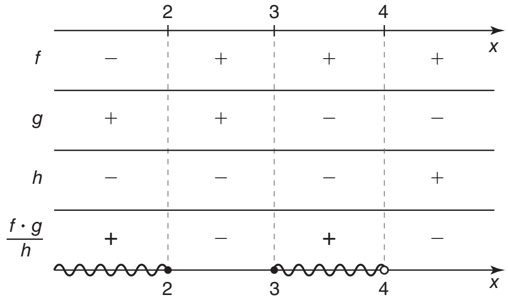
b) Condição de existência: $x - 5 \neq 0$, que equivale a $x \neq 5$.
Como o numerador de $\dfrac{3}{x - 5}$ é positivo, a fração será negativa se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja:
$x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\} =]-\infty, 5[$.

25 a) Condição de existência: $x \neq \dfrac{2}{3}$



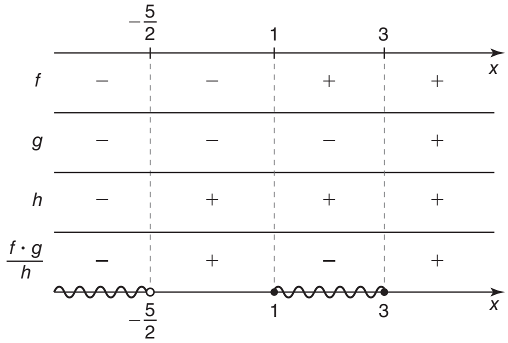
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > \dfrac{2}{3}\right\}$.

b) Condição de existência: $x \neq 4$



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2 \text{ ou } 3 \leqslant x < 4\}$.

c) Condição de existência: $x \neq -\dfrac{5}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{5}{2} \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

26 a) Condição de existência: $x \neq 2$

$\dfrac{2x - 3}{x - 2} < 2 \Rightarrow \dfrac{2x - 3}{x - 2} - 2 < 0$

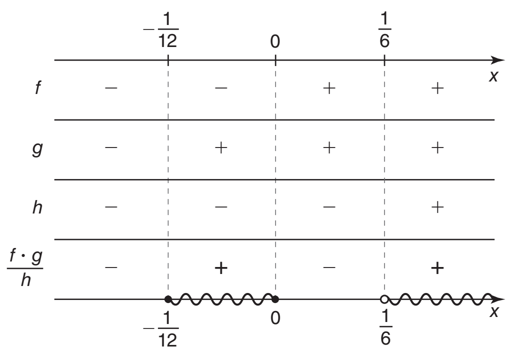
$\therefore \dfrac{1}{x - 2} < 0$

Como o numerador de $\dfrac{1}{x - 2}$ é positivo, a fração será negativa se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja:
$x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

b) Condição de existência: $x \neq \dfrac{1}{6}$

$\dfrac{3x}{6x - 1} \geqslant -2x \Rightarrow \dfrac{3x}{6x - 1} + 2x \geqslant 0$

$\therefore \dfrac{x(1 + 12x)}{6x - 1} \geqslant 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{12} \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } x > \dfrac{1}{6}\right\}$.

27 O produto $f(x) \cdot g(x)$ é negativo se, e somente se, $f(x)$ e $g(x)$ tiverem sinais contrários.
Observando o gráfico, constatamos que isso ocorre para todo x real tal que $2 < x < 3$ ou $5 < x < 6$.
Alternativa **a**.

28 Vamos escrever a inequação na forma $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$:

$\frac{x-1}{x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x}}{x} < 0$

$\therefore \frac{-1}{x} < 0$

Condição de existência: $x \neq 0$

Como o numerador de $\frac{-1}{x}$ é negativo, a função será negativa se, e somente se, o denominador for positivo, ou seja $x > 0$.

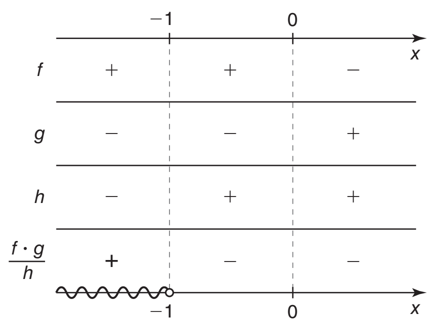
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Alternativa **d**.

29 A inequação $\frac{x}{x+1} > x$ pode ser escrita na forma equivalente $\frac{(-x) \cdot x}{x+1} > 0$.

Condição de existência: $x + 1 \neq 0$, que equivale a $x \neq -1$.

Sendo $f(x) = -x$, $g(x) = x$ e $h(x) = x + 1$, temos:



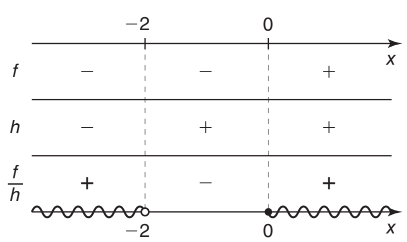
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$.

Alternativa **b**.

30 $g(x) = \sqrt{\frac{2}{x+3}} + \sqrt{\frac{x}{x+2}}$

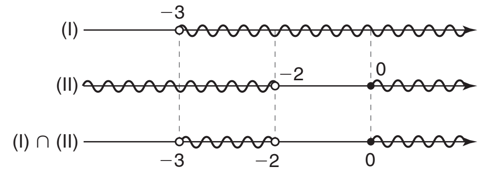
(I) $\frac{2}{x+3} \geqslant 0$
Condição de existência: $x \neq -3$
$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$.

(II) $\frac{x}{x+2} \geqslant 0$
Condição de existência: $x \neq -2$
Sendo $f(x) = x$ e $g(x) = x + 2$, temos:



Logo, $x < -2$ ou $x \geqslant 0$.

Fazendo a intersecção dos intervalos obtidos em (I) e (II), temos:



Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } x \geqslant 0\}$.

Exercícios contextualizados

31 **a)** O gráfico mostra que, na superfície do mar (profundidade 0), a pressão sofrida pelo mergulhador é de 1 atmosfera.

b) $\frac{p-2}{18-10} = \frac{2-1}{10-0} \Rightarrow p = 2{,}8$ atmosferas

c) $p = ax + b$

$a = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{2-1}{10-0} = 0{,}1$

$\therefore p = 0{,}1x + b$

Como o ponto (10, 2) pertence ao gráfico, temos:

$2 = 0{,}1 \cdot 10 + b \Rightarrow b = 1$

Logo, a equação é $p = 0{,}1x + 1$.

32 **a)** O ponto (0, 32) pertence ao gráfico.

Logo, $32 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 32$

Analogamente, o ponto (100, 212) pertence ao gráfico.

Então, $212 = a \cdot 100 + b$.

Como $b = 32$, resulta:

$212 = a \cdot 100 + 32 \Rightarrow a = \frac{9}{5}$

Portanto, a equação é $y = \frac{9x}{5} + 32$.

b) Se $y = -4$, temos: $-4 = \frac{9x}{5} + 32$

Assim:

$-20 = 9x + 160 \Rightarrow 9x = -180$

$\therefore x = -20$

Logo, a temperatura que corresponde a −4 °F é −20 °C.

33 $\begin{cases} C\text{: custo mensal em real} \\ x\text{: número de unidades produzidas por mês} \end{cases}$

$C = ax + b$

$\begin{cases} 35.000 = a \cdot 1.000 + b \\ 65.000 = a \cdot 2.000 + b \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 30$ e $b = 5.000$.

Logo, $C = 30x + 5.000$.

Se $x = 0$, então $C = 30 \cdot 0 + 5.000 = 5.000$.

Portanto, o custo de produção de 0 (zero) unidade é R$ 5.000,00.

Alternativa **c**.

34 Seja y a concentração (mg/mL) e x o tempo (h).

De acordo com o enunciado, $y = ax + b$, em que a e b são constantes tais que:

$\begin{cases} 8a + b = 1 \\ 12a + b = 0{,}2 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = -0{,}2$ e $b = 2{,}6$.

Então, $y = -0{,}2x + 2{,}6$.

Se a concentração é zero, temos:

$-0{,}2x + 2{,}6 = 0 \Rightarrow x = 13$

Logo, isso acontece às 13 horas e o tempo decorrido a partir das 12 horas será:

13 h − 12 h = 1 h = 60 min

Portanto, a concentração da droga será zero após 60 minutos contados a partir das 12 h.

35 V = valor do terreno (em real); t = tempo decorrido (em ano).

Admitindo $V = at + b$, resulta:

$$\begin{cases} 40.000 = a \cdot 0 + b \\ 42.000 = a \cdot 4 + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 500$ e $b = 40.000$.

Então, $V = 500t + 40.000$.

- t = 6 anos e 4 meses = $\frac{19}{3}$ anos

  $V = 500 \cdot \frac{19}{3} + 40.000 \Rightarrow V \approx 43.166$

Logo, daqui a 6 anos e 4 meses, o valor do terreno será, aproximadamente, R$ 43.166,00.

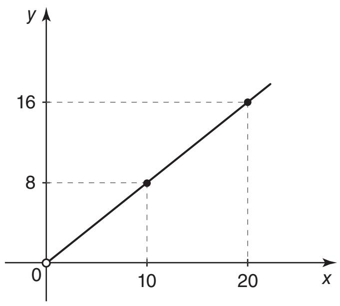
Alternativa **b**.

36 **a)** Sendo A a área do papel, temos:

$A = (50 \cdot 0{,}80)\ m^2 = 40\ m^2$

b) $y = 0{,}8x,\ x > 0$

x	*y*
10	8
20	16



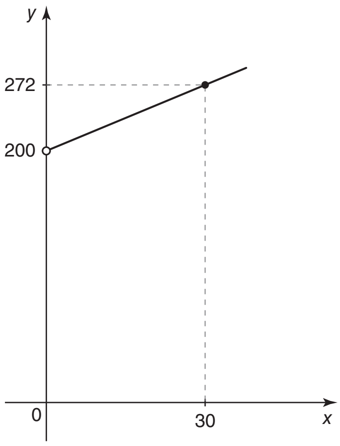
c) De acordo com o enunciado, temos:

$y = 5 \cdot 50 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot x \cdot 0{,}8$; com $x > 0$

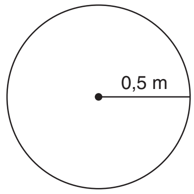
Simplificando, obtemos:

$y = 2{,}4x + 200$; com $x > 0$

x	*y*
0	200
30	272



37 **a)**



$C = 2\pi r$ ou $C = 6{,}28r$ ($\pi = 3{,}14$)

Se $r = 0{,}5$ m, então $C = 3{,}14$ m.

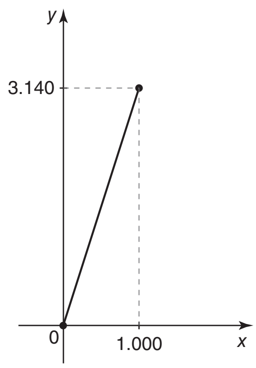
Temos a seguinte regra de três:

Número de voltas	Distância percorrida (m)
1	3,14
x	y

Então, $\frac{1}{x} = \frac{3{,}14}{y} \Rightarrow y = 3{,}14x$

b)

x	*y*
0	0
1.000	3.140

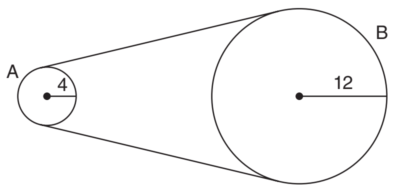


c) Sim, pois:

I. Se $x = 0$, então $y = 0$.

II. Se $x \neq 0$, a razão de y para x é constante, ou seja, $\frac{y}{x} = 3{,}14$.

38 **a)**



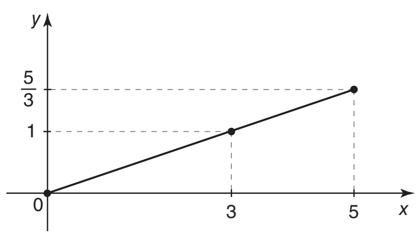
$r_B = 3 \cdot r_A$

$\therefore C_B = 3 \cdot C_A$

Números de voltas da polia A	Números de voltas da polia B
3	1
x	y

$\frac{3}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{3}$

b)



c) Sim, pois:

I. Se $x = 0$, então $y = 0$.

II. Se $x \neq 0$, então $\frac{y}{x} = k$, sendo k uma constante real $\left(\text{no caso, } k = \frac{1}{3}\right)$.

39 **a)** Tempo (min) ——— Quantidade de corda fabricada (m)

5 ——— $3k + 1$

$3k - 1$ ——— 16

A metragem de corda fabricada é uma função linear do tempo; logo:

$$\frac{5}{3k - 1} = \frac{3k + 1}{16}$$

Assim:

$(3k + 1)(3k - 1) = 80 \Rightarrow 9k^2 - 1 = 80$

$\therefore\ k^2 = 9$

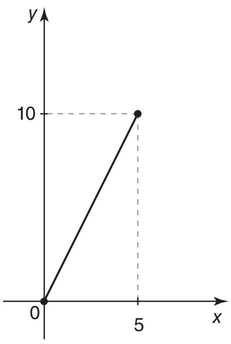
$\therefore\ k = 3$ ou $k = -3$ (não convém)

Substituindo k por 3 na regra de três acima, temos:

x	y
5	10
8	16

$$\begin{cases} a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6}{3} = 2 \\ y = ax \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

b) Gráfico



40 $\begin{cases} t\text{: tempo, em ano} \\ p\text{: preço do moinho, em real} \end{cases}$

Adotando $t = 0$ quando o camponês adquire o moinho, tem-se a tabela:

t	$p(t) = at + b$
0	860
6	500

- $a = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{500 - 860}{6 - 0} = -60$
- $b = p(0) = 860$

Então:

$p(t) = -60t + 860$

Análise das alternativas:

a) F, pois:

$t = 3 \Rightarrow p = 680$

50% do preço de compra $= 430$

b) F, pois:

$t = 9 \Rightarrow p = 320$

320 não é múltiplo de 9.

c) F, pois:

$t = 7 \Rightarrow p = 440$

$440 < 450$

d) F, pois:

$t = 10 \Rightarrow p = 260$

$260 > 200$

e) V, pois:

$t = 13 \Rightarrow p = 80$

O moinho terá valor de venda, ainda que tenham decorrido 13 anos.

Alternativa **e**.

41 Pelo enunciado, obtemos a tabela da população de Tóquio.

x	$y = a_1x + b_1$
0	7
24	20

$a_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{13}{24}$ e $b_1 = 7$

$\therefore\ y = \dfrac{13}{24}x + 7 \quad \text{(I)}$

Pelo enunciado, obtemos a tabela da população de Nova Iorque.

x	$y = a_2x + b_2$
0	12,6
24	16

$a_2 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3{,}4}{24}$ e $b_2 = 12{,}6$

$\therefore\ y = \dfrac{3{,}4}{24}x + 12{,}6 \quad \text{(II)}$

Para determinar o ano em que as duas cidades ficaram com a mesma população, igualamos as expressões de y dadas por (I) e (II).

$\dfrac{13}{24}x + 7 = \dfrac{3{,}4}{24}x + 12{,}6 \Rightarrow x = 14$

$1950 + 14 = 1964$

Portanto, esse ano é 1964.

Alternativa **d**.

42 Se o preço do produto e a quantidade vendida estão relacionados por uma função linear, a redução do preço e o aumento de vendas são diretamente proporcionais.

Redução do preço (%) ——— Aumento de vendas (%)

8 ——— 14

14 ——— x

Assim: $\dfrac{8}{14} = \dfrac{14}{x} \Rightarrow x = 24{,}5$

Logo, o aumento na quantidade vendida será de 24,5%.

Alternativa **d**.

43 Pelo enunciado, podemos concluir que:

- Com 1 L de álcool, o carro percorre 8 km.
  Então, com 0,25 L desse combustível, ele percorrerá 2 km.
- Sabe-se também que, com a mistura de 0,25 L de álcool e 0,75 L de gasolina, o carro percorre 11 km. Logo, com 0,75 L de gasolina, ele poderá percorrer 9 km.
  Desse modo, podemos obter a distância percorrida pelo carro com 1 L de gasolina, por uma regra de três:

Quantidade de gasolina (L)	Distância (km)
0,75	9
1	x

$\frac{0,75}{1} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 12$

Então, calculando a distância percorrida com 1 L da nova mistura, obtemos:

$d = 0,8 \cdot 12 + 0,2 \cdot 8 = 9,60 + 1,60 = 11,20$

Portanto, com a nova mistura, esse carro percorrerá um total de 11,20 km.

Alternativa **a**.

44 Como o IDH brasileiro varia linearmente com a variação do tempo, podemos concluir que a equação que representa essa variação será do tipo $y = ax + b$, em que y equivale ao IDH e x equivale ao tempo, em ano.

De acordo com a tabela do enunciado, obtemos:

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,792 - 0,790}{2005 - 2004} = 0,002$

Substituindo $a = 0,002$ em $y = ax + b$, temos:

$y = 0,002 \cdot x + b$

Para $x = 2004$ e $y = 0,790$, temos:

$0,790 = 0,002 \cdot 2004 + b \Rightarrow b = -3,218$

Logo, $y = 0,002x - 3,218$.

Se $y = 0,863$, então:

$0,002x - 3,218 = 0,863 \Rightarrow x = 2040,5$

Portanto, o IDH brasileiro atingirá 0,863 no ano 2040.

Alternativa **c**.

45 Pelo enunciado, obtemos a tabela:

Tempo (x)	Número de partículas poluentes (y)
8	20
13	100

Ainda de acordo com o enunciado, podemos concluir que, como o número de partículas poluentes na atmosfera varia linearmente com a variação do tempo, a equação que representa essa variação será do tipo $y = ax + b$, em que x equivale ao tempo, em hora, e y equivale ao número de partículas poluentes.

Pela tabela acima, obtemos:

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100 - 20}{13 - 8} = 16$

Substituindo $a = 16$ em $y = ax + b$ e utilizando os dados da tabela, temos:

$20 = 16 \cdot 8 + b \Rightarrow b = -108$

Logo, $y = 16x - 108$.

Se $x = 10,5$, então $y = 16 \cdot 10,5 - 108$.

$\therefore y = 60$

Logo, o número de partículas poluentes às 10 h 30 min desse dia é 60.

Alternativa **b**.

46

Dia do mês (x)	Valor do dólar (y)
1	R$ 2,00
31	R$ 2,21

$$y = ax + b$$

- $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,21 - 2,00}{31 - 1} = 0,007$
- $2,00 = 0,007 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1,993$
  Logo, $y = 0,007x + 1,993$.
  Se $x = 21$, então $y = 0,007 \cdot 21 + 1,993$.
  $\therefore y = 2,14$
  Logo, o valor do dólar, em real, no dia 21 de julho foi R$ 2,14.

47 As equações da distância s em função do tempo t são da forma $s = at + b$.

- 1º carro

t	s
0	0
0,5	30

$a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30}{0,5} = 60$ e $b = 0$

$\therefore s = 60t \quad$ (I)

- 2º carro

t	s
0,5	0
2,5	180

$a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180}{2} = 90$

$0 = 90 \cdot 0,5 + b \Rightarrow b = -45$

$\therefore s = 90t - 45 \quad$ (II)

O tempo t decorrido para que o 1º carro fosse alcançado pelo outro é dado por:

$90t - 45 = 60t$

$\therefore t = 1,5$

Assim, a distância s percorrida pelo 1º carro é:

$s = 60 \cdot 1,5 = 90$

Logo, o carro que partiu primeiro foi alcançado pelo outro ao ter percorrido exatamente 90 km.

Alternativa **d**.

48 De acordo com o gráfico, o valor a ser pago por um banho de 20 min é R$ 0,60. Se o custo por kWh é R$ 0,30, então a energia elétrica consumida nesse banho é 2 kwh.

Lembrando que $\text{Pot} = \dfrac{E}{\Delta t}$, resulta:

$$\text{Pot} = \frac{2 \text{ kWh}}{\frac{1}{3}\text{ h}} = 6 \text{ kW}$$

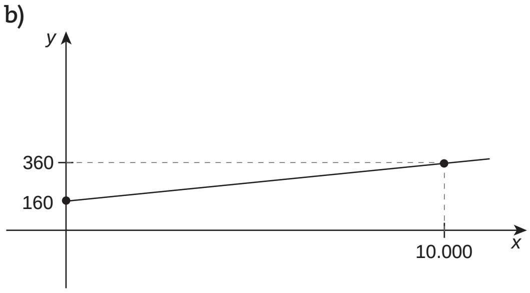
Alternativa **e**.

49 a)

	Venda (R$)	Rendimento (R$)
Abril	8.350	327
Maio	10.200	364
Junho	k	$160 + 0{,}02k$

Abril: $160 + 0{,}02 \cdot 8.350 = 327$
Maio: $160 + 0{,}02 \cdot 10.200 = 364$
Junho: $160 + 0{,}02k$

b)



$y = 160 + 0{,}02x$

Note que o gráfico é uma semirreta.

50 a) Como para cada faixa de consumo é cobrada uma tarifa, temos de representar a função por mais de uma sentença. Ressaltamos que o maior valor pago na segunda faixa é dado por $12 + (20 - 10) \cdot 2$, isto é, R$ 32,00. Assim, indicando por x a quantidade de água consumida, em metro cúbico, e por $f(x)$ a tarifa em real, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 12, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 12 + 2(x - 10), \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 32 + 3(x - 20), \text{ se } x > 20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 12, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 2x - 8, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 3x - 28, \text{ se } x > 20 \end{cases}$$

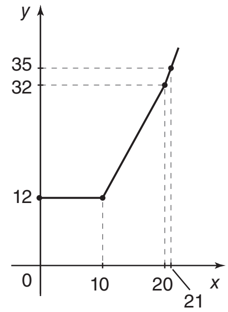
b) Para esboçar o gráfico da função, analisamos cada sentença:

I. $f(x) = 12$ se $0 \leqslant x \leqslant 10$. Logo, essa parte do gráfico é um segmento de reta com extremos (0, 12) e (10, 12).

II. $f(x) = 2x - 8$ se $10 < x \leqslant 20$. Logo, essa parte do gráfico é um segmento de reta com um extremo aberto (10, 12) e um extremo fechado (20, 32).

III. $f(x) = 3x - 28$ se $x > 20$. Logo, essa parte do gráfico é a semirreta de origem aberta em (20, 32) que passa pelo ponto (21, 35).

A reunião dos gráficos deduzidos em I, II, III é o gráfico da função f:



É claro que, na prática, há um limite para o consumo de água. Porém, por ser teoricamente ilimitado esse consumo, representamos por uma semirreta o gráfico determinado no item III.

51
- $C(9) = 5 + 9 \cdot (12 - 9) = 32$
- $C(15) = -\dfrac{3}{2} \cdot 15 + 40 = 17{,}50$

Diferença entre o maior e o menor custo de produção:

$C(9) - C(15) = 32 - 17{,}50 = 14{,}50$

$\therefore$ R$ 14,50

Alternativa **b**.

52 A velocidade em cada trecho é a taxa de variação da função correspondente. Assim, a maior velocidade ocorreu no trecho de 3 a 5 horas, cuja velocidade é a taxa de variação v tal que:

$$v = \frac{250 - 100}{5 - 3} \text{ km/h} = 75 \text{ km/h}$$

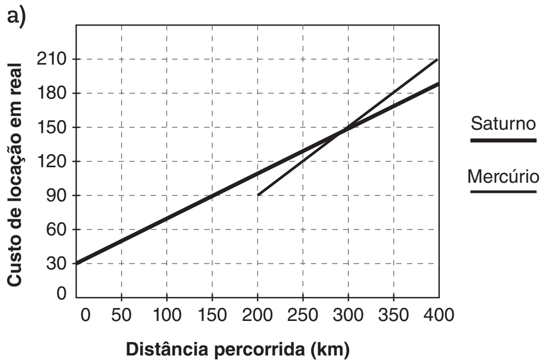
Portanto, a equação que expressa a distância percorrida em função do tempo, nesse trecho, é: $d(t) = 75t + b$. Como o ponto (5, 250) pertence ao gráfico, temos:

$$250 = 75 \cdot 5 + b \Rightarrow b = -125$$

Concluímos, então, que $d(t) = 75t - 125$.

Alternativa **d**.

53 a)



b) Analisando o gráfico acima, concluímos que, para $x = 150$, $f(x) = g(x) = 90$ e, para $x = 300$, $f(x) = g(x) = 150$.

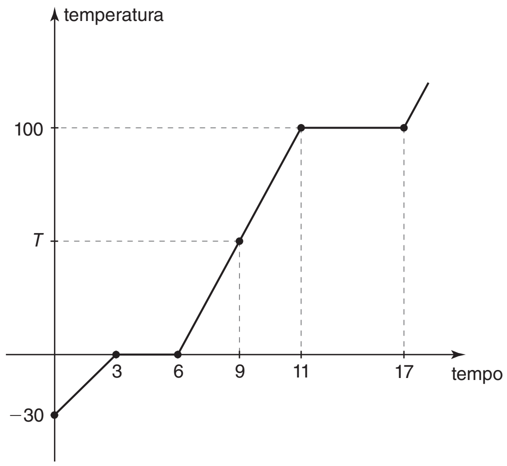
- Para $x \in [0, 150[$ ou $x > 300$, o plano da locadora Saturno é mais barato.
- Para $x \in [150, 300[$, o plano da locadora Mercúrio é mais barato.

- Como a locadora Saturno deve manter a taxa fixa de R\$ 30,00, para que ela tenha o plano mais vantajoso e com lucro máximo consideremos $f(x) = 30 + ax$, sendo a a nova taxa por quilômetro rodado, passando pelos pontos (0, 30) e (200, 90).

  $a = \dfrac{90 - 30}{200 - 0} = \dfrac{60}{200} = 0{,}30$

  Logo, o novo plano da locadora Saturno deve ser $f(x) = 30 + 0{,}30x$.

54 **a)** -30 °C
b) 3 minutos
c) 6 minutos
d) 60 °C



$\dfrac{T}{3} = \dfrac{100}{5} \Rightarrow T = 60$

e) 5 minutos
f) $0 \leqslant x < 3$

x	y
0	-30
3	0

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{0 - (-30)}{3 - 0} = 10 \\ b = -30 \end{array}\right\} f(x) = 10x - 30$$

$3 \leqslant x < 6$; $f(x) = 0$
$6 \leqslant x < 11$

x	y
6	0
11	100

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{100 - 0}{11 - 6} = 20 \\ 0 = 20 \cdot 6 + b \Rightarrow b = -120 \end{array}\right\} f(x) = 20x - 120$$

$11 \leqslant x \leqslant 17$; $f(x) = 100$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 10x - 30, \text{ se } 0 \leqslant x < 3 \\ 0, \text{ se } 3 \leqslant x < 6 \\ 20x - 120, \text{ se } 6 \leqslant x < 11 \\ 100, \text{ se } 11 \leqslant x \leqslant 17 \end{cases}$$

55 **a)** Os pontos (1, 2.000) e (13, -340) pertencem ao gráfico; logo, temos:

$$\begin{cases} 2.000 = a \cdot 1 + b \\ -340 = a \cdot 13 + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = -195$ e $b = 2.195$.
Assim, a lei de associação é $y = -195x + 2.195$.

b) $x = 31$
$y = -195 \cdot 31 + 2.195 = -3.850$
Portanto, o saldo no dia 31 de janeiro era de -3.850 reais.

c) $y > 0$
$-195x + 2.195 > 0 \Rightarrow x < 11{,}25$
Logo, o saldo esteve positivo durante 11 dias.

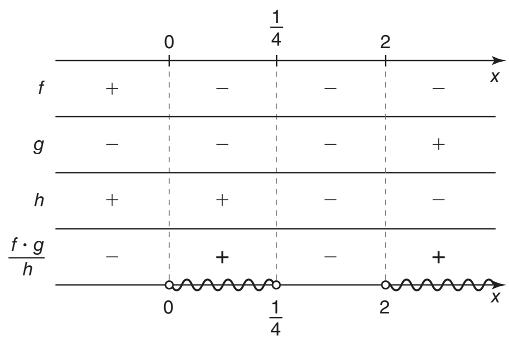
d) $-195 \cdot x + 2.195 < 0 \Rightarrow x > 11{,}25$
Logo, o saldo esteve negativo durante 20 dias.

56 $\dfrac{-p^2 - 2p + 1}{-4p + 1} > 1 \Rightarrow \dfrac{-p^2 + 2p}{-4p + 1} > 0$

$\therefore \dfrac{-p(p - 2)}{-4p + 1} > 0$

Condição de existência: $p \neq \dfrac{1}{4}$

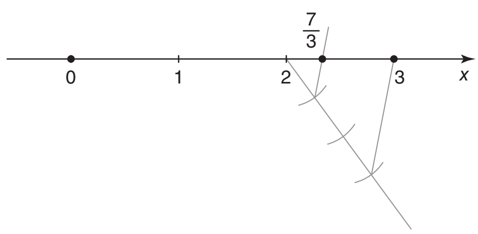
Estudando o sinal das funções $f(p) = -p$, $g(p) = p - 2$ e $h(p) = -4p + 1$, temos:



Concluímos, então, que a demanda é elástica para qualquer preço p, com $0 < p < \dfrac{1}{4}$ ou $p > 2$
Alternativa **d**.

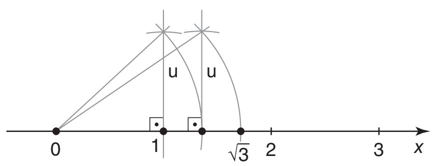
Exercícios de revisão cumulativa

1 **a)**



$\dfrac{7}{3} = 2 + \dfrac{1}{3}$

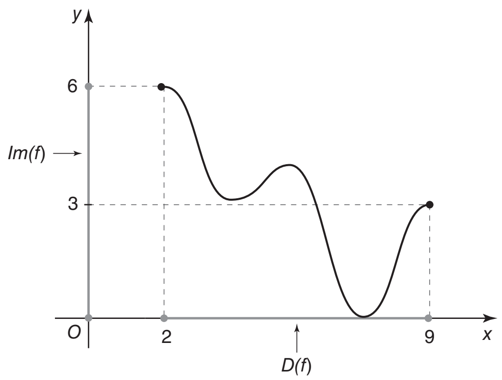
b)



2 Seja n um número inteiro ímpar.
Então, $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Assim, obtemos:
$n^3 = (2k + 1)^3 =$
$= (2k)^3 + 3 \cdot (2k)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2k) \cdot 1^2 + 1^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$
$= 2 \cdot (4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$
Como $4k^3 + 6k^2 + 3k$ é um número inteiro, concluímos que $2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$ é ímpar, ou seja, n^3 é um número inteiro ímpar.

3 Temos $\left\{\frac{3}{4}, 4, 0\right\} \subset \mathbb{Q}$ e $\left\{\sqrt{3}, 3 + \sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right\} \subset \mathbb{Q}'$.
Logo:
$f\left(\frac{3}{4}\right) + f(\sqrt{3}) - f(3 + \sqrt{2}) + f\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) + f(4) + f(0) =$
$= 1 + 2 - 2 + 2 + 1 + 1 = 5$

4

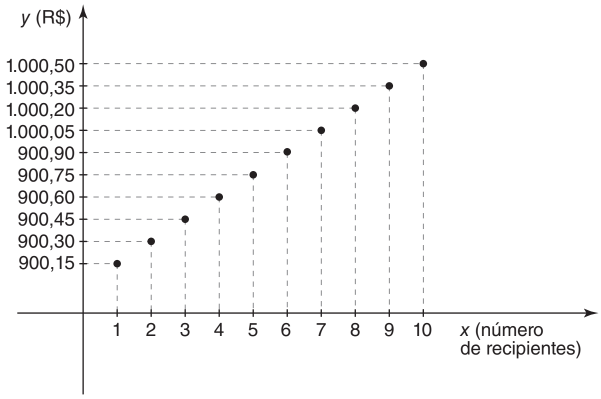


$D(f) = [2, 9]$
$Im(f) = [0, 6]$

Análise da resolução

a) Temos pelo enunciado que R$ 900,00 é o custo fixo e o custo por frasco é de R$ 0,15. Sejam x o número de frascos e y o custo total, então $y = 900 + 0{,}15x$, com $x \in \mathbb{N}^*$.

b) O gráfico é formado apenas pelos pontos (x, y) da reta de equação $y = 900 + 0{,}15x$, com $x \in \mathbb{N}^*$.



RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

Respostas possíveis: trajetória de uma bola de basquete arremessada para a cesta; antenas parabólicas, espelho do farol de automóveis etc.

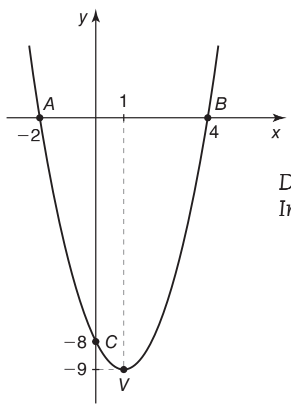
Exercícios propostos

1 Temos:
$h(t) = 1{,}5t - 9{,}4 \Rightarrow 35{,}6 = 1{,}5t - 9{,}4$
$\therefore\ t = 30$
Então:
$p(30) = 3{,}8 \cdot 30^2 - 72 \cdot 30 + 246$
$\therefore\ p(30) = 1.506$
Logo, o feto tinha 1.506 gramas.

2 **a)** $y = x^2 - 2x - 8$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(4, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -8$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, -8)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{2}{2}, -\frac{36}{4}\right) = (1, -9)$

Então, esboçando o gráfico, temos:

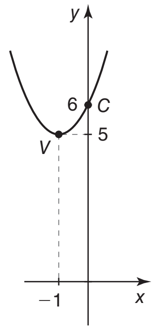


$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9\}$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $x^2 + 2x + 6 = 0$
  $\Delta = -20 < 0$
  Como $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo Ox.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 6$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 6)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(-\frac{2}{2}, \frac{20}{4}\right) = (-1, 5)$

Então, esboçando o gráfico, temos:

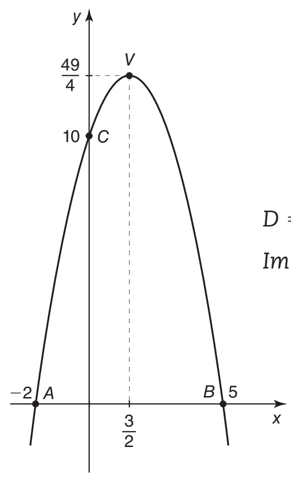


$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 5\}$

c) $y = -x^2 + 3x + 10$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $-x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 5$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(5, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 10$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 10)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{-3}{-2}, \frac{-49}{-4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$

Então, esboçando o gráfico, temos:

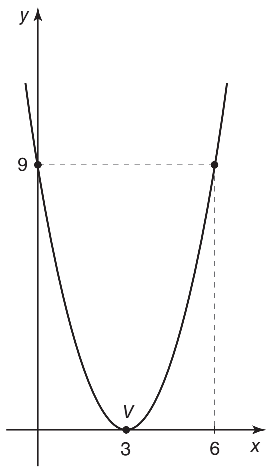


$D = \mathbb{R}$
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{49}{4}\right\}$

d) $g(x) = x^2 - 6x + 9$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $(3, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 9$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 9)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{6}{2}, \frac{0}{4}\right) = (3, 0)$

Então, esboçando o gráfico, temos:

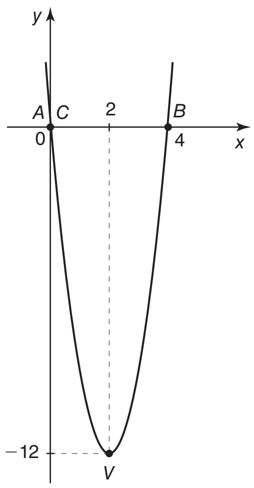


$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}_+$

e) $s(x) = 3x^2 - 12x$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy nos pontos $A(0, 0)$ e $B(4, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $C(0, 0)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{12}{6}, -\frac{144}{12}\right) = (2, -12)$

Então, esboçando o gráfico, temos:

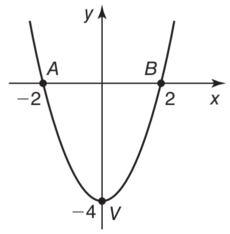


$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -12\}$

f) $y = x^2 - 4$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $C(0, -4)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(0, -\frac{16}{4}\right) = (0, -4)$

Então, esboçando o gráfico, temos:



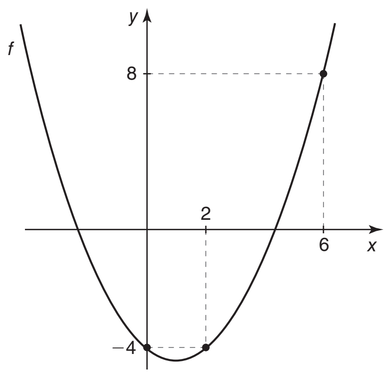
$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$

3 Como o gráfico da função é uma parábola com a concavidade voltada para cima, temos que o conjunto imagem é formado por todos os números reais y tais que $y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}$; logo:

$$-1 = \frac{-[5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k + 4)]}{4 \cdot 1} \Rightarrow k = 1{,}25$$

Alternativa **e**.

4



Observando o gráfico de f, temos:

$(2, -4) \in f \Rightarrow a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = -4$

$(0, -4) \in f \Rightarrow c = -4$

$(6, 8) \in f \Rightarrow a \cdot 36 + b \cdot 6 + c = 8$

Assim, para determinar a, b e c devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -4 & \text{(I)} \\ c = -4 & \text{(II)} \\ 36a + 6b + c = 8 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo c por -4 em (I) e (III):

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 36a + 6b - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -36a - 18b = 0 \\ 36a + 6b = 12 \end{cases}$$

$\therefore b = -1$ e $a = \frac{1}{2}$

Logo, $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ e $c = -4$.

5 Sabendo que a abscissa do vértice da parábola é $x = 4$ e uma das raízes de $f(x)$ é igual a 2, então a outra raiz r de $f(x)$ é dada por:

$\frac{2 + r}{2} = 4$

Logo, $r = 6$.

Portanto, $f(x) = a(x - 2)(x - 6)$. Sendo $(4, 2)$ um ponto do gráfico de $f(x)$, temos:

$2 = a(4 - 2)(4 - 6) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Então, $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)(x - 6) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.

Logo, $a \cdot b \cdot c = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \cdot (-6) = 12$

Alternativa **e**.

6 Para que $f(x) = 3x^2 + 2x + k + 5$ não tenha ponto em comum com o eixo das abscissas, Δ deve ser negativo.

Então, temos:

$2^2 - 4 \cdot 3\,(k + 5) < 0 \Rightarrow 4 - 12k - 60 < 0$

$\therefore\ -12k < 56 \Rightarrow k > -\dfrac{56}{12}$

$\therefore\ k > -\dfrac{14}{3}$

Logo, os valores possíveis de k são $k > -\dfrac{14}{3}$.

7 Na função $y = x^2 - 3x + 2$:

I. • Fazemos $y = 0$. Assim, temos:
$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 1$
Logo, o gráfico da função $y = x^2 - 3x + 2$ intercepta o eixo Ox nos pontos $(2, 0)$ e $(1, 0)$.
• Para $x = 0$, temos:
$y = 2$
Logo, o gráfico da função $y = x^2 - 3x + 2$ intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 2)$.
• Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
$V\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

II. Sendo $y = -x + 5$, temos:
• Para $y = 0 \Rightarrow x = 5$
Logo, o gráfico da função $y = -x + 5$ intercepta o eixo Ox no ponto $(5, 0)$.
• Para $x = 0 \Rightarrow y = 5$
Logo, o gráfico da função $y = -x + 5$ intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.

III. Os pontos de intersecção dos gráficos são as soluções do sistema:

$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = -x + 5$

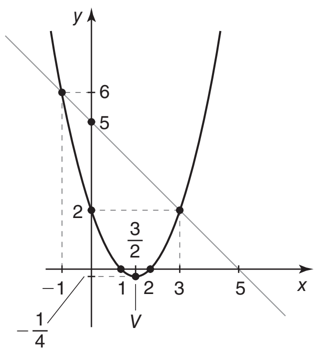
$\therefore\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$

Para $x = 3 \Rightarrow y = 2$.

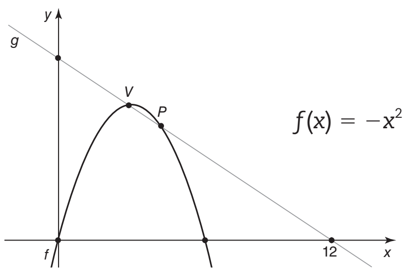
Para $x = -1 \Rightarrow y = 6$.

Logo, as funções se interceptam nos pontos $(-1, 6)$ e $(3, 2)$.

Assim, obtemos o gráfico:



8



• Fazendo $y = 0$, temos:
$-x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 8$
Logo, a função f intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(8, 0)$.
Como podemos observar no gráfico do enunciado, a função f intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.

• Calculando as coordenadas do vértice V de f, temos:
$V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\dfrac{-8}{-2}, \dfrac{-64}{-4}\right) = (4, 16)$
A reta representa a função $y = ax + b$ e passa pelos pontos $(4, 16)$ e $(12, 0)$. Então, temos o sistema:
$\begin{cases} 16 = 4a + b \\ 0 = 12a + b \end{cases}$
$16 = -8a \Rightarrow a = -2$ e $b = 24$
Logo, $g(x) = -2x + 24$.

• Calculando a intersecção das funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:
$-x^2 + 8x = -2x + 24$
$-x^2 + 10x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = 6$
Logo, a abscissa de P é 6, pois 4 é a abscissa de V.
Então, para $x = 6$ temos $y = 12$.
$\therefore\ P(6, 12)$

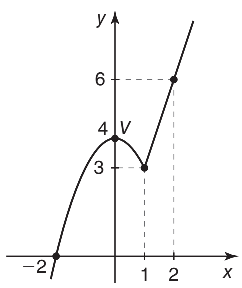
Alternativa **a**.

9 a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \text{ se } x \leq 1 \\ 3x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

I. • $-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
Logo, a parábola de equação $y = -x^2 + 4$ intercepta o eixo Ox nos pontos $(2, 0)$ e $(-2, 0)$.
Porém, neste caso o ponto $(2, 0)$ não convém, pois $2 < 1$.
• Para $x = 0$, temos:
$y = 4$
Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 4)$.
• Calculando as coordenadas do vértice V da parábola, temos:
$V\left(0, \dfrac{-16}{-4}\right) \Rightarrow V(0, 4)$
• Para $x = 1$, temos:
$y = 3$
Logo, a função f é da forma $f(x) = -x^2 + 4$, com $x \leq 1$, até o ponto $(1, 3)$.

II. Sendo $y = 3x$ a equação de uma reta com $x > 1$, temos:
Para $x = 2 \Rightarrow y = 6$
Para $x = 1 \Rightarrow y = 3$
Note que o ponto $(1, 3)$ é um extremo aberto do gráfico.

Então, obtemos o gráfico:



b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2x - 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

I. • Sendo $y = x^2 + 2x + 2$ a equação de uma parábola, temos:

$x^2 + 2x + 2 = 0$

$\Delta = -4 < 0$

Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox.

• Fazendo $x = 0$, temos:

$y = 2$

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 2).

• Calculando as coordenadas do vértice V da parábola, temos:

$V\left(-\dfrac{2}{2}, \dfrac{4}{4}\right) \Rightarrow V(-1, 1)$

• Fazendo $x = 1$, temos:

$y = 5$

Logo, a função g é da forma $f(x) = x^2 + 2x + 2$, com $x \leqslant 1$, até o ponto (1, 5).

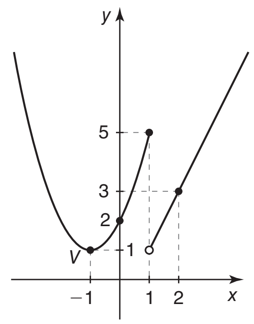
III. Sendo $y = 2x - 1$, com $x > 1$, temos:

Para $x = 1 \Rightarrow y = 1$

Para $x = 2 \Rightarrow y = 3$

Note que o ponto (1, 1) é um extremo aberto do gráfico.

Portanto, obtemos o gráfico:



10 $x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 5$

Logo, $O(0, 0)$ e $A(5, 0)$.

A distância d_{OA} de O até A é calculada por:

$d_{OA} = \sqrt{(0 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = 5$

Logo, a distância OA é 5 km.

11 Sendo $y = ax^2 + bx + c$ a função quadrática que corresponde ao gráfico, temos que os pontos (0, 55), (50, 0) e (30, 34) pertencem ao gráfico do enunciado e, portanto, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 55 = c \\ 0 = 2.500a + 50b + c \\ 34 = 900a + 30b + c \end{cases}$$

Os valores de a, b e c são obtidos por meio do sistema:

$$\begin{cases} c = 55 \\ 2.500a + 50b + c = 0 & \text{(I)} \\ 900a + 30b + c = 34 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo $c = 55$ em (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 2.500a + 50b + 55 = 0 \\ 900a + 30b + 55 = 34 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 500a + 10b = -11 & \text{(I)} \\ -300a - 10b = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando (I) e (II), temos:

$200a = -4 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{50}$

$\therefore\ b = -\dfrac{1}{10}$

Logo, $y = -\dfrac{x^2}{50} - \dfrac{x}{10} + 55$.

12 **a)** Do enunciado, temos:

$2x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 2x$

Sendo $A(x)$ a área da região isolada, em metro quadrado e em função da medida x do lado menor, temos:

$A(x) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x(20 - 2x)$

$\therefore\ A(x) = -2x^2 + 20x$

b) Sendo $A(x) = 50$, temos a equação:

$2x^2 - 20x + 50 = 0$

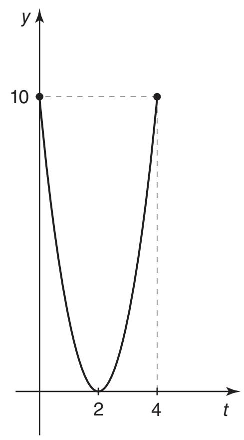
$x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = 5$

Substituindo $x = 5$ na equação $y = 20 - 2x$, obtemos:

$y = 20 - 2 \cdot 5 = 10$

Logo, as medidas de x e y dos lados do retângulo são $x = 5$ m e $y = 10$ m.

13



Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ a função do gráfico parabólico acima, temos:

$(0, 10) \in f \Rightarrow 10 = c$

$(2, 0) \in f \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c \quad \Rightarrow$

$(4, 10) \in f \Rightarrow 10 = 16a + 4b + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 10 & \text{(I)} \\ 4a + 2b + c = 0 & \text{(II)} \\ 16a + 4b + c = 10 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo $c = 10$ em (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a - 4b = 20 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$$

Logo, obtemos $a = \dfrac{5}{2}$, $b = -10$ e $c = 10$.

$\therefore\ f(x) = \dfrac{5}{2}x^2 - 10x + 10$

A distância, em metro, três minutos após o início das medições de tempo é $f(3)$:

$f(3) = \dfrac{45}{2} - 20 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow f(3) = 2{,}5$

Logo, a distância é 2,5 m.

Alternativa **d**.

14 a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$
Como $f(x)$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando a ordenada y_V do seu vértice V obtemos seu valor mínimo:
- $y_V = \frac{-16}{4} = -4$

Logo, o valor mínimo de f é: $y_V = -4$

b) $y = -x^2 + 2x + 15$
Como $y = -x^2 + 2x + 15$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando a ordenada y_V do seu vértice V obtemos seu valor máximo:
- $y_V = \frac{-64}{-4} = 16$

Logo, o valor máximo de $y = -x^2 + 2x + 15$ é: $y_V = 16$

c) $y = x^2 + 2x + 3$
Como $y = x^2 + 2x + 3$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando a ordenada y_V do seu vértice V obtemos seu valor mínimo:
- $y_V = \frac{8}{4} = 2$

Logo, o valor mínimo de $y = x^2 + 2x + 3$ é: $y_V = 2$

d) $g(x) = -x^2 + 3x - 3$
Como $g(x)$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando a ordenada y_V do seu vértice V obtemos seu valor máximo:
- $y_V = -\frac{3}{4}$

Logo, o valor máximo de g é: $y_V = -\frac{3}{4}$

15 $f(x) = 2x^2 + x + m + 1$
Pelo enunciado, temos que o valor mínimo de f é $y_V = \frac{3}{4}$,
que é a ordenada y do vértice V de f; por isso:

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{-1 + 8m + 8}{8} = \frac{3}{4}$$

$\therefore -1 + 8m + 8 = 6 \Rightarrow 8m = -1$

$\therefore m = -\frac{1}{8}$

Logo: $m = -\frac{1}{8}$

16 A função admite valor mínimo positivo se $k > 0$ e $\Delta < 0$, ou seja:

$$\begin{cases} k > 0 \\ 4 - 20k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k > \frac{1}{5} \end{cases}$$

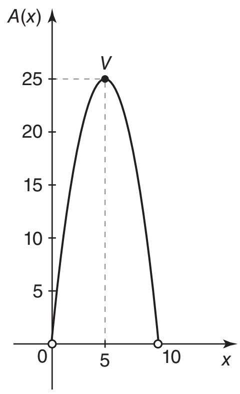
Logo: $k > \frac{1}{5}$

17 a) Sendo x e y as dimensões, em centímetro, de um desses retângulos, temos: $2x + 2y = 20$
Para $x = 8$ cm, temos:
$2 \cdot 8 + 2y = 20 \Rightarrow y = 2$ cm
Sendo A área do retângulo, concluímos:
$A = x \cdot y = 8 \cdot 2 \Rightarrow A = 16 \text{ cm}^2$
Logo, a área do retângulo com 8 cm de base é 16 cm^2.

b) Usando a equação do item **a** deste exercício, que representa todos os retângulos com 20 cm de perímetro, podemos concluir que, se x é a medida da base, a altura mede $10 - x$.
Então:
$A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$
Para construir o gráfico vamos supor, momentaneamente, que x pudesse assumir todos os valores reais.
Fazendo $A(x) = 0$, temos: $-x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 10$
Logo, a função $A(x)$ intercepta o eixo Ox nos pontos (0, 0) e (10, 0).
Fazendo $x = 0$, temos: $y = 0$
Logo, a função $A(x)$ intercepta o eixo Oy no ponto (0, 0).
Calculando o vértice V, temos:

$$V\left(\frac{-10}{-2}, \frac{-100}{-4}\right) \Rightarrow V(5, 25)$$

Concluímos, construindo o gráfico para $0 < x < 10$:



c) Como podemos observar no gráfico do item **b** deste exercício, a área máxima que pode ter um desses retângulos é 25 cm^2.

18 a) Como $N(T) = (0,1)T^2 - 4T + 90$ representa uma parábola de concavidade para cima, temos que essa função possui mínimo.

b) Para $N = 90$, temos:
$90 = 0,1T^2 - 4T + 90 \Rightarrow 0,1T^2 - 4T = 0$
$\therefore T(0,1T - 4) = 0 \Rightarrow T = 0$ °C ou $T = 40$ °C
Como $T = 0$ °C não convém, concluímos que o número de batimentos cardíacos por minuto de uma pessoa sadia e em repouso será 90 quando $T = 40$ °C.

c) Para $T = 20$ °C, temos:
$N(20) = 40 - 80 + 90 = 50$
Logo, o número de batimentos por minuto neste caso é 50.

19 Como $d(v)$ representa uma parábola de concavidade para baixo, temos que a maior economia de combustível se dará na velocidade calculada na abscissa x_V do vértice V dessa parábola:

$$x_V = \frac{-\frac{16}{15}}{-\frac{2}{150}} = 80$$

Logo, a maior economia de combustível se dá à velocidade de 80 km/h.
Alternativa **e**.

20 Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ a função que determina esse gráfico, temos:

$(0, 0) \in f \Rightarrow c = 0$

$(80, 16) \in f \Rightarrow a \cdot 6.400 + b \cdot 80 + c = 16$

$(100, 0) \in f \Rightarrow a \cdot 10.000 + b \cdot 100 + c = 0$

Assim, para encontrar o valor de a, b e c devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c = 0 & \text{(I)} \\ 6.400a + 80b + c = 16 & \text{(II)} \\ 10.000a + 100b + c = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo $c = 0$ em (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 6.400a + 80b = 16 & \text{(II)} \\ 10.000a + 100b = 0 \Rightarrow b = -100a & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo $b = -100a$ em (II), temos:

$1.600a = -16 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{100}$

$\therefore\ b = 1$

Então, $a = -\dfrac{1}{100}$, $b = 1$ e $c = 0$.

Logo: $f(x) = -\dfrac{1}{100}x^2 + x$

Como a função f é uma parábola de concavidade para baixo, a altura máxima atingida pela pedra pode ser obtida calculando o valor da ordenada y_V do vértice V:

$$y_V = \frac{-1}{4 \cdot \left(-\frac{1}{100}\right)} = 25$$

Logo, a altura máxima atingida pela pedra foi 25 m.

Alternativa **d**.

21 Sendo x a medida dos lados do quadrado, y a largura do retângulo e $3y$ o comprimento do retângulo, temos:

$4x + 8y = 140 \Rightarrow y = \dfrac{35 - x}{2}$ (I)

Considerando $S(x)$ a soma das áreas dos currais, temos:

$S(x) = x^2 + 3y^2$ (II)

Substituindo (I) em (II):

$$S(x) = x^2 + 3\left(\frac{35 - x}{2}\right)^2$$

$$S(x) = \frac{7x^2}{4} - \frac{210x}{4} + \frac{3.675}{4}$$

Como $S(x)$ representa uma parábola de concavidade para cima, encontramos o valor do lado do quadrado calculando o valor da abscissa x_V do vértice V:

$$x_V = \frac{\frac{210}{4}}{2 \cdot \frac{7}{4}} = 15$$

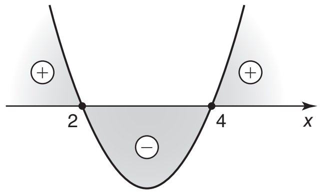
Logo, o lado do quadrado mede 15 m.

Assim, pela equação (I) temos que $y = 10$ m.

Portanto, a área do curral quadrado é 225 m² e a área do curral retangular é 300 m².

22 a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

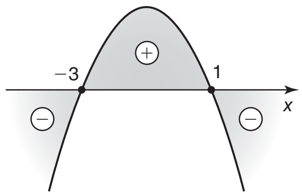
- Raízes de f:
  $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e 4
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:



Logo:
Se $x = 2$ ou $x = 4$, então $f(x) = 0$;
Se $2 < x < 4$, então $f(x) < 0$;
Se $x < 2$ ou $x > 4$, então $f(x) > 0$.

b) $y = -x^2 - 2x + 3$

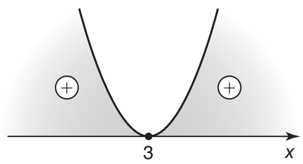
- Raízes de f:
  $-x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -3 e 1.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.
  Esquematizando, temos:



Logo:
Se $x = -3$ ou $x = 1$, então $f(x) = 0$;
Se $-3 < x < 1$, então $f(x) > 0$;
Se $x < -3$ ou $x > 1$, então $f(x) < 0$.

c) $g(x) = \dfrac{x^2}{3} - 2x + 3$

- Raízes de f:
  $\dfrac{x^2}{3} - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:

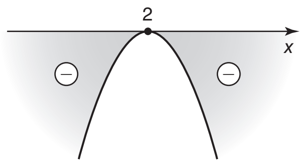


Logo:
Se $x = 3$, então $f(x) = 0$;
Se $x \neq 3$, então $f(x) > 0$.

d) $h(x) = -\dfrac{x^2}{4} + x - 1$

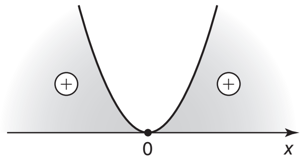
- Raízes de f:
  $-\dfrac{x^2}{4} + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.

- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.
  Esquematizando, temos:



Logo:
Se $x = 2$, então $f(x) = 0$;
Se $x \neq 2$, então $f(x) < 0$.

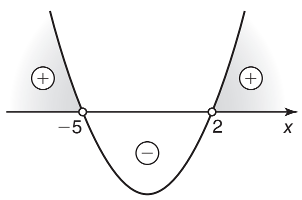
e) $y = 3x^2$
- Raízes de f:
  $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 0.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:



Logo:
Se $x = 0$, então $f(x) = 0$;
Se $x \neq 0$, então $f(x) > 0$.

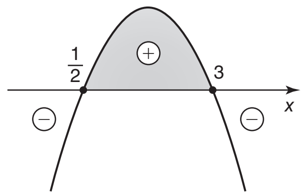
23 Sendo $f(x) = 3x^2 + 2x + m - 1$ uma parábola com a concavidade voltada para cima, temos:
$f(x) > 0, \forall x$ se $\Delta < 0$
Calculando m para $\Delta < 0$:
$\Delta = 16 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$
Logo, $f(x) > 0$ para $m > \frac{4}{3}$.

24 a) $x^2 + 3x - 10 > 0$
$f(x) = x^2 + 3x - 10$
- Raízes de f:
  $x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -5 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:



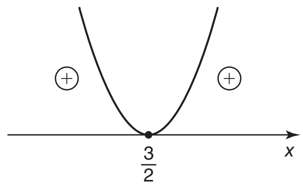
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 2\}$.

b) $-2x^2 + 7x - 3 \geq 0$
$f(x) = -2x^2 + 7x - 3$
- Raízes de f:
  $-2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $\frac{1}{2}$ e 3.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.
  Esquematizando, temos:



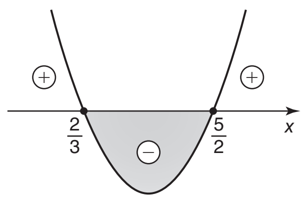
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 3\right\}$.

c) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$
$f(x) = 4x^2 - 12x + 9$
- Raízes de f:
  $4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
  Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{3}{2}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:



Como $f(x)$ nunca é negativo, o conjunto solução é
$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

d) $\frac{3x^2}{5} - \frac{3x}{2} \leq \frac{2x}{5} - 1 \Rightarrow 6x^2 - 15x \leq 4x - 10$
$\therefore 6x^2 - 19x + 10 \leq 0$
$f(x) = 6x^2 - 19x + 10$
- Raízes de f:
  $6x^2 - 19x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $\frac{5}{2}$ e $\frac{2}{3}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:



Então: $f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$.

e) $\frac{x^2}{3} + x > \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{5}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x > 3x^2 + 4x + 5$

$\therefore -x^2 + 2x - 5 > 0$

$f(x) = -x^2 + 2x - 5$

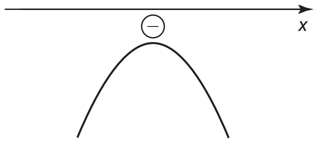
- Raízes de f:

  $-x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

  Logo, a equação não tem raiz real e, portanto, a parábola não intercepta o eixo Ox.

- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

  Esquematizando, temos:



Então, $f(x)$ é sempre negativa.

Logo: $S = \varnothing$

f) $(x^2 - 9)(x^2 - 7x + 10) < 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 9$ e

$g(x) = x^2 - 7x + 10$, temos:

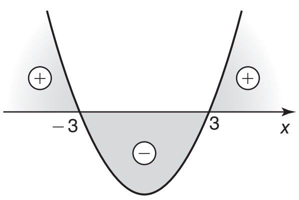
- Raízes de f:

  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$

  Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -3 e 3.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



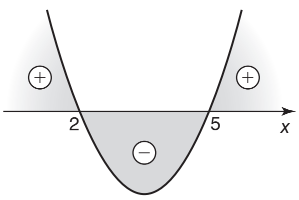
- Raízes de g:

  $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 5$

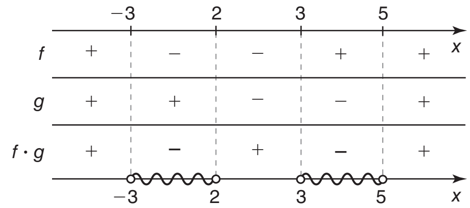
  Logo, o gráfico de g é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa 2 e 5.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que o produto seja estritamente negativo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

g) $(x^2 - 1)(x^2 - x + 1) \leq 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 - x + 1$, temos:

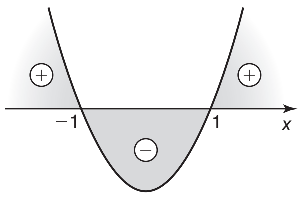
- Raízes de f:

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

  Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 1.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



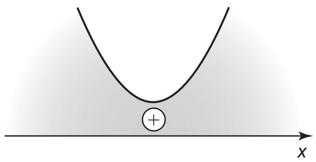
- Raízes de g:

  $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

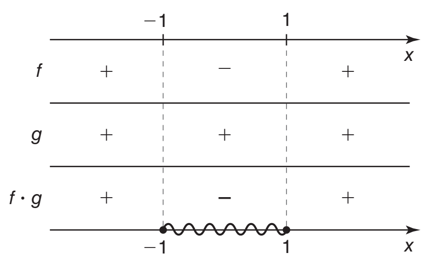
  Logo, o gráfico de g é uma parábola que não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:



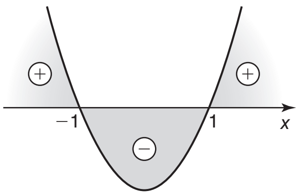
Os sinais da última linha foram obtidos pela da regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que o produto seja negativo ou nulo, temos como conjunto solução:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

h) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 8} \leq 0$

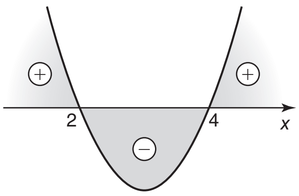
Condição de existência:
$x^2 - 6x + 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ ou $x \neq 2$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$ e
$g(x) = x^2 - 6x + 8$, temos:

- Raízes de f:
  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$
  Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$
  Logo, o gráfico de g é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa 2 e 4.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\dfrac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x<-1$	-1 a 1	1 a 2	2 a 4	$x>4$
f	+	−	+	+	+
g	+	+	+	−	+
$\dfrac{f}{g}$	+	−	+	−	+

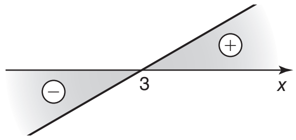
Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\dfrac{f}{g}$. Como queremos que esse quociente seja negativo ou nulo, e lembrando que a condição para que ele exista é $x \neq 4$ ou $x \neq 2$, temos como conjunto solução:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

i) $\dfrac{(x - 3)(x^2 - 9)}{x^2 - 2x - 3} > 0$

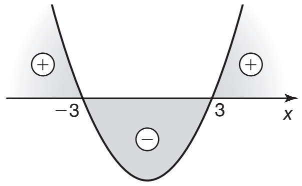
Condição de existência:
$x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ ou $x \neq 3$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = (x - 3)$, $g(x) = x^2 - 9$ e
$h(x) = x^2 - 2x - 3$, temos:

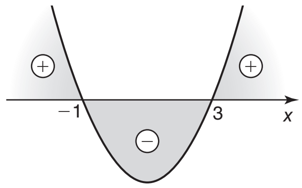
- Raízes de f:
  $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -3 e 3.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 3.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $\dfrac{f \cdot g}{h}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x<-3$	-3 a -1	-1 a 3	$x>3$
f	−	−	−	+
g	+	−	−	+
h	+	+	−	+
$\dfrac{f \cdot g}{h}$	−	+	−	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente e o produto $\frac{f \cdot g}{h}$. Como queremos que $\frac{(x-3)(x^2-9)}{x^2-2x-3}$ seja estritamente positivo, e lembrando que a condição para que esse quociente exista é $x \neq -1$ ou $x \neq 3$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

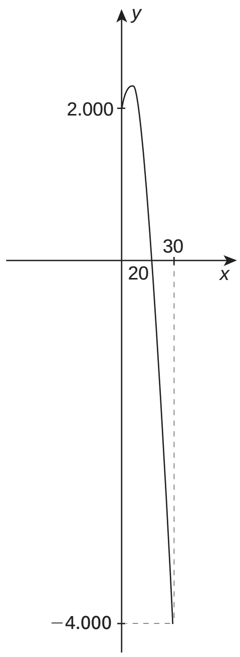
25 **a)** $S = 2.000 + 100t - 10t^2$, com $t \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant t \leqslant 30$

b) Daqui a x dias o saldo desse cliente atingirá o maior valor. Esse x pode ser calculado fazendo-se $x = -\frac{b}{2a}$; logo, $x = 5$ dias.

c) Raízes de S:

$2.000 + 100t - 10t^2 = 0 \Rightarrow t = -10$ ou $t = 20$

O gráfico é formado por pontos isolados da curva abaixo, pois $t \in \mathbb{N}$.



O saldo S é positivo para $0 \leqslant t < 20$.

d) $t = 21$

26 Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x - 1 \leqslant 3x - 3 \\ x^2 - 4 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2 \leqslant 0 & \text{(I)} \\ x^2 - 4 \geqslant 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo a inequação (I):

$-2x + 2 \leqslant 0$

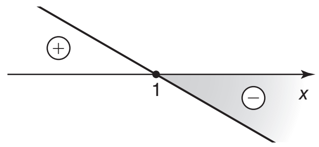
Para resolver essa inequação, devemos estudar a variação de sinal da função $f(x) = -2x + 2$. Assim, temos:

- Raízes de f:

  $-2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.
- f é uma função decrescente, pois o coeficiente de x é negativo.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



Logo, a solução da inequação (I) é:

$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

Resolvendo a inequação (II):

$x^2 - 4 \geqslant 0$

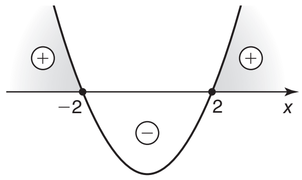
Para resolver essa inequação, devemos estudar a variação de sinal da função $g(x) = x^2 - 4$. Assim, temos:

- Raízes de g:

  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -2 e 2.
- g é uma parábola de concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

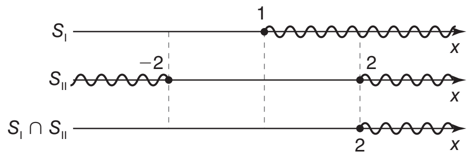
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Logo, a solução da inequação (II) é:

$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Assim, pela intersecção das soluções S_I e S_{II}, temos a solução desse sistema, no quadro abaixo:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$.

Alternativa **a**.

27 Para que o conjunto solução da inequação $2x^2 + 2x + m + 3 > 0$ seja o conjunto $\mathbb{R}$, o discriminante deve ser negativo. Assim, temos:

$4 - 4 \cdot 2(m + 3) < 0 \Rightarrow 4 - 8m - 24 < 0$

$\therefore -8m - 20 < 0 \Rightarrow -8m < 20$

$\therefore m > -\frac{20}{8} \Rightarrow m > -\frac{5}{2}$

Logo, $m > -\frac{5}{2}$.

28 **a)** $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x}$

Para que $f(x)$ tenha solução em $\mathbb{R}$, precisamos que:

$2x^2 - 4x \geqslant 0$

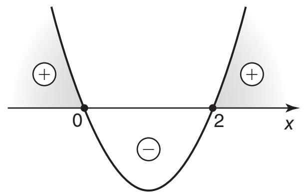
Assim, para encontrar o domínio de f, estudamos o sinal da função $h(x) = 2x^2 - 4x$; para isso, temos:

- Raízes de h:

  $2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

  Logo, sendo h uma parábola, ela intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa 0 e 2.

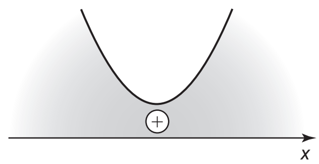
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:



Então, $h(x) \geq 0$ para $x \leq 0$ ou $x \geq 2$.
Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$.

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$
Para que $g(x)$ tenha solução em $\mathbb{R}$, precisamos que:
$x^2 + x + 2 \geq 0$
Assim, para encontrar o domínio de g estudamos o sinal da função $r(x) = x^2 + x + 2$; para isso, temos:

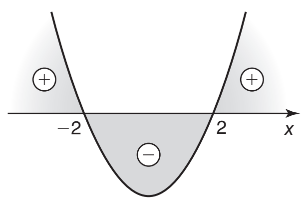
- Raízes de r:
  $x^2 + x + 2 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, sendo r uma parábola, ela não intercepta o eixo Ox, pois não tem raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Esquematizando, temos:



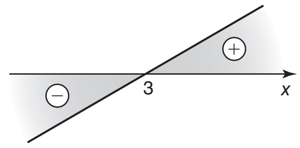
Então, $r(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
Logo, $D = \mathbb{R}$.

29 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{4x - 12}}$
Para que $f(x)$ tenha solução em $\mathbb{R}$, devemos ter:
$\dfrac{x^2 - 4}{4x - 12} \geq 0$
Condição de existência:
$4x - 12 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = x^2 - 4$ e $h(x) = 4x - 12$, temos:

- Raízes de g:
  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -2 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.
- h é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



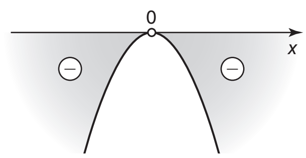
Representando a variação de sinal de g, h e $\dfrac{g}{h}$ em um quadro de sinais, temos:

		−2		2		3		x
g	+		−		+		+	
h	−		−		−		+	
$\dfrac{g}{h}$	−		+		−		+	
		−2		2		3		x

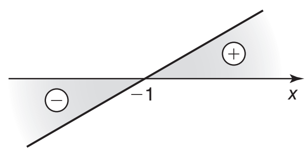
Pelo quadro, podemos observar que
$\dfrac{x^2 - 4}{4x - 12} \geq 0$ para $-2 \leq x \leq 2$ ou $x > 3$.
$\therefore\ D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}$

30 A inequação $\dfrac{x}{x + 1} > x$ equivale a:
$\dfrac{x}{x + 1} - x > 0 \Rightarrow \dfrac{-x^2}{x + 1} > 0$
Condição de existência:
$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = -x^2$ e $g(x) = x + 1$, temos:

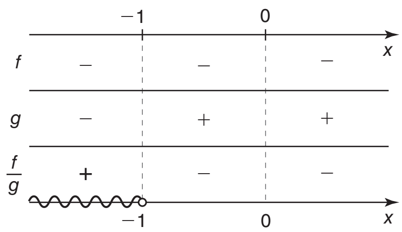
- Raízes de f:
  $-x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 0.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.
  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa -1.
- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$.

Como queremos que esse quociente seja estritamente positivo, e lembrando que a condição para que ele exista é $x \neq -1$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

Alternativa **b**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $y = 8x^2 - 2x - 1$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $8x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{4}$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

- Fazendo $x = 0$, temos:

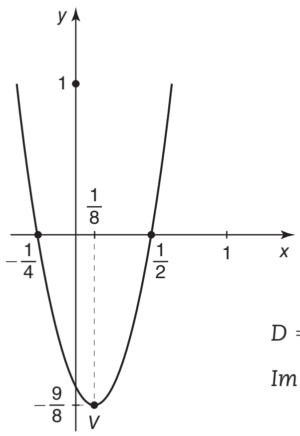
  $y = -1$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.

- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{2}{16}, -\frac{36}{32}\right) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{9}{8}\right)$

  Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{8}\right\}$

b) $h(x) = 2x^2 - 4x + 4$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $2x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois a função h não possui raízes reais.

- Fazendo $x = 0$, temos:

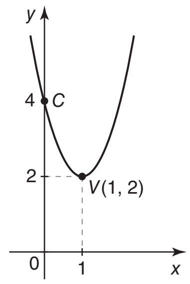
  $y = 4$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 4)$.

  Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{4}{4}, \frac{16}{8}\right) = (1, 2)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

c) $y = -x^2 - 10x - 25$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $x^2 + 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = 5$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $(5, 0)$.

- Fazendo $x = 0$, temos:

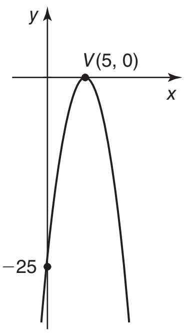
  $y = -25$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -25)$.

  Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(\frac{10}{2}, \frac{0}{2}\right) = (5, 0)$

  Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}_-$

d) $y = -2x^2 + x$

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $-2x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

- Fazendo $x = 0$, temos:

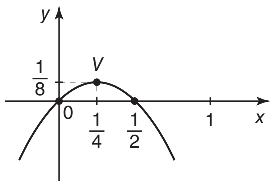
  $y = 0$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.

- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

  $V\left(\frac{-1}{-4}, \frac{-1}{-8}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



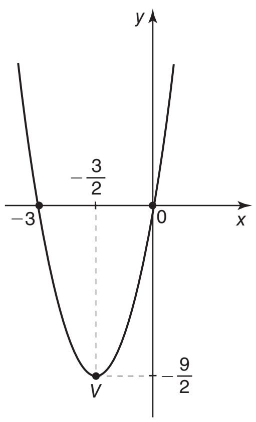
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{1}{8}\right\}$

e) $y = 2x^2 + 6x$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (0, 0) e (−3, 0).
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 0).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(-\frac{6}{4}, -\frac{36}{8}\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



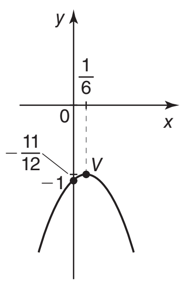
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{2}\right\}$

f) $t(x) = -3x^2 + x - 1$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $-3x^2 + x - 1 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −1).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{-1}{-6}, \frac{11}{-12}\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{11}{12}\right)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



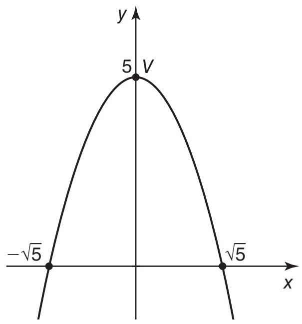
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{11}{12}\right\}$

g) $y = -x^2 + 5$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $-x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{5}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = 5$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 5).
- Sendo V o vértice, temos:
  V(0, 5)

Esboçando o gráfico, concluímos:



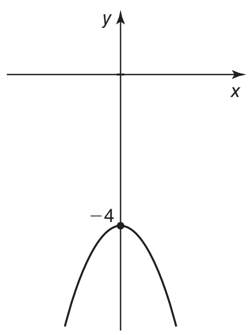
$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$

h) $y = -x^2 - 4$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $-x^2 - 4 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −4).
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, -4)$

Esboçando o gráfico, concluímos:



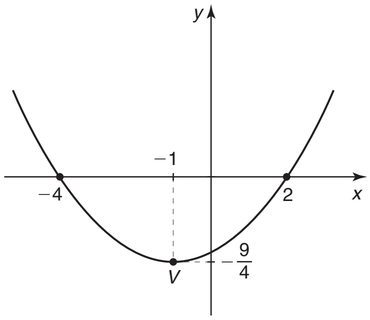
$D = \mathbb{R}$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -4\}$

i) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (2, 0) e (−4, 0).
- Fazendo $x = 0$, temos:
  $y = -2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −2).

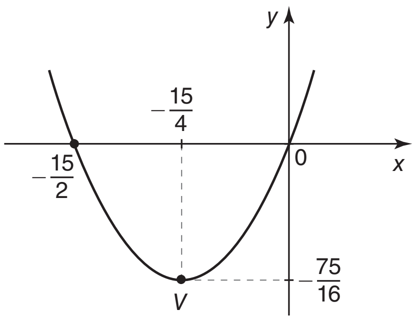
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
$$V\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{-\frac{9}{4}}{1}\right) = \left(-1, -\frac{9}{4}\right)$$
Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$

j) $V(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{5x}{2}$
- Fazendo $y = 0$, temos:
$\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{15}{2}$
Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $\left(-\frac{15}{2}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, temos:
$y = 0$
Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
$$V\left(\frac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \frac{1}{3}}, \frac{-\frac{25}{4}}{4 \cdot \frac{1}{3}}\right) = \left(-\frac{15}{4}, -\frac{75}{16}\right)$$
Esboçando o gráfico, concluímos:



$D = \mathbb{R}$

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{75}{16}\right\}$

2 Temos:

$(0, 0) \in f \Rightarrow 0 = c$ (I)

$(1, 2) \in f \Rightarrow 2 = 1 - b + c$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$2 = 1 - b \Rightarrow b = -1$

Logo, $f(x) = x^2 + x$.

Então:

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}$

$\therefore f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}$

Alternativa **a**.

3 Sendo $y = x^2 - mx + (m - 1)$ com $m \in \mathbb{R}$, podemos dizer que essa função terá um único ponto em comum com o eixo das abscissas se $\Delta = 0$.

Calculando o valor de m para $\Delta = 0$, temos:

$(-m)^2 - 4(m - 1) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$

$\therefore m = 2$

Logo, $y = x^2 - 2x + 1$.

Fazendo $x = 2$, temos $y = 1$.

Portanto, o valor de y que essa função associa a $x = 2$ é 1.

Alternativa **d**.

4 Para que $f(x)$ tenha dois pontos distintos em comum com o eixo Ox, devemos ter $\Delta > 0$.

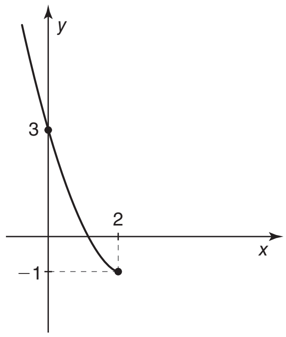
Calculando o valor de p para $\Delta > 0$, temos:

$(-2)^2 - 4 \cdot p \cdot 5 > 0 \Rightarrow 4 - 20p > 0$

$\therefore -20p > -4 \Rightarrow p < \frac{1}{5}$

Logo, para que haja 2 pontos de intersecção com o eixo Ox, devemos ter $p < \frac{1}{5}$.

5 A função f é bijetora, conforme constatamos pelo gráfico:



Logo, f admite inversa. Indicando a função por $y = x^2 - 4x + 3$, adotamos os procedimentos a seguir para a obtenção da inversa de f.
- Permutamos as variáveis x e y:
$x = y^2 - 4y + 3$
- Resolvemos a equação anterior na variável y:
$y^2 - 4y + 3 - x = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - x) = 4 + 4x$
$\therefore\ y = \frac{4 \pm \sqrt{4 + 4x}}{2} \Rightarrow y = \frac{4 \pm 2\sqrt{1 + x}}{2}$
$\therefore\ y = 2 \pm \sqrt{1 + x}$
Como $y \leqslant 2$, para qualquer $x \geqslant -1$, temos $y = 2 - \sqrt{1 + x}$, ou seja, a inversa da função f é:
$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{1 + x}$
Alternativa **a**.

6 **a)** Para esboçar os gráficos $f(x)$ e $g(x)$, podemos encontrar os pontos de intersecção com os eixos Ox e Oy e no caso de $g(x)$ encontrar o vértice da parábola.

I. Em $f(x)$:

Fazendo $f(x) = 0$, obtemos:

$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

- Fazendo $x = 0$, obtemos $y = 3$

  Logo, a reta intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 3)$.

II. Em $g(x)$:

- Fazendo $g(x) = 0$, obtemos:

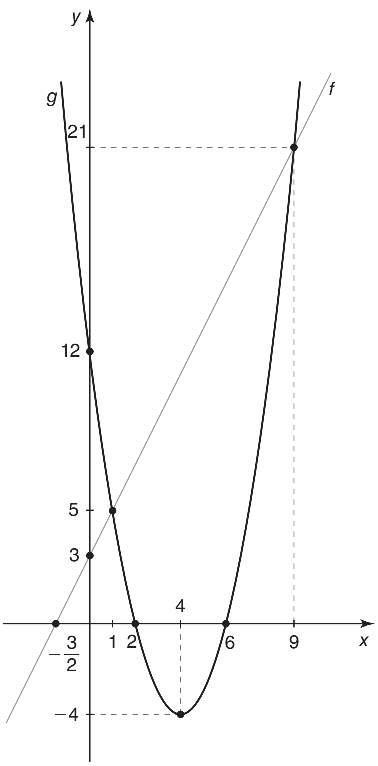
  $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 6$ ou $x = 2$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(6, 0)$ e $(2, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, obtemos $y = 12$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 12)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, obtemos:

  $V\left(\frac{8}{2}, -\frac{16}{4}\right) = (4, -4)$

  Esboçando f e g no mesmo plano cartesiano, concluímos:



b) Determinando todos os pontos em que os gráficos das funções dadas se interceptam, temos:

$g(x) = f(x) \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 2x + 3$

$\therefore\ x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x = 9$ ou $x = 1$

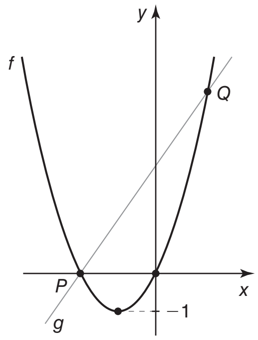
Substituindo $x = 9$ e $x = 1$ em $f(x) = 2x + 3$, temos:

para $x = 9 \Rightarrow y = 21$

para $x = 1 \Rightarrow y = 5$

Logo, os pontos em que os gráficos das funções dadas se interceptam são $(9, 21)$ e $(1, 5)$.

7



a) Como o ponto P pertence ao eixo das abscissas e é também um dos dois pontos comuns aos dois gráficos, podemos fazer $g(x) = 0$ para obter o ponto P. Assim, temos:

$2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

Logo, $P(-1, 0)$.

Calculando Δ da função $f(x) = ax^2 + bx$, temos:

$\Delta = b^2$

Agora, observando o gráfico temos que $P \in f$ e o valor da ordenada do vértice (y_V) de f é -1, temos:

$(-1, 0) \in f \Rightarrow 0 = a - b$

$-\frac{\Delta}{4a} = -1$

Como calculado anteriormente, $\Delta = b^2$; então:

$-\frac{b^2}{4a} = -1$

Logo, $b^2 = 4a$.

Para determinar os valores de a e b, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ b^2 = 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b & \text{(I)} \\ b^2 = 4a & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$b^2 = 4b$

$b^2 - 4b = 0 \Rightarrow b = 0$ ou $b = 4$

A igualdade $b = 0$ não convém, pois o valor de a também seria nulo e por consequência $f(x) = 0$, o que é absurdo.

Logo, $b = 4$ e $a = 4$, pois $a = b$.

b) Para determinar os pontos P e Q, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = 4x^2 + 4x & \text{(I)} \\ y = 2x + 2 & \text{(II)} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x = 2x + 2$

$\therefore\ 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$

Fazendo $x = \frac{1}{2}$ em (II), obtemos $y = 3$.

Logo, $Q\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

Fazendo $x = -1$ em (II), obtemos $y = 0$.

Logo, $P(-1, 0)$.

8 A função quadrática f tem raízes 2 e -2; logo, pode ser representada por $f(x) = a(x - 2)(x + 2)$, em que a é uma constante real não nula. Como o ponto $(-4, -12)$ pertence ao gráfico de f, temos:

$-12 = a(-4 - 2)(-4 + 2) \Rightarrow a = -1$

Assim, obtemos: $f(x) = -1(x - 2)(x + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$

A função linear g, além de passar pela origem O, passa pelo ponto $(-4, -12)$; logo, $g(x) = 3x$.

Os pontos de intersecção dos gráficos de f e g são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = 3x \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos as soluções $(-4, -12)$ e $(1, 3)$. Logo, o ponto Q é Q(1, 3).

Alternativa **b**.

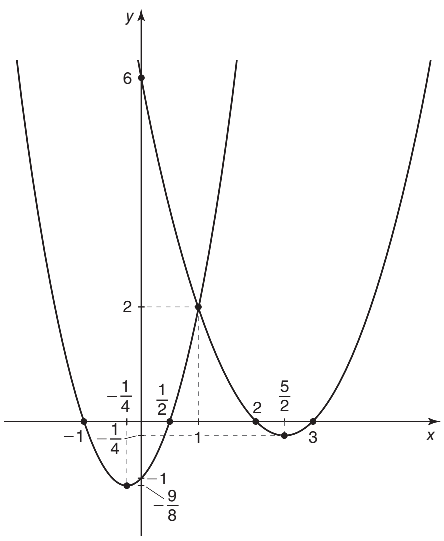
9 Para a construção dos gráficos de $y = 2x^2 + x - 1$ e $y = x^2 - 5x + 6$, vamos encontrar os pontos de intersecção com os eixos Ox e Oy e o vértice dessas parábolas:

I. Na função $y = 2x^2 + x - 1$, temos:

- Fazendo $y = 0$, obtemos:
  $2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(-1, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- Fazendo $x = 0$, obtemos $y = -1$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V_1, obtemos:
  $V_1\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

II. Na função $y = x^2 - 5x + 6$, temos:

- Fazendo $y = 0$, obtemos:
  $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(2, 0)$ e $(3, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, obtemos:
  $y = 6$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 6)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V_2, obtemos:
  $V_2\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
  Assim, construindo as duas parábolas no mesmo plano cartesiano, temos:



Determinando as coordenadas dos pontos comuns às duas parábolas, temos:

$2x^2 + x - 1 = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1}$

$\therefore x = \dfrac{-6 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 1$ ou $x = -7$

Substituindo $x = 1$ e $x = -7$ em $y = 2x^2 + x + 1$, temos:

para $x = 1 \Rightarrow y = 2$

para $x = -7 \Rightarrow y = 90$

Logo, os pontos comuns às duas parábolas são $(1, 2)$ e $(-7, 90)$.

10 **a)** As coordenadas do vértice da parábola são dadas por:

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{m}{2}$

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\dfrac{m^2 - 8}{4}$

$\therefore x_v = -\dfrac{m}{2}$ e $y_v = \dfrac{8 - m^2}{4}$

b) Como o coeficiente de x^2 é positivo, a parábola representada pela função f tem a concavidade voltada para cima. Logo, o conjunto imagem da função é formado por todos os números reais y tais que $y \geq \dfrac{8 - m^2}{4}$.

Assim, para que a imagem de f contenha o conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ devemos ter:

$\dfrac{8 - m^2}{4} \leq 1 \Rightarrow m^2 - 4 \geq 0$

$\therefore m \leq -2$ ou $m \geq 2$

c) Para que a imagem de f seja igual ao conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ devemos ter:

$\dfrac{8 - m^2}{4} = 1 \Rightarrow m^2 - 4 = 0$

$\therefore m = -2$ ou $m = 2$

Além disso, exige-se que a função seja crescente no conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Analisemos o gráfico de f para cada um dos casos: $m = 2$ (figura 1) e $m = -2$ (figura 2), abaixo:

Figura 1($m = 2$)

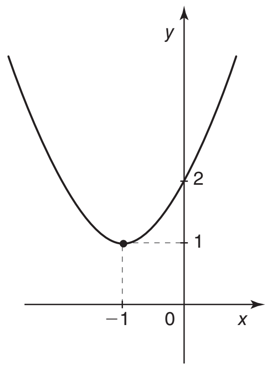
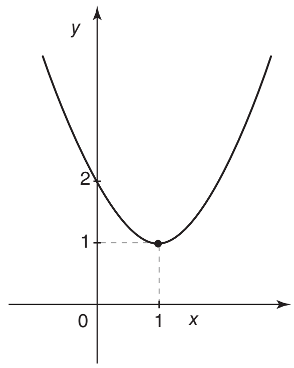


Figura 2($m = -2$)



Temos, portanto, que a imagem de f é igual ao conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$ e f é crescente no conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ para $m = 2$.

d) A equação $y = x^2 + 2x + 2$ é equivalente a $x^2 + 2x + 2 - y = 0$. Resolvendo-a na variável x, obtemos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4y - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{y - 1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{y - 1}$$

Como devemos ter $x \geqslant 0$ para $y \geqslant 2$, concluímos que:

$$x = -1 + \sqrt{y - 1}$$

11 **a)** $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant 2 & \text{(I)} \\ -x^2 + 6x - 8, \text{ se } x > 2 & \text{(II)} \end{cases}$

Para esboçar o gráfico dessa função, vamos estudá-la por partes.

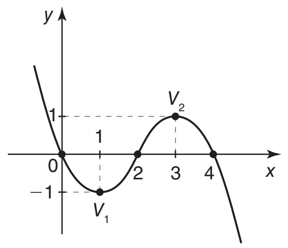
(I) $h(x) = x^2 - 2x$, para $x \leqslant 2$

- Fazendo $x^2 - 2x = 0$, temos $x = 0$ ou $x = 2$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(0, 0)$ e $(2, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos $y = 0$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V_1, temos:
  $V_1\left(\frac{2}{2}, -\frac{4}{4}\right) = (1, -1)$

(II) $h(x) = -x^2 + 6x - 8$, para $x > 2$

- Fazendo $-x^2 + 6x - 8 = 0$, temos $x = 2$ ou $x = 4$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $(4, 0)$. O ponto $(2, 0)$ não convém, pois $-x^2 + 6x - 8$, se $x > 2$.
  Neste caso não precisamos encontrar a intersecção com o eixo Oy, pois só nos convêm os casos em que $x > 2$.
- Calculando as coordenadas do vértice V_2, temos:
  $V_2\left(\frac{-6}{-2}, \frac{-4}{-4}\right) = (3, 1)$

Logo, de (I) e (II), temos o gráfico:



b) $t(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \leqslant 2 & \text{(I)} \\ 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 & \text{(II)} \\ x^2 - 8x + 19, \text{ se } x > 4 & \text{(III)} \end{cases}$

Para esboçar o gráfico de $t(x)$, vamos estudá-la por partes.

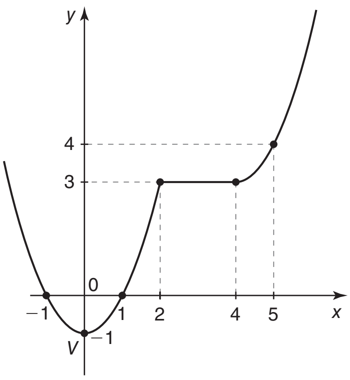
(I) $t(x) = x^2 - 1$, para $x \leqslant 2$

- Fazendo $x^2 - 1 = 0$, temos $x = 1$ ou $x = -1$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos $y = -1$.
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, -1)$
- Fazendo $x = 2$, temos $y = 3$:
  Logo, a função $t(x)$ é do tipo $x^2 - 1$ até o ponto $(2, 3)$.

(II) É uma função constante igual a 3, se $2 < x \leqslant 4$

(III) $t(x) = x^2 - 8x + 19$, para $x > 4$

- Fazendo $x^2 - 8x + 19 = 0$, encontramos $\Delta < 0$, então a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
  Sendo x_V a abscissa do vértice da função $y = x^2 - 8x + 19$, temos:
  $x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = 4$
  Logo:
  Para $x > 4$, temos $y > 3$.
  Para $x = 5$, temos $y = 4$.
- Neste caso, o vértice V desta parábola não pertence ao intervalo $x > 4$.
  Logo, de (I), (II) e (III), temos o gráfico:



12 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ se } x \leqslant 1 & \text{(I)} \\ 2(x + 1), \text{ se } x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Para esboçar o gráfico de $f(x)$, vamos estudá-lo por partes.

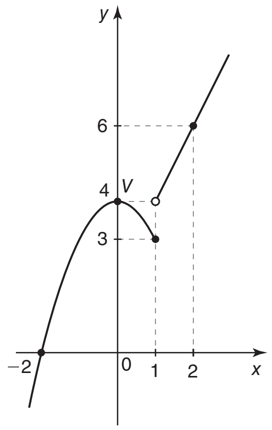
(I) $f(x) = 4 - x^2$ para $x \leqslant 1$

- Fazendo $4 - x^2 = 0$, temos:
  $x = -2$ ou $x = 2$
  Logo, o gráfico de f intercepta o eixo Ox somente no ponto $(-2, 0)$, pois o ponto $(2, 0)$ não pertence ao intervalo $x \leqslant 1$.
- Fazendo $x = 0$, temos $y = 4$.
  Logo, o gráfico intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 4)$.
- Para $x = 1$, temos $y = 3$.
  Logo, $(1, 3)$ é um extremo fechado do gráfico.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, 4)$

(II) $f(x) = 2(x + 1)$ para $x > 1$

- Fazendo $2(x + 1) = 0$, temos $x = -1$.
  Logo, o gráfico de f não intercepta o eixo Ox, pois $x = -1$ não pertence ao intervalo $x > 1$.

- Fazendo $x = 1$, temos $y = 4$; logo o ponto $(1, 4)$ é um extremo aberto do gráfico.
  Assim, de (I) e (II) temos o gráfico:



13 **a)** $y = 4x^2 + 2x - 2$
Como $y = 4x^2 + 2x - 2$ tem como gráfico uma parábola de concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:
- $y_V = -\frac{36}{16} = -\frac{9}{4}$
  Logo, o valor mínimo de $y = 4x^2 + 2x - 2$ é $y_V = -\frac{9}{4}$.
- $x_V = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$
  Logo, a abscissa do mínimo de $y = 4x^2 + 2x - 2$ é $x_V = -\frac{1}{4}$.

b) $y = 3x^2 - 12x$
Como $y = 3x^2 - 12x$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:
- $y_V = -\frac{144}{12} = -12$
  Logo, o valor mínimo de $y = 3x^2 - 12x$ é $y_V = -12$.
- $x_V = \frac{12}{6} = 2$
  Logo, a abscissa do mínimo de $y = 3x^2 - 12x$ é $x_V = 2$.

c) $y = -x^2 - 2x + 3$
Como $y = -x^2 - 2x + 3$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto máximo:
- $y_V = \frac{-16}{-4} = 4$
  Logo, o valor máximo de $y = -x^2 - 2x + 3$ é $y_V = 4$.
- $x_V = \frac{-(-2)}{-2} = -1$
  Logo, a abscissa do máximo de $y = -x^2 - 2x + 3$ é $x_V = -1$.

d) $s(x) = x^2 - 8x + 16$
Como $s(x)$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:
- $y_V = 0$
  Logo, o valor mínimo de $s(x)$ é $y_V = 0$.
- $x_V = \frac{8}{2} = 4$
  Logo, a abscissa do mínimo de $s(x)$ é $x_V = 4$.

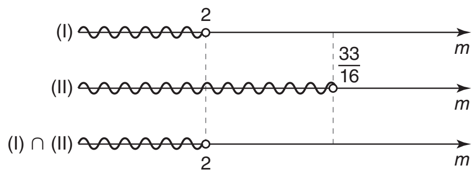
e) $y = -4x^2 + 2x - \frac{1}{4}$
Como $y = -4x^2 + 2x - \frac{1}{4}$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para baixo, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto máximo:
- $y_V = 0$
  Logo, o valor máximo de $y = -4x^2 + 2x - \frac{1}{4}$ é $y_V = 0$.
- $x_V = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$
  Logo, a abscissa do máximo de $y = -4x^2 + 2x - \frac{1}{4}$ é $x_V = \frac{1}{4}$.

f) $y = 3x^2 - 1$
Como $y = 3x^2 - 1$ tem como gráfico uma parábola com a concavidade para cima, calculando as coordenadas x_V e y_V do seu vértice V obtemos seu ponto mínimo:
- $y_V = -\frac{12}{12} = -1$
  Logo, o valor mínimo de $y = 3x^2 - 1$ é $y_V = -1$.
- $x_V = 0$
  Logo, a abscissa do mínimo de $3x^2 - 1$ é $x_V = 0$.

14 A parábola da equação $y = (m - 2)x^2 + x + 4$ admite valor máximo se, e somente se:

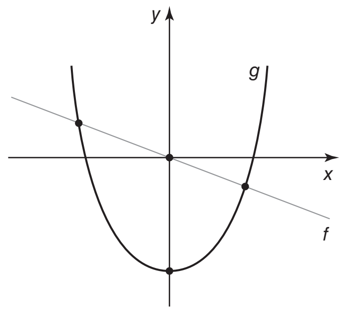
$$\begin{cases} m - 2 < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ 1 - 16(m - 2) > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m < 2 & \text{(I)} \\ m < \frac{33}{16} & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, os valores de m para que a função admita máximo positivo são todos os reais com $m < 2$.

15



Observando o gráfico acima, temos:
- $g(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$
- $f(x) = dx$

Se $h(x) = f(x) + g(x)$
Então:
$h(x) = ax^2 + (b + d) \cdot x + c$ com $a > 0$.
Com isso, concluímos que $h(x)$ é uma função cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima.
Logo, $h(x)$ possui ponto de mínimo.

Alternativa **b**.

16 Se os pontos A e B estão sobre o eixo das abscissas, eles representam as raízes da função quadrática. Temos então:

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm 5}{4}$$

$$\text{Portanto: } \begin{cases} x_1 = \dfrac{13 - 5}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{13 + 5}{4} = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Então, os pontos A e B são $A(2, 0)$ e $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

Para encontrar a abscissa do vértice da parábola, que é o ponto de mínimo C, fazemos:

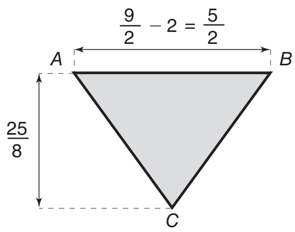
$$x_c = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-13)}{2 \cdot 2} = \frac{13}{4}$$

Então, a ordenada do ponto C é:

$$y_c = 2 \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^2 - 13 \cdot \frac{13}{4} + 18 = -\frac{25}{8}$$

Portanto: $C\left(\frac{13}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

Temos então, na figura abaixo, as dimensões do triângulo ABC:



Portanto, a área deste triângulo é:

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{\left(\frac{5}{2}\text{ m} \cdot \frac{25}{8}\text{ m}\right)}{2} = \frac{125}{32}\text{ m}^2$$

17 A área $A(x)$ do novo retângulo é dada por:
$A(x) = (b - x)(h + x)$, ou seja,
$A(x) = -x^2 + (b - h)x + bh$
O valor de x para que essa área seja máxima é a abscissa x_v do vértice da parábola representada por essa função, isto é:

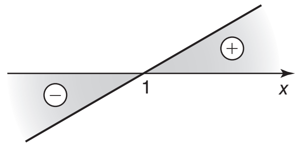
$$x_v = -\frac{b - h}{2 \cdot (-1)} = \frac{b - h}{2}$$

Alternativa **b**.

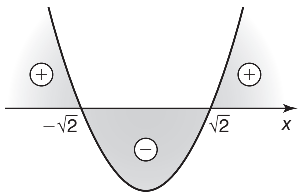
18 **a)** $(x - 1)(x^2 - 2) > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2$, temos:

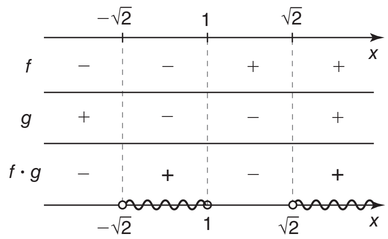
- Raízes de f:
  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:

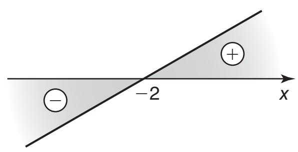


Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que o produto seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < 1 \text{ ou } x > \sqrt{2}\}$

b) $(x + 2)(x^2 - 4)(x^2 - x - 2) > 0$

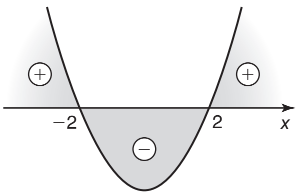
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 4$ e $h(x) = x^2 - x - 2$, temos:

- Raízes de f:
  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa -2.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

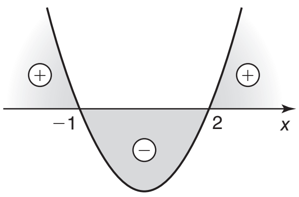


- Raízes de g:
  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -2 e 2.

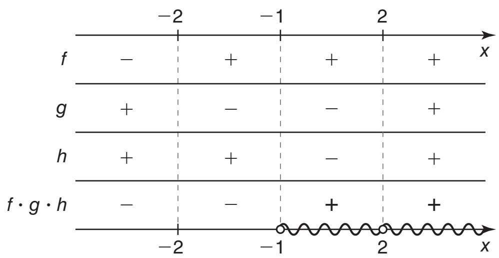
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



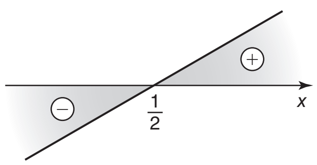
Representando a variação de sinal de f, g, h e $f \cdot g \cdot h$ em um quadro de sinais, temos:



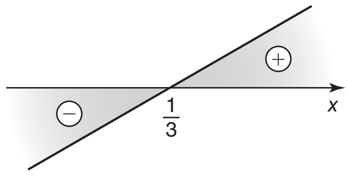
Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g \cdot h$. Como nos interessa que o produto seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 2\}$

c) $(2x - 1)(3x - 1)(x^2 + x - 2) \leqslant 0$
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x - 1$ e $h(x) = x^2 + x - 2$, temos:

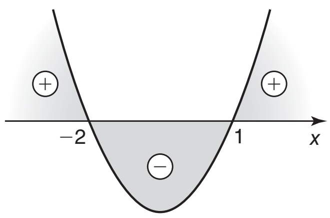
- Raízes de f:
  $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = \frac{1}{2}$.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



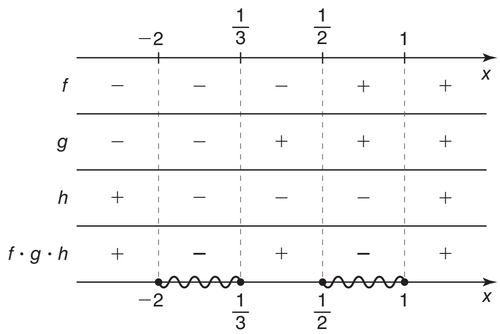
- Raízes de g:
  $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = \frac{1}{3}$.
- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -2 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $f \cdot g \cdot h$ em um quadro de sinais, temos:



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g \cdot h$. Como nos interessa que o produto seja negativo ou nulo, temos como conjunto solução:

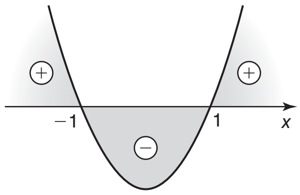
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right\}$$

19 a) $\dfrac{(x^2 - 1)(2x - 1)}{-x^2 - 9} \geqslant 0$

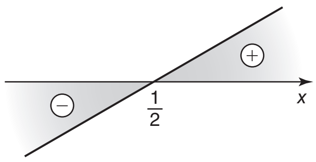
Condição de existência:
$-x^2 - 9 \neq 0$
Essa desigualdade é satisfeita para qualquer x real.

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x - 1$ e $h(x) = -x^2 - 9$, temos:

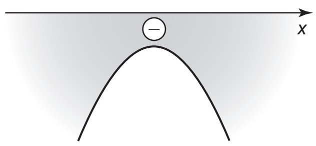
- Raízes de f:
  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{1}{2}$.
- g é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $-x^2 - 9 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g, h e $\frac{f \cdot g}{h}$ em um quadro de sinais, temos:

	-1		$\frac{1}{2}$		1	
f	+		−	−		+
g	−		−	+		+
h	−		−	−		−
$\frac{f \cdot g}{h}$	+		−	+		−

f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
h	−	−	−	−
$\frac{f \cdot g}{h}$	+	−	+	−
x	-1	$\frac{1}{2}$	1	

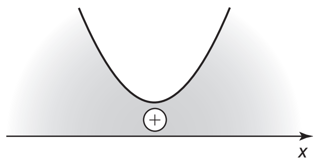
Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente e o produto $\frac{f \cdot g}{h}$. Como queremos $\frac{f \cdot g}{h}$ seja positivo ou nulo, temos como conjunto solução:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$$

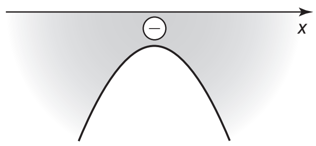
b) $\frac{x^2 - 2x + 2}{-x^2 - 2} < 0$

Condição de existência:
$-x^2 - 2 \neq 0$
Essa desigualdade é satisfeita para qualquer x real.
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 2x + 2$ e $g(x) = -x^2 - 2$, temos:

- Raízes de f:
  $x^2 - 2x + 2 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $-x^2 - 2 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

f	+	+	+	+	+	+
g	−	−	−	−	−	−
$\frac{f}{g}$	−	−	−	−	−	−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$.
Como nos interessa que o quociente seja estritamente negativo, temos como conjunto solução:
$S = \mathbb{R}$

c) $\dfrac{x^2 + x + 1}{-x^2 + 2x - 2} > 0$

Condição de existência:

$-x^2 + 2x - 2 \neq 0$

$\Delta < 0$

Logo, essa desigualdade é satisfeita para qualquer x real. Portanto, $-x^2 + 2x - 2$ será sempre diferente de zero.

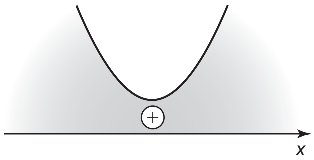
Seja $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = -x^2 + 2x - 2$, vamos começar estudando a variação de sinais dessas funções.

- Raízes de f:

  $x^2 + x + 1 = 0$

  $\Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

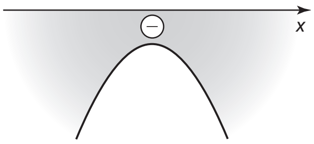


- Raízes de g:

  $-x^2 + 2x - 2 = 0$

  $\Delta < 0$

  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\dfrac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

f	+	+	+	+	+	+	+
g	–	–	–	–	–	–	–
$\frac{f}{g}$	–	–	–	–	–	–	–

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\dfrac{f}{g}$. Como nos interessa que o quociente seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:

$S = \varnothing$

d) $\dfrac{2x}{x^2 - 1} \geqslant \dfrac{1}{x - 1} \Rightarrow \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} \geqslant 0$

Condição de existência:

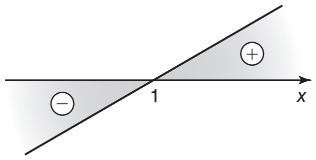
$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 1$, temos:

- Raízes de f:

  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

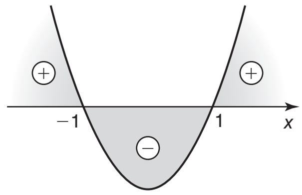
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.
- f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por.



- Raízes de g:

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\dfrac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
f	–	–	+
g	+	–	+
$\frac{f}{g}$	–	+	+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\dfrac{f}{g}$. Como nos interessa que o quociente seja nulo ou positivo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 1\}$

e) $\dfrac{x}{x + 1} > \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{x - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3x(x - 1) - 5(x^2 - 1) + 3(x + 1)}{3(x^2 - 1)} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{-2x^2 + 8}{3x^2 - 3} > 0$

Condição de existência:

$3x^2 - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq -1$

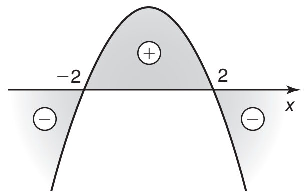
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = -2x^2 + 8$ e $g(x) = 3x^2 - 3$, temos:

- Raízes de f:

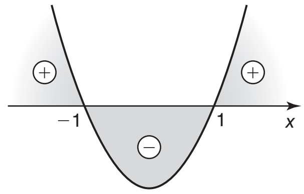
  $-2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -2 e 2.

- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -1 e 1.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\dfrac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

		−2		−1		1		2	
f	−		+		+		+		−
g	+		+		−		+		+
$\dfrac{f}{g}$	−		+		−		+		−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\dfrac{f}{g}$. Como nos interessa que o quociente seja estritamente positivo, temos como conjunto solução:

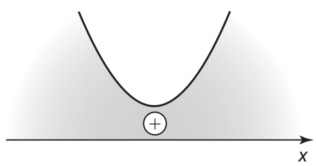
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$

f) $\dfrac{1}{x-1} \geqslant \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \geqslant 0$

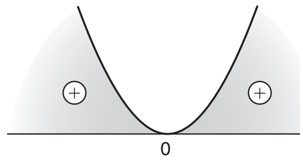
Condição de existência:
$x^2(x - 1) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ e $x \neq 1$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = x - 1$, temos:

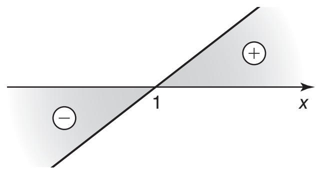
- Raízes de f:
  $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
  Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa 0.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Raízes de h:
  $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
  Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.
- h é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo. Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal f, g, h, $\dfrac{f}{g \cdot h}$ em um quadro de sinais, temos:

		0		1	
f	+		+		+
g	+		+		+
h	−		−		+
$\dfrac{f}{g \cdot h}$	−		−		+

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto e quociente $\dfrac{f}{g \cdot h}$. Como nos interessa que $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} \geqslant 0$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

20 a) $g(x) = \sqrt{\dfrac{6 - 3x}{x^2 - 3x + 2}}$

A função g está definida para todo x real tal que:

$\dfrac{6 - 3x}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0$

Condição de existência:
$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $x \neq 2$

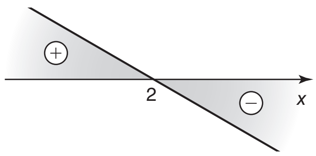
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 6 - 3x$ e $h(x) = x^2 - 3x + 2$, temos:

- Raízes de f:
  $6 - 3x = 0 \Rightarrow x = 2$

Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.

- f é uma função decrescente, pois o coeficiente de x é negativo.

  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

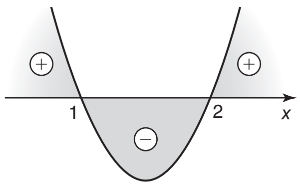


- Raízes de h:

  $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x = 2$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa 1 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



Representando a variação de sinal de f, h e $\frac{f}{h}$ em um quadro de sinais, temos:

	1	2	x
f	+	+	−
h	+	−	+
$\frac{f}{h}$	+	−	−

Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$.

b) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 2}$

A função h está definida para todo x real tal que:

$2x^2 - 1 > 0$ e $x^2 - 2 \geqslant 0$

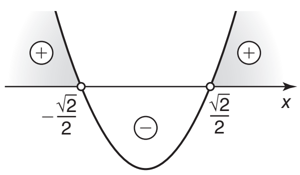
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 - 2$, temos:

- Raízes de f:

  $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

  Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



Então, para $2x^2 - 1 > 0$, temos:

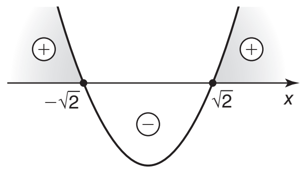
$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ (I)

- Raízes de g:

  $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

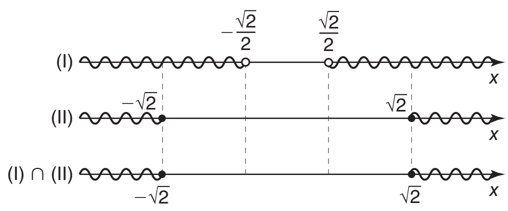
  Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Então, para $x^2 - 2 \geqslant 0$, temos:

$x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$ (II)

O domínio de h é a intersecção dos conjuntos dos valores de x obtidos em (I) e (II):



Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}\}$

21 a) $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(4 - x^4) \leqslant 0$

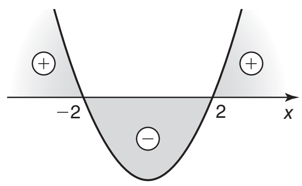
$\therefore (x^2 - 4)(2 - x^2)(2 + x^2) \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 4$, $i(x) = 2 - x^2$ e $j(x) = 2 + x^2$, temos:

- Raízes de f:

  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$

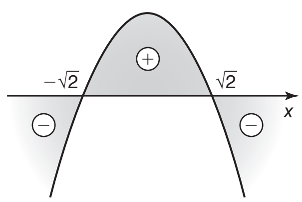
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa -2 e 2.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de h é representada por:



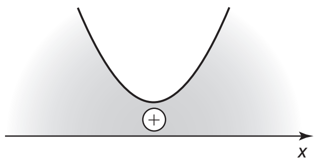
- Raízes de i:

  $2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Portanto, a variação de sinal de i é representada por:



- Raízes de j:
  $2 + x^2 = 0$
  $\Delta < 0$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.
  Portanto, a variação de sinal de j é representada por:



Representando a variação de sinal f, i, j e $f \cdot i \cdot j$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -2$	$-2 < x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$	$\sqrt{2} < x < 2$	$x > 2$
f	+	−	−	−	+
i	−	−	+	−	−
j	+	+	+	+	+
$f \cdot i \cdot j$	−	+	−	+	−

Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot i \cdot j$. Como nos interessa que o produto seja negativo ou nulo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ ou $x \geqslant 2\}$

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4}{4 - x^4} \geqslant 0$

$\therefore \dfrac{x^2 - 4}{(2 - x^2)(2 + x^2)} \geqslant 0$

Condição de existência:

$(2 - x^2)(2 + x^2) \neq 0 \Rightarrow x \neq -\sqrt{2}$ ou $x \neq \sqrt{2}$

Obedecida a condição de existência, a variação de sinal do quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é a mesma do produto $f(x) \cdot g(x)$. Assim, o conjunto solução S da inequação do item **b** pode ser obtido pelo quadro de sinais do item **a**, considerando os intervalos em que $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$, excluídos os valores de x que não satisfazem a condição de existência. Assim, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < -\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2} < x \leqslant 2\}$

c) $f(x) - g(x) < -8 \Rightarrow x^2 - 4 - (4 - x^2) + 8 < 0$

$\therefore x^4 + x^2 < 0$

Como qualquer potência de expoente par e base real é positiva ou nula, temos que $x^4 \geqslant 0$ e $x^2 \geqslant 0$ e, portanto, $x^4 + x^2 \geqslant 0$ para qualquer x real.

Concluímos, então, que não há valores de x tais que $x^4 + x^2 < 0$.

Logo, $S = \varnothing$.

22 Para que seja satisfeita a desigualdade $f(x) > 1$, devemos ter $\dfrac{x^2 + 1}{x + 3} > 1$, ou seja, $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} > 0$.

Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = x^2 - x - 2$ e $h(x) = x + 3$, temos:

	$x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
g	+	+	−	+
h	−	+	+	+
$\frac{g}{h}$	−	+	−	+

Concluímos, então, que todos os valores reais x que satisfazem a desigualdade $f(x) > 1$ são tais que $-3 < x < -1$ ou $x > 2$.

23 Observando o gráfico, temos que $g(x) \geqslant 0$ para qualquer x real. Logo, o quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ será menor que 1 se, e somente se, $f(x) < g(x)$ e $g(x) \neq 0$.

Pelo gráfico, constamos que isso ocorre para $x < -2$ ou $x > 1$.

Alternativa **e**.

Exercícios contextualizados

24 Temos:

$V = \left(1{,}50 - \dfrac{x}{100}\right) \cdot (10.000 + 100x)$

$V = (150 - x) \cdot (100 + x)$

$V = 15.000 + 50x - x^2$

Alternativa **d**.

25 a) Se, no instante inicial $t = 0$, a piscina está totalmente cheia, temos:

$V(0) = ab^2 = 120$. Como o tempo para esvaziá-la é de 20 horas, se ela está totalmente cheia temos que:

$V(20) = a(b - 20)^2 = 0$

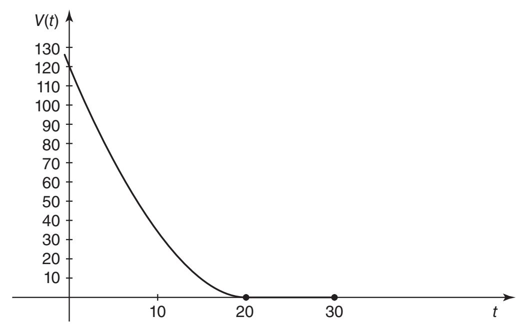
Portanto, resolvendo o sistema, temos:

$\begin{cases} ab^2 = 120 \\ a(b - 20)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}3$ e $b = 20$

b) $V(t) = 0{,}3(20 - t)^2 \Rightarrow V(t) = 0{,}3t^2 - 12t + 120$

A função em questão é do 2º grau e tem uma única raiz, que é $t = 20$. Logo, o vértice é o ponto (20, 0) e a intersecção com o eixo das ordenadas é o ponto (0, 120).

Sendo ainda $V(t) = 0$ para o intervalo de tempo $20 \leqslant t \leqslant 30$, o gráfico será um arco de parábola no intervalo de tempo [0, 20] e um segmento de reta no intervalo de tempo [20, 30].



26 **a)** Como $P(r) = c + br + ar^2$ expressa o preço em função do raio, sendo o diâmetro da pizza o dobro do raio, da tabela do enunciado temos:

$(10, 6) \in P \Rightarrow 6 = c + 10b + 100a$
$(15, 11) \in P \Rightarrow 11 = c + 15b + 225a$
$(20, 18) \in P \Rightarrow 18 = c + 20b + 400a$

Para encontrar os valores de a, b e c, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b + c = 6 & \text{(I)} \\ 225a + 15b + c = 11 & \text{(II)} \\ 400a + 20b + c = 18 & \text{(III)} \end{cases}$$

Isolando c na equação (I) e substituindo em (II) e (III), temos:

$c = 6 - 100a - 10b$

Logo:

$$\begin{cases} 125a + 5b = 5 \\ 300a + 10b = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -250a - 10b = -10 & \text{(I)} \\ 300a + 10b = 12 & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando (i) e (ii), temos:

$50a = 2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{25}$

$\therefore b = 0$

b) Substituindo os valores de a e b encontrados no item **a** deste exercício em $c = 6 - 100a - 10b$, obtemos:

$c = 6 - 100 \cdot \dfrac{1}{25} - 10 \cdot 0 \Rightarrow c = 2$

c) Pelos itens **a** e **b**, temos $P(r) = \dfrac{r^2}{25} + 2$.

Para $r = 25$, temos:

$P(25) = \dfrac{25^2}{25} + 2 = 27$

Portanto, o preço de uma pizza gigante de 50 cm de diâmetro é R$ 27,00.

27 Para obter a velocidade para qual esse consumo é mínimo, basta calcular o valor x_V da abscissa do vértice V da parábola de equação $C(x)$:

$x_V = \dfrac{0{,}6}{2 \cdot 0{,}006} = 50$

Logo, o consumo é mínimo à velocidade de 50 km/h.

Alternativa **e**.

28 **a)** O custo $C(x)$ pela compra dos $200 - x$ cartuchos e a receita $R(x)$ apurada coma venda deles são dados por:

$C(x) = 8(200 - 2x)$ e
$R(x) = x(200 - 2x)$

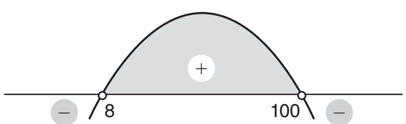
Como o lucro $L(x)$ é dado por $L(x) = R(x) - C(x)$, temos:

$L(x) = x(200 - 2x) - 8(200 - 2x) =$
$= -2x^2 + 216x - 1.600$

Logo, a fórmula que fornece o lucro mensal em função do preço de venda x de cada cartucho é:

$L(x) = -2x^2 + 216x - 1.600$

b) $L(x) > 0 \Rightarrow -2x^2 + 216x - 1.600 > 0$



Logo, $8 < x < 100$.

c) $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-216}{2(-2)} = 54$

Logo, o preço de venda unitário que maximiza o lucro é R$ 54,00.

d) $L_{máx} = y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = 4.232$

$Q_{máx} = 200 - 2 \cdot 54 = 72$

Logo, o lucro máximo é de R$ 4.232,00, quando são vendidos 92 cartuchos.

29 Temos:

$R(x) = kx(44.000 - x) = -kx^2 + 44.400kx$

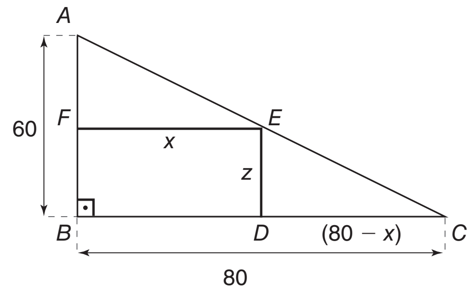
O número de pessoas para as quais a rapidez da propagação é máxima é dado por:

$x = \dfrac{-(44.000k)}{2(-k)} = 22.000.$

Logo, a rapidez será máxima quando o boato for conhecido por 22.000 pessoas.

Alternativa **b**.

30



Temos que $\triangle ABC \sim \triangle EDC$:

$\dfrac{80 - x}{80} = \dfrac{z}{60} \Rightarrow z = \dfrac{240 - 3x}{4}$

A área do retângulo é dada por:

$A = x \cdot z = x \cdot \left(\dfrac{240 - 3x}{4}\right) = -\dfrac{3}{4}x^2 + 60x$

O gráfico dessa função é uma parábola cuja abscissa x_v do vértice é dada por:

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-60}{2\left(-\dfrac{3}{4}\right)} = 40$

e portanto $z = \dfrac{240 - 3(40)}{4} = 30$

Então, a área do espelho será $40 \cdot 30 = 1.200$ cm^2.

Logo, as medidas dos lados do espelho são 30 cm e 40 cm, e a área é 1.200 cm^2.

31 Sendo x o número de espectadores, a receita $R(x)$ é dada por:

$R(x) = (8 + 0{,}20x)(120 - 2x) \Rightarrow$
$\Rightarrow R(x) = -0{,}4x^2 + 8x + 960$

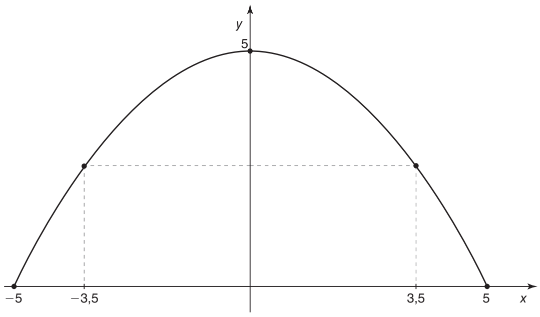
Para obter o preço do ingresso de modo que a receita arrecadada por sessão seja maximizada, basta obter o valor da abscissa x_V do vértice V da parábola de equação $R(x)$:

$x_V = \dfrac{-8}{-0{,}8} = 10$

Logo, o preço estabelecido para o ingresso foi R$ 10,00.

Alternativa **d**.

32 No pano dessa seção, consideremos um sistema cartesiano xOy cujo eixo Oy é vertical e passa pelo vértice da parábola e o eixo Ox contém a base da seção, conforme mostra a figura.



A equação da parábola que contém esse arco é da forma $f(x) = ax^2 + 6$, em que a é uma constante real positiva. Como o ponto (5, 0) pertence à parábola, temos:

$$0 = a \cdot 5^2 + 6 \Rightarrow a = -\frac{6}{25}$$

Logo, a equação da parábola é: $f(x) = -\frac{6x^2}{25} + 6$.

Para $x = 3{,}5$ ou $x = -3{,}5$ obtemos a altura mínima do túnel sobre as pistas:

$$f(-3{,}5) = f(3{,}5) = -\frac{6 \cdot (3{,}5)^2}{25} + 6 = 3{,}06$$

Logo, a altura máxima h permitida para um veículo transitar pelo túnel é dada por:

$$h = (3{,}06 - 0{,}3)m = 2{,}76m$$

33 Sendo $c(x)$ o preço da compra, $v(x)$ o preço da venda e $L(x)$ o lucro, pelo enunciado temos:

$c(x) = 20(60 - x)$ e $v(x) = x(60 - x)$

Então:

$L(x) = v(x) - c(x) \Rightarrow L(x) = x(60 - x) - 20(60 - x)$

$\therefore\ L(x) = -x^2 + 80x - 1.200$

A quantidade de artigos que o comerciante terá de vender para obter lucro máximo é o valor da abscissa x_V do vértice da parábola de equação $L(x)$:

$x_V = \frac{-80}{-2} = 40$

Pelo enunciado, temos que a quantidade n de artigos vendidos por dia é:

$n = 60 - x \Rightarrow n = 60 - 40 = 20$

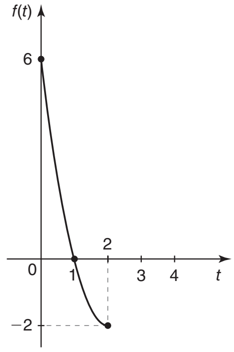
Logo, o comerciante terá de vender 20 artigos, cada um ao custo de R$ 40,00, para obter lucro máximo.

Alternativa **a**.

34 **a)** O gráfico de f está contido em uma parábola $\mathcal{P}$.

- Fazendo $f(t) = 0$, temos:
  $2t^2 - 8t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$ ou $t = 1$
  Logo, a parábola $\mathcal{P}$ intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 1 e 3.
- Fazendo $t = 0$, temos:
  $f(t) = 6$
  Logo, a parábola $\mathcal{P}$ intercepta o eixo Oy no ponto de ordenada 6.
- Calculando as coordenadas do vértice V da parábola $\mathcal{P}$, temos:
  $V\left(\frac{8}{4}, -\frac{16}{8}\right) = (2, -2)$

O gráfico de f é o arco da parábola $\mathcal{P}$, para $0 \leqslant t \leqslant 2$:



b) De acordo com o gráfico do item **a**, podemos observar que a temperatura do recinto esteve positiva no intervalo $0 \leqslant t < 1$.
Logo, esteve positiva por 1 hora.

c) De acordo com o gráfico do item **a**, podemos observar que a temperatura do recinto esteve negativa no intervalo $1 < t \leqslant 2$.
Logo, esteve negativa por 1 hora.

d) Pelo gráfico do item **a**, podemos observar que a menor temperatura atingida no recinto é -2 °C.

e) Como a máquina fica ligada por 2 horas até ser desligada e fica desligada por 2 horas até ser ligada, concluímos que em 24 horas a máquina permanece ligada por 12 horas.

35 **a)** Fazendo $L = 0$, temos:

$-x^2 + 62x - 600 = 0 \Rightarrow x_1 = 12$ ou $x_2 = 50$

Logo, os valores das abscissas x_1 e x_2 são 12 e 50, respectivamente.

Fazendo $x = 0$, temos $y = -600$.

Logo, o valor da ordenada k é -600.

b) O menor número de apartamentos que devem ser vendidos para que a função lucro passe a ser positiva é o número imediatamente maior que x_1, ou seja, 13.

c) $L(31) = -31^2 + 62 \cdot 31 - 600 = 361$

Sendo p a porcentagem de lucro sobre o custo da obra, temos:

$p = \frac{361}{600} \approx 60{,}1\%$

Logo, a porcentagem de lucro sobre o custo da obra foi de aproximadamente 60,1%.

36 Sendo C_A o custo de produção de cada tonelada de arroz e C_S o custo de produção de cada tonelada de soja, temos:

$C_S < C_A \Rightarrow 204 + \frac{40}{x} < 202 + \frac{120}{x + 10}$

$\therefore\ \frac{2x(x + 10) + 40(x + 10) - 120x}{x(x + 10)} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2x^2 - 60x + 400}{x^2 + 10x} < 0$

Vamos resolver essa inequação no universo $\mathbb{R}$ e só no final considerar que $x \geqslant 0$, pois x representa o número de toneladas produzidas.

Condição de existência:

$x^2 + 10x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ ou $x \neq -10$

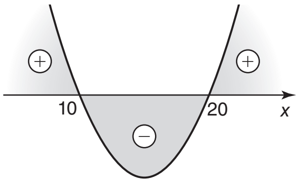
Estudando a variação de sinal das funções:

$f(x) = 2x^2 - 60x + 400$ e $g(x) = x^2 + 10x$, temos:

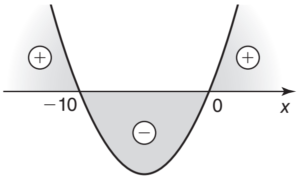
- Raízes de f:
  $2x^2 - 60x + 400 = 0 \Rightarrow x = 10$ ou $x = 20$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa 10 e 20.

- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de f é representada por:



- Raízes de g:
  $x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x = -10$ ou $x = 0$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa 0 e 10.
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo. Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:

	$x < -10$	$-10 < x < 0$	$0 < x < 10$	$10 < x < 20$	$x > 20$
f	+	+	+	−	+
g	+	−	+	+	+
$\frac{f}{g}$	+	−	+	−	+

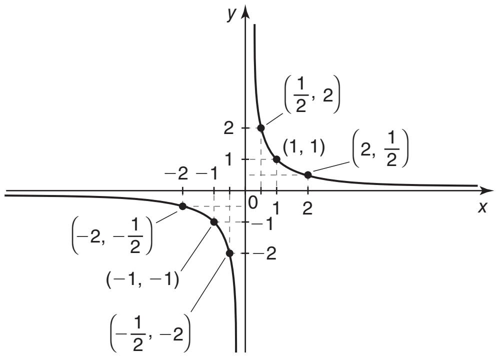
O intervalo $-10 < x < 0$ não convém, pois x se refere às toneladas de grãos que devem ser produzidas no sítio.

Portanto, de acordo com o quadro de sinais, a quantidade para que o custo da produção de soja seja menor que o custo da produção de arroz é qualquer valor entre 10 e 20 toneladas.

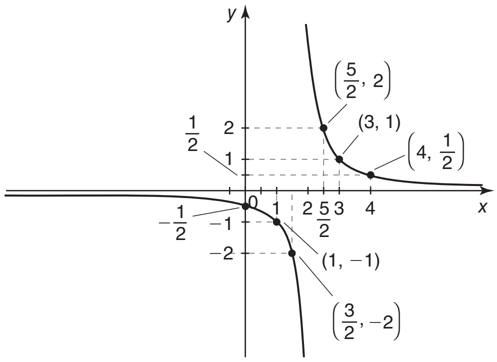
Exercícios de revisão cumulativa

1 **a)** O gráfico de $f(x)$ é dado pelos pontos da tabela.

x	y
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	−2
−1	−1
−2	$-\frac{1}{2}$

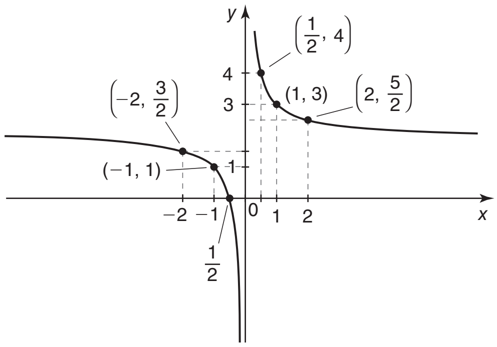


b) O gráfico de $g(x)$ é dado pela translação horizontal de duas unidades para a direita do gráfico de $f(x)$ do item **a** deste exercício; assim, temos:



c) $h(x) = \frac{1 + 2x}{x} = \frac{1}{x} + 2$

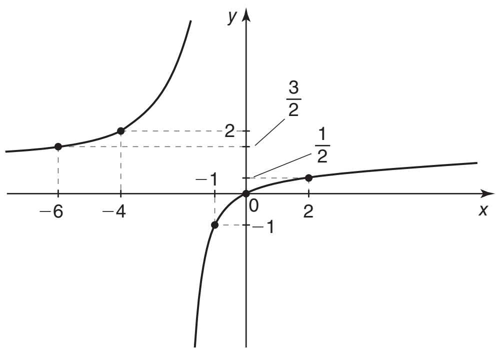
O gráfico de $h(x)$ é obtido pela translação vertical de duas unidades para cima do gráfico de $f(x)$ do item **a** deste exercício; assim, temos:



d) $t(x) = \frac{x}{x + 2}$

O gráfico de $t(x)$ é obtido pelos pontos da tabela.

x	y
0	0
2	$\frac{1}{2}$
−4	2
−1	−1
−6	$\frac{3}{2}$



Poderíamos ter raciocinado do seguinte modo:

$t(x) = \frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2} \Rightarrow t(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$

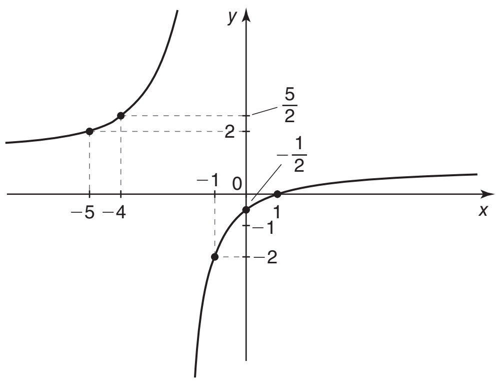
Assim, o gráfico de t é uma translação vertical de uma unidade para cima da função $u(x) = -\frac{2}{x+2}$.

Por sua vez, a função u é uma translação horizontal de duas unidades para a esquerda da função $v(x) = -\frac{2}{x}$.

e) $s(x) = \frac{x-1}{x+2}$

O gráfico de $s(x)$ é obtido pelos pontos da tabela.

x	y
-6	$\frac{3}{2}$
-4	2
-1	-1
0	0
2	$\frac{1}{2}$



Poderíamos ter raciocinado da seguinte maneira:

$s(x) = -\frac{3}{x+2} + \frac{x+2}{x+2} = -\frac{3}{x+2} + 1$

Assim, o gráfico de s é uma translação vertical de uma unidade para cima da função $e(x) = -\frac{3}{x+2}$.

Por sua vez, o gráfico da função e é uma translação horizontal de duas unidades para a esquerda da função $n(x) = -\frac{3}{x}$.

2 **a)** I. Trocamos x por y e y por x e isolamos a variável y, então obtemos:

$y = 2 + \sqrt{4 + x}$

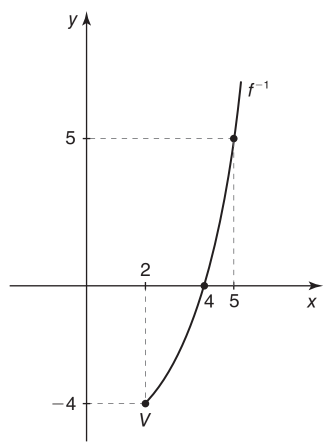
$x = 2 + \sqrt{4 + y} \Rightarrow (x - 2)^2 = 4 + y$

$\therefore y = (x - 2)^2 - 4 \Rightarrow y = x^2 - 4x$

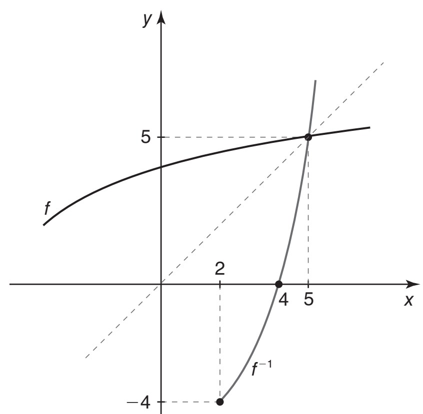
Logo, $f(x)^{-1} = x^2 - 4x$.

Para esboçar o gráfico, temos:

- Raízes de $f(x)^{-1}$:
  $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (0, 0) e (4, 0).
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente x^2 é positivo.
  Neste caso, $D(x^{-1}) = Im(x)$; então: $[2, +\infty[$
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:
  $V\left(\frac{4}{2}, -\frac{16}{4}\right) = (2, -4)$
  Assim:



b) O gráfico de $f(x)$ é simétrico do gráfico de $f^{-1}(x)$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.



3 $f(x + 3) = 2x + 1$

a) Inicialmente, determinamos x de modo que $x + 3 = 4$:

$x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$

Agora substituímos x por 1 na igualdade $f(x + 3) = 2x + 1$:

$f(4) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

b) Efetuamos a mudança de variável $x + 3 = t$, concluindo que $x = t - 3$.
Substituímos então a variável x por $t - 3$ na igualdade
$f(x + 3) = 2x + 1$, obtendo:
$f(t) = 2(t - 3) + 1 \Rightarrow f(t) = 2t - 5$
Substituindo t por x, concluímos:
$f(x) = 2x - 5$

4 Sendo $(r) y = ax + b$, pelo gráfico do enunciado temos:

$(0, 6) \in r \Rightarrow 6 = b$

$(6, 0) \in r \Rightarrow 0 = 6a + 6$

Para obter os valores de a e b, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} b = 6 \\ 6a + 6 = 0 \quad \text{(I)} \end{cases}$$

Por (I), temos:

$6a = -6 \Rightarrow a = -1$

Logo, $(r) y = -x + 6$

Sendo $(s) y = cx + d$, pelo gráfico do enunciado temos:

$(0, -3) \in s \Rightarrow -3 = d$

$(3, 0) \in s \Rightarrow 0 = 3c - 3$

Para obter os valores de c e d, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} d = -3 \\ 3c - 3 = 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Por (II), temos:

$3c = 3 \Rightarrow c = 1$

Logo, $(s) y = x - 3$

Resolvendo o sistema formado pelas equações das retas r e s, obtemos o ponto P.

Logo, $P\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Análise da resolução

Cada um dos x passageiros que irão viajar vai pagar a quantia $20 + 4(40 - x)$, em R$. Logo, a receita $f(x)$, em R$, apurada pela empresa de turismo é expressa por:

$$f(x) = x[20 + 4(40 - x)]$$

ou seja,

$$f(x) = -4x^2 + 180x$$

Se a variável x pudesse assumir qualquer valor real, o gráfico dessa função seria uma parábola; porém, no contexto do problema, a variável x representa um número de pessoas menor ou igual a 40, portanto essa variável só pode assumir valores naturais menores ou iguais a 40.

As coordenadas do vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola que contém o gráfico de f são dadas por:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{180}{2 \cdot (-4)} = 22{,}5 \text{ e}$$

$$y_v = -\frac{180^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0}{4 \cdot (-4)} = 2.025$$

Como a abcissa do vértice da parábola não é um número natural, concluímos que o valor máximo da receita não pode ser a ordenada do vértice. O correto valor máximo da função receita é obtido quando x assume o valor natural mais próximo de 22,5. Há, portanto, dois valores possíveis para x: 22 ou 23, pois esses dois valores estão igualmente próximos de 22,5. Assim, concluímos que o valor máximo da função receita é dado por $f(22)$ ou $f(23)$, ou seja:

$f(22) = -4 \cdot 22^2 + 180 \cdot 22 = 2.024$ ou

$f(23) = -4 \cdot 23^2 + 180 \cdot 23 = 2.024$

Logo, a receita máxima que pode ser apurada é de R$ 2.024,00.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

$d = |x - 6{,}5|$

Exercícios propostos

1 a) 7
b) 0
c) 3
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $2 - \sqrt{3}$
f) $2 - \sqrt{3}$
g) $3 + \sqrt{7}$
h) $\pi - 3$
i) $\pi - 3{,}14$
j) 8
k) $\sqrt{11} - \sqrt{10} + \sqrt{10} = \sqrt{11}$
l) $\sqrt{7} - \sqrt{5} - (\sqrt{7} - \sqrt{5}) = 0$

2 Se $2 \leq x \leq 10$, então:
$|x - 1| = x - 1$ e $|x - 20| = 20 - x$; logo:
$|x - 1| + |x - 20| = x - 1 + 20 - x = 19$

3 $|x|^2 = |x| \cdot |x| = |x \cdot x| \Rightarrow |x|^2 = |x^2|$ (I)
Como $x^2 \geq 0$, temos:
$|x^2| = x^2$ (II)
De (I) e (II), concluímos:
$|x|^2 = x^2$

4 a) F, pois, se $x < 0$ e o módulo de um número negativo é o oposto desse número, então $|x| = -x$.
b) V, pois números opostos estão associados a pontos do eixo real que equidistam da origem O.
c) F, pois, se $x < 0$ e o módulo de um número negativo é o oposto desse número, então $|x^3| = -x^3$.
d) V, pois $x^4 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
e) V, pois:
- Para $x > 3$:
  - $x - 3 > 0$, então $|x - 3| = x - 3$
  - $3 - x < 0$, então $|3 - x| = -(3 - x) = x - 3$
- Para $x < 3$:
  - $x - 3 < 0$, então $|x - 3| = -(x - 3) = 3 - x$
  - $3 - x > 0$, então $|3 - x| = 3 - x$
- Para $x = 3$:
  - $x - 3 = 0$, então $|x - 3| = 0$
  - $3 - x = 0$, então $|3 - x| = 0$

$\therefore |x - 3| = |3 - x|$, para $\forall x \in \mathbb{R}$

f) F, pois:
Se $a = 3$ e $b = -4$, então $|a + b| = |3 + (-4)| = 1$ e $|a| + |b| = |3| + |-4| = 7$
Logo, para $a = 3$ e $b = -4$, $|a + b| \neq |a| + |b|$.
g) F, pois se $x = 0$, então: $|0| = 0$
h) V, pois:
- Para $x > 0$:
  - $5 \cdot |x| = 5 \cdot x$
  - $|5 \cdot x| = 5 \cdot x$
- Para $x < 0$:
  - $5 \cdot |x| = -5 \cdot x$
  - $|5 \cdot x| = -5 \cdot x$
- Para $x = 0$:
  - $5 \cdot |x| = 0$
  - $|5 \cdot x| = 0$

$\therefore 5 \cdot |x| = |5 \cdot x|$, para $\forall x \in \mathbb{R}$

i) F, pois:
Se $x = 2$, então $(-5) \cdot |x| = (-5) \cdot 2 = -10$ e $|-5x| = |-5 \cdot 2| = 10$.
Logo, para $x = 2$, $(-5) \cdot |x| \neq |-5x|$.
j) V, pois:
- se x é um número real positivo ou nulo, então $\sqrt{x^2} = x$.
- se x é um número real negativo, então $\sqrt{x^2} = -x$.

Assim, para qualquer número real x, $\sqrt{x^2} = |x|$.
k) V, pois:
- Para $x > 0$, temos $\frac{7}{x} > 0$ e, portanto, $\frac{7}{|x|} = \frac{7}{x}$ e $\left|\frac{7}{x}\right| = \frac{7}{x}$. Logo, $\frac{7}{|x|} = \left|\frac{7}{x}\right|$.
- Para $x < 0$, temos $\frac{7}{x} < 0$ e, portanto, $\frac{7}{|x|} = \frac{7}{-x}$ e $\left|\frac{7}{x}\right| = -\frac{7}{x}$. Logo, $\frac{7}{|x|} = \left|\frac{7}{x}\right|$.

5 a) O desvio absoluto da nota do 1º aluno é dado por $\sigma_1 = |x_1 - m|$, em que $x_1 = 5{,}5$ e σ_1 é o desvio absoluto; então: $\sigma_1 = |5{,}5 - 7{,}4| = 1{,}9$
O desvio absoluto da nota do 2º aluno é dado por $\sigma_2 = |x_2 - m|$, em que $x_2 = 6{,}8$ e σ_2 é o desvio absoluto; então: $\sigma_2 = |6{,}8 - 7{,}4| = 0{,}6$
O desvio absoluto da nota do 3º aluno é dado por $\sigma_3 = |x_3 - m|$, em que $x_3 = 7{,}2$ e σ_3 é o desvio absoluto; então: $\sigma_3 = |7{,}2 - 7{,}4| = 0{,}2$
O desvio absoluto da nota do 4º aluno é dado por $\sigma_4 = |x_4 - m|$, em que $x_4 = 8$ e σ_4 é o desvio absoluto; então: $\sigma_4 = |8 - 7{,}4| = 0{,}6$
O desvio absoluto da nota do 5º aluno é dado por $\sigma_5 = |x_5 - m|$, em que $x_5 = 9{,}5$ e σ_5 é o desvio absoluto; então: $\sigma_5 = |9{,}5 - 7{,}4| = 2{,}1$
b) Seja o desvio absoluto médio representado por σ_m; então:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5}{5}$$

$$\sigma_m = \frac{1{,}9 + 0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}6 + 2{,}1}{5} = 1{,}08$$

Logo, o desvio absoluto médio é 1,08.

6 Como a distância deve ser um valor não negativo, temos duas possibilidades:
- desde o ponto de partida até chegar ao posto, ou seja, $0 \leq x \leq 100$, a distância entre o automóvel e o posto é $100 - x$;

- depois de passar pelo posto, ou seja, $x > 100$, a distância entre o automóvel e o posto é $x - 100$.

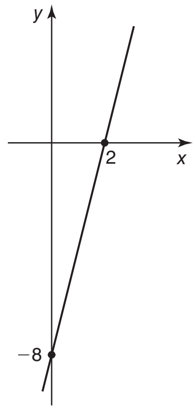
Por essas possibilidades, concluímos que, para qualquer posição do automóvel no trecho considerado, a distância entre ele e o posto é dada por $|x - 100|$ ou $|100 - x|$.

Alternativa **d**.

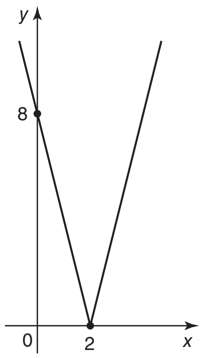
7 a) $f(x) = |4x - 8|$

- Construímos o gráfico da função $g(x) = 4x - 8$:

x	$g(x)$
0	−8
2	0



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de f:

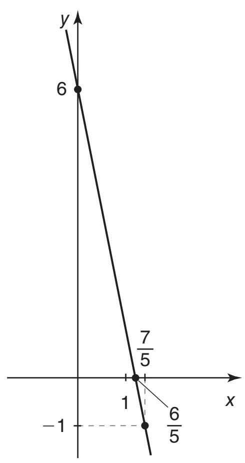


O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

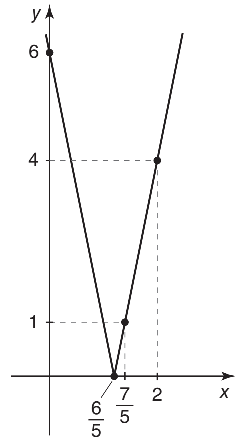
b) $g(x) = |-5x + 6|$

- Construímos o gráfico da função $f(x) = -5x + 6$:

x	$f(x)$
0	6
$\frac{6}{5}$	0
$\frac{7}{5}$	−1



- No gráfico de f, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de g:

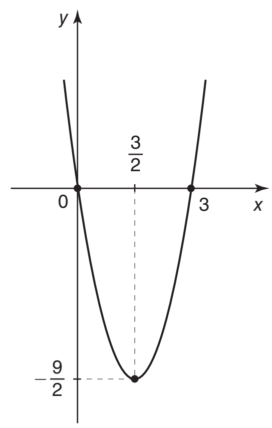


O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+$.

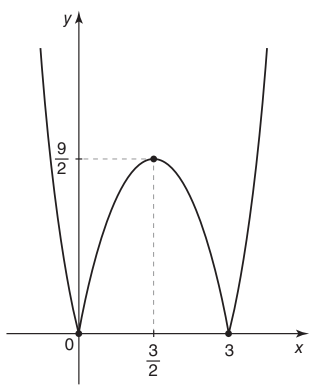
c) $h(x) = |2x^2 - 6x|$

- Construímos o gráfico da função $f(x) = 2x^2 - 6x$:

x	$f(x)$
0	0
3	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$



- No gráfico de f, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de h:

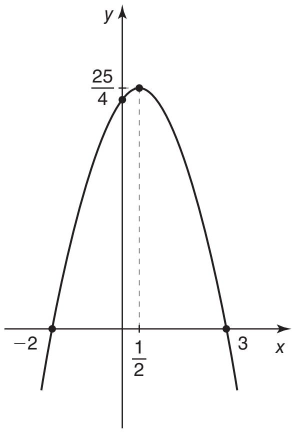


O domínio e o conjunto imagem de h são, respectivamente, $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \mathbb{R}_+$.

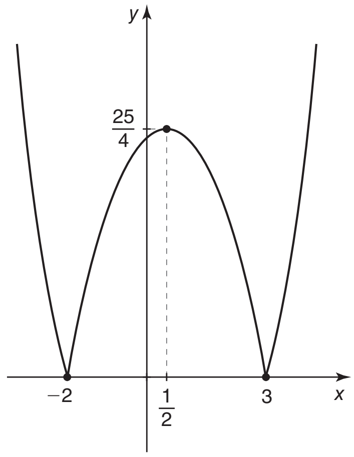
d) $f(x) = |-x^2 + x + 6|$

- Construímos o gráfico da função $g(x) = -x^2 + x + 6$:

x	$g(x)$
0	6
-2	0
3	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{4}$



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |-x^2 + x + 6|$:

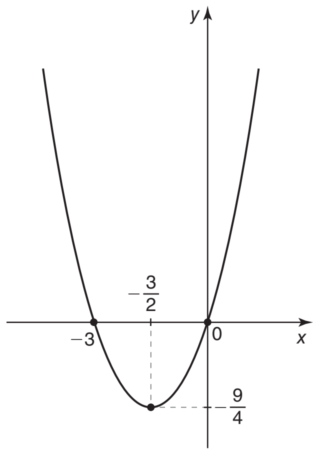


O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |-x^2 + x + 6|$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

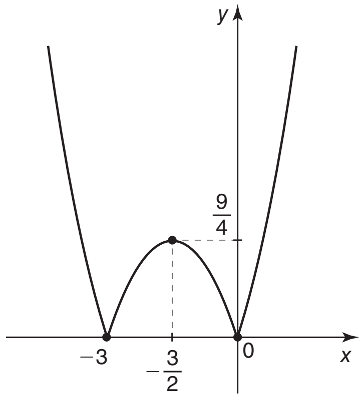
e) $f(x) = -|x^2 + 3x|$

- Construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 + 3x$:

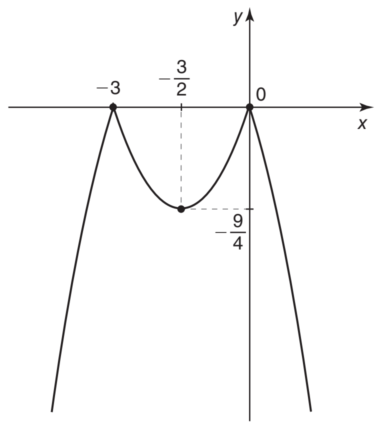
x	$g(x)$
0	0
-3	0
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{4}$



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $h(x) = |x^2 + 3x|$:



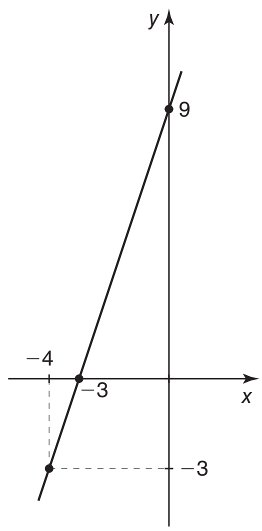
- Para obter o gráfico da função $f(x) = -|x^2 + 3x|$, transformamos todos os pontos do gráfico anterior em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas.



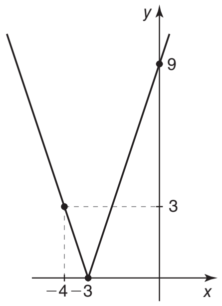
O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = -|x^2 + 3x|$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_-$.

f) $g(x) = |3x + 9| - 4$

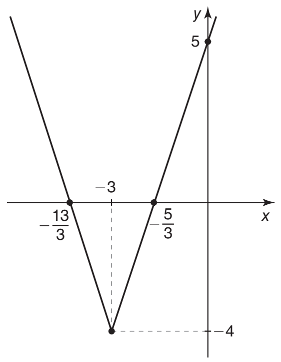
- Construímos o gráfico de $y = 3x + 9$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |3x + 9|$:



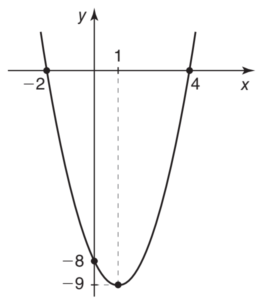
- Finalmente, transladamos o gráfico anterior verticalmente 4 unidades para baixo, obtendo assim o gráfico de g:



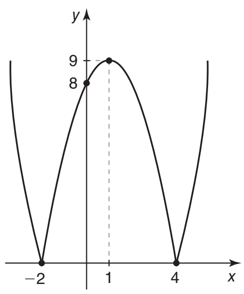
O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$.

g) $h(x) = |x^2 - 2x - 8| + 2$

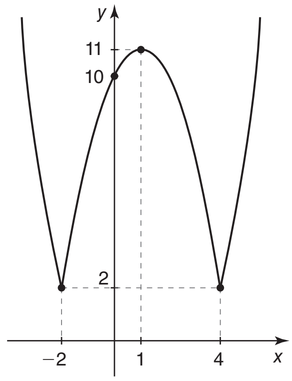
- Construímos o gráfico de $y = x^2 - 2x - 8$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |x^2 - 2x - 8|$:



- Finalmente, transladamos o gráfico anterior verticalmente 2 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de h:

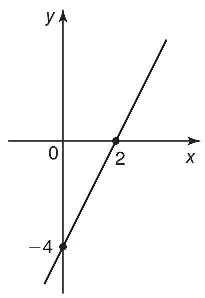


O domínio e o conjunto imagem de h são, respectivamente, $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

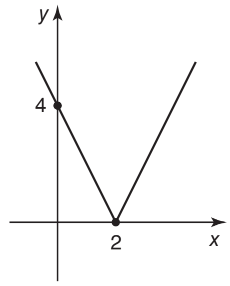
h) $f(x) = 2 - |2x - 4|$

- Construímos o gráfico de $g(x) = 2x - 4$:

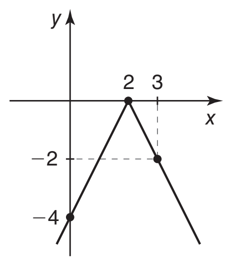
x	$g(x)$
2	0
0	−4



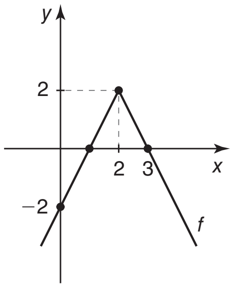
- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $h(x) = |2x - 4|$:



- Para obter o gráfico da função $i(x) = -|2x - 4|$, transformamos todos os pontos do gráfico anterior em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas:



- Transladamos o gráfico anterior verticalmente 2 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de $f(x) = 2 - |2x - 4|$:

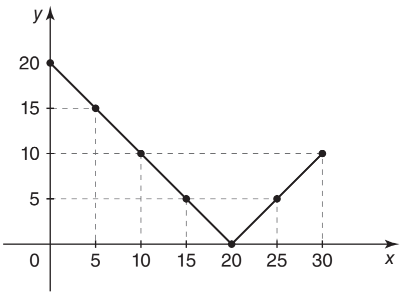


O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = 2 - |2x - 4|$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$.

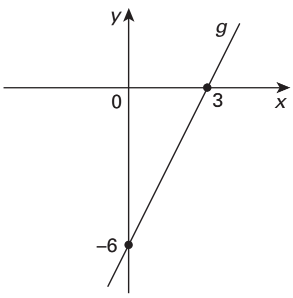
8 **a)** Sabendo que o ponto P está a 20 m de altura em relação à superfície do lago, temos:
$d(x) = |20 - x|$ ou $d(x) = |x - 20|$, com $0 \leqslant x \leqslant 30$

b) Para construir o gráfico de d, vamos transformá-la numa função dada por duas sentenças:

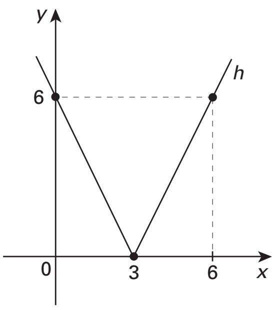
$$d(x) = \begin{cases} 20 - x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ -20 + x, \text{ se } 20 < x \leqslant 30 \end{cases}$$



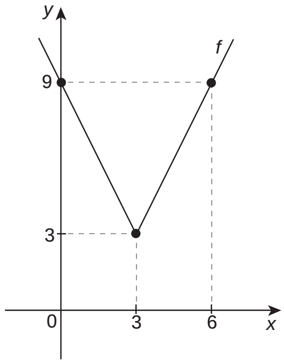
9 **a)** 1º passo: $g(x) = 2x - 6$



2º passo: $h(x) = |2x - 6|$



3º passo: $f(x) = |2x - 6| + 3$



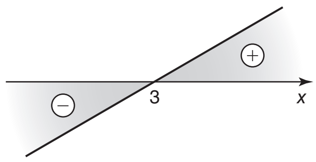
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [3, +\infty[$

b) $|2x - 6| + 3 = 5 \Rightarrow |2x - 6| = 2$ e, portanto, $2x - 6 = 2$ ou $2x - 6 = -2$, ou seja, $x = 4$ ou $x = 2$.
Logo, os pontos do gráfico de f que têm ordenada 5 são (4, 5) e (2, 5).

c) $|2x - 6| + 3 < 5 \Rightarrow |2x - 6| < 2$ e, portanto, $-2 < 2x - 6 < 2$, ou seja, $2 < x < 4$.

10 **a)** $f(x) = |2x - 6| + 3x$

- Estudando a variação de sinal de $g(x) = 2x - 6$, temos:



Como a função g é negativa à esquerda de 3, temos:
$|2x - 6| = -2x + 6$, para $x < 3$
Como a função g é positiva à direita de 3 e se anula em 3, temos:
$|2x - 6| = 2x - 6$, para $x \geqslant 3$
Representando os valores de $|g(x)| = |2x - 6|$ por um esquema:

	$x < 3$	$x \geqslant 3$
$\|2x - 6\|$ →	$-2x + 6$	$2x - 6$

Adicionando $3x$ a cada expressão desse quadro, teremos a função f representada por duas sentenças:

	$x < 3$	$x \geqslant 3$
$\|2x - 6\|$ →	$-2x + 6$	$2x - 6$
(+) $3x$ →	$3x$	$3x$
$\|2x - 6\| + 3x$ →	$x + 6$	$5x - 6$

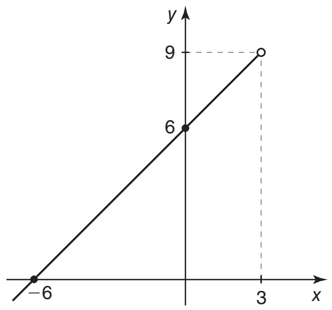
Logo:

$$f(x) = |2x - 6| + 3x \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x + 6, \text{ se } x < 3 \\ 5x - 6, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Analisando cada sentença de f, temos:

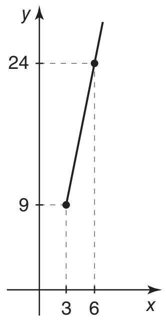
(I) $f(x) = x + 6$, para $x < 3$

x	$y = x + 6$
3	9
−6	0
0	6

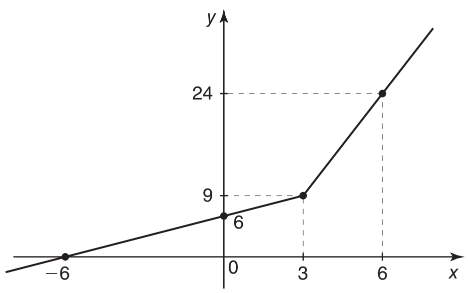


(II) $f(x) = 5x - 6$, para $x \geqslant 3$

x	$y = 5x - 6$
3	9
6	24



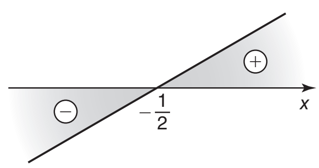
A reunião dos gráficos obtidos em (I) e (II) é o gráfico da função $f(x) = |2x - 6| + 3x$:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

b) $g(x) = |4x + 2| + 4x - 1$

- Estudando a variação de sinal de $f(x) = 4x + 2$, temos:



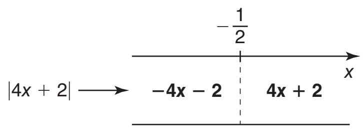
Como a função f é negativa à esquerda de $-\frac{1}{2}$, temos:

$|4x + 2| = -4x - 2$, para $x < -\frac{1}{2}$

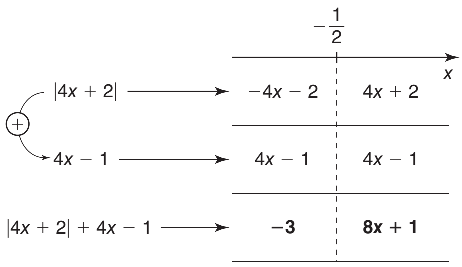
Como a função f é positiva à direita de $-\frac{1}{2}$ e se anula em $-\frac{1}{2}$, temos:

$|4x + 2| = 4x + 2$, para $x \geqslant -\frac{1}{2}$

Representando os valores de $|f(x)| = |4x + 2|$ por um esquema:



Adicionando $4x - 1$ a cada expressão desse quadro, teremos a função g representada por duas sentenças:



Logo:

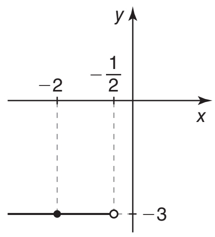
$g(x) = |4x + 2| + 4x - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} -3, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \\ 8x + 1, \text{ se } x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Analisando cada sentença de g, temos:

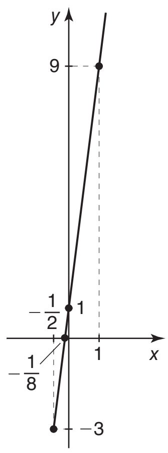
(I) $g(x) = -3$, para $x < -\frac{1}{2}$

x	$y = -3$
$-\frac{1}{2}$	−3
−2	−3

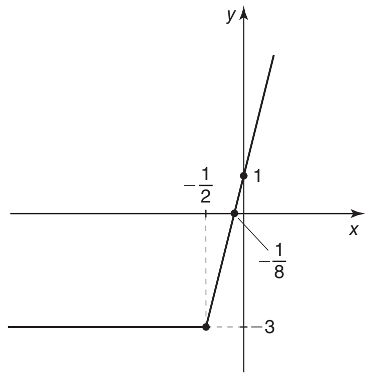


(II) $g(x) = 8x + 1$, para $x \geqslant -\frac{1}{2}$

x	$y = 8x + 1$
$-\frac{1}{2}$	−3
1	9
0	1
$-\frac{1}{8}$	0



A reunião dos gráficos obtidos em (I) e (II) é o gráfico da função $g(x) = |4x + 2| + 4x - 1$:

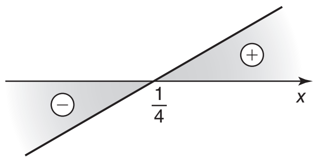


O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -3\}$.

c) $f(x) = |4x - 1| + |2x + 7|$

Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = 4x - 1$ e $h(x) = 2x + 7$, temos:

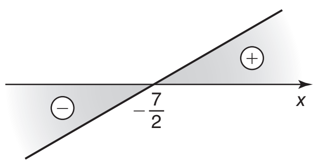
Variação de sinal de $g(x) = 4x - 1$



Então:

	$x < \frac{1}{4}$	$x > \frac{1}{4}$
$\lvert 4x - 1\rvert \longrightarrow$	$-4x + 1$	$4x - 1$

Variação de sinal de $h(x) = 2x + 7$



Então:

	$x < -\frac{7}{2}$	$x > -\frac{7}{2}$
$\lvert 2x + 7\rvert \longrightarrow$	$-2x - 7$	$2x + 7$

Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $|h(x)|$ e de $f(x) = |4x - 1| + |2x + 7|$, temos:

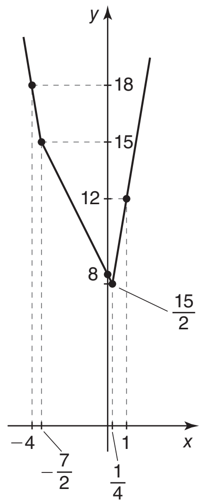
	$x < -\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2} < x < \frac{1}{4}$	$x > \frac{1}{4}$
$\lvert 4x - 1\rvert \longrightarrow$	$-4x + 1$	$-4x + 1$	$4x - 1$
+ $\lvert 2x + 7\rvert \longrightarrow$	$-2x - 7$	$2x + 7$	$2x + 7$
$f(x) \longrightarrow$	$-6x - 6$	$-2x + 8$	$6x + 6$

Logo:

$f(x) = |4x - 1| + |2x + 7| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -6x - 6, \text{ se } x \leqslant -\frac{7}{2} \\ -2x + 8, \text{ se } -\frac{7}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} \\ 6x + 6, \text{ se } x \geqslant \frac{1}{4} \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de f é:



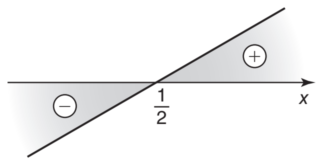
O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e

$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{15}{2}\right\}$.

d) $g(x) = |2x - 1| - |x - 5| + 3$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = 2x - 1$ e $h(x) = x - 5$, temos:

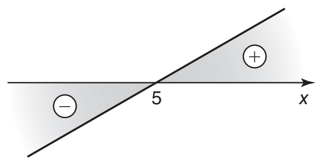
Variação de sinal $f(x) = 2x - 1$



Então:

	$x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$\lvert 2x - 1\rvert \longrightarrow$	$-2x + 1$	$2x - 1$

Variação de sinal de $h(x) = x - 5$



Então:

$x < 5$	$x > 5$
$-x + 5$	$x - 5$

Representando no eixo real os valores de $|f(x)|$, $|h(x)|$, $k(x) = 3$ e de $g(x) = |2x - 1| - |x - 5| + 3$, temos:

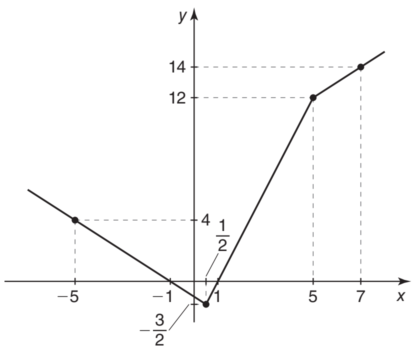
	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a 5	$x > 5$
$\|2x - 1\|$	$-2x + 1$	$2x - 1$	$2x - 1$
$\ominus$ $\|x - 5\|$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$\oplus$ 3	3	3	3
$g(x)$	$-x - 1$	$3x - 3$	$x + 7$

Logo:

$g(x) = |2x - 1| - |x - 5| + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(x) \begin{cases} -x - 1, \text{ se } x \leqslant \frac{1}{2} \\ 3x - 3, \text{ se } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5 \\ x + 7, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de g é:

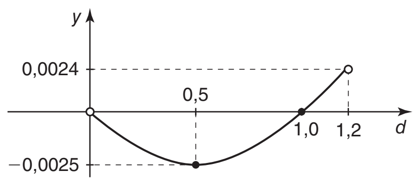


O domínio e o conjunto imagem de g são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e

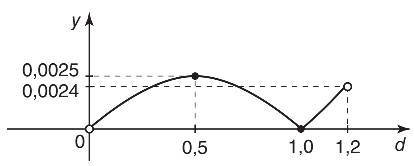
$Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{3}{2}\right\}$

11 a) $f(d) = \left|\frac{d^2 - d}{100}\right|$ com $0 < d < 1{,}2$

- Construímos o gráfico de $y = \frac{d^2 - d}{100}$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de f:



b) Como podemos observar no gráfico de $f(d)$ no item **a**, o erro é máximo para $d = 0{,}5$.

c) Para obter o valor do erro máximo, em metro, produzido pela máquina para $0 < d < 1{,}2$, basta analisar o gráfico de $f(d)$ do item **a**. Com isso podemos concluir que o erro máximo é $f(0{,}5)$.

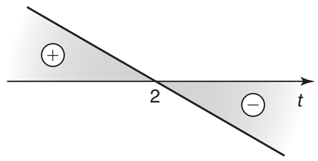
Logo, o erro máximo é 0,0025 m.

12 Estudando a equação do volume dada no enunciado, temos:

$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$, com t e $\mathbb{R}_+$.

Então:

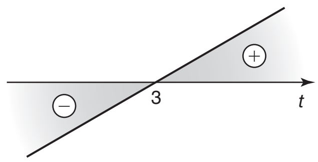
Variação de sinal de $f(t) = 4 - 2t$



Logo:

	$t < 2$	$t > 2$
$\|4 - 2t\|$	$4 - 2t$	$-4 + 2t$

Variação de sinal de $g(t) = 2t - 6$



Logo:

	$t < 3$	$t > 3$
$\|2t - 6\|$	$-2t + 6$	$2t - 6$

Representando no eixo real os valores de $|f(t)|$, $|g(t)|$, $k(t) = 10$ e de $V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$, temos:

	$t < 2$	2 a 3	$t > 3$
10	10	10	10
$\ominus$ $\|4 - 2t\|$	$4 - 2t$	$-4 + 2t$	$-4 + 2t$
$\ominus$ $\|2t - 6\|$	$-2t + 6$	$-2t + 6$	$2t - 6$
V	$4t$	8	$-4t + 20$

De acordo com o enunciado, o volume de água em um tanque começou a ser contado a partir das 8 h de uma manhã; portanto, de acordo com a tabela acima podemos concluir que 2 horas depois de começada a contagem, ou seja, a partir das 10 h, o volume ficou constante até as 11 h.

13 a) Pela propriedade P3, temos:

$|x - 8| = 3 \Leftrightarrow x - 8 = 3$ ou $x - 8 = -3$

$\therefore\ x = 11$ ou $x = 5$

Assim, $S = \{5, 11\}$

b) Pela propriedade P2, temos:
$|2x - 1| = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$
$\therefore x = \frac{1}{2}$
Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) Pela propriedade P1, temos que $|3x - 1| \geq 0$; logo, a equação $|3x - 1| = -4$ não tem raízes, e, portanto, seu conjunto S é vazio.
$S = \varnothing$

d) Pela propriedade P3, temos:
$|k^2 - 5k| = 6 \Leftrightarrow k^2 - 5k = 6$ ou $k^2 - 5k = -6$
$\therefore k = 6$ ou $k = -1$ ou $k = 3$ ou $k = 2$
Logo, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

e) Pela propriedade P4, temos:
$|9x - 5| = |6x + 10| \Leftrightarrow 9x - 5 = 6x + 10$ ou
$9x - 5 = -6x - 10$
$\therefore x = 5$ ou $x = -\frac{1}{3}$
Logo, $S = \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$.

f) Pela propriedade P6, temos:
$|t| \cdot |t - 2| = 1 \Leftrightarrow |t(t - 2)| = 1$
Então, pela propriedade P3, temos:
$|t(t - 2)| = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 1$ ou $t^2 - 2t = -1$
$\therefore t = 1 + \sqrt{2}$ ou $t = 1 - \sqrt{2}$ ou $t = 1$
Assim, $S = \left\{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\right\}$.

g) Pela propriedade P6, temos: $|x|^2 = x^2$
Logo, $x^2 + 2|x| = 15 \Rightarrow |x|^2 + 2|x| = 15$
Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, obtemos:
$y^2 + 2y - 15 = 0$
Resolvendo essa equação, temos: $y = 3$ ou $y = -5$.
Retornando à variável original, concluímos:
- $y = 3 \Rightarrow |x| = 3$
  $\therefore x = 3$ ou $x = -3$
- $y = -5 \Rightarrow |x| = -5$
  $\therefore \nexists x$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \{3, -3\}$.

h) Pela propriedade P6, temos: $|5p| = |5| \cdot |p| = 5|p|$ e $|p|^2 = p^2$.
Logo, $p^2 - |5p| + 4 = 0 \Rightarrow |p|^2 - 5|p| + 4 = 0$.
Fazendo a mudança de variável $|p| = y$, obtemos:
$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 4$
Retornando à variável original, concluímos:
- $y = 1 \Rightarrow |p| = 1$
  $\therefore p = 1$ ou $p = -1$
- $y = 4 \Rightarrow |p| = 4$
  $\therefore p = 4$ ou $p = -4$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \{1, -1, 4, -4\}$.

i) Pela propriedade P6, temos:
$|x - 1|^2 = (x - 1)^2$; logo,
$(x - 1)^2 + 4|x - 1| + 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x - 1|^2 + 4|x - 1| + 3 = 0$
Fazendo a mudança de variável $|x - 1| = y$, obtemos:
$y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = -3$
Retornando à variável original, concluímos:
- $y = -1 \Rightarrow |x - 1| = -1$
  $\therefore \nexists x$
- $y = -3 \Rightarrow |x - 1| = -3$
  $\therefore \nexists x$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

14 **a)** $|2x + 3| = 3x - 6$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$3x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
Pela propriedade P3, temos:
$|2x + 3| = 3x - 6 \Leftrightarrow 2x + 3 = 3x - 6$ ou
$2x + 3 = -3x + 6$
$\therefore x = 9$ ou $x = \frac{3}{5}$
Como $x = 9$ satisfaz a condição de existência e $x = \frac{3}{5}$ não a satisfaz, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{9\}$.

b) $|7x + 2| = 3x - 1$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$3x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$
Pela propriedade P3, temos:
$|7x + 2| = 3x - 1 \Rightarrow 7x + 2 = 3x - 1$ ou
$7x + 2 = -3x + 1$
$\therefore x = -\frac{3}{4}$ ou $x = -\frac{1}{10}$
Porém, $x = -\frac{3}{4}$ e $x = -\frac{1}{10}$ não obedecem à condição de existência; então, $S = \varnothing$.

c) $|x^2 - 5x| = 9 - 5x$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$9 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{9}{5}$
Pela propriedade P3, temos:
$|x^2 - 5x| = 9 - 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 9 - 5x$ ou
$x^2 - 5x = -9 + 5x$
$\therefore x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = 9$
Porém, $x = 3$ e $x = 9$ não obedecem à condição de existência; então, $S = \{-3, 1\}$.

15
- Transformamos a equação $|2x + 4| + |x - 5| = 2x$ na equação equivalente:
  $$|2x + 4| + |x - 5| - 2x = 0$$
- Eliminamos os módulos da função $h(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 2x$:

	$x < -2$	$-2 < x < 5$	$x > 5$
$\|2x + 4\|$	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$
(+) $\|x - 5\|$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
(−) $2x$	$2x$	$2x$	$2x$
(=) $\|2x + 4\| + \|x - 5\| - 2x$	$\mathbf{-5x + 1}$	$\mathbf{-x + 9}$	$\mathbf{x - 1}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -5x + 1 \text{ se } x \leq -2 \\ -x + 9 \text{ se } -2 \leq x \leq 5 \\ x - 1 \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$$

Para resolver a equação $h(x) = 0$, igualamos a zero cada sentença da função h:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 1 = 0 \text{ se } x \leqslant -2 \\ -x + 9 = 0 \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \\ x - 1 = 0 \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{1}{5} \text{ se } x \leqslant -2 \Rightarrow \nexists x \\ x = 9 \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 5 \Rightarrow \nexists x \\ x = 1 \text{ se } x \geqslant 5 \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \varnothing$.

16 Sendo v a velocidade do móvel A, temos que a velocidade do móvel B é $2v$. Assim, as abscissas x_A e x_B dos móveis A e B, respectivamente, são dadas por:

$x_A = -13 + vt$ e $x_B = 7 + 2vt$

No instante em que os móveis estão à mesma distância da origem O, temos: $|-13 + vt| = |7 + 2vt| \Rightarrow$ $\Rightarrow vt = 2$ ou $vt = -20$

- Para $vt = 2$, obtemos: $x_A = -11$ e $x_B = 11$
- Para $vt = -20$, obtemos: $x_A = -33$ e $x_B = -33$

Logo, há duas respostas possíveis: o móvel A estava no ponto de abscissa -11 e B no ponto de abscissa 11, ou ambos estavam no ponto de abscissa -33.

17 a) Seja d a distância, em milímetro, entre a mosca e o ponto de impacto da última flecha ativada no alvo; então:

$d = |x^2 - 44x + 480|$

Logo, para saber quantas vezes a mosca foi atingida, basta fazer $d = 0$. Então:

$|x^2 - 44x + 480| = 0$

Pela propriedade P2, temos:

$x^2 - 44x + 480 = 0 \Rightarrow x = 24$ ou $x = 20$

Portanto, a mosca foi atingida duas vezes, nos 25 primeiros lançamentos.

b) De acordo com o resultado encontrado no item **a** deste exercício, podemos concluir que a mosca foi atingida pela primeira vez depois que 20 flechas foram lançadas.

c) Para $x = 21$, então:

$d = |21^2 - 44 \cdot 21 + 480| = 3$

Para $x = 22$, então:

$d = |22^2 - 44 \cdot 22 + 480| = 4$

Para $x = 23$, então:

$d = |23^2 - 44 \cdot 23 + 480| = 3$

Para $x = 25$, então:

$d = |25^2 - 44 \cdot 25 + 480| = 5$

Logo, a maior distância entre a mosca e o ponto de impacto de uma das flechas no alvo depois de ter acertado a mosca pela 1ª vez foi 5 milímetros.

18 a) $|5x + 7| > 13$

Pela propriedade P11, temos:

$|5x + 7| > 13 \Leftrightarrow 5x + 7 < -13$ ou $5x + 7 > 13$

$\therefore x < -4$ ou $x > \frac{6}{5}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > \frac{6}{5}\right\}$.

b) $|3x - 4| \leqslant 8$

Pela propriedade P8, temos:

$|3x - 4| \leqslant 8 \Leftrightarrow -8 \leqslant 3x - 4 \leqslant 8$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$3x - 4 \leqslant 8$ e $3x - 4 \geqslant -8$

$\therefore x \leqslant 4$ e $x \geqslant -\frac{4}{3}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 4\right\}$.

c) $|1 - 4x| \geqslant 5$

Pela propriedade P10, temos:

$|1 - 4x| \geqslant 5 \Leftrightarrow 1 - 4x \leqslant -5$ ou $1 - 4x \geqslant 5$

$\therefore x \leqslant -1$ ou $x \geqslant \frac{3}{2}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$.

d) $|3 - x| < 8$

Pela propriedade P9, temos:

$|3 - x| < 8 \Leftrightarrow -8 < 3 - x < 8$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$3 - x < 8$ e $3 - x > -8$

$\therefore x < 11$ e $x > -5$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 11\}$.

e) O módulo de qualquer número real é positivo ou nulo; assim, a inequação $|x - 8| \leqslant -3$ é impossível. Logo, $S = \varnothing$.

f) $\left|\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{5}$

Pela propriedade P8, temos:

$$\left|\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leqslant \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{5}$$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

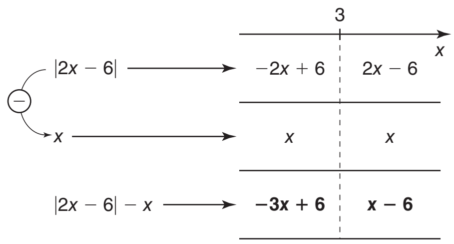
$\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{5}$ e $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \geqslant -\frac{1}{5}$

$\therefore x \leqslant -\frac{2}{5}$ e $x \geqslant -\frac{14}{15}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{14}{15} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{5}\right\}$

g) A inequação é equivalente a $|2x - 6| - x < 0$.

Eliminando o módulo da função $h(x) = |2x - 6| - x$, temos:



Assim:

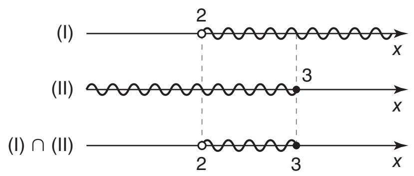
$$h(x) = \begin{cases} -3x + 6, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x - 6, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Então:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 6 < 0, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x - 6 < 0, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

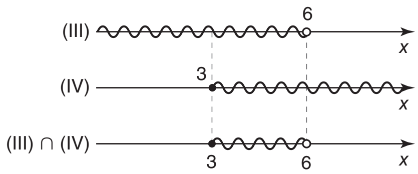
A primeira sentença exige que:

$$\underbrace{x > 2}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x \leqslant 3}_{\text{(II)}}$$



A segunda sentença exige que:

$$\underbrace{x < 6}_{\text{(III)}} \text{ e } \underbrace{x \geqslant 3}_{\text{(IV)}}$$



O conjunto solução S da inequação proposta é formado pelos números reais que satisfazem a 1ª ou a 2ª sentença, isto é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

h) A inequação é equivalente a $|5 - x| - x - 1 \geqslant 0$
Eliminando o módulo da função
$h(x) = |5 - x| - x - 1$, temos:

	5	
$\lvert 5 - x \rvert$	$5 - x$	$-5 + x$
$-\ x$	x	x
$-\ 1$	1	1
$\lvert 5 - x \rvert - x - 1$	**$4 - 2x$**	**-6**

Assim:

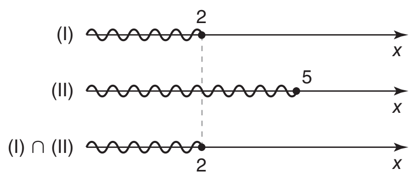
$$h(x) = \begin{cases} 4 - 2x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ -6, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Então:

$$h(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x \geqslant 0, \text{ se } x \leqslant 5 \\ -6 \geqslant 0, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}$$

A primeira sentença exige que:

$$\underbrace{x \leqslant 2}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x \leqslant 5}_{\text{(II)}}$$



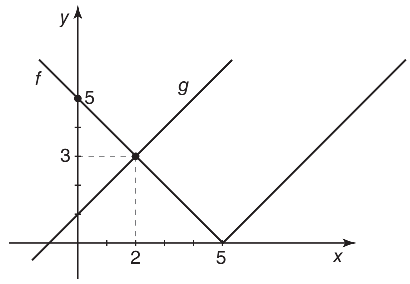
A segunda sentença exige que:

$$\underbrace{-6 \geqslant 0}_{\text{(III)}} \text{ e } \underbrace{x \geqslant 5}_{\text{(IV)}}$$

Como a condição (III) não é satisfeita para nenhum x real, temos que (III) ∩ (IV) = ∅.

O conjunto solução S da inequação proposta é formado pelos números reais que satisfazem a 1ª ou a 2ª sentença, isto é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

Outra opção é a resolução gráfica:
Inicialmente, construímos os gráficos das funções $f(x) = |5 - x|$ e $g(x) = x + 1$, obtendo o(s) ponto(s) de intersecção a partir da equação $|5 - x| = x + 1$:



Observando os gráficos, temos que g está abaixo de f à esquerda da abscissa 2; logo:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2)$

19 Pela propriedade P8, temos:
$|x| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$
Alternativa **b**.

20 Pela propriedade P9, temos:
$|x| < 8 \Leftrightarrow -8 < x < 8$
Portanto, se $-4 < x < 8$, então $-8 < x < 8$.

Alternativa **b**.

21 De acordo com o enunciado, temos:
$|x| \leqslant 0{,}008$
Pela propriedade P8:
$-0{,}008 \leqslant x \leqslant 0{,}008$
Logo, a maior medida é dada pela soma do diâmetro ideal da peça com 0,008; então:
$5 + 0{,}008 = 5{,}008$
E a menor medida é dada pelo diâmetro ideal da peça menos 0,008; então:
$5 - 0{,}008 = 4{,}992$
Assim, o menor diâmetro é 4,992 cm e o maior 5,008 cm.

22 $|2x + 4| + |x - 5| > 7$
A inequação $|2x + 4| + |x - 5| > 7$ é equivalente a:
$|2x + 4| + |x - 5| - 7 > 0$
Eliminando os módulos da função
$h(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 7$, temos:

	−2	5	
$\lvert 2x + 4 \rvert$	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$
$+\ \lvert x - 5 \rvert$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$+\ -7$	-7	-7	-7
$h(x)$	**$-3x - 6$**	**$x + 2$**	**$3x - 8$**

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -3x - 6, \text{ se } x \leq -2 \\ x + 2, \text{ se } -2 \leq x \leq 5 \\ 3x - 8, \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$$

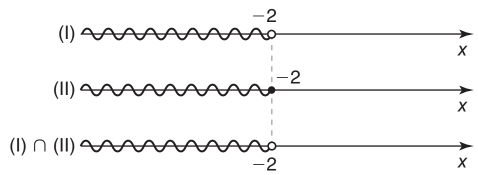
Logo:

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 6 > 0, \text{ se } x \leq -2 \\ x + 2 > 0, \text{ se } -2 \leq x \leq 5 \\ 3x - 8 > 0, \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x < -2, \text{ se } x \leq -2 \\ x > -2, \text{ se } -2 \leq x \leq 5 \\ k > \frac{8}{3}, \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$$

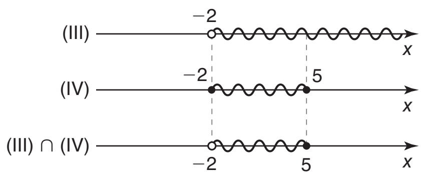
A 1ª sentença exige que:

$x < -2$ (I) e $x \leq -2$ (II)



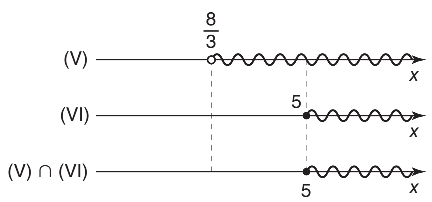
A 2ª sentença exige que:

$x > -2$ (III) e $-2 \leq x \leq 5$ (IV)



A 3ª sentença exige que:

$x > \frac{8}{3}$ (V) e $x \geq 5$ (VI)



O conjunto solução S da inequação proposta é o conjunto dos valores que satisfazem a 1ª ou a 2ª ou a 3ª sentença, ou seja:

$S =]-\infty, -2[\cup]-2, 5] \cup [5, +\infty[= \mathbb{R} - \{-2\}$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 2|$

Analisando o módulo $|\sqrt{5} - 2|$, temos:

$\sqrt{5} > 2 \Rightarrow \sqrt{5} - 2 > 0$

Logo:

$\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - \sqrt{5} + 2 = 2$

b) $\sqrt{2} + |\sqrt{2} - 5|$

Analisando o módulo $|\sqrt{2} - 5|$, temos:

$\sqrt{2} < 5 \Rightarrow \sqrt{2} - 5 < 0$

Logo:

$\sqrt{2} + |\sqrt{2} - 5| = \sqrt{2} - \sqrt{2} + 5 = 5$

c) $|\sqrt[3]{26} - \pi| + \sqrt[3]{26}$

Analisando o módulo $|\sqrt[3]{26} - \pi|$, temos:

$\sqrt[3]{26} < \pi \Rightarrow \sqrt[3]{26} - \pi < 0$

Logo:

$|\sqrt[3]{26} - \pi| + \sqrt[3]{26} = -\sqrt[3]{26} + \pi + \sqrt[3]{26} = \pi$

d) $|\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15|$

Analisando o módulo $|\pi - 3{,}14|$, temos:

$\pi > 3{,}14 \Rightarrow \pi - 3{,}14 > 0$

Analisando o módulo $|\pi - 3{,}15|$, temos:

$\pi < 3{,}15 \Rightarrow \pi - 3{,}15 < 0$

Logo:

$|\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15| = \pi - 3{,}14 - \pi + 3{,}15 = 0{,}01$

e) $|\sqrt[4]{82} - \sqrt{10}| + \sqrt[4]{82}$

Analisando o módulo $|\sqrt[4]{82} - \sqrt{10}|$, temos:

$\sqrt[4]{82} < \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt[4]{82} - \sqrt{10} < 0$

Logo:

$|\sqrt[4]{82} - \sqrt{10}| + \sqrt[4]{82} =$

$= -\sqrt[4]{82} + \sqrt{10} + \sqrt[4]{82} = \sqrt{10}$

f) $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}|$

Analisando o módulo $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}|$, temos:

$\sqrt[4]{9} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$

Logo:

$|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}| = |\sqrt{3} - \sqrt{3}| = 0$

2 $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

Pela propriedade P5, temos que $\sqrt{x^2} = |x|$. Assim,

$\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{|x|}{x}$, para $x \neq 0$

Logo:

se $x > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x} = 1$

se $x < 0 \Rightarrow -\dfrac{x}{x} = -1$

Alternativa **a**.

3 a) F, pois: $-8 < 1$ e $|-8| > |1|$

b) F, pois: $3^2 = (-3)^2$ e $3 \neq -3$

c) V, pois:

$x^2 = y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ e, por P6:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \Rightarrow |x| = |y|$

d) V, pois:

$\sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{(x \cdot y)^2} = |xy|$

e) V, pois x e $-x$ são números opostos e, portanto, são abscissas de pontos do eixo real que equidistam da origem O.

f) F, pois para $x = -3$ temos $|-(-3)| = -3$, o que é absurdo.

4 A expressão $\dfrac{1}{|x| + 2}$ assume seu maior valor quando o denominador é mínimo. Isso ocorre para $x = 0$:

$\dfrac{1}{|0| + 2} = \dfrac{1}{2}$

A expressão $\dfrac{1}{|x| + 2}$ assume seu menor valor quando o denominador é máximo. Isso ocorre para $x = -7$:

$\dfrac{1}{|-7| + 2} = \dfrac{1}{9}$

5 Considerando os três números a, b e c, podemos ter:

- os três positivos, e nesse caso a soma pedida é 4;
- dois positivos e um negativo, e nesse caso a soma pedida é 0;
- um positivo e dois negativos, e nesse caso a soma pedida é 0;
- os três negativos, e nesse caso a soma pedida é -4.

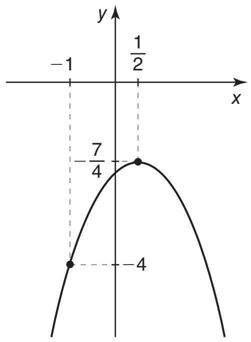
Logo, o conjunto das possíveis somas é $\{-4, 0, 4\}$.

Alternativa **c**.

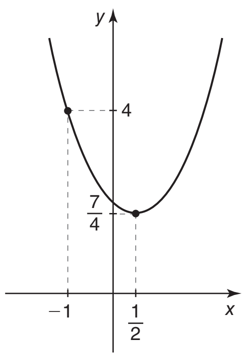
6 **a)** $f(x) = |-x^2 + x - 2|$

- Construímos o gráfico da função $g(x) = -x^2 + x - 2$:

x	$g(x)$
0	-2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$
-1	-4



- No gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |-x^2 + x - 2|$:



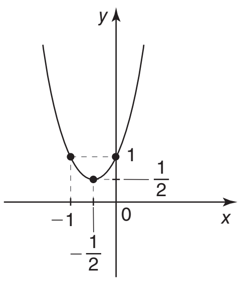
O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |-x^2 + x - 2|$ são, respectivamente,

$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{7}{4}\right\}$.

b) $g(x) = |2x^2 + 2x + 1|$

- Construímos o gráfico da função $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$:

x	$f(x)$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	1



Como o gráfico de f não possui pontos de ordenada negativa, ele é o próprio gráfico de $g(x) = |2x^2 + 2x + 1|$.

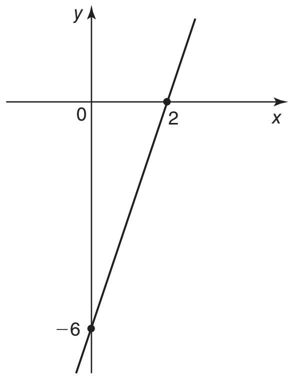
O domínio e o conjunto imagem de $g(x) = |2x^2 + 2x + 1|$ são, respectivamente:

$D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

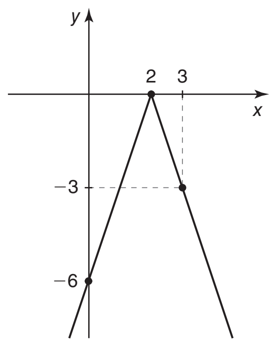
c) $r(x) = -|3x - 6|$

- Construímos o gráfico de $y = 3x - 6$:

x	y
0	-6
2	0



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não positivas e transformamos os de ordenadas positivas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $r(x) = -|3x - 6|$:

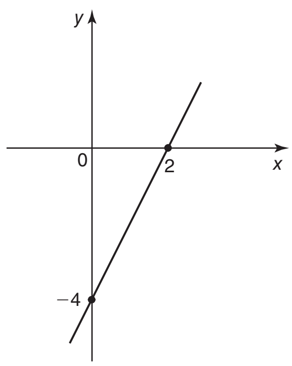


O domínio e o conjunto imagem de $r(x) = -|3x - 6|$ são, respectivamente, $D(r) = \mathbb{R}$ e $Im(r) = \mathbb{R}_-$.

d) $f(x) = |2x - 4| + 3$

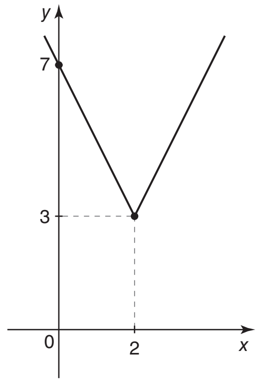
- Construímos o gráfico de $y = 2x - 4$:

x	y
0	-4
2	0



- Do gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas;

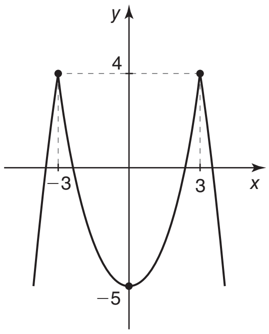
em seguida transladamos esse gráfico verticalmente 3 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de
$f(x) = |2x - 4| + 3$:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$.

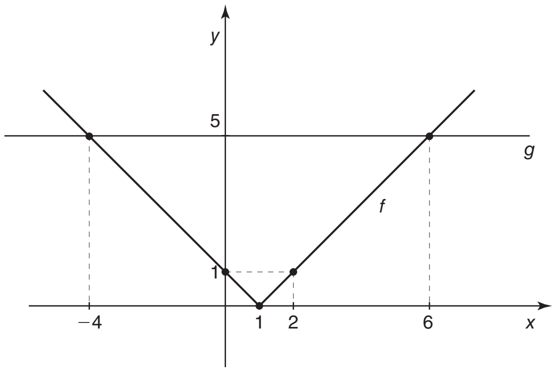
e) $g(x) = 4 - |x^2 - 9|$

Primeiro construímos o gráfico de $y = x^2 - 9$; em seguida transformamos os pontos de ordenadas positivas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas para obter o gráfico de $y = -|x^2 - 9|$. Finalmente transladamos esse gráfico verticalmente 4 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de $g(x) = 4 - |x^2 - 9|$:



O domínio e o conjunto imagem de $g(x) = 4 - |x^2 - 9|$ são, respectivamente, $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$.

7 Construindo os gráficos de f e g, temos:

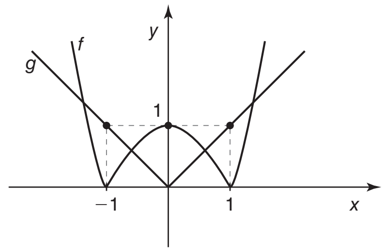


Logo, a área A pedida é dada por:

$$A = \frac{[6 - (-4)] \cdot 5}{2} = 25$$

Alternativa **d**.

8 Construindo os gráficos das funções f e g, temos:

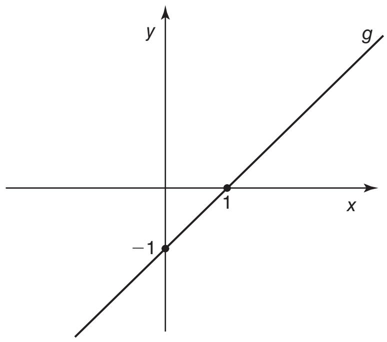


Logo, os gráficos têm quatro pontos comuns.

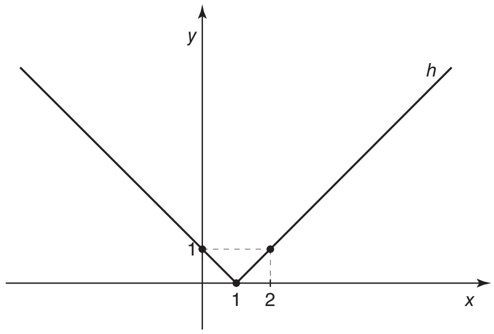
Alternativa **b**.

9 **a)** $f(x) = 3 + \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow f(x) = 3 + |x - 1|$

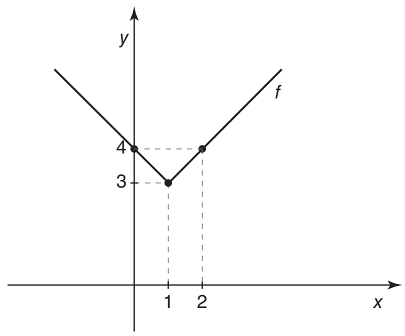
- Inicialmente, construímos o gráfico da função $g(x) = x - 1$:



- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $h(x) = |x - 1|$

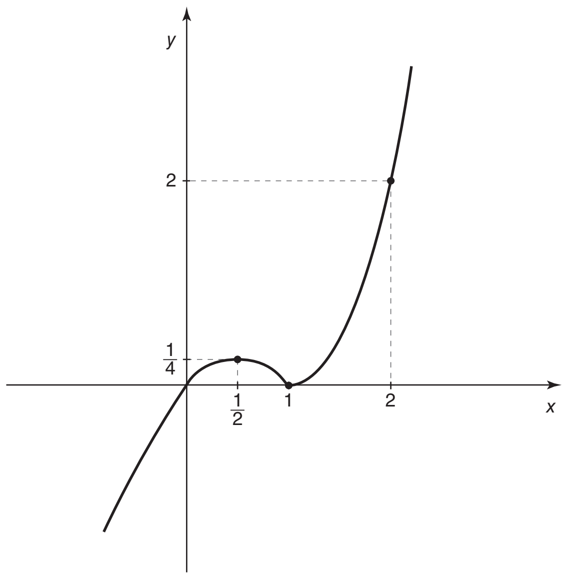


- Transladamos o gráfico anterior verticalmente 3 unidades para cima, obtendo assim o gráfico de $f(x) = 3 + |x - 1|$



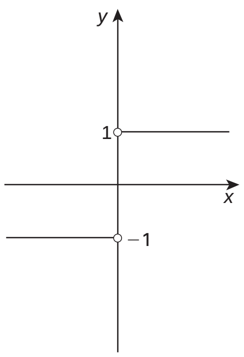
b) O conjunto imagem de f é:
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

10 **I.** Para $1 - x \geqslant 0$, ou seja, $x \leqslant 1$, temos:
$f(x) = x(1 - x) = x - x^2$
II. Para $1 - x < 0$, ou seja, $x > 1$, temos:
$f(x) = x(x - 1) = x^2 - x$
A reunião dos gráficos obtidos em (I) e (II) é:



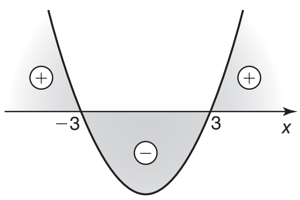
Alternativa **b**.

11 Para $x > 0$, temos $y = 1$; para $x < 0$, temos $y = -1$, e para $x = 0$ não está definida a função.



$D(f) = \mathbb{R}^*$; $Im(f) = \{1, -1\}$

12 **a)** $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$
- Estudando a variação de sinal de $g(x) = x^2 - 9$, temos:



Então:

	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$\lvert x^2 - 9\rvert$	$x^2 - 9$	$-x^2 + 9$	$x^2 - 9$

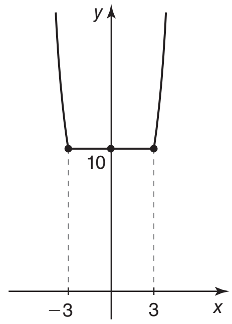
Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $h(x) = x^2 + 1$ e de $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$, temos:

	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
$\lvert x^2 - 9\rvert$	$x^2 - 9$	$-x^2 + 9$	$x^2 - 9$
$x^2 + 1$	$x^2 + 1$	$x^2 + 1$	$x^2 + 1$
$\lvert x^2 - 9\rvert + x^2 + 1$	$2x^2 - 8$	10	$2x^2 - 8$

Logo:
$f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1 \Leftrightarrow$

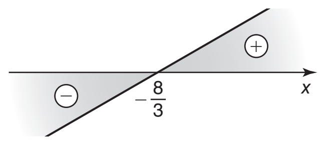
$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8, \text{ se } x \leqslant -3 \\ 10, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x^2 - 8, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$ é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |x^2 - 9| + x^2 + 1$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 10\}$.

b) $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$
- Estudando a variação de sinal de $g(x) = 3x + 8$, temos:



Então:

	$x < -\frac{8}{3}$	$x > -\frac{8}{3}$
$\lvert 3x + 8\rvert$	$-3x - 8$	$3x + 8$

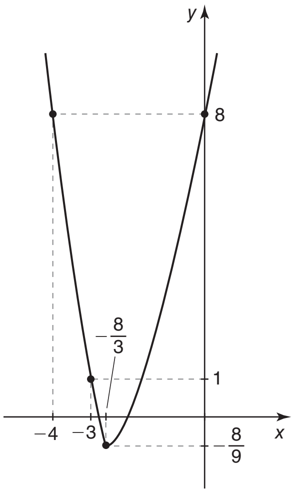
Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $h(x) = x^2 + 3x$ e de $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$, temos:

	$x < -\frac{8}{3}$	$x > -\frac{8}{3}$
$\lvert 3x + 8\rvert$	$-3x - 8$	$3x + 8$
$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x$	$x^2 + 3x$
$\lvert 3x + 8\rvert + x^2 + 3x$	$x^2 - 8$	$x^2 + 6x + 8$

Logo:
$f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x \Leftrightarrow$

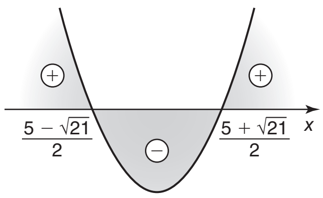
$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 8, \text{ se } x \leqslant -\dfrac{8}{3} \\ x^2 + 6x + 8, \text{ se } x \geqslant -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$ é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



O domínio e o conjunto imagem de $f(x) = |3x + 8| + x^2 + 3x$ são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\dfrac{8}{9}\right\}$.

c) $f(x) = |x^2 - 5x + 1| + x^2 + 2x - 3$
Estudando a variação de sinal de $g(x) = x^2 - 5x + 1$, temos:



Então:

	$x < \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$	$\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$	$x > \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$
$\lvert x^2 - 5x + 1 \rvert \longrightarrow$	$x^2 - 5x + 1$	$-x^2 + 5x - 1$	$x^2 - 5x + 1$

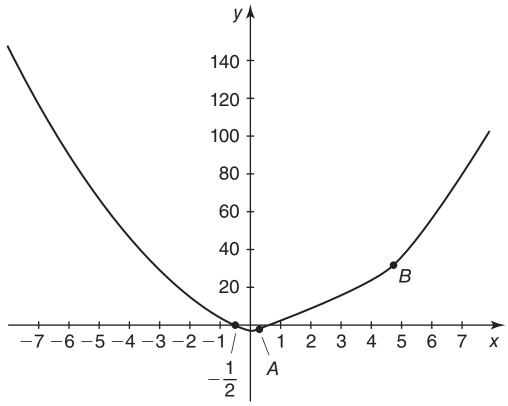
Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, de $h(x) = x^2 + 2x - 3$ e de $f(x) = |x^2 - 5x + 1| + x^2 + 2x - 3$, temos:

	$x < \frac{5 - \sqrt{21}}{2}$	$\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$	$x > \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$
$\lvert x^2 - 5x + 1 \rvert \longrightarrow$	$x^2 - 5x + 1$	$-x^2 + 5x - 1$	$x^2 - 5x + 1$
$\oplus$ $x^2 + 2x - 3 \longrightarrow$	$x^2 + 2x - 3$	$x^2 + 2x - 3$	$x^2 + 2x - 3$
$\lvert x^2 - 5x + 1 \rvert + x^2 + 2x - 3 \longrightarrow$	$2x^2 - 3x - 2$	$7x - 4$	$2x^2 - 3x - 2$

Logo:
$f(x) = |x^2 - 5x + 1| + x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow$

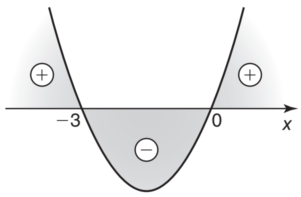
$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2, \text{ se } x \leqslant \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2} \\ 7x - 4, \text{ se } \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{5 + \sqrt{21}}{2} \\ 2x^2 - 3x - 2, \text{ se } x \geqslant \dfrac{5 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de $f(x) = |x^2 - 5x + 1| + x^2 + 2x - 3$ é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



em que $A\left(\dfrac{5 - \sqrt{21}}{2}, \dfrac{27 - 7\sqrt{21}}{2}\right)$ e $B\left(\dfrac{5 + \sqrt{21}}{2}, \dfrac{27 + 7\sqrt{21}}{2}\right)$; assim, o domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \dfrac{27 - 7\sqrt{21}}{2}\right\}$

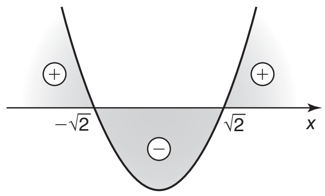
d) $h(x) = |x^2 + 3x| + |x^2 - 2|$
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = x^2 - 2$, temos:
Variação de sinal de $f(x) = x^2 + 3x$



Então:

	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$x > 0$
$\lvert x^2 + 3x \rvert \longrightarrow$	$x^2 + 3x$	$-x^2 - 3x$	$x^2 + 3x$

Variação de sinal de $g(x) = x^2 - 2$



Então:

	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		x
$\|x^2 - 2\|$	$x^2 - 2$		$-x^2 + 2$		$x^2 - 2$

Representando no eixo real os valores de $|f(x)|$, de $|g(x)|$ e de $h(x) = |x^2 + 3x| + |x^2 - 2|$, temos:

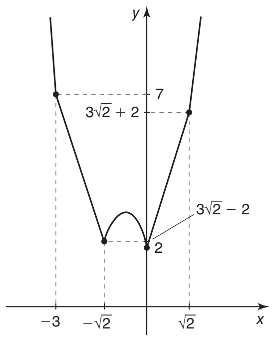
		-3		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		x
$\|x^2 + 3x\|$	$x^2 + 3x$		$-x^2 - 3x$		$-x^2 - 3x$		$x^2 + 3x$		$x^2 + 3x$	
$\|x^2 - 2\|$	$x^2 - 2$		$x^2 - 2$		$-x^2 + 2$		$-x^2 + 2$		$x^2 - 2$	
$h(x)$	$2x^2 + 3x - 2$		$-3x - 2$		$-2x^2 - 3x + 2$		$3x + 2$		$2x^2 + 3x - 2$	

Logo:

$h(x) = |x^2 + 3x| + |x^2 - 2| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 2, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -3x - 2, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -\sqrt{2} \\ -2x^2 - 3x + 2, \text{ se } -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ 3x + 2, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ 2x^2 + 3x - 2, \text{ se } x \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de $h(x) = |x^2 + 3x| + |x^2 - 2|$ é a reunião dos gráficos das sentenças obtidas acima:

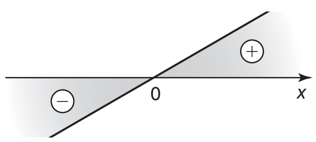


O domínio e o conjunto imagem de $h(x) = |x^2 + 3x| + |x^2 - 2|$ são, respectivamente, $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

e) $f(x) = x^2 + |x| + |x^2 - 1| + |x - 1|$

Estudando a variação de sinal de $g(x) = x$, $h(x) = x^2 - 1$ e $k(x) = x - 1$, temos:

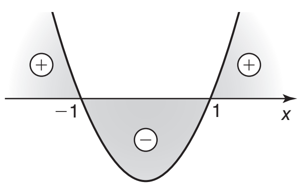
Variação de sinal de $g(x) = x$



Então:

		0		x
$\|x\|$	$-x$		x	

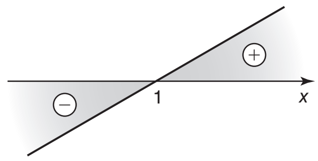
Variação de sinal $h(x) = x^2 - 1$



Então:

		-1		1		x
$\|x^2 - 1\|$	$x^2 - 1$		$-x^2 + 1$		$x^2 - 1$	

Variação de sinal de $k(x) = x - 1$



Então:

		1		x
$\|x - 1\|$	$-x + 1$		$x - 1$	

Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $|h(x)|$, $|k(x)|$, $t(x) = x^2$ e $f(x) = x^2 + |x| + |x^2 - 1| + |x - 1|$, temos:

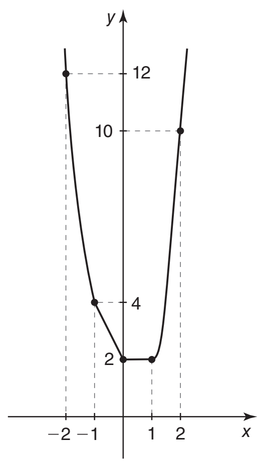
		-1		0		1		x
x^2	x^2		x^2		x^2		x^2	
$\|x\|$	$-x$		$-x$		x		x	
$\|x^2 - 1\|$	$x^2 - 1$		$-x^2 + 1$		$-x^2 + 1$		$x^2 - 1$	
$\|x - 1\|$	$-x + 1$		$-x + 1$		$-x + 1$		$x - 1$	
$f(x)$	$2x^2 - 2x$		$-2x + 2$		2		$2x^2 + 2x - 2$	

Logo:

$f(x) = x^2 + |x| + |x^2 - 1| + |x - 1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant -1 \\ -2x + 2, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x^2 + 2x - 2, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de f é a reunião dos gráficos das sentenças obtidas acima.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente,
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$.

13 a) $|5x - 7| = 1 \Rightarrow 5x - 7 = 1$ ou $5x - 7 = -1$;
logo, $x = \frac{8}{5}$ ou $x = \frac{6}{5}$.
Portanto, $S = \left\{\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right\}$.

b) $|x^2 - 5x| = 6 \Rightarrow x^2 - 5x = 6$ ou $x^2 - 5x = -6$;
logo, $x = 6$ ou $x = -1$ ou $x = 3$ ou $x = 2$.
Portanto, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

c) $|x^2 + x| = 2x - 4$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$2x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$
Pela propriedade P3, temos:
$|x^2 + x| = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x = 2x - 4$ ou
$x^2 + x = -2x + 4$
Seja (I) $x^2 + x = 2x - 4$; então:
$x^2 - x + 4 = 0$
Como $\Delta < 0$, não existem raízes reais para $x^2 - x + 4 = 0$.
Seja (II) $x^2 + x = -2x + 4$; então:
$x^2 + 3x - 4 = 0$
$\therefore x = 1$ ou $x = -4$
Porém, $x = 1$ ou $x = -4$ não convêm, pois não obedecem à condição de existência.
Logo, $S = \varnothing$.

d) $n^2 - 2 \cdot |n| - 8 = 0 \Rightarrow |n|^2 - 2|n| - 8 = 0$
Fazendo $|n| = t$, temos: $t^2 - 2t - 8 = 0$, ou seja, $t = 4$ ou $t = -2$.
Retornando à variável original, chegamos a:
$|n| = 4$ ou $|n| = -2$ (não convêm); logo, $n = \pm 4$.
Portanto, $S = \{-4, 4\}$.

e) $k^2 - |5k| + 4 = 0 \Rightarrow |k|^2 - 5|k| + 4 = 0$
Fazendo $|k| = t$, temos:
$t^2 - 5t + 4 = 0$, ou seja, $t = 4$ ou $t = 1$.
Retornando à variável original, chegamos a:
$|k| = 4$ ou $|k| = 1$.
Logo, $k = \pm 4$ ou $k = \pm 1$.
Portanto, $S = \{-4, -1, 1, 4\}$.

14 a) $|2x - 3| = 5$
Pela propriedade P3, temos:
$|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = 5$ ou $2x - 3 = -5$
$\therefore x = 4$ ou $x = -1$
Logo, $S = \{-1, 4\}$.

b) $|2x^2 - 1| + x = 0 \Rightarrow |2x^2 - 1| = -x$
Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:
$-x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0$
Pela propriedade P3, temos:
$|2x^2 - 1| = -x \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = -x$ ou $2x^2 - 1 = x$
Para $2x^2 - 1 = -x$, temos:
$2x^2 + x - 1 = 0$
$\therefore x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$
Porém, $x = \frac{1}{2}$ não convêm, pois não obedece à condição de existência.
Para $2x^2 - 1 = x$, temos:
$2x^2 - x - 1 = 0$
$\therefore x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$
Porém, $x = 1$ não convêm, pois não obedece à condição de existência.
Logo, $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$.

15 a) $|3x + 6| + |2x + 6| = x$
- $|3x + 6| + |2x + 6| = x$ é equivalente a:
$|3x + 6| + |2x + 6| - x = 0$
- Eliminando o módulo da função
$h(x) = |3x + 6| + |2x + 6| - x$, temos:

	$x < -3$	-3 … -2	$x > -2$
$\|3x + 6\|$	$-3x - 6$	$-3x - 6$	$3x + 6$
$\|2x + 6\|$	$-2x - 6$	$2x + 6$	$2x + 6$
x	x	x	x
$h(x)$	$\mathbf{-6x - 12}$	$\mathbf{-2x}$	$\mathbf{4x + 12}$

Assim:
$$h(x) = \begin{cases} -6x - 12, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -2x, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ 4x + 12, \text{ se } x \geqslant -2 \end{cases}$$
Logo:
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 12 = 0, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -2x = 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ 4x + 12 = 0, \text{ se } x \geqslant -2 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x = -2, \text{ se } x \leqslant -3 \Rightarrow \nexists x \\ x = 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant -2 \Rightarrow \nexists x \\ x = -3, \text{ se } x \geqslant -2 \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$
As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.
Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \varnothing$.

b) $|3x - 4| + |6 - x| = x + 10$
- $|3x - 4| + |6 - x| = x + 10$ é equivalente a:
$|3x - 4| + |6 - x| - x - 10 = 0$
- Eliminando o módulo da função
$h(x) = |3x - 4| + |6 - x| - x - 10$, temos:

	$x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$ … 6	$x > 6$
$\|3x - 4\|$	$-3x + 4$	$3x - 4$	$3x - 4$
$\|6 - x\|$	$6 - x$	$6 - x$	$-6 + x$
$x + 10$	$x + 10$	$x + 10$	$x + 10$
$h(x)$	$\mathbf{-5x}$	$\mathbf{x - 8}$	$\mathbf{3x - 20}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -5x, \text{ se } x \leqslant \frac{4}{3} \\ x - 8, \text{ se } \frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 6 \\ 3x - 20, \text{ se } x \geqslant 6 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 0, \text{ se } x \leqslant \frac{4}{3} \\ x - 8 = 0, \text{ se } \frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 6 \\ 3x - 20 = 0, \text{ se } x \geqslant 6 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 0, \text{ se } x \leqslant \frac{4}{3} \Rightarrow x = 0 \\ x = 8, \text{ se } \frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 6 \Rightarrow \nexists x \\ x = \frac{20}{3}, \text{ se } x \geqslant 6 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \left\{0, \frac{20}{3}\right\}$.

c) $|x^2 - x| - |2x - 4| = x$

- $|x^2 - x| - |2x - 4| = x$ é equivalente a: $|x^2 - x| - |2x - 4| - x = 0$
- Eliminando o módulo da função $h(x) = |x^2 - x| - |2x - 4| - x$, temos:

	0	1	2	x
$\lvert x^2 - x\rvert$	$x^2 - x$	$-x^2 + x$	$x^2 - x$	$x^2 - x$
⊖ $\lvert 2x - 4\rvert$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$2x - 4$
⊖ x	x	x	x	x
$h(x)$	$x^2 - 4$	$-x^2 + 2x - 4$	$x^2 - 4$	$x^2 - 4x + 4$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 2x - 4, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 4, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 4x + 4, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \text{ se } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 2x - 4 = 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 - 4 = 0, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x^2 - 4x + 4, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -2 \text{ ou } x = 2, \text{ se } x \leqslant 0 \Rightarrow x = -2 \\ \text{não existem raízes reais} \Rightarrow \nexists x \\ x = -2 \text{ ou } x = 2, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow x = 2 \\ x = 2, \text{ se } x \geqslant 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \{-2, 2\}$.

d) $|x^2 - 2x| + |x + 3| = x^2$

- $|x^2 - 2x| + |x + 3| = x^2$ é equivalente a: $|x^2 - 2x| + |x + 3| - x^2 = 0$
- Eliminando o módulo da função $h(x) = |x^2 - 2x| + |x + 3| - x^2$, temos:

	−3	0	2	x
$\lvert x^2 - 2x\rvert$	$x^2 - 2x$	$x^2 - 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$
⊕ $\lvert x + 3\rvert$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$	$x + 3$
⊖ x^2	x^2	x^2	x^2	x^2
$h(x)$	$-3x - 3$	$-x + 3$	$-2x^2 + 3x + 3$	$-x + 3$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -3x - 3, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -x + 3, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -2x^2 + 3x + 3, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x + 3, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3 = 0, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -x + 3 = 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -2x^2 + 3x + 3 = 0, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x + 3 = 0, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -1, \text{ se } x \leqslant -3 \Rightarrow \nexists x \\ x = 3, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \Rightarrow \nexists x \\ x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{-4} \text{ ou } x = \frac{-3 - \sqrt{33}}{-4}, \\ \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow \nexists x \\ x = 3, \text{ se } x \geqslant 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

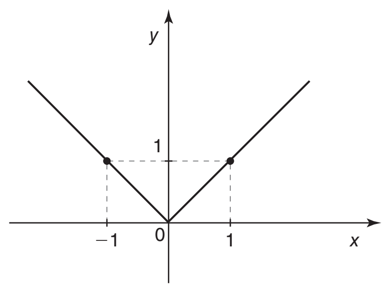
Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \{3\}$.

16 a) Inicialmente, construímos o gráfico da função $h(x) = |x|$. Como

$$h(x) = |x| \Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

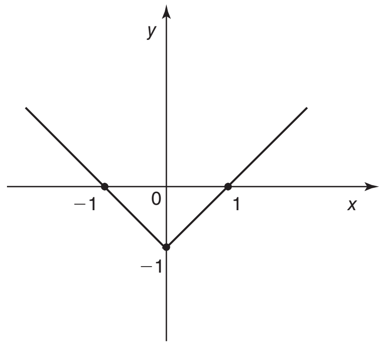
temos:

Gráfico de h



Como $f(x) = |x| - 1 \Leftrightarrow f(x) = h(x) - 1$, temos que o gráfico de f é obtido pela translação vertical de uma unidade para baixo do gráfico de h, isto é:

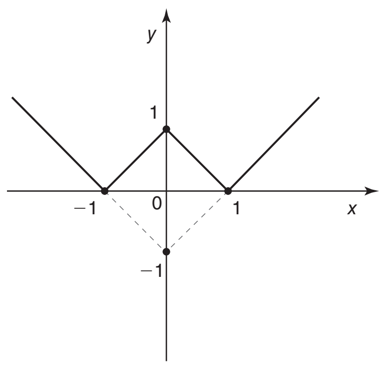
Gráfico de f



O gráfico de f intercepta o eixo Ox nos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ e o eixo Oy no ponto $(0, -1)$.

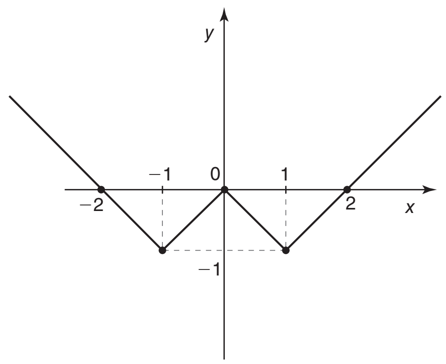
b) Sendo $g(x) = f(f(x))$, temos:
$g(x) = ||x| - 1| - 1$
Inicialmente construímos o gráfico da função $t(x) = ||x| - 1|$, que é obtido do gráfico de f do item **a**, conservando-se os pontos de ordenadas não negativas e transformando os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo Ox:

Gráfico de t



Como $g(x) = ||x| - 1| - 1 \Leftrightarrow g(x) = t(x) - 1$, temos que o gráfico de g é obtido pela translação vertical de uma unidade para baixo do gráfico de t, isto é:

Gráfico de g



O gráfico de g intercepta o eixo Ox nos pontos $(-2, 0)$, $(0, 0)$ e $(2, 0)$ e o eixo Oy no ponto $(0, 0)$.

c) $||x| - 1| - 1 = 5 \Rightarrow ||x| - 1| = 6$
$\therefore |x| - 1 = 6$ ou $|x| - 1 = -6$
$\therefore |x| = 7$ ou $|x| = -5$ (não convêm)
Logo, $x = 7$ ou $x = -7$.

17 **a)** $f(x) = g(x) \Rightarrow |x + 2| = 2|x - 2|$
$\therefore |x + 2| = |2x - 4| \Rightarrow x + 2 = 2x - 4$ ou $x + 2 = -2x + 4$
$\therefore x = 6$ ou $x = \dfrac{2}{3}$
Logo, $S = \left\{6, \dfrac{2}{3}\right\}$.

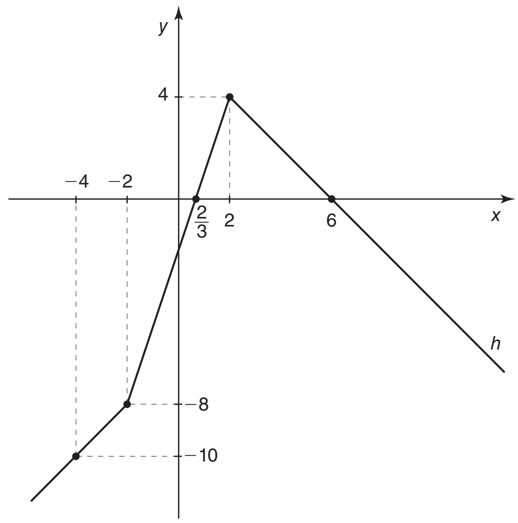
b) A função h é equivalente a $h(x) = |x + 2| - |2x - 4|$.
Eliminando os módulos de h, temos:

	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
$\|x + 2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
− $\|2x - 4\|$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$2x - 4$
=	$x - 6$	$3x - 2$	$-x + 6$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} x - 6, \text{ se } x \leqslant -2 \\ 3x - 2, \text{ se } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x + 6, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Portanto, o gráfico da função h é:



18 Condição de existência: $x - 1 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant 1$

$\left|\dfrac{2 - x}{4}\right| = x - 1 \Rightarrow \dfrac{|2 - x|}{4} = x - 1$
$\therefore |2 - x| = 4x - 4 \Rightarrow 2 - x = 4x - 4$ ou $2 - x = -4x + 4$
$\therefore x = \dfrac{6}{5}$ ou $x = \dfrac{2}{3}$
Como $\dfrac{2}{3} < 1$, a equação modular admite apenas uma equação positiva, $x = \dfrac{6}{5}$.

Alternativa **d**.

19 Para obter as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:
$f(x) = g(x)$

Então:

$|2x - 6| + 2 = x^2 + 5$

- $|2x - 6| + 2 = x^2 + 5$ é equivalente a:
  $|2x - 6| - x^2 - 3 = 0$
- Eliminando o módulo da função
  $h(x) = |2x - 6| - x^2 - 3$, temos:

	$x < 3$	$x > 3$
$\|2x - 6\|$	$-2x + 6$	$2x - 6$
$x^2 + 3$	$x^2 + 3$	$x^2 + 3$
$\|2x - 6\| - x^2 - 3$	$-x^2 - 2x + 3$	$-x^2 + 2x - 9$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, \text{ se } x \leqslant 3 \\ -x^2 + 2x - 9, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 = 0, \text{ se } x \leqslant 3 \\ -x^2 + 2x - 9 = 0, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -3, \text{ se } x \leqslant 3 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3 \\ \text{não existem raízes reais} \Rightarrow \nexists x \end{cases}$$

As soluções descartadas são aquelas que não pertencem aos respectivos intervalos considerados.

Para encontrar os valores das ordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e g, basta substituirmos os valores das abscissas encontradas acima, que são $x = 1$ e $x = -3$, em $f(x)$ ou $g(x)$.

Neste caso, substituímos $x = 1$ e $x = -3$ em $g(x)$. Então, temos:

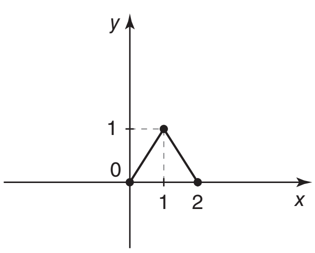
Para $x = 1 \Rightarrow g(1) = 1^2 + 5 = 6$

Para $x = -3 \Rightarrow g(-3) = (-3)^2 + 5 = 14$

Logo, as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e g são (1, 6) e (−3, 14).

20 **I.** V, pois:

Para construir o gráfico de f, primeiro construímos o gráfico de $y = x - 1$, em seguida conservamos os pontos de ordenadas não positivas e transformamos os de ordenadas positivas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico de $y = -|x - 1|$. Finalmente, transladamos este gráfico verticalmente 1 unidade para cima e assim obtemos o gráfico de $f(x) = 1 - |x - 1|$, com $D(f) = [0, 2]$:



No gráfico podemos observar que a área limitada por ele e pelo eixo das abscissas é a de um triângulo de base 2 e altura 1.

Logo, sendo A essa área, temos:

$$A = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

II. V, pois o contradomínio é igual ao conjunto imagem.

III. V, pois:

Para resolver a equação $f(x) = 0{,}5$, temos:

$1 - |x - 1| = 0{,}5 \Rightarrow |x - 1| = 0{,}5$

Pela propriedade P3 deste capítulo, temos:

$|x - 1| = 0{,}5 \Leftrightarrow x - 1 = 0{,}5$ ou $x - 1 = -0{,}5$

$\therefore x = 1{,}5$ ou $x = 0{,}5$

Logo, a soma S das raízes da equação $f(x) = 0{,}5$ é dada por:

$S = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$

Alternativa **d**.

21 **a)** Pelo enunciado, temos que $f(x) = |x - 1|$ e $g(x) = x^2 + 4x - 4$; então:

$f(g(x)) = f(x^2 + 4x - 4)$

Logo:

$f(g(x)) = |x^2 + 4x - 4 - 1| = |x^2 + 4x - 5|$

Portanto, resolvendo a equação $f(g(x)) = 0$, temos:

$|x^2 + 4x - 5| = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

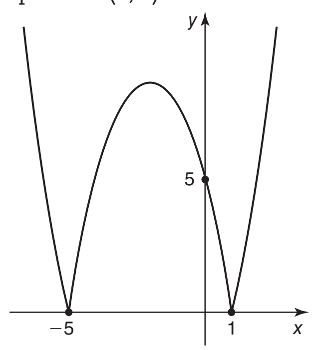
$\therefore x = 1$ ou $x = -5$

Logo, as raízes da equação $f(g(x)) = 0$ são $x = 1$ e $x = -5$.

b) Para esboçar o gráfico de $y = |x^2 + 4x - 5|$, primeiro construímos o gráfico de $y = x^2 + 4x - 5$, em seguida conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim $y = |x^2 + 4x - 5|$.

Os pontos que interceptam o eixo Ox foram encontrados no item **a** deste exercício: (−5, 0) e (1, 0).

A ordenada do ponto comum ao gráfico e ao eixo Oy é obtida por $y = |0^2 + 4 \cdot 0 - 5| = 5$; logo, esse ponto é (0, 5).



22 $|||x - 1| - 3| - 2| = 0$

Pela propriedade P2, temos:

$|||x - 1| - 3| - 2| = 0 \Leftrightarrow ||x - 1| - 3| - 2 = 0$

Então:

$||x - 1| - 3| = 2$

Pela propriedade P3, temos:

$||x - 1| - 3| = 2 \Leftrightarrow |x - 1| - 3 = 2$ ou

$|x - 1| - 3 = -2$

Logo:

$|x - 1| = 5$ ou $|x - 1| = 1$

Novamente pela propriedade P3, temos:

$|x - 1| = 5 \Leftrightarrow x - 1 = 5$ ou $x - 1 = -5$

$\therefore x = 6$ ou $x = -4$

$|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1$ ou $x - 1 = -1$

$\therefore x = 2$ ou $x = 0$

Sendo S a soma das soluções encontradas, então:

$S = 6 + (-4) + 2 + 0 = 4$

Alternativa **d**.

23 Pelo enunciado, temos que A pertence ao gráfico da função f e A pertence ao gráfico da função g; então:

$f(1) = |1^2 + k| + 1 \Leftrightarrow |1 + k| + 1 = 4$

$g(1) = 1^2 - k - 1 \Leftrightarrow 1 - k - 1 = 4 \therefore k = -4$

Logo:

$f(x) = |x^2 - 4| + x$ e $g(x) = x^2 + 3$

Para encontrar as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g, temos:

$f(x) = g(x)$

$|x^2 - 4| + x = x^2 + 3 \Leftrightarrow |x^2 - 4| = x^2 - x + 3$

Observando que $x^2 - x + 3 > 0$ para qualquer x real, pois $\Delta < 0$, temos, pela propriedade P3,

$|x^2 - 4| = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - x + 3$ ou $x^2 - 4 = -x^2 + x - 3$

$\therefore x = 7$ ou $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Logo, os valores das abscissas dos pontos comuns a f e g são $x = 7$ ou $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

Para obter os valores das ordenadas dos pontos comuns aos gráficos de f e de g, substituímos os valores das abscissas encontradas em $g(x)$; então:

se $x = 7 \Rightarrow x^2 + 3 = 7^2 + 3 = 52$

se $x = 1 \Rightarrow x^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4$

se $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{13}{4}$

Logo, os pontos comuns a f e g são (7, 52), (1, 4) e $\left(\frac{-1}{2}, \frac{13}{4}\right)$.

24 $|2x - 1| \geqslant 3 \Rightarrow 2x - 1 \leqslant -3$ ou $2x - 1 \geqslant 3$

$\therefore x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$

Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

Alternativa **a**.

25 $1 < |x - 3| < 4 \Rightarrow |x - 3| < 4$ e $|x - 3| > 1$,

ou seja, $\begin{cases} |x - 3| < 4 \quad \text{(I)} \\ |x - 3| > 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Resolução da inequação (I):

$-4 < x - 3 < 4 \Rightarrow x - 3 < 4$ e $x - 3 > -4$

$\therefore -1 < x < 7$

Assim: $S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$

Resolução da inequação (II):

$x - 3 < -1$ ou $x - 3 > 1$

$\therefore x < 2$ ou $x > 4$

Assim: $S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

O conjunto solução S do sistema é dado por $S_I \cap S_{II}$, ou seja:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \text{ ou } 4 < x < 7\}$

Alternativa **a**.

26 $|x + 1| < 3$

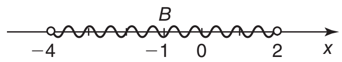
Pela propriedade P9, temos:

$-3 < x + 1 < 3$

Assim:

$|x + 1| < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$

Representando as soluções em um eixo real, temos:



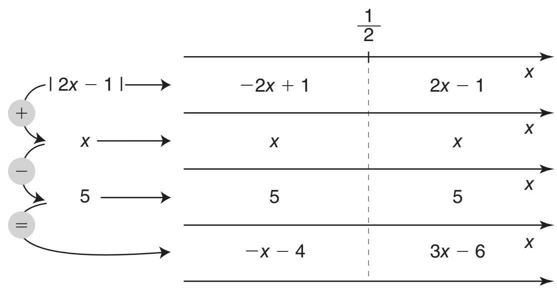
Logo, qualquer solução da inequação está associada a um ponto do eixo real cuja distância ao ponto B, de abscissa −1, é menor que 3.

Alternativa **c**.

27 A inequação é equivalente a:

$|2x - 1| + x - 5 < 0$

Eliminando o módulo da função $h(x) = |2x - 1| + x - 5$, temos:



Assim:

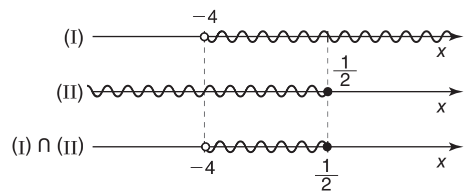
$$h(x) = \begin{cases} -x - 4, \text{ se } x \leqslant \frac{1}{2} \\ 3x - 6, \text{ se } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 4 < 0, \text{ se } x \leqslant \frac{1}{2} \\ 3x - 6 < 0, \text{ se } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

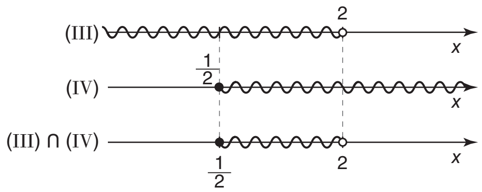
- A primeira sentença exige que:

$$\underbrace{x > -4}_{\text{(I)}} \text{ e } \underbrace{x \leqslant \frac{1}{2}}_{\text{(II)}}$$



- A segunda sentença exige que:

$$\underbrace{x < 2}_{\text{(III)}} \text{ e } \underbrace{x \geq \frac{1}{2}}_{\text{(IV)}}$$



O conjunto solução S da inequação proposta é formado pelos números reais que satisfazem a 1ª ou a 2ª sentença; logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 2\}$.
Alternativa **e**.

28 Se $x \in (]3, 6] \cup]5, 9[)$, temos:
$x \in]3, 9[\Rightarrow 3 < x < 9$
Subtraindo 6 de cada membro, obtemos:
$3 - 6 < x - 6 < 9 - 6 \Rightarrow -3 < x - 6 < 3$
Assim, pela propriedade P9, concluímos que $|x - 6| < 3$.
Alternativa **d**.

29 **a)** $|x - 1| + |6x + 3| > x \Rightarrow$
$\Rightarrow |x - 1| + |6x + 3| - x > 0$
Eliminando os módulos da função $h(x) = |x - 1| + |6x + 3| - x$, temos:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x > 1$
$\lvert x - 1\rvert$	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$
(+) $\lvert 6x + 3\rvert$	$-6x - 3$	$6x + 3$	$6x + 3$
(−) x	x	x	x
$h(x)$	$\mathbf{-8x - 2}$	$\mathbf{4x + 4}$	$\mathbf{6x + 2}$

Logo:

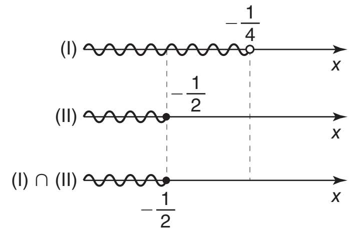
$$h(x) = \begin{cases} -8x - 2, \text{ se } x \leq -\frac{1}{2} \\ 4x + 4, \text{ se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 6x + 2, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Então:

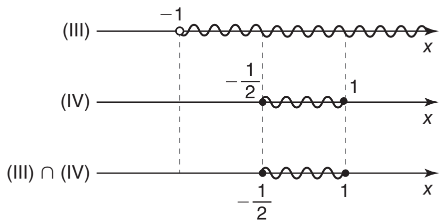
$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 2 > 0, \text{ se } x \leq -\frac{1}{2} \\ 4x + 4 > 0, \text{ se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 6x + 2 > 0, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x < -\frac{1}{4}, \text{ se } x \leq -\frac{1}{2} \\ x > -1, \text{ se } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x > -\frac{1}{3}, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

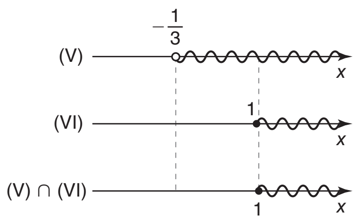
A 1ª sentença exige que:
$x < -\frac{1}{4}$ (I) e $x \leq -\frac{1}{2}$ (II)



A 2ª sentença exige que:
$x > -1$ (III) e $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ (IV)



A 3ª sentença exige que:
$x > -\frac{1}{3}$ (V) e $x \geq 1$ (VI)



O conjunto solução S da inequação proposta é o conjunto dos valores que satisfazem a 1ª ou a 2ª ou a 3ª sentença.
Logo, $S = \mathbb{R}$.

b) $|8x - 16| + |5x + 15| < 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow |8x - 16| + |5x + 15| - 10 < 0$
Eliminando os módulos da função $h(x) = |8x - 16| + |5x + 15| - 10$, temos:

	$x < -3$	$-3 < x < 2$	$x > 2$
$\lvert 8x - 16\rvert$	$-8x + 16$	$-8x + 16$	$8x - 16$
(+) $\lvert 5x + 15\rvert$	$-5x - 15$	$5x + 15$	$5x + 15$
(−) 10	10	10	10
$h(x)$	$\mathbf{-13x - 9}$	$\mathbf{-3x + 21}$	$\mathbf{13x - 11}$

Logo:

$$h(x) = \begin{cases} -13x - 9, \text{ se } x \leq -3 \\ -3x + 21, \text{ se } -3 \leq x \leq 2 \\ 13x - 11, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$$

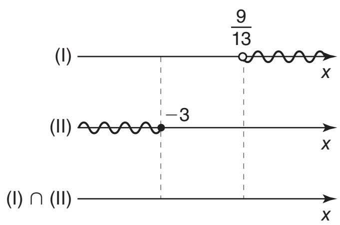
Então:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -13x - 9 < 0, \text{ se } x \leqslant -3 \\ -3x + 21 < 0, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ 13x - 11 < 0, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

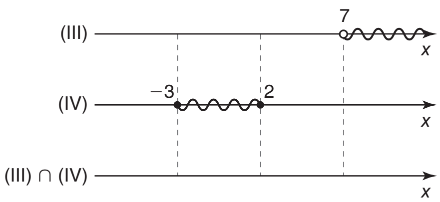
$$\therefore \begin{cases} x > \dfrac{9}{13}, \text{ se } x \leqslant -3 \\ x > 7, \text{ se } -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ x < \dfrac{11}{13}, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

A 1ª sentença exige que:

$x > \dfrac{9}{13}$ (I) e $x \leqslant -3$ (II)

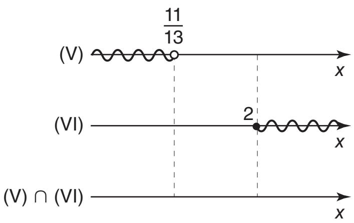


A 2ª sentença exige que:
$x > 7$ (III) e $-3 \leqslant x \leqslant 2$ (IV)



A 3ª sentença exige que:

$x < \dfrac{11}{13}$ (V) e $x \geqslant 2$ (VI)



O conjunto solução S da inequação proposta é o conjunto solução dos valores que satisfazem a 1ª ou a 2ª ou a 3ª sentença.
Logo, $S = \varnothing$.

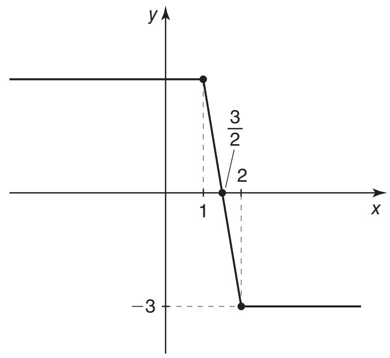
30 Resolvendo $|6 - 3x| < 3|x - 1| \Rightarrow |6 - 3x| < |3(x - 1)|$
$\therefore |6 - 3x| - |3x - 3| < 0$
Eliminando os módulos da função
$h(x) = |6 - 3x| - |3x - 3|$, temos:

		1	2
$\lvert 6 - 3x \rvert$	$6 - 3x$	$6 - 3x$	$-6 + 3x$
$\lvert 3x - 3 \rvert$	$-3x + 3$	$3x - 3$	$3x - 3$
$h(x)$	**3**	$\mathbf{-6x + 9}$	**−3**

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x \leqslant 1 \\ -6x + 9, \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -3, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

O gráfico de h é a reunião dos gráficos obtidos das sentenças acima:



Pelo gráfico de $h(x)$, podemos concluir que $h(x) < 0$ quando $x > \dfrac{3}{2}$.

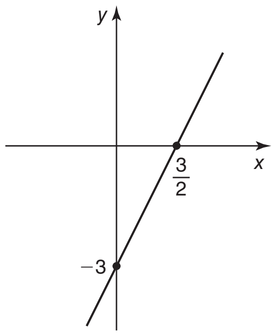
Logo, o conjunto solução S da inequação proposta é

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$.

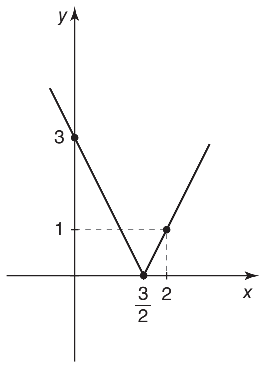
Alternativa **c**.

31 **a)** Para obter o gráfico de $f(x) = |2x - 3| + 2$, temos:

- gráfico de $y = 2x - 3$

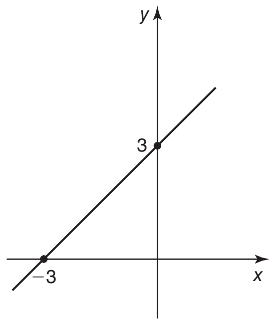


- No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |2x - 3|$:

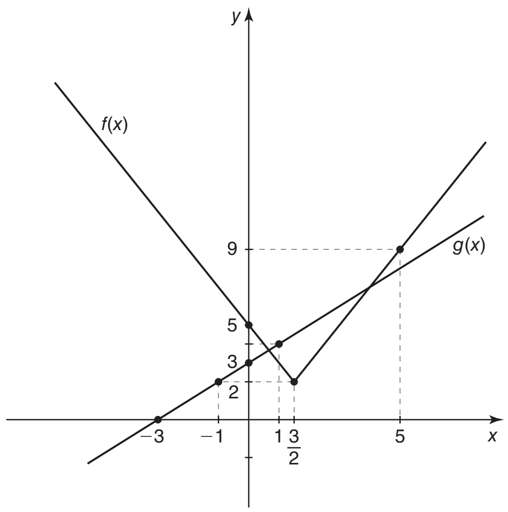


Finalmente, transladamos o gráfico anterior verticalmente 2 unidades para cima, obtendo o gráfico de f.

O gráfico de $g(x) = x + 3$ é:



Então, construindo os gráficos de f e g no mesmo plano cartesiano, temos:



Para encontrar as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g, basta fazer $f(x) = g(x)$; então:

$|2x - 3| + 2 = x + 3$

A equação $|2x - 3| + 2 = x + 3$ é equivalente a:

$|2x - 3| + 2 - x - 3 = 0 \Rightarrow |2x - 3| - x - 1 = 0$

Eliminando o módulo da função $h(x) = |2x - 3| - x - 1$, temos:

	$x < \frac{3}{2}$	$x \geqslant \frac{3}{2}$
$\lvert 2x - 3 \rvert$	$-2x + 3$	$2x - 3$
$-x - 1$	$-x - 1$	$-x - 1$
$\lvert 2x - 3 \rvert - x - 1$	$\mathbf{-3x + 2}$	$\mathbf{x - 4}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} -3x + 2, \text{ se } x < \frac{3}{2} \\ x - 4, \text{ se } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2 = 0, \text{ se } x < \frac{3}{2} \\ x - 4 = 0, \text{ se } x \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \text{ se } x < \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x = 4, \text{ se } x \geqslant \frac{3}{2} \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Logo, o valor das abscissas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g são $\frac{2}{3}$ e 4.

Substituindo esses valores encontrados em $g(x)$, temos:

- $x + 3 = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$
- $x + 3 = 4 + 3 = 7$

Logo, o valor das ordenadas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g são $\frac{11}{3}$ e 7.

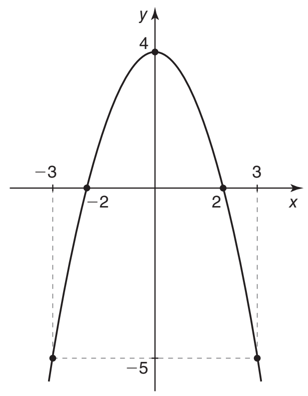
Então, os pontos comuns têm coordenadas:

$\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e $(4, 7)$

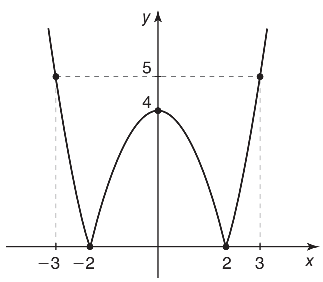
b) A partir dos gráficos de f e de g obtidos no item **a** deste exercício e também conhecendo as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de f e de g, podemos concluir que $f(x) > g(x)$ para $x < \frac{2}{3}$ ou $x > 4$.

32 **a)** Para obter o gráfico de $f(x) = |4 - x^2|$, temos:

- Gráfico de $y = 4 - x^2$

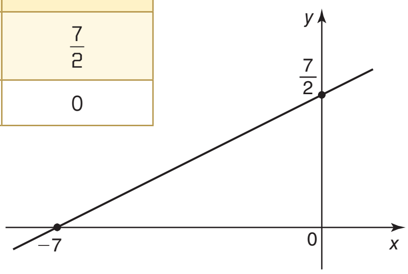


No gráfico anterior, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $f(x) = |4 - x^2|$:



- Gráfico de $g(x) = \dfrac{x + 7}{2}$

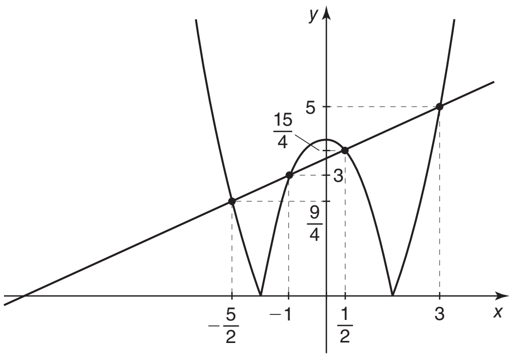
x	$y = \dfrac{x + 7}{2}$
0	$\dfrac{7}{2}$
-7	0



Para determinar os pontos comuns aos dois gráficos, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = |4 - x^2| \\ y = \dfrac{x + 7}{2} \end{cases}$$

Assim:
$|4 - x^2| = \dfrac{x + 7}{2}$
Sob a condição de existência $x \geqslant -7$, obtemos:
$4 - x^2 = \dfrac{x + 7}{2}$ ou $4 - x^2 = -\dfrac{x + 7}{2}$
Ou seja, $x = -1$ ou $x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 3$ ou $x = -\dfrac{5}{2}$.
Substituindo cada um desses valores na equação $y = \dfrac{x + 7}{2}$, obtemos, respectivamente, $y = 3$, $y = \dfrac{15}{4}$, $y = 5$ e $y = \dfrac{9}{4}$. Assim, representando os dois gráficos no plano cartesiano, temos:



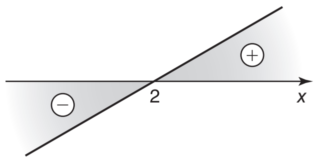
b) Observando o gráfico do item **a**, concluímos que o conjunto solução da inequação $|4 - x^2| \leqslant \dfrac{x + 7}{2}$ é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant -1 \text{ ou } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

33 a) Pelo gráfico dado no enunciado, temos que o gráfico de g é uma reta, portanto, sua lei é da forma $g(x) = ax + b$. Como os pontos de coordenadas $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ pertencem à reta do gráfico de g, temos:
Do ponto $(0, 1)$: $1 = b$
Do ponto $(-1, 0)$: $0 = -a + 1$
Podemos concluir que $b = 1$ e $a = 1$; portanto:
$g(x) = x + 1$
Para determinar as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos, temos:
$g(x) = f(x)$
Resolvendo, obtemos:
$x + 1 = |2x - 4| + x \Rightarrow |2x - 4| = 1$
Pela propriedade P3 deste capítulo, temos:
$|2x - 4| = 1 \Leftrightarrow 2x - 4 = 1$ ou $2x - 4 = -1$
$\therefore x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = \dfrac{3}{2}$
Logo, os valores das abscissas dos pontos comuns aos dois gráficos são $x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = \dfrac{3}{2}$.
Para encontrar os valores das ordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos, basta substituirmos os valores das abscissas encontradas em $f(x)$ ou $g(x)$.
Neste caso, substituímos $x = \dfrac{5}{2}$ e $x = \dfrac{3}{2}$ em $g(x)$; então:
- para $x = \dfrac{5}{2}$, temos $x + 1 = \dfrac{5}{2} + 1 = \dfrac{7}{2}$
- para $x = \dfrac{3}{2}$, temos $x + 1 = \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{5}{2}$

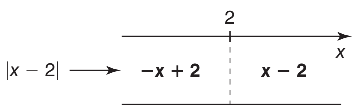
Portanto, as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos são $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$ e $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

b) Pelo item **a**, observamos que o gráfico de g está abaixo do gráfico de f à esquerda da abscissa $\dfrac{3}{2}$ e à direita da abscissa $\dfrac{5}{2}$.
Assim, concluímos que o conjunto solução da inequação $g(x) \leqslant f(x)$ é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{3}{2} \text{ ou } x \geqslant \dfrac{5}{2}\right\}$

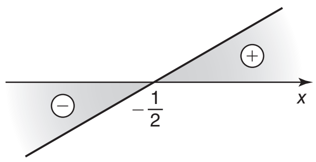
34 a) Do enunciado deste exercício, temos:
$f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$
Estudando a variação de sinal de $g(x) = x - 2$, temos:



Então:



Estudando a variação de sinal de $h(x) = 2x + 1$, temos:



Então:

	$x < -\frac{1}{2}$	$x > -\frac{1}{2}$
$\lvert 2x + 1\rvert \longrightarrow$	$-2x - 1$	$2x + 1$

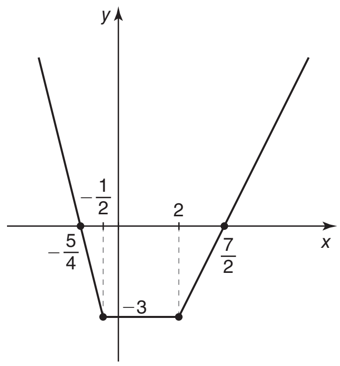
Representando no eixo real os valores de $|g(x)|$, $|h(x)|$, $k(x) = -x - 6$ e de $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$, temos:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$
$\lvert x - 2\rvert$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$
$\oplus$ $\lvert 2x + 1\rvert$	$-2x - 1$	$2x + 1$	$2x + 1$
$\oplus$ $-x - 6$	$-x - 6$	$-x - 6$	$-x - 6$
$f(x)$	$-4x - 5$	-3	$2x - 7$

Logo:
$f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -4x - 5, \text{ se } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ -3, \text{ se } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \\ 2x - 7, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Finalmente, o gráfico de f é a reunião dos gráficos das sentenças obtidas:



b) Resolvendo $f(x) > 2x + 2$, temos:
$|x - 2| + |2x + 1| - x - 6 > 2x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x - 2| + |2x + 1| - 3x - 8 > 0$
Eliminando os módulos de
$t(x) = |x - 2| + |2x + 1| - 3x - 8$, temos:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$
$\lvert x - 2\rvert$	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$
$\oplus$ $\lvert 2x + 1\rvert$	$-2x - 1$	$2x + 1$	$2x + 1$
$\oplus$ $-3x - 8$	$-3x - 8$	$-3x - 8$	$-3x - 8$
$t(x)$	$-6x - 7$	$-2x - 5$	-9

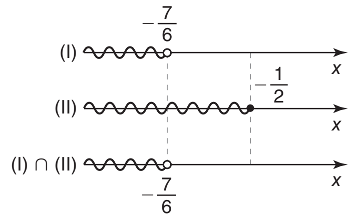
Assim:

$$t(x) = \begin{cases} -6x - 7, \text{ se } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ -2x - 5, \text{ se } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \\ -9, \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

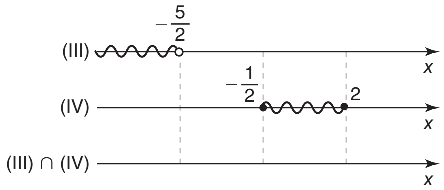
Logo:

$$t(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 7 > 0, \text{ se } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ -2x - 5 > 0, \text{ se } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

Excluímos $t(x) = -9$, pois é sempre negativo e queremos $t(x) > 0$.
A 1ª sentença exige que:
$x < -\frac{7}{6}$ (I) e $x \leqslant -\frac{1}{2}$ (II)



A 2ª sentença exige que:
$x < -\frac{5}{2}$ (III) e $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ (IV)



O conjunto solução S da inequação $f(x) > 2x + 2$ é o conjunto solução dos valores que satisfazem a 1ª ou a 2ª sentença.
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{7}{6}\right\}$.
Nota: Mostre, também, como o item **b** pode ser resolvido com o auxílio do gráfico do item **a**. Basta determinar a abscissa do ponto comum aos gráficos de f e de $g(x) = 2x + 2$.

35 Para que $|x - 3|$ seja menor que qualquer número positivo, devemos ter $|x - 3| = 0$; portanto, $x = 3$.

36 $\left|x - \left(\frac{a + b}{2}\right)\right| < \frac{b - a}{2}$
Pela propriedade P9, temos:
$-\left(\frac{b - a}{2}\right) < x - \left(\frac{a + b}{2}\right) < \frac{b - a}{2}$
Adicionando $\frac{a + b}{2}$ aos membros da desigualdade, obtemos:
$\frac{a + b}{2} - \left(\frac{b - a}{2}\right) < x < \frac{b - a}{2} + \frac{a + b}{2}$
Portanto: $a < x < b$.
Alternativa **e**.

Exercícios contextualizados

37 a) $f(x) = \left|\dfrac{3x - 6.000}{1.000}\right| + 200 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = \left|\dfrac{3x}{1.000} - 6\right| + 200$

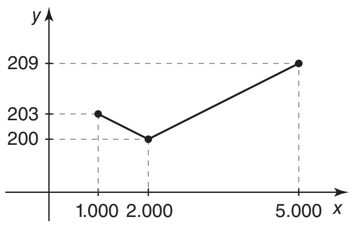
Para $x \geqslant 2.000$, temos: $f(x) = \dfrac{3x}{1.000} - 6 + 200$

Para $x < 2.000$, temos: $f(x) = -\dfrac{3x}{1.000} + 6 + 200$

Logo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{1.000} + 194, \text{ se } 2.000 \leqslant x \leqslant 5.000 \\ -\dfrac{3x}{1.000} + 206, \text{ se } 1.000 \leqslant x < 2.000 \end{cases}$$

Assim, temos o gráfico de f:



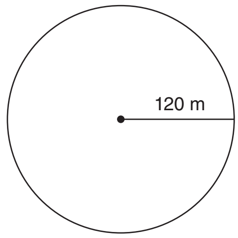
b) Pelo gráfico do item **a**, temos que para a estimativa de 5.000 votos a margem de erro é 209 votos para mais ou para menos. Logo, o número máximo de votos que pode receber a chapa Renovação é 5.209.

c) Pelo gráfico do item **a**, temos que para a estimativa de 1.000 votos a margem de erro é 203 votos para mais ou para menos. Logo, o número mínimo de votos que pode receber a chapa Renovação é 797.

38 a) A distância entre os objetos é dada por:
$|f(t) - g(t)| = |80 - 5t^2 - 60 + 6t^2|$
Então:
$|t^2 + 20| = 24$
Pela propriedade P3 deste capítulo, temos:
$|t^2 + 20| = 24 \Leftrightarrow t^2 + 20 = 24$ ou $t^2 + 20 = -24$
$\therefore\ t = 2$ ou $t = -2$
Como estamos tratando de unidade de tempo, descartamos os valores negativos.
Logo, depois de 2 segundos a distância entre os objetos era 24 m.

b) Do item **a** deste exercício, temos que a distância entre os objetos é dada por $|t^2 + 20|$.
Para saber quanto tempo depois de iniciada a queda a distância entre os objetos é igual à distância do objeto A ao solo, precisamos resolver:
$|t^2 + 20| = |80 - 5t^2|$
Pela propriedade P4 deste capítulo, temos:
$|t^2 + 20| = |80 - 5t^2| \Leftrightarrow t^2 + 20 = 80 - 5t^2$ ou $t^2 + 20 = -80 + 5t^2$
$\therefore\ t = \sqrt{10}$ ou $t = -\sqrt{10}$ ou $t = 5$ ou $t = -5$
Como estamos tratando de unidade de tempo, descartamos os valores negativos para t. Descartamos também o valor $t = 5$, pois $f(5) < 0$, o que é absurdo, pois $f(t)$ indica uma distância.
Concluímos, então, que a distância entre os objetos foi igual à distância do objeto A ao solo depois de $\sqrt{10}$ s do início da queda.

39

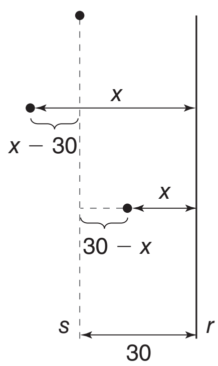


a) Para que P seja um ponto na margem do lago, a distância de P ao centro do lago deve ser igual ao raio do lago artificial em forma de círculo; então:
$|150 - x| = 120$
Pela propriedade P3 deste capítulo, temos:
$|150 - x| = 120 \Leftrightarrow 150 - x = 120$ ou $150 - x = -120$
$\therefore\ x = 30$ ou $x = 270$
Logo, os possíveis valores de x para que P seja um ponto na margem do lago são 30 m e 270 m.

b) Para que P não esteja nem dentro do lago nem na margem, a distância de P ao centro do lago precisa ser maior que a medida do raio do lago; então:
$|150 - x| > 120$
Pela propriedade P11 deste capítulo, temos:
$|150 - x| > 120 \Leftrightarrow 150 - x < -120$ ou $150 - x > 120$
$\therefore\ x > 270$ ou $x < 30$
Logo, os possíveis valores de x, em metro, para que P não esteja nem dentro do lago nem na margem são $x > 270$ ou $x < 30$.

40 a) Pelo enunciado, temos $|x - 30| \leqslant 12$; então:
$|x - 30| \leqslant 12$
Pela propriedade P8 deste capítulo, temos:
$|x - 30| \leqslant 12 \Leftrightarrow -12 \leqslant x - 30 \leqslant 12$
$\therefore\ 18 \leqslant x \leqslant 42$
Logo, a máxima distância que se pode esperar entre a reta r e a esfera é 42 cm e a mínima distância que se pode esperar entre a reta r e a esfera é 18 cm.

b) Seja s a reta vertical que passa pelo ponto de onde foi abandonada a esfera. O desvio da esfera, em cada instante, após o início da queda, é a distância entre a esfera e a reta s. Assim, a expressão $|x - 30|$ representa todos os desvios possíveis. Como $|x - 30| \leqslant 12$, concluímos que o desvio máximo é 12 cm e o mínimo é 0 cm.



41 Pelo enunciado, temos que a variação de preço da caixa de canetas hidrográficas da marca A é de até 3 reais; então as canetas podem ser tanto até 3 reais mais caras ou mais baratas. Assim, temos:
$0 \leqslant x - y \leqslant 3$ ou $0 \leqslant y - x \leqslant 3$, que equivale a:
$0 \leqslant x - y \leqslant 3$ ou $0 \geqslant x - y \geqslant -3$; portanto:
$|x - y| \leqslant 3$
Alternativa **e**.

42 Do enunciado, temos que $|x - 200.000| \leqslant 125.000$. Então, pela propriedade P8 deste capítulo, temos:
$|x - 200.000| \leqslant 125.000 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ -125.000 \leqslant x - 200.000 \leqslant 125.000$
$\therefore 75.000 \leqslant x \leqslant 325.000$
Logo, os níveis de produção x são tais que
$75.000 \leqslant x \leqslant 325.000$.
Alternativa **c**.

43 A distância entre A e B é dada por $|f(t) - g(t)| = |3t^2 - 8t|$, e a distância entre B e O é $g(t) = t^2 + 9t$. Assim, os valores de t que satisfazem a condição estabelecida são tais que:
$|3t^2 - 8t| < t^2 + 9t$
ou, de forma equivalente:
$|3t^2 - 8t| - (t^2 + 9t) < 0$
Eliminando o módulo da função
$h(t) = |3t^2 - 8t| - (t^2 + 9t)$, temos:

	$t < 0$	0 a $\frac{8}{3}$	$t > \frac{8}{3}$
$\lvert 3t^2 - 8t\rvert$	$3t^2 - 8t$	$-3t^2 + 8t$	$3t^2 - 8t$
$(t^2 + 9t)$	$t^2 + 9t$	$t^2 + 9t$	$t^2 + 9t$
$\lvert 3t^2 - 8t\rvert - (t^2 + 9t)$	$\mathbf{2t^2 - 17t}$	$\mathbf{-4t^2 - t}$	$\mathbf{2t^2 - 17t}$

Assim:

$$h(x) = \begin{cases} 2t^2 - 17t, \text{ se } t \leqslant 0 \\ -4t^2 - t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{8}{3} \\ 2t^2 - 17t, \text{ se } t \geqslant \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 - 17t < 0, \text{ se } t \leqslant 0 \\ -4t^2 - t < 0, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{8}{3} \\ 2t^2 - 17t < 0, \text{ se } t \geqslant \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

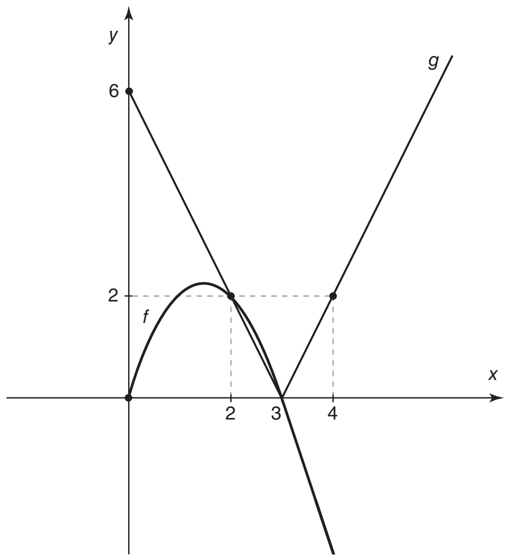
De onde obtemos:

$$\therefore \begin{cases} 0 < t < \dfrac{17}{2}, \text{ se } t \leqslant 0 & \text{(I)} \\ t < -\dfrac{1}{4} \text{ ou } t > 0, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{8}{3} & \text{(II)} \\ 0 < t < \dfrac{17}{2}, \text{ se } t \geqslant \dfrac{8}{3} & \text{(III)} \end{cases}$$

Não existem valores de t que satisfaçam (I); os valores de t que satisfazem (II) são $0 < t \leqslant \frac{8}{3}$; e os valores de t que satisfazem (III) são tais que $\frac{8}{3} \leqslant t < \frac{17}{2}$.
Logo, $0 < t \leqslant \frac{17}{2}$ foi o intervalo de tempo em que a distância entre os automóveis A e B foi menor que a distância de B ao ponto O.

44 a) Substituindo C por 0,5 na desigualdade apresentada, temos:
$(3 - 0{,}5) \cdot |0{,}5| - 2 \cdot |0{,}5 - 3| \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 2{,}5 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 2{,}5 \geqslant 0$
$\therefore -3{,}75 \geqslant 0$ (Falso!)
Como a desigualdade não é satisfeita para C = 0,5, concluímos que a concentração do medicamento no sangue não pode ser 0,5 mg/L.

b) A concentração C é necessariamente um número positivo ou nulo e, portanto, $|C| = C$. Assim, a inequação apresentada é equivalente a:
$(3 - C) \cdot C - 2|C - 3| \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 3C - C^2 \geqslant 2|C - 3|$
$\therefore 3C - C^2 \geqslant |2C - 6|$
Vamos resolver essa inequação graficamente. Para isso, construímos no plano cartesiano os gráficos das funções $f(C) = 3C - C^2$ e $g(C) = |2C - 6|$, para $C \geqslant 0$:



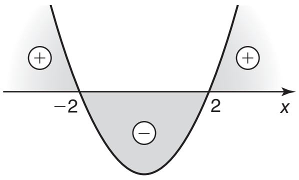
Analisando o gráfico, observamos que $f(C) \geqslant g(C)$ se, e somente se, $2 \leqslant C \leqslant 3$. Logo, a menor concentração do medicamento na corrente sanguínea é 2 mg/L.

Exercícios de revisão cumulativa

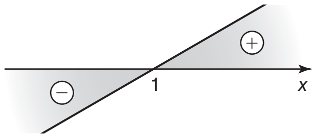
1 Ordenada de P:
$y_P = f(x_P)$
$y_P = (x_P)^2 = 3^2 = 9$
Portanto, P(3, 9).
$OP = \sqrt{(3 - 0)^2 + (9 - 0)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

2 $\dfrac{x^2 - 4}{x - 1} \geqslant 0$

Condição de existência:
$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
Seja $f(x) = x^2 - 4$; então:

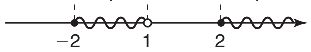


Seja $g(x) = x - 1$; então:



Representando $f(x)$, $g(x)$ e $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ em um quadro de sinais, temos:

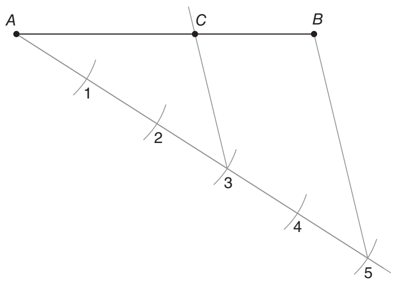
	−2	1	2	x
f	+	–	–	+
g	–	–	+	+
$\frac{f}{g}$	–	+	–	+



Pelo quadro acima, podemos concluir que o conjunto solução S é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

O valor 1 foi descartado pela condição de existência.

3



$AB = u$

$AC = \dfrac{3}{5}u$

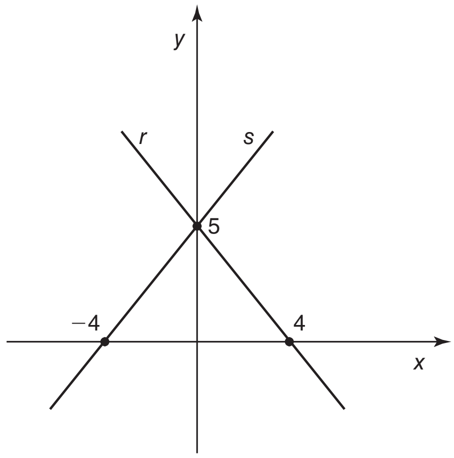
Análise da resolução

1 Sendo k a abscissa do ponto comum à reta e ao eixo das abscissas, temos:

$$\frac{|k| \cdot 5}{2} = 10 \Rightarrow |k| = 4$$

$$\therefore\ k = 4 \text{ ou } k = -4$$

Assim, há duas retas possíveis, conforme mostram os gráficos a seguir:



A reta r passa pelos pontos (0, 5) e (4, 0), e sua equação é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Logo:

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 4 + b \end{cases} \Rightarrow b = 5 \text{ e } a = -\frac{5}{4}$$

Assim, a equação da reta r é $y = -\dfrac{5x}{4} + 5$.

A reta s passa pelos pontos (0, 5) e (−4, 0), e sua equação é da forma $y = cx + d$, com $\{c, d\} \subset \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. Logo:

$$\begin{cases} 5 = c \cdot 0 + d \\ 0 = c \cdot (-4) + d \end{cases} \Rightarrow d = 5 \text{ e } c = \frac{5}{4}$$

Assim, a equação da reta s é $y = \dfrac{5x}{4} + 5$.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Na primeira opção, o total a prazo é R$ 3.731,98 e o valor à vista é R$ 3.200,00.

Assim: $3.731,98 - 3.200,00 = 531,98$

Portanto, se Bruna optar pela primeira opção, ela pagará R$ 531,98 de juro no total.

2 Somando o rendimento mensal nos 10 meses, obtemos:

$5,7 + 7,03 + 8,37 + 9,71 + 11,07 + 12,43 + 13,8 +$
$+ 15,17 + 16,56 + 17,95 = 117,79$

Logo, na segunda opção, a poupança renderá R$ 117,79 em 10 meses.

Exercícios propostos

1 a) $45\% = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

b) $240\% = \frac{240}{100} = \frac{12}{5}$

c) $0,5\% = \frac{0,5}{100} = \frac{5}{1.000} = \frac{1}{200}$

2 a) $24\% = \frac{24}{100} = 0,24$

b) $12\% = \frac{12}{100} = 0,12$

c) $124\% = \frac{124}{100} = 1,24$

d) $0,8\% = \frac{0,8}{100} = 0,008$

3 a) $0,25 = 0,25 \cdot \frac{100}{100} = \frac{25}{100} = 25\%$

b) $0,4 = 0,4 \cdot \frac{100}{100} = \frac{40}{100} = 40\%$

c) $2,5 = 2,5 \cdot \frac{100}{100} = \frac{250}{100} = 250\%$

d) $0,004 = 0,004 \cdot \frac{100}{100} = \frac{0,4}{100} = 0,4\%$

4 a) $\frac{1}{8} = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$

b) $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$

c) $\frac{7}{5} = \frac{140}{100} = 140\%$

5 $32\% \cdot 40\% = \frac{32}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{1.280}{10.000} = \frac{12,8}{100} = 12,8\%$

6 $0,28 \cdot 1.200 = 336$

Logo, 336 dos entrevistados votariam no candidato A.

7 O total t arrecadado, em dólares, é dado por:

$t = 0,0001 \cdot 1,2 \cdot 10^{12} \cdot 5 \cdot 52 = 3,12 \cdot 10^{10}$, que equivale a 31,2 bilhões de dólares.

Alternativa **d**.

8 Sendo a e b os preços dos carros das marcas A e B, respectivamente, temos:

$a + 0,25a = b \Rightarrow 1,25a = b$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{1,25} = 0,80 \Rightarrow a = 0,80b$

Logo, o preço do carro da marca A é 80% do preço do carro de marca B.

Alternativa **b**.

9 Sendo m o número de mulheres, temos que o número de homens é $(315 - m)$; portanto:

$0,25m = 0,2(315 - m) \Rightarrow m = 140$

Logo, 140 mulheres participam dessa assembleia.

Alternativa **a**.

10 Sendo p o percentual de votos do vencedor, em relação ao total de eleitores participantes da eleição, temos:

$p = 51\%\ (100\% - 9\% - 11\%) = 51\% \cdot 80\%$

$\therefore p = 40,8\%$

Alternativa **b**.

11 a) $x \Rightarrow 135,4 - 91,2 = 44,2$

$y = 152,28 - 94,82 = 57,46$

b) O percentual p de crescimento da balança comercial de 2009 para 2010 é dado por:

$p = \frac{57,46 - 44,2}{44,2} = 0,3 = 30\%$

12 O percentual p de candidatos que optaram pelo curso de administração é dado por:

$p = 30\% \cdot 30\% = 9\%$

Alternativa **a**.

13 Sendo x o número de homens que devem se retirar da sala, temos:

$\frac{97 - x}{100 - x} = 0,96 \Rightarrow x = 25$

Alternativa **e**.

14 Sendo m a massa total da escultura, em quilograma, temos:

$0,58m = 37,7 \Rightarrow m = 65$

Logo, massa da escultura é 65 kg.

15 Sendo x o salário do operário, em real, temos:

$0,1x + 5 = 0,125x \Rightarrow x = 200$

Logo, o salário do operário é R$ 200,00.

16 O lucro mensal L, em real, para x cintos produzidos e vendidos é dado por

$L = 3,50x - 6.000 - 2x \Rightarrow L = 1,5x - 6.000$

Atualmente, o lucro é R$ 9.000,00; portanto:

$9.000 = 1,50x - 6.000 \Rightarrow x = 10.000$

Ou seja, a venda da produção de 10.000 cintos gera o lucro de R$ 9.000,00. Para dobrar o lucro sem aumentar o custo fixo e o preço de venda, devem ser produzidos e vendidos y cintos; assim:

$18.000 = 1,5y - 6.000 \Rightarrow y = 16.000$

Concluímos, então, que o percentual p de aumento na produção deve ser:

$p = \frac{6.000}{10.000} = 0,6 \Rightarrow p = 60\%$

Alternativa **d**.

17 a) O percentual p_c de lucro sobre o preço de custo é dado por:

$$p_c = \frac{120 - 75}{75} = 0,6 \Rightarrow p_c = 60\%$$

b) O percentual p_v de lucro sobre o preço de venda é dado por:

$$p_v = \frac{120 - 75}{120} = 0,375 \Rightarrow p_v = 37,5\%$$

18 Sendo c o preço de custo da toalha, em real, temos:

$$\frac{89,60 - c}{c} = 0,4 \Rightarrow c = 64$$

Logo, o preço de custo da toalha foi R$ 64,00.

19 O percentual p de desconto é dado por:

$$p = \frac{600 - 450}{600} = 0,25 \Rightarrow p = 25\%$$

Alternativa **b**.

20 $v = (1 - 0,045)x \Rightarrow v = 0,955x$

Alternativa **e**.

21 Sendo p o preço de etiqueta, em real, temos:

$(1 - 0,18)x = 180,40 \Rightarrow 0,82x = 180,40$

$\therefore\ x = 220$

Logo, o preço de etiqueta é R$ 220,00.

22 Sendo x o preço original da mercadoria, temos:

$1,3x = 195 \Rightarrow x = 150$

Com um aumento de 40% sobre o preço original, a mercadoria será vendida por $1,4 \cdot 150$ reais, ou seja, R$ 210,00.

Alternativa **b**.

23 Sendo x o preço do litro da gasolina antes dos aumentos, temos que após os aumentos o preço passou a ser $1,02 \cdot 1,05x$, ou seja, $1,071x$.

Logo, o percentual p de aumento é dado por:

$$p = \frac{1,071x - x}{x} = 0,071 = 7,1\%$$

24 Corrigindo pelo índice de inflação um preço x do início do trimestre, temos que, no fim do trimestre, o preço passa a ser $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2x$, ou seja, $1,728x$.

Logo, o percentual p de inflação no fim do trimestre é dado por:

$$p = \frac{1,728x - x}{x} = 0,728 = 72,8\%$$

25 Sendo x o preço de uma mercadoria antes dos dois descontos, temos que após os descontos o preço passou a ser $0,85 \cdot 0,80 \cdot x$, ou seja, $0,68x$.

Logo, o percentual p de desconto é dado por:

$$p = \frac{x - 0,68x}{x} = 0,32 = 32\%$$

26 $$\frac{100 - p}{100} \cdot \frac{84}{100} \cdot 125 = 81,9 \Rightarrow p = 22$$

Alternativa **c**.

27 Esquematizando a situação, temos:

	Quantidade vendida (kg)	Preço de venda por quilograma (R$)	Receita apurada (R$)
2009	q	v	qv
2010	$1,08q$	$1,03v$	$1,08q \cdot 1,03v$

Assim, o percentual p de aumento da receita de 2009 para 2010 é dado por:

$$p = \frac{1,08q \cdot 1,03v - qv}{qv} = 0,1124$$

$\therefore\ p = 11,24\%$

Alternativa **b**.

28 O valor v, em real, pago pelo empresário é dado por:

$v = 32.000 \cdot 2,5 = 80.000$

Logo, o empresário pagou R$ 80.000,00.

29 Temos:

$1 \text{ iene} = 0,0162 \text{ real} \Rightarrow 1 \text{ real} = \dfrac{1}{0,0162} \text{ iene (I)}$

$1 \text{ dólar} = 1,9116 \text{ real (II)}$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$1 \text{ dólar} = 1,9116 \cdot \dfrac{1}{0,0162} \text{ ienes}$

$\therefore\ 1 \text{ dólar} = 118 \text{ ienes}$

30 Temos:

$1 \text{ rublo} = 0,074 \text{ real (I)}$

$1 \text{ rúpia} = 0,047 \text{ real} \Rightarrow 1 \text{ real} = \dfrac{1}{0,047} \text{ rúpia (II)}$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$1 \text{ rublo} = 0,074 \cdot \dfrac{1}{0,047} \text{ rúpia}$

Logo,

$2.400 \text{ rublos} = 2.400 \cdot 0,074 \cdot \dfrac{1}{0,047} \text{ rúpias} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2.400 \text{ rublos} \approx 3.778,72 \text{ rúpias}$

31 a) O percentual p_v de valorização é dado por:

$$p_v = \frac{1,6 - 1,4}{1,4} \approx 0,1429 \Rightarrow p_v = 14,29\%$$

b) Na primeira cotação: $1 \text{ peso} = \dfrac{1}{1,4} \text{ real}$

Na segunda cotação: $1 \text{ peso} = \dfrac{1}{1,6} \text{ real}$

Logo, o percentual p_d de desvalorização do peso é dado por:

$$p_d = \frac{\dfrac{1}{1,4} - \dfrac{1}{1,6}}{\dfrac{1}{1,4}} = 0,125 \Rightarrow p_d = 12,5\%$$

32 $C = \text{R\$ } 1.800,00$

$i = 1,6\% = 0,016$ (taxa mensal)

$t = 10$ meses

a) $J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 1.800 \cdot 0,016 \cdot 10 = 288$

Logo, o juro produzido foi R$ 288,00.

b) $M = C + J \Rightarrow M = 1.800 + 288 = 2.088$

Logo, o montante acumulado foi R$ 2.088,00.

33 $C = \text{R\$ } 4.000,00$

$i = 2,5\% = 0,025$ (taxa mensal)

$J = \text{R\$ } 1.500,00$

$t = ?$

Logo:

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 1.500 = 4.000 \cdot 0,025 \cdot t$

$\therefore\ t = 15$

Concluímos, então, que o capital ficou aplicado durante 15 meses.

34 A multa é o juro simples J produzido pelo capital R\$ 50,00 aplicado durante 8 dias à taxa de 0,22% ao dia, ou seja:

$J = 50 \cdot 0{,}0022 \cdot 8 = 0{,}88$

Logo, o contribuinte pagou R\$ 50,88.

35 Temos:

$C =$ R\$ 2.500,00

$t = 18$ meses

$i = 2\% = 0{,}02$ (taxa mensal)

$J = ?$

Logo:

$J = 2.500 \cdot 0{,}02 \cdot 18 \Rightarrow J = 900$

Concluímos, então, que o juro foi R\$ 900,00.

36 Sendo C o capital aplicado, devemos calcular o tempo t para que o juro produzido seja C. Assim, temos:

$C = C \cdot 0{,}05 \cdot t \Rightarrow t = 20$

Logo, o capital é dobrado em 20 meses.

37 Sendo C o capital aplicado e J_1 e J_2 os juros recebidos, com:

$J_1 = 0{,}3C \cdot 0{,}015 \cdot 12 = 0{,}054C$

e

$J_2 = 0{,}7C \cdot 0{,}02 \cdot 12 = 0{,}168C$

Temos:

$J_1 + J_2 = 1.776 \Rightarrow 0{,}054C + 0{,}0168C = 1.776$

$\therefore 0{,}222C = 1.776 \Rightarrow C = 8.000$

Concluímos, então, que o capital aplicado foi R\$ 8.000,00.

Alternativa **d**.

38 Temos:

$C =$ R\$ 5.000,00

$t = 6$ meses

$i = 2\% = 0{,}02$ (taxa mensal)

a) $M = C\,(1 + i)^t \Rightarrow M = 5.000\,(1 + 0{,}02)^6 =$
$= 5.000\,(1{,}02)^6$
$\therefore M = 5.000 \cdot 1{,}13 \Rightarrow M = 5.650$

Concluímos, então, que o montante acumulado será R\$ 5.650,00.

b) $J = M - C \Rightarrow J = 5.650 - 5.000 = 650$

Concluímos, assim, que o juro produzido foi R\$ 650,00.

39 Sendo:

$C =$ R\$ 3.000,00

$t = 2$ anos

$J =$ R\$ 1.320,00

$i = ?$ (taxa anual)

Temos:

$4.320 = 3.000\,(1 + i)^2 \Rightarrow 1{,}44 = (1 + i)^2$

$\therefore 1 + i = 1{,}2 \Rightarrow i = 0{,}2$

Logo, a taxa anual foi 20%.

40 Sob a primeira condição o juro J_1, em real, é dado por:

$J_1 = 10.000 \cdot 0{,}114 \cdot 4 = 4.560$

Sob a condição 2, o montante acumulado M_2, em real, é dado por:

$M_2 = 10.000(1 + 0{,}1)^4 = 14.641$

Logo, o juro J_2, em real, sob essa condição é:

$J_2 = M_2 - 10.000 \Rightarrow J_2 = 4.641$

Concluímos, então, que a diferença $J_2 - J_1$ é R\$ 81,00.

41 O valor v, em real, do imóvel daqui a 3 anos é obtido por:

$v = 100.000(1 + 0{,}2)^3 \Rightarrow v = 172.800$

Logo, o valor do imóvel será R\$ 172.800,00.

42 Sendo C o capital aplicado e t o tempo, em ano, devemos ter:

$2C = C(1 + 0{,}5)^t \Rightarrow 2 = 1{,}5^t$

De acordo com a tabela, temos que t é igual a 1,72 ano, ou seja: 1 ano, 8 meses e 19 dias, aproximadamente.

Alternativa **c**.

43 O valor v do automóvel, em real, daqui a 10 anos é obtido por:

$v = 45.000\,(1 - 0{,}04)^{10} = 45 \cdot 10^3 \cdot (0{,}96)^{10}$

Alternativa **d**.

44 O valor v, em real, do terreno após os três anos é dado por:

$v = 10.000\,(1 + 0{,}2)(1 + 0{,}1)(1 + 0{,}05) \Rightarrow$
$\Rightarrow v = 10.000 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}05$
$\therefore v = 13.680$

Logo, o valor do terreno após os três anos era R\$ 13.680,00.

45 **a)** Sendo p_3 o preço final do produto, temos:

$p_3 = p(1 - 0{,}12)(1 - 0{,}05)(1 - 0{,}03) \Rightarrow$
$\Rightarrow p_3 = 0{,}81092p$

b) O percentual i de desconto é dado por:

$$i = \frac{p - 0{,}81092p}{p} = 0{,}18908 = 18{,}908\%$$

Exercícios complementares

Exercício técnico

1 I. V, pois $(50\%)^2 = (0{,}5)^2 = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$

II. F, pois $9\% = \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$

III. V, pois $3\% + 5\% = \frac{3}{100} + \frac{5}{100} = \frac{8}{100} = 8\%$

IV. F, pois $3\% \cdot 5\% = \frac{3}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{15}{10.000} = \frac{0{,}15}{100} = 0{,}15\%$

Alternativa **c**.

Exercícios contextualizados

2 $0{,}68 \cdot 5.400 = 3.672$

Logo, 3.672 alunos não prestaram a prova do Enem.

3 Sendo n o número de funcionários residentes na cidade, devemos ter:

$n = 2 \cdot 80 + 0{,}05 \cdot 80 \Rightarrow n = 164$

Alternativa **d**.

4 I. F, pois $0,87 \cdot 1.000 = 870$
II. V, pois $0,52 \cdot 1.000 = 520$
Alternativa **c**.

5 Sendo x e y os totais de lotes de 300 m^2 e de 500 m^2, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 300x + 500y + 0,1 \cdot 60.000 = 60.000 \\ 300x = 500y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 300x + 500y = 54.000 \\ 300x = 500y \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 90$ e $y = 54$. Logo, $x + y = 144$.
Alternativa **b**.

6 No ano passado, o número n de litros de gasolina consumidos pela empresa é dado por:

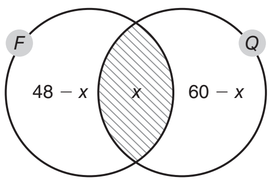
$$n = \frac{199.200}{12} = 16.600$$

Assim, a quantidade q de toneladas de CO_2 produzidas no ano passado é dada por:

$$q = \frac{16.600}{415} = 40$$

Concluímos, então, que a quantidade r de toneladas de CO_2 que deixariam de ser emitidas neste ano é:
$r = 0,05 \cdot 40 = 2$
Logo, é prevista uma redução de 2 toneladas na emissão de CO_2 neste ano.

7 Sejam F e Q os conjuntos dos habitantes do sexo feminino e dos habitantes com mais de 40 anos, respectivamente. Indicando pelo índice 100 o número de habitantes da cidade, temos o seguinte diagrama:



Logo, $48 - x + x + 60 - x = 100 \Rightarrow x = 8$
Concluímos, assim, que 8% dos habitantes dessa cidade são mulheres com mais de 40 anos.

8 A cada 24 latas produzidas, 16 são obtidas por reciclagem e 8 não são. Assim, para essa produção, o número n de unidades de energia necessária é dado por:
$n = 16 \cdot 1 + 8 \cdot 20 = 176$
Alternativa **d**.

9 O percentual p dos eleitores que compareceram às urnas e responderam "não" é dado por:
$p = 63,9\% \cdot (100\% - 3,07\%) \Rightarrow p \approx 61,9\%$
Alternativa **c**.

10 Sendo p o percentual de residências desse bairro habitadas por uma única mulher, temos:
$p = 100\% - (70\% + 80\% \cdot 30\%) \Rightarrow$
$\Rightarrow p = 100\% - (70\% + 24\%)$
$\therefore p = 6\%$
Alternativa **d**.

11 O percentual p construído é dado por:
$p = 40\% + 40\% \ (100\% - 40\%) \Rightarrow$
$\Rightarrow p = 40\% + 40\% \cdot 60\%$
$\therefore p = 40\% + 24\% = 64\%$
Logo, faltam 36% da obra a ser construída.
Alternativa **c**.

12 O total s de soja, em tonelada, produzido nessa região é dado por:
$s = 75\% \cdot 68\% \cdot 45.800 \Rightarrow$
$\Rightarrow s = 0,75 \cdot 0,68 \cdot 45.800 = 23.358$

13 O percentual p dos estudantes que optaram por exatas, em relação ao total de alunos que pretendem continuar estudando, é dado por:

$$p = \frac{20\%}{90\%} \Rightarrow p \approx 22,2\%$$

Alternativa **a**.

14 Sendo m a massa crua, em grama, para que o pão assado tenha 35 g, temos:
$35 = m - 67\% \cdot 40\% \cdot m \Rightarrow$
$\Rightarrow 35 = m - 0,67 \cdot 0,4m$
$\therefore 35 = 0,732m \Rightarrow m \approx 47,8$
Logo, a massa crua deve ter 47,8 g, aproximadamente.

15 Dividindo o número acumulado de chamadas atendidas em 15 minutos pelo total de chamadas, obtemos:

$$\frac{94}{100} = 94\%$$

$$\frac{189}{200} = 94,5\%$$

$$\frac{283}{300} \approx 94,3\%$$

$$\frac{379}{400} = 94,75\%$$

$$\frac{458}{482} \approx 95,02\%$$

Concluímos, então, que a meta estabelecida foi atingida no fim do dia.
Alternativa **e**.

16 O percentual p da superfície da Terra coberta por água é dado por:

$$p = \frac{3,61 \cdot 10^8}{5,1 \cdot 10^8} \approx 0,708 \Rightarrow p \approx 70,8\%$$

Alternativa **e**.

17 Sejam c e $3c$ os custos de produção de cada torneira e de cada chuveiro, respectivamente.
O percentual p, que representa o custo diário de produção dos chuveiros em relação ao custo de toda a produção diária, é dado por:

$$p = \frac{200 \cdot 3c}{200 \cdot 3c + 400c} = \frac{600c}{1.000c} = 0,6 = 60\%$$

Alternativa **b**.

18 Sendo p o percentual pedido, temos:

$$p = \frac{1,5}{1.000} = 0,0015 = 0,15\%$$

Alternativa **b**.

19 A massa de hidróxido de sódio contida na solução é 25% de 160 g, ou seja, 40 g.
Assim, sendo x a massa, em grama, de água que deve ser adicionada a essa solução, temos:
$$\frac{40}{160 + x} = 0,1 \Rightarrow x = 240$$
Logo, devem ser adicionadas 240 g de água à solução.
Alternativa **c**.

20 Se todos os condôminos pagarem, o valor v do condomínio para cada um será:
$$v = \frac{\text{R\$ } 7.500,00}{15} \Rightarrow v = \text{R\$ } 500,00$$
Se três condôminos não pagarem, o valor w do condomínio para cada um será:
$$w = \frac{\text{R\$ } 7.500,00}{12} \Rightarrow w = \text{R\$ } 625,00$$
Logo, o percentual p de aumento para cada condômino será:
$$p = \frac{625 - 500}{500} = 0,25 = 25\%$$
Alternativa **c**.

21 A quantidade de suco contida na mistura é 20% de 30 L, ou seja, 6 L.
Assim, sendo x a quantidade, em litro, de suco que deve ser acrescentada à mistura, temos:
$$\frac{6 + x}{30 + x} = 0,25 \Rightarrow x = 2$$
Logo, devem ser acrescentados 2 L de suco de laranja.

22 O aumento percentual p é dado por:
$$p = \frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{6}}{\frac{4}{6}} = 0,2 \Rightarrow p = 20\%$$
Alternativa **e**.

23 Sendo x e y, respectivamente, o PNB e a população do país em 2009, temos que o PNB *per capita* naquele ano era $\frac{x}{y}$.
Com o crescimento do PNB e da população, o PNB *per capita* em 2010 passou a ser:
$$\frac{1,2x}{1,05y} \approx 1,143 \cdot \frac{x}{y}$$
Logo, o aumento percentual do PNB *per capita* foi de 14,3%, aproximadamente.
Alternativa **b**.

24 Sendo n o número de desempregados, temos:
$$\frac{n}{1.600.000} = 0,30 \Rightarrow n = 480.000$$
Logo, há 480.000 pessoas desempregadas nessa cidade.

25 Os 30 litros da mistura contida no tanque são compostos por 5,4 L de álcool e 24,6 L de gasolina.
Assim, sendo x a quantidade de litros de álcool que devem conter os 10 litros da nova mistura que completará o tanque, temos:
$$\frac{5,4 + x}{30 + 10} = 0,2 \Rightarrow x = 2,6$$
Logo, o percentual p de álcool da nova mistura é dado por:
$$p = \frac{2,6}{10} = 26\%$$
Alternativa **d**.

26 Sendo p o comprimento total do percurso, em quilômetro, temos:
$$0,15p = 180 \Rightarrow p = 1.200$$
Alternativa **b**.

27 O crescimento percentual p é dado por:
$$p = \frac{10,61 - 4,98}{4,98} \approx 1,13 \Rightarrow p = 113\%$$
Alternativa **b**.

28 A quantidade de megawatt de energia nuclear em 2009 foi $0,03 \cdot 80.000$, ou seja, 2.400 MW. Essa mesma quantidade de energia nuclear foi produzida em 2010, correspondendo a 2% de toda a energia Q fornecida pela matriz energética nesse ano; logo:
$$0,02Q = 2.400 \text{ MW} \Rightarrow Q = 120.000 \text{ MW}$$
Assim, podemos calcular as quantidades t_1 e t_2 de energia termoelétrica em 2009 e 2010, respectivamente:
$$t_1 = 0,09 \cdot 80.000 \text{ MW} \Rightarrow t_1 = 7.200 \text{ MW}$$
e
$$t_2 = 0,17 \cdot 120.000 \text{ MW} \Rightarrow t_2 = 20.400 \text{ MW}$$
Concluímos, então, que de 2009 para 2010 houve um aumento de 13.200 MW no fornecimento de energia termoelétrica.

29 Sendo q o total de energia solar, em joule, recebida pela Terra anualmente, temos:
$$0,003q = 1,6 \cdot 10^{22} \Rightarrow q \approx 5,3 \cdot 10^{24}$$
Logo, o total de energia solar recebida anualmente pela Terra é $5,3 \cdot 10^{24}$ J, aproximadamente.

30 Como o preço de 1 kg de KIO_3 é R$ 20,00 e 60% dessa massa é composta de iodo, temos que 600 g de iodo custam R$ 20,00. Portanto, o custo de 60 mg de iodo é R$ 0,002.
Como 1 kg de sal é vendido por R$ 1,00, concluímos que a quantidade máxima permitida por lei (60 mg de iodo por quilograma) representa nesse preço o percentual p dado por:
$$p = \frac{0,002}{1,00} = 0,002 = 0,20\%$$
Alternativa **b**.

31 Sendo C o comprimento do caminho habitual e v a velocidade média nesse caminho, temos que o comprimento do novo caminho é 1,17C e a velocidade média nesse novo caminho é $1,3v$. Assim, sendo t_h e t_n os tempos de viagem no caminho habitual e no novo caminho, respectivamente, temos:
$$\begin{cases} C = vt_h \\ 1,17C = 1,3vt_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_h = \frac{C}{v} \\ t_n = \frac{0,9C}{v} \end{cases}$$
Logo, $t_n = 0,9t_h$ e, portanto, o tempo de viagem diminuirá em 10%.
Alternativa **b**.

32 Ao retirar x litros da mistura, foram retirados $\frac{x}{4}$ litros de álcool.

Após completar o tanque com x litros de álcool, teremos:

$$\frac{10 - \frac{x}{4} + x}{40} = 0{,}6 \Rightarrow x = \frac{56}{3}\text{ L}$$

Alternativa **e**.

33 Se o teste fosse aplicado a todos os n habitantes do país, o número de pessoas cujo teste indicaria a presença de vírus seria:

$0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot n + 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot n = 0{,}27n$

Dessas $0{,}27n$ pessoas, apenas $0{,}9n$ são reais portadoras do vírus. Logo, entre as pessoas que o teste classificou como portadoras do vírus, as que realmente são portadoras representam o percentual p dado por:

$$p = \frac{0{,}09n}{0{,}27n} \approx 0{,}33 \Rightarrow p \approx 33\%$$

Alternativa **e**.

34 Sendo v o preço de venda, em real, desse produto, temos:

$$\frac{v - 140}{v} = 0{,}3 \Rightarrow v = 200$$

Logo, o preço de venda do produto foi R$ 200,00.

35 Sendo v e c os preços de venda e de custo do produto, respectivamente, temos:

$$\frac{v - c}{v} = 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5v = c$$

$$\therefore \frac{v}{c} = 2$$

Subtraindo 1 de ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$\frac{v}{c} - 1 = 2 - 1 \Rightarrow \frac{v - c}{c} = 1 = 100\%$$

Logo, o lucro sobre o preço de custo é 100%.
Alternativa **d**.

36 Sendo v e c os preços de venda e de custo dessa mercadoria, respectivamente, temos:

$$\frac{v - c}{c} = 0{,}25 \Rightarrow 1{,}25c = v$$

$$\therefore \frac{c}{v} = 0{,}8 \Rightarrow -\frac{c}{v} = -0{,}8$$

Somando 1 a ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$1 - \frac{c}{v} = 1 - 0{,}8 \Rightarrow \frac{v - c}{v} = 0{,}2 = 20\%$$

Logo, 25% sobre o preço de custo equivalem a 20% sobre o preço de venda.
Alternativa **b**.

37 **a)** O percentual p_c de prejuízo sobre o preço de custo é dado por:

$$p_c = \left|\frac{1{,}60 - 2}{2}\right| = 0{,}2 \Rightarrow p_c = 20\%$$

b) O percentual p_v de prejuízo sobre o preço de venda é dado por:

$$p_v = \left|\frac{1{,}60 - 2}{1{,}60}\right| = 0{,}25 \Rightarrow p_v = 25\%$$

38 Sendo T o total de gasto por esse país com a importação do volume V de petróleo ao preço p por unidade de volume, temos:

$$T = V \cdot p \Rightarrow V = \frac{T}{p}\ \text{(I)}$$

Após o aumento de 60% no preço do petróleo, seja V_f o volume de petróleo que deve ser importado de modo que o gasto T continue o mesmo. Assim, temos:

$$T = V_f \cdot 1{,}6p \Rightarrow V_f = \frac{T}{1{,}6p}\ \text{(II)}$$

Das equações (I) e (II), obtemos o percentual i de redução na importação de petróleo:

$$i = \frac{\frac{T}{p} - \frac{T}{1{,}6p}}{\frac{T}{p}} = \frac{1 - \frac{1}{1{,}6}}{1} = \frac{0{,}6}{1{,}6}$$

$$\therefore i = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Alternativa **a**.

39

	Antes do aumento	Depois do aumento
Preço dos alimentos	a	$1{,}0141a$
Preço dos não alimentos	n	n
Preço da cesta	c	$1{,}0103c$

Assim, temos:

$$\begin{cases} c = a + n \\ 1{,}0103c = 1{,}0141a + n \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro essas equações, obtemos:

$$0{,}0103c = 0{,}0141a \Rightarrow \frac{0{,}0103}{0{,}0141} = \frac{a}{c}$$

$$\therefore \frac{a}{c} \approx 0{,}73$$

Logo, o percentual de participação dos alimentos no cálculo da cesta básica é 73%, aproximadamente.

Alternativa **a**.

40 O preço da moto, em real, após o desconto é dado por:

$$p = (1 - 0{,}12) \cdot 11.800 \Rightarrow p = 0{,}88 \cdot 11.800$$

$$\therefore p = 10.384$$

Logo, a moto é vendida por R$ 10.384,00.

41 O percentual p de reajuste é dado por:

$$p = \frac{90 - 80}{80} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

Alternativa **b**.

42 Sendo x o preço da mercadoria antes dos aumentos, temos que o preço após dois aumentos passou a ser $1{,}2 \cdot 1{,}1x$, ou seja, $1{,}32x$.

Logo, o percentual p de aumento é dado por:

$$p = \frac{1{,}32x - x}{x} = 0{,}32 = 32\%$$

Alternativa **b**.

43 Sendo x o preço do produto no início do primeiro mês, temos que no fim do terceiro mês o preço do produto foi:

- na loja A: $0{,}75 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}2 \cdot x$, ou seja, $0{,}99x$;
- na loja B: $1{,}2 \cdot 0{,}85 \cdot x$, ou seja, $1{,}02x$.

Logo, no fim do terceiro mês, o preço do produto era maior na loja B.

Alternativa **b**.

44 Sendo x o preço anterior ao reajuste de 5 de dezembro, temos que o preço na liquidação passou a ser de $0{,}725 \cdot 1{,}6 \cdot x$, ou seja, $1{,}16x$.
Logo, a variação percentual p do preço é dada por:
$$p = \frac{1{,}16x - x}{x} = 0{,}16 = 16\%$$
Alternativa **a**.

45 Sendo x o valor total das quatro peças, marcada nas etiquetas, esquematizamos:

	Valor marcado nas etiquetas (R$)	Valor pago (R$)
Camisa	$0{,}2x$	$0{,}9 \cdot 0{,}2x = 0{,}18x$
Calça	$0{,}28x$	$0{,}8 \cdot 0{,}28x = 0{,}224x$
Blusa	$0{,}4x$	$0{,}4x$
Cinto	$0{,}12x$	$0{,}12x$
Soma	x	$0{,}924x$

Assim, o percentual p de desconto sobre o valor total marcado nas etiquetas é dado por:
$$p = \frac{x - 0{,}924x}{x} = 0{,}076 = 7{,}6\%$$
Alternativa **a**.

46 Sendo x o preço inicial de uma mercadoria, que foi aumentada para o valor y de modo que um desconto de 20% sobre y resultasse em x, temos:
$$0{,}8y = x \Rightarrow y = 1{,}25x$$
Logo, o percentual p de reajuste de x para y é dado por:
$$p = \frac{1{,}25x - x}{x} = 0{,}25 = 25\%$$

47 Sendo x o preço do produto antes do reajuste, temos que o preço após o reajuste foi $0{,}8x$. Indicando por c o preço de custo, temos:
$$\frac{0{,}8x - c}{c} = 0{,}2 \Rightarrow x = 1{,}5c$$
Assim, sem o desconto, o percentual p de lucro sobre o preço de custo seria:
$$p = \frac{1{,}5c - c}{c} = 0{,}5 = 50\%$$
Alternativa **e**.

48 Sendo v e c os preços de venda e de compra, respectivamente, devemos ter:
$$\frac{0{,}8v - c}{c} = 0{,}28 \Rightarrow v = 1{,}6c$$
Logo, o preço de venda deve ter um acréscimo de 60% sobre o preço de compra.
Alternativa **a**.

49 Representando os dados em uma tabela, temos:

	Preço (R$)	Unidades vendidas	Faturamento (R$)
Antes do desconto	x	n	nx
Após o desconto	$0{,}9x$	$1{,}2n$	$1{,}2n \cdot 0{,}9x$

Assim, o percentual p de aumento no faturamento é dado por:
$$p = \frac{1{,}2n \cdot 0{,}9x - nx}{nx} = \frac{1{,}08nx - nx}{nx} = 0{,}08$$
$\therefore p = 8\%$
Alternativa **a**.

50 Sendo r a receita da empresa e x o gasto com telefone antes do corte, temos:

	Gasto com telefone (R$)	Gasto com energia elétrica (R$)
Antes do corte	x	$0{,}15r - x$
Após o corte	$\frac{x}{2}$	$0{,}15r - x$

Como a economia foi de R$ 1.000,00, que equivalem a 5% da receita, temos:
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 1.000 \\ 0{,}05r = 1.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2.000 \\ r = 20.000 \end{cases}$$
Logo, o gasto com energia elétrica, em real, é $0{,}15 \cdot 20.000 - 2.000$, ou seja, R$ 1.000,00.

51 Resumindo as informações em uma tabela, temos:

	2005	2009
Número de ligações locais	n	$1{,}3n$
Tempo médio por ligação (min)	t	$1{,}2t$
Preço cobrado por minuto (R$)	x	$1{,}5x$
Receita (R$)	ntx	$1{,}3n \cdot 1{,}2t \cdot 1{,}5x$

Logo, o percentual p de crescimento da receita é dado por:
$$p = \frac{1{,}3n \cdot 1{,}2t \cdot 1{,}5x - ntx}{ntx} = \frac{2{,}34ntx - ntx}{ntx} = 1{,}34$$
$\therefore p = 134\%$
Alternativa **b**.

52 O valor v, em real, recebido pelo frigorífico é dado por:
$v = 28.000 \cdot 2{,}20 = 61.600$
Logo, o frigorífico recebeu R$ 61.600,00.

53 No primeiro ano: 1 dólar = 106 ienes
No segundo ano: 1 dólar = 124 ienes
Logo, houve uma valorização do dólar em relação ao iene. O percentual de valorização p é dado por:
$$p = \frac{124 - 106}{106} \approx 0{,}17 \Rightarrow p \approx 17\%$$
Alternativa **c**.

54 Na cotação de 1º/1: 1 real $= \frac{1}{3{,}533}$ dólar
Na cotação de 30/6: 1 real $= \frac{1}{2{,}872}$ dólar
Logo, houve uma valorização do real em relação ao dólar. O percentual p de valorização é dado por:
$$p = \frac{\frac{1}{2{,}872} - \frac{1}{3{,}533}}{\frac{1}{3{,}533}} \approx 0,23 \Rightarrow p \approx 23\%$$
Alternativa **e**.

55 Temos que:

1 real $= \frac{1}{3{,}50}$ dólar

Se houvesse uma valorização de 25% do real em relação ao dólar, teríamos:

1 real $= \frac{1{,}25}{3{,}50}$ dólar

Ou, ainda:

1 dólar $= \frac{3{,}50}{1{,}25}$ real $\Rightarrow$ 1 dólar = 2,80 real

Logo, haveria uma desvalorização do dólar diante do real. O percentual p de desvalorização seria:

$p = \frac{3{,}50 - 2{,}80}{3{,}50} = 0{,}2 = 20\%$

Alternativa **b**.

56 Temos:

$21{,}63 = 21 + 0{,}02 \cdot 21 + 0{,}0005 \cdot 21 \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow 21{,}63 = 21{,}42 + 0{,}0105x$

$\therefore x = \frac{21{,}63 - 21{,}42}{0{,}0105} \Rightarrow x = 20$

Alternativa **d**.

57 Temos:

$C =$ R$ 3.600,00

$t = 13$ dias

$i = 0{,}5\% = 0{,}005$ (taxa diária)

a) $J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 3.600 \cdot 0{,}005 \cdot 13 \Rightarrow J = 234$

Logo, o juro foi R$ 234,00.

b) $M = C + J \Rightarrow M = 3.600 + 234 = 3.834$

Logo, o montante acumulado foi R$ 3.834,00.

58 Temos:

$C =$ R$ 500,00

$t = 5$ meses

$J =$ R$ 100,00

$i = ?$ (taxa mensal)

Logo:

$100 = 500 \cdot i \cdot 5 \Rightarrow i = 0{,}04 = 4\%$

Concluímos, então, que a taxa foi 4% ao mês.

Alternativa **d**.

59 Sendo C o capital aplicado e J_1 e J_2 os juros recebidos, com:

$J_1 = \frac{2C}{3} \cdot 0{,}02 \cdot 8 = \frac{8C}{75}$

e

$J_2 = \frac{C}{3} \cdot 0{,}025 \cdot 8 = \frac{2C}{30}$

Temos:

$J_1 + J_2 = 130 \Rightarrow \frac{8C}{75} + \frac{2C}{30} = 130$

$\therefore \frac{26C}{150} = 130 \Rightarrow C = 750$

Concluímos, então, que o capital aplicado foi R$ 750,00.

Alternativa **d**.

60 Sendo C e (30.000 − C) os capitais aplicados que renderam juros J_1 e J_2, com

$J_1 = C \cdot 0{,}08 \cdot 1 = 0{,}08C$

e

$J_2 = (30.000 - C) \cdot 0{,}12 \cdot 1 = 3.600 - 0{,}12C$

Temos:

$J_1 = J_2 \Rightarrow 0{,}08C = 3.600 - 0{,}12C$

$\therefore 0{,}2C = 3.600 \Rightarrow C = 18.000$

Logo, o capital inicial em uma das aplicações foi R$ 18.000,00 e na outra foi R$ 12.000,00. Portanto, a diferença entre os capitais aplicados foi R$ 6.000,00.

Alternativa **c**.

61 O empréstimo da loja ao cliente foi R$ 184,00.

Logo, a taxa i de juro é dada por:

$i = \frac{200 - 184}{184} \approx 0{,}087 \Rightarrow i \approx 8{,}7\%$

Alternativa **c**.

62 Sendo x o preço de tabela, temos:

	Hoje	Daqui a 30 dias
Valor pago pela mercadoria	$0{,}85x$	$0{,}9x$
Quantia que possui o Sr. José	$0{,}85x$	$0{,}85x \cdot 1{,}05x = 0{,}8925x$

Logo, o Sr. José terá um prejuízo de 0,0075x, que equivale a 0,75% sobre o preço de tabela.

Alternativa **c**.

63 Temos:

$C =$ R$ 12.000,00

$t = 24$ meses

$i = 3\% = 0{,}03$ (taxa mensal)

$M = ?$

Logo, $M = 12.000 \cdot (1 + 0{,}03)^{24} =$

$= 12.000 \cdot (1{,}03)^{24}$

Alternativa **d**.

64

	Débito de Mário (em R$)
Na data do empréstimo	8.000
Na data do 1º pagamento	$8.000(1 + 0{,}05)^2 - 5.000 = 3.820$
Na data do 2º pagamento	$3.820(1 + 0{,}05)^1 = 4.011$

Logo, o último pagamento foi R$ 4.011,00.

Alternativa **c**.

65 O montante M, em real, acumulado pelo juro composto é dado por:

$M = C(1 + 0{,}2)^2 \Rightarrow M = 1{,}44C$

Se o capital C fosse aplicado a juro simples, durante o mesmo tempo, para obter o mesmo rendimento, a taxa mensal i deveria ser tal que:

$0{,}44C = C \cdot i \cdot 24 \Rightarrow i \approx 0{,}0183$

Ou seja: $i \approx 1{,}83\%$

Alternativa **e**.

66 O valor v, em real, pelo qual a máquina foi vendida é dado por:

$v = 10.000(1 - 0{,}05)^4 \Rightarrow v = 10.000(0{,}95)^4$

$\therefore v \approx 8.145$

Logo, a máquina foi vendida por R$ 8.145,00, aproximadamente.

67 O preço final p_f do produto é dado por:

$p_f = p(1 + 0,05)(1 + 0,03)(1 - 0,04) \Rightarrow$

$\Rightarrow p_f = p \cdot 1,05 \cdot 1,03 \cdot 0,96$

Alternativa **c**.

Exercícios de revisão cumulativa

1 $f(2) = f(1 + 1) = (1 + 1)f(1) = 2 \cdot 5 = 10$

$f(3) = f(2 + 1) = (2 + 1)f(2) = 3 \cdot 10 = 30$

2 **a)** A cada x metros de profundidade, a temperatura aumenta $\frac{x}{30}$ graus Celsius. Como na superfície a temperatura é 32 °C, concluímos que a temperatura f, em grau Celsius, em função da profundidade x, em metro, é dada por:

$f(x) = 32 + \frac{x}{30}$

b) Basta atribuir o valor 100 à variável x da função f obtida no item **a**:

$f(100) = 32 + \frac{100}{30} \approx 35,3$

Logo, a 100 m de profundidade a temperatura é 35,3 °C, aproximadamente.

c) Basta atribuir o valor 54 à variável $f(x)$ da função f obtida no item **a**:

$54 = 32 + \frac{x}{30} \Rightarrow x = 660$

Logo, a temperatura é 54 °C a 660 m de profundidade.

3 $0,014 - 0,05 \cdot 0,014 \leqslant x \leqslant 0,014 + 0,05 \cdot 0,014 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,014 - 0,0007 \leqslant x \leqslant 0,014 + 0,0007$

$\therefore -0,0007 \leqslant x - 0,014 \leqslant 0,0007 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x - 0,014| \leqslant 0,0007$

Alternativa **c**.

Análise de resolução

Sendo p o perímetro do quadrado original, temos que cada lado desse quadrado mede $\frac{p}{4}$. Assim, cada lado do quadrado aumentado mede $\frac{p}{4} + \frac{10}{100} \cdot \frac{p}{4} = \frac{11p}{40}$.

Logo, o perímetro Q do quadrado maior é dado por:

$Q = 4 \cdot \frac{11p}{40} = 1,1p$

Concluímos, então, que o perímetro Q é 10% maior que o perímetro do quadrado original.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 De acordo com a lei de Moore, o número de transistores integrados em um chip dobraria a cada dois anos. Assim, se em 1971, um processador tivesse 2.300 transistores, em 2011, 40 anos (20 períodos de 2 anos) depois, o número de transistores em um processador seria:

$2^{20} \cdot 2.300 = 2.411.724.800$

2 Resposta pessoal.

Exercícios propostos

1 a) $(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \cdot 3}$

b) $(2x)^3 = (2x)(2x)(2x) = 2^3 \cdot x^3$

c) $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{7^2}{5^2}$

2 a) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

b) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

c) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

d) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

e) $-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$

f) $9^0 = 1$

g) $(-9)^0 = 1$

h) $-9^0 = -1$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

j) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

k) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

l) $0^{17} = 0$

m) $1^{43} = 1$

n) $(-1)^{12} = 1$

o) $(-1)^{13} = -1$

p) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

q) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

r) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

s) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$

t) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$

u) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ ou

$(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

3 a) $(5x)^3 = 5^3 \cdot x^3 = 125x^3$

b) $(x^2)^4 = x^{2 \cdot 4} = x^8$

c) $(3x^3)^2 = 3^2 \cdot (x^3)^2 = 9 \cdot x^{3 \cdot 2} = 9x^6$

d) $(2ab^3)^4 = 2^4a^4b^{3 \cdot 4} = 16a^4b^{12}$

e) $(-4x^2y^3)^2 = (-4)^2x^{2 \cdot 2}y^{3 \cdot 2} = 16x^4y^6$

f) $\left(\frac{2}{b^5}\right)^3 = \frac{2^3}{b^{5 \cdot 3}} = \frac{8}{b^{15}}$

g) $\left(\frac{ab^3}{3c^2}\right)^3 = \frac{a^3b^{3 \cdot 3}}{3^3c^{2 \cdot 3}} = \frac{a^3b^9}{27c^6}$

h) $\left(\frac{2x^3}{5yz^2}\right)^{-2} = \frac{(5yz^2)^2}{(2x^3)^2} = \frac{25y^2z^4}{4x^6}$

i) $\left(\frac{-3t^3}{2u^2}\right)^{-4} = \frac{(2u^2)^4}{(-3t^3)^4} = \frac{16u^8}{81t^{12}}$

j) $\left(\frac{ab^2}{c^5}\right)^{-3} = \frac{(c^5)^3}{(ab^2)^3} = \frac{c^{15}}{a^3b^6}$

4 a) $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$

b) $y^6 : y^2 = y^{6-2} = y^4$

c) $(3a^4b)^2 \cdot (2a^3b^2)^3 = 9a^8b^2 \cdot 8a^9b^6 = 72a^{17}b^8$

d) $\left(\frac{2xy^5}{z^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{xz^3}{y}\right)^4 = \frac{8x^3y^{15}}{z^6} \cdot \frac{x^4z^{12}}{y^4} = 8x^7y^{11}z^6$

e) $\left(\frac{3a^2b^3}{cd}\right)^3 : \left(\frac{3ab^4}{c^2d^3}\right)^2 = \frac{27a^6b^9}{c^3d^3} \cdot \frac{c^4d^6}{9a^2b^8} = 3a^4bcd^3$

f) $\left(\frac{2pq^2}{u^2v}\right)^2 \cdot \left(\frac{4p^2q}{uv^2}\right)^{-2} = \frac{4p^2q^4}{u^4v^2} \cdot \frac{u^2v^4}{16p^4q^2} = \frac{q^2v^2}{4p^2u^2}$

5 1 ano-luz $= 9.460.000.000.000$ km $= 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km

6 $149{,}6 \cdot 10^6$ km $= 1{,}496 \cdot 10^8$ km

7 $0{,}0003$ mm $= 3 \cdot 10^{-4}$ mm

8

Número de colisões	Tempo (s)
$3 \cdot 10^9$	1
x	3.600

$\therefore\ x = 3 \cdot 10^9 \cdot 3.600 = 1{,}08 \cdot 10^{13}$

Alternativa **e**.

9 a) $S = 500.000.000 \text{ km}^2 = 5 \cdot 10^8 \text{ km}^2$

b) $5 \cdot 10^8 \text{ km}^2 = 5 \cdot 10^8 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$

10 $\sqrt{5\sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5^2 \cdot 5}} = \sqrt[4]{125} \neq \sqrt[4]{25}$

Alternativa **d**.

11 a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}} \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{2^5}$

b) $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{\sqrt[4 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}}}{\sqrt[6 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}}} = \sqrt[12]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[12]{2}$

12 a) $\boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$

b) $\boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$

13 a) $\sqrt[3]{125} = 5$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$

c) $\sqrt{49} = 7$

d) $\sqrt[3]{1} = 1$

e) $\sqrt[7]{0} = 0$

f) $\sqrt[1]{12} = 12$

g) $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -5$

h) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$

i) $\sqrt[9]{-1} = -\sqrt[9]{1} = -1$

14 a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{40} = \sqrt{2^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$

f) $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$

g) $\sqrt{\dfrac{48}{25}} = \dfrac{\sqrt{2^4 \cdot 3}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{81}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{3}}{2}$

i) $\sqrt{\dfrac{75}{64}} = \dfrac{\sqrt{3 \cdot 5^2}}{\sqrt{2^6}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

15 a) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(4 + 6 - 2) = 8\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{50} + \sqrt{125} - 6\sqrt{5} =$
$= 2\sqrt{5^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 5} - 6\sqrt{5} =$
$= 2 \cdot 5\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 10\sqrt{2} - \sqrt{5}$

c) $4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} =$
$= 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 2\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} =$
$= 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} =$
$= 8\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 18\sqrt[3]{2}$

d) $4\sqrt[5]{3} \cdot 2\sqrt[5]{4} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{3 \cdot 4} = 8\sqrt[5]{12}$

e) $6\sqrt{10} : 2\sqrt{5} = \dfrac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{\dfrac{10}{5}} = 3\sqrt{2}$

f) $12\sqrt[3]{16} : 6\sqrt[3]{2} = \dfrac{12\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = 2\sqrt[3]{8} =$
$= 2 \cdot 2 = 4$

g) $(\sqrt[3]{5})^4 + 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^4} + 2\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 7\sqrt[3]{5}$

16 $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 2}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{2^3}} =$
$= \sqrt{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^3}} = \sqrt[8]{2^7} = \sqrt[8]{128}$

Alternativa **d**.

17 a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}} = \dfrac{10 \cdot \sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{15} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{7^2}}{7} = \dfrac{2\sqrt[3]{49}}{7}$

18 a) $\dfrac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \dfrac{2(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

b) $\dfrac{23(4\sqrt{2} - 3)}{(4\sqrt{2} + 3)(4\sqrt{2} - 3)} = \dfrac{23(4\sqrt{2} - 3)}{32 - 9} =$
$= 4\sqrt{2} - 3$

c) $\dfrac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \dfrac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} =$
$= \dfrac{7(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2}$

19 Substituindo $\Delta t'$ por 60 e Δt por 20 na fórmula $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}$, temos:

$60 = \dfrac{20}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \left(\dfrac{V}{c}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

$\therefore \dfrac{V}{c} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore V = \dfrac{2c\sqrt{2}}{3}$

Alternativa **a**.

20 a) $9^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9^2} = \sqrt[5]{81}$

b) $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

c) $7^{0,5} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

d) $3^{0,75} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$

21 a) $\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

22 $E = 36^{\frac{1}{2}} + 64^{\frac{2}{3}} + 625^{\frac{1}{4}}$

$E = \sqrt{36} + \sqrt[3]{64^2} + \sqrt[4]{625}$

$E = 6 + \sqrt[3]{2^{12}} + \sqrt[4]{5^4}$

$E = 6 + 16 + 5 = 27$

23 $a^3 = b \Rightarrow a = \sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$

Logo:

$(\sqrt[5]{a})^4 = a^{\frac{4}{5}} = \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = b^{\frac{4}{15}}$

Alternativa **e**.

24 $3^{-\frac{x}{2}} = (3^x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(3^x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3^x}}$

Substituindo 3^x por 2, concluímos:

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Alternativa **d**.

25 a) $\left[(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{3})^2 = 3$

b) $\left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(7^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 7^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = 7^1 = 7$

c) $\left(3^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}} = 3^3 \cdot 2^9 =$
$= 27 \cdot 512 = 13.824$

d) $1^{\sqrt{5}} + 0^{\pi} = 1 + 0 = 1$

26 $\dfrac{16^{\sqrt{2}}}{2^{3\sqrt{2}}} = \dfrac{(2^4)^{\sqrt{2}}}{(2^3)^{\sqrt{2}}} = \left(\dfrac{2^4}{2^3}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$

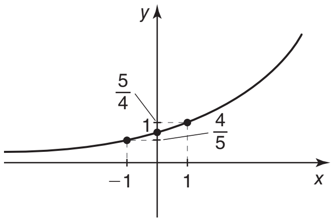
Alternativa **a**.

27 $(2^{\sqrt{3}} + 1)^2 - 4^{\sqrt{3}} + 2^{1 + \sqrt{3}} - 1 =$
$= \cancel{2^{2\sqrt{3}}} + 2 \cdot 2^{\sqrt{3}} + \cancel{1} - \cancel{4^{\sqrt{3}}} + 2 \cdot 2^{\sqrt{3}} - \cancel{1} =$
$= 4 \cdot 2^{\sqrt{3}} = 2^2 \cdot 2^{\sqrt{3}} = 2^{2 + \sqrt{3}}$

Alternativa **a**.

28 a) $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$

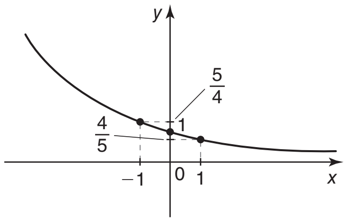
x	y
-1	$\frac{4}{5}$
0	1
1	$\frac{5}{4}$



$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}_+^*$

b) $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

x	y
-1	$\frac{5}{4}$
0	1
1	$\frac{4}{5}$



$D = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}_+^*$

29 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2 - x^2} = (2^{-1})^{2 - x^2} = 2^{x^2 - 2}$

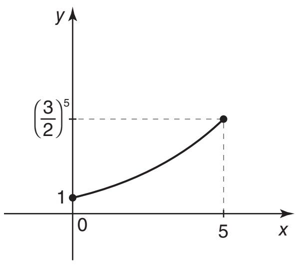
Como $g(x) = 2^{x^2 - 2}$ é uma função crescente, pois a base da potência $2^{x^2 - 2}$ é maior que 1, temos que o menor valor de g é obtido quando o expoente $x^2 - 2$ assume seu valor mínimo: -2. Logo, o menor valor de g é dado por:

$g(0) = 2^{0^2 - 2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

Alternativa **d**.

30 a) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

x	y
0	1
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{9}{4}$
3	$\frac{27}{8}$
4	$\frac{81}{16}$
5	$\frac{243}{32}$



b) Como f é crescente em todo o seu domínio, temos:

I. V, pois $4 > 3 \Rightarrow f(4) > f(3)$
II. F, pois $2 > 1 \Rightarrow f(2) > f(1)$
III. V, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
IV. F, pois $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
V. V, pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

31 a) $64^x = 256 \Rightarrow (2^6)^x = 2^8$, ou seja, $2^{6x} = 2^8 \Rightarrow 6x = 8$

$\therefore x = \frac{4}{3}$

Logo, $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

b) $25^{x+2} = 125^{x+5} \Rightarrow (5^2)^{x+2} = (5^3)^{x+5}$, ou seja, $2x + 4 = 3x + 15 \Rightarrow x = -11$

Logo, $S = \{-11\}$.

c) $\left(\frac{8}{125}\right)^{2x-1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2x} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^{2x-1} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{2x}$, ou seja, $6x - 3 = -4x \Rightarrow x = \frac{3}{10}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$.

d) $5^{2x-1} = 1 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^0$ e, portanto, $2x - 1 = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{2}$.

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

e) $7^x = 8^x \Rightarrow \frac{7^x}{8^x} = \frac{8^x}{8^x}$, ou seja, $\left(\frac{7}{8}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^x = \left(\frac{7}{8}\right)^0$

$\therefore x = 0$

Logo, $S = \{0\}$.

f) $\sqrt[3]{25^x} = \sqrt{5} \Rightarrow 25^{\frac{x}{3}} = 5^{\frac{1}{2}}$, ou seja, $5^{\frac{2x}{3}} = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

32 Substituindo $P(h)$ por 0,729 na equação $P(h) = (0{,}9)^h$, temos:

$0{,}729 = (0{,}9)^h \Rightarrow 3^6 \cdot 10^{-3} = (0{,}9)^h$

$\therefore (3^2)^3(10^{-1})^3 = (0{,}9)^h \Rightarrow (0{,}9)^3 = (0{,}9)^h$

$\therefore h = 3$

Alternativa **e**.

33 a) $2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} = 20 \Rightarrow 2^x \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 20$, ou seja, $2^x = 8$; logo, $x = 3$.

Portanto, $S = \{3\}$.

b) $3^x \cdot 3^1 - 3^x \cdot 3^2 = -54 \Rightarrow 3^x \cdot (3 - 9) = -54$, ou seja, $3^x = 9$; logo, $x = 2$.

Portanto, $S = \{2\}$.

34 a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Rightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Fazendo $y = 5^x$:

$y^2 - 6y + 5 = 0 \Rightarrow y = 5$ ou $y = 1$

Ou seja: $5^x = 5$ ou $5^x = 1$

- $5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1$
  $\therefore x = 1$
- $5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0$
  $\therefore x = 0$

Logo, $S = \{0, 1\}$.

b) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0 \Rightarrow 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$

Fazendo $y = 7^x$:

$y^2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$ ou $y = -1$

Assim:

- $7^x = 7 \Rightarrow x = 1$
- $7^x = -1 \Rightarrow \nexists x$

Logo, $S = \{1\}$.

c) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 8 = 0$
Fazendo $y = 2^x$:
$y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = 2$
Ou seja: $2^x = 4$ ou $2^x = 2$
- $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$
- $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Logo, $S = \{1, 2\}$.

d) $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x = 1 \Rightarrow 3^{2x} \cdot 3 + 2 \cdot 3^x = 1$
Fazendo $3^x = y$:
$3y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ ou $y = -1$
Assim:
- $3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1}$
  $\therefore x = -1$
- $3^x = -1 \Rightarrow \nexists x$

Logo, $S = \{-1\}$.

35 Para quadruplicar a quantia aplicada, devemos ter $M = 4C$. Substituindo esse valor na fórmula $M = C \cdot 2^{0{,}04t}$, temos:
$4\cancel{C} = \cancel{C} \cdot 2^{0{,}04t} \Rightarrow 2^2 = 2^{0{,}04t}$
$\therefore 2 = 0{,}04^t \Rightarrow t = \frac{2}{0{,}04} = 50$
Logo, o menor tempo possível é 50 meses, ou 4 anos e 2 meses.
Alternativa **c**.

36 Considerando 20 minutos uma unidade de tempo, aplicamos a fórmula $M = C(1 + i)^t$ para:
$M = 4{,}096 \cdot 10^6$, $C = 1.000$ e $i = 100\% = 1$:
$4{,}096 \cdot 10^6 = 1.000(1 + 1)^t \Rightarrow 4.096 = 2^t$
$\therefore 2^{12} = 2^t \Rightarrow t = 12$
Assim, t equivale a $12 \cdot 20$ min $= 240$ min, ou seja, $t = 4$ horas.
Alternativa **d**.

37 a) O ponto comum aos gráficos é a solução do sistema
$$\begin{cases} b = 2^{a+2} + 75 & \text{(I)} \\ b = 2^{a+1} + 139 & \text{(II)} \end{cases}$$
Assim:
$2^{a+2} + 75 = 2^{a+1} + 139 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^a \cdot 4 + 75 - 2^a \cdot 2 - 139 = 0$
$\therefore 2 \cdot 2^a = 64 \Rightarrow 2^a = 32$
$\therefore 2^a = 2^5 \Rightarrow a = 5$
Substituindo a por 5 em (I), concluímos:
$b = 2^7 + 75 = 203$
Logo: $a = 5$ e $b = 203$

b) Pelo item anterior, concluímos que os dois vilarejos terão o mesmo número de indivíduos daqui a 5 anos.

c) $f(7) = 2^{7+2} + 75 = 587$
O número de indivíduos do vilarejo A daqui a 7 anos será 587.

d) $\Delta f = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{139 - 91}{2} = 24$
$\Delta g = \frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = \frac{171 - 147}{2} = 12$

38 Esquematizando os dados do problema, temos:
$C = 4{,}5$ bilhões de litros
$i = 0{,}2\% = 0{,}002$ (taxa anual)
$t = ?$
$M = 4{,}57245$ bilhões de litros
E aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$:
$4{,}57245 = 4{,}5(1 + 0{,}002)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{4{,}57245}{4{,}5} = (1{,}002)^t \Rightarrow 1{,}0161 = (1{,}002)^t$
Observando a tabela, constatamos que $1{,}0161 = (1{,}002)^8$; portanto:
$1{,}0161 = (1{,}002)^t \Rightarrow (1{,}002)^8 = (1{,}002)^t$
$\therefore t = 8$
Ou seja, o consumo de água dessa cidade será de 4,57245 bilhões de litros daqui a 8 anos.

39 a) $32^{2x-1} < 4^{2x+1} \Rightarrow 2^{5(2x-1)} < 2^{2(2x+1)}$
Como $2 > 1$, o sentido da desigualdade se mantém para os expoentes:
$10x - 5 < 4x + 2 \Rightarrow 6x < 7$
$\therefore x < \frac{7}{6}$
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{6}\right\}$.

b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+3} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{x+4} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2(x+3)} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{x+4}$
Como $0 < \frac{1}{5} < 1$, o sentido da desigualdade é invertido para os expoentes:
$2x + 6 \leq x + 4 \Rightarrow x \leq -2$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$.

c) $5^x > 1 \Rightarrow 5^x > 5^0$
$\therefore x > 0$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$
$\therefore x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$.

e) $2^x < -1$
Não existe x tal que 2^x é negativo. Logo, $S = \varnothing$.

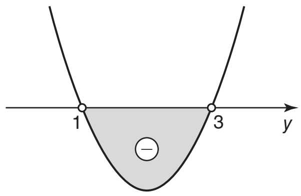
f) $7^x > 0$
Toda potência de base positiva é um número positivo. Logo, $S = \mathbb{R}$.

g) Dividindo por 7^x ambos os membros da desigualdade $3^x > 7^x$, obtemos:
$\frac{3^x}{7^x} > 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^x > \left(\frac{3}{7}\right)^0$
$\therefore x < 0$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

40 a) $5^x + 5^{x-2} \leq 26 \Rightarrow 5^x + \frac{5^x}{5^2} - 26 \leq 0$
Fazendo $y = 5^x$:
$25y + y - 650 \leq 0 \Rightarrow 26y \leq 650$
$\therefore y \leq 25$
Voltando à variável original x, temos:
$5^x \leq 25 \Rightarrow 5^x \leq 5^2$
$\therefore x \leq 2$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$.

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-1} \geqslant 11 \Rightarrow 3^x \cdot 3 + \frac{2 \cdot 3^x}{3} \geqslant 11$
Fazendo $y = 3^x$:
$9y + 2y \geqslant 33 \Rightarrow 11y \geqslant 33$
$\therefore\ y \geqslant 3$
Ou seja: $3^x \geqslant 3^1 \Rightarrow x \geqslant 1$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

c) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$
$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$
Fazendo $y = 3^x$, obtemos $y^2 - 4y + 3 < 0$



$\therefore\ 1 < y < 3$
Retornando à variável original x, temos:
$1 < 3^x < 3 \Rightarrow 3^0 < 3^x < 3^1$
$\therefore\ 0 < x < 1$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

41 a) $C = 1.000$
$i = 10\% = 0,1$
Aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$, temos:
$M = 1.000(1 + 0,1)^t \Rightarrow M = 1.000 \cdot 1,1^t$

b) Para que o montante seja inferior a R\$ 1.331,00, devemos ter:
$1.000(1,1)^t < 1.331 \Rightarrow 1,1^t < 1.331$
$\therefore\ 1,1^t < (1,1)^3$
$\therefore\ t < 3$
Logo, o montante será inferior a R\$ 1.331,00 para qualquer tempo t menor que 3 anos.

42 a) $C = 1.000$
$i = -60\% = -0,6$
Aplicando a fórmula $m = C(1 + i)^t$, temos:
$m = 1.000(1 - 0,6)^t$
$\therefore\ m = 1.000 \cdot 0,4^t$

b) Para a massa ser menor que 64 g, devemos ter:
$1.000 \cdot 0,4^t < 64 \Rightarrow 0,4^t < \frac{64}{1.000}$
$\therefore\ 0,4^t < \frac{4^3}{10^3} \Rightarrow 0,4^t < (0,4)^3$
$\therefore\ t > 3$
Assim, a massa será menor que 64 g para $t > 3$.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 Sabemos que:
$30^2 = 900$
$31^2 = 961$
$32^2 = 1.024 = 987 + 37$
Logo, o menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para obter um quadrado perfeito é 37.
Alternativa **a**.

2 $2^{40} - 1 = (2^{20})^2 - 1 = (2^{20} + 1)(2^{20} - 1) =$
$= (2^{20} + 1)[(2^{10})^2 - 1] =$
$= (2^{20} + 1)\ (2^{10} + 1)\ (2^{10} - 1) =$
$= (2^{20} + 1)\ (1.024 + 1)\ (1.024 - 1) =$
$= (2^{20} + 1) \cdot 1.025 \cdot 1.023$
Assim, temos:
I. V, pois 1.023 é múltiplo de 31
II. V, pois 1.025 é múltiplo de 5
III. F, pois o número n tem fatores naturais diferentes de 1 e n, por exemplo, o fator 5
IV. F, pois os três fatores $2^{20} + 1$, 1.025 e 1.023 são ímpares
Alternativa **e**.

3 O número m deve ser inteiro, e k deve ser um número real tal que $1 \leqslant |k| < 10$.

4 a) $3.000.000.000 = 3 \cdot 10^9$
b) $15.000.000 = 1,5 \cdot 10^7$
c) $250.000.000 = 2,5 \cdot 10^8$
d) $10.000 = 10^4$
e) $0,0000005 = 5 \cdot 10^{-7}$
f) $0,0000000025 = 2,5 \cdot 10^{-9}$
g) $0,0000032 = 3,2 \cdot 10^{-6}$
h) $0,438 = 4,38 \cdot 10^{-1}$

5 Temos:
$M = 2,45 \cdot 10^{18} = 245 \cdot 10^{16}$
$N = 4,7 \cdot 10^{16}$
Logo:
$M + N = (245 + 4,7) \cdot 10^{16} = 249,7 \cdot 10^{16} =$
$= 2,497 \cdot 10^{18}$
Alternativa **b**.

6 a) $5\sqrt{24} + 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + \sqrt{6} =$
$= 5 \cdot 2\sqrt{6} + 8\sqrt{6} + \sqrt{6} = 19\sqrt{6}$
b) $10\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} =$
$= 10\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 11\sqrt[3]{2}$

7 a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{49} = 7$
b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$
c) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{3^5} = 3$
d) $\sqrt[25]{3^{18}} \cdot \sqrt[25]{3^7} = \sqrt[25]{3^{25}} = 3$
e) $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$
f) $2\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4} = 2 \cdot \sqrt[5]{3^5} = 2 \cdot 3 = 6$

8 $\sqrt[7]{3^5} \cdot \sqrt[7]{3^x} = 3 \Rightarrow \sqrt[7]{3^5 \cdot 3^x} = 3$
$\therefore\ \sqrt[7]{3^{5+x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{5+x}{7}} = 3^1$
$\therefore\ \frac{5 + x}{7} = 1$
$\therefore\ x = 2$

9 $\sqrt[n]{3^p} \cdot \sqrt[n]{3^x} = 3 \Rightarrow \sqrt[n]{3^p \cdot 3^x} = 3$
$\therefore\ \sqrt[n]{3^{p+x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{p+x}{n}} = 3^1$
$\therefore\ \frac{p + x}{n} = 1$
$\therefore\ x = n - p$

10 a) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 5 - 4 = 1$
b) $(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3) = (2\sqrt{5})^2 - 3^2 = 20 - 9 = 11$
c) $(2\sqrt{7} + \sqrt{3})(2\sqrt{7} - \sqrt{3}) = (2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 =$
$= 28 - 3 = 25$

11 a) $\dfrac{1\cdot\sqrt[6]{2^5}}{3\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{2^5}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^5}}{3\cdot 2} = \dfrac{\sqrt[6]{32}}{6}$

b) $\dfrac{2\cdot\sqrt{a}}{3\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \dfrac{2\sqrt{a}}{3a}$

c) $\dfrac{a\cdot\sqrt[5]{c^3}}{b\sqrt[5]{c^2}\cdot\sqrt[5]{c^3}} = \dfrac{a\sqrt[5]{c^3}}{bc}$

12 a) $\dfrac{6\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)} = \dfrac{6\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{20-7} =$

$= \dfrac{6\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{13}$

b) $\dfrac{20\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)} =$

$= \dfrac{20\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{50-12} = \dfrac{20\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{38} =$

$= \dfrac{10\left(5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{19}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{18-12} = \dfrac{6+2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$

13 a) $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{625}$

b) $9^{0,3} = 9^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{9^3} = \sqrt[10]{729}$

c) $8^{1,2} = 8^{\frac{12}{10}} = 8^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{8^6} = 8\sqrt[5]{8}$

14 a) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[5]{x^{10}} = x^{\frac{10}{5}} = x^2$

c) $\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$

15 $E = 16^{0,75} + 8^{\frac{1}{3}} - 25^{-0,5} = (2^4)^{0,75} + \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} - (5^2)^{-0,5}$

$\therefore\ E = 2^{4\cdot(0,75)} + 2^{3\cdot\frac{1}{3}} - 5^{2\cdot(-0,5)} = 2^3 + 2 - 5^{-1}$

$\therefore\ E = 8 + 2 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{49}{5}$

16 $\left\{\left[(n+2)^4\right]^{\frac{1}{2}} - 4(n+1)\right\}^{\frac{1}{2}} =$

$= \left\{\sqrt{(n+2)^4} - 4n - 4\right\}^{\frac{1}{2}} =$

$= \left\{(n+2)^2 - 4n - 4\right\}^{\frac{1}{2}} =$

$= \left\{n^2 + 4n + 4 - 4n - 4\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{n^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n^2} = n$

Alternativa **e**.

17 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} : \dfrac{1}{4}\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{32}\right)^0 =$

$= 2^3\cdot 4\cdot 3 + 1 = 96 + 1 = 97$

18 $(0,09)^{\frac{1}{2}} + (0,0016)^{0,25} = \left(\dfrac{9}{100}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\dfrac{16}{10.000}\right)^{\frac{1}{4}} =$

$= \sqrt{\dfrac{9}{100}} + \sqrt[4]{\dfrac{16}{10.000}} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{10} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

19 Quadrando ambos os membros da igualdade

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 5$, obtemos:

$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}} + \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ a + 2 + a^{-1} = 25$

$\therefore\ a + a^{-1} = 23$

20 Sabemos que $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$. Logo $0 < x < 1$ tal que $10^x = 2$. Fazendo algumas tentativas:

$10^{0,5} \approx 3,16$

$10^{0,4} \approx 2,51$

$10^{0,3} \approx 1,99$

$10^{0,31} \approx 2,04$

$10^{0,305} \approx 2,02$

$10^{0,302} \approx 2,00$

Logo, $x \approx 0,302$.

21 Transformando os radicais em potências com expoentes racionais e usando uma calculadora científica, obtemos:

a) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{0,5} \approx 1,7321$

b) $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}} = 7^{0,25} \approx 1,6266$

c) $\sqrt[5]{9} = 9^{\frac{1}{5}} = 9^{0,2} \approx 1,5518$

22 Usando as aproximações $5^{\sqrt{2}} \approx 9,7$ e $2^{2\sqrt{2}} \approx 7,1$, temos:

$(20)^{\sqrt{2}} = (5\cdot 4)^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}\cdot 2^{2\sqrt{2}} \approx 9,7\cdot 7,1 = 68,87$

23 Usando uma calculadora científica, obtemos as seguintes aproximações:

a) $2^{\pi} \approx 8,824977827$

b) $5^{\sqrt{2}} \approx 9,738517742$

c) $2^{\sqrt[3]{5}} = 2^{5^{\frac{1}{3}}} \approx 3,271553689$

24 $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}} = x \Rightarrow \left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = x^{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \left(\sqrt{3}\right)^2 = x^{\sqrt{2}}$

$\therefore\ x^{\sqrt{2}} = 3$

Alternativa **c**.

25 $f(p+q) = 2^{p+q} = 2^p\cdot 2^q = f(p)\cdot f(q)$

Alternativa **b**.

26 Pelo gráfico de $f(x) = 2^{x-k} - 1$, observamos que $f(-1) = 0$. Assim:

$f(-1) = 0 \Rightarrow 2^{-1-k} - 1 = 0$

$\therefore\ 2^{-1-k} = 1 \Rightarrow 2^{-1-k} = 2^0$

$\therefore\ -1 - k = 0 \Rightarrow k = -1$

Logo, k é um número inteiro ímpar.

Alternativa **b**.

27 Temos $A(0, g(0))$ e $B(2, g(2))$, ou seja, $A(0, 1)$ e $B(2, 2)$.

Como f é uma função afim, temos que $f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$; logo:

$\begin{cases} 1 = a\cdot 0 + b \\ 2 = a\cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow b = 1 \text{ e } a = \dfrac{1}{2}$

Assim, obtemos: $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$

Portanto: $f(10) = \dfrac{10}{2} + 1 = 6$

Alternativa **c**.

28 a) $121^{2x} = 11^{x+3} \Rightarrow (11^2)^{2x} = 11^{x+3}$

$\therefore\ 4x = x + 3$

$\therefore\ x = 1$

Logo, $S = \{1\}$.

b) $3^x + 3^{x+2} + 3^{x-1} = \dfrac{31}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 3^x + 3^x\cdot 3^2 + 3^x\cdot 3^{-1} = \dfrac{31}{3}$

Colocando 3^x em evidência:

$3^x\left(1 + 9 + \frac{1}{3}\right) = \frac{31}{3} \Rightarrow 3^x\left(\frac{31}{3}\right) = \frac{31}{3}$

$\therefore\ 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0$

$\therefore\ x = 0$

Logo, S = {0}.

c) $5^{x+1} + 25^{x+2} = 26 \Rightarrow 5^x \cdot 5 + 5^{2x} \cdot 5^4 = 26$

$\therefore\ 5^{2x} \cdot 625 + 5^x \cdot 5 - 26 = 0$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$625y^2 + 5y - 26 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$ ou $y = -\frac{26}{125}$

Voltando à variável original:

- $5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1}\ \therefore\ x = -1$
- $5^x = -\frac{26}{125} \Rightarrow \nexists\ x$

Logo, S = {−1}.

d) $5 \cdot 2^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 8 \Rightarrow 5 \cdot 2^x \cdot 2 - 8 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-2} = 8$

$\therefore\ 10 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{2x} - 8 = 0$

Substituindo 2^x por y, temos:

$-2y^2 + 10y - 8 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 4$

Voltando à variável original:

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Logo, S = {0, 2}.

29 a) $16^x - 4^x - 2 = 0 \Rightarrow 4^{2x} - 4^x - 2 = 0$

Sendo $y = 4^x$, temos:

$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -1$

Voltando à variável original: $4^x = 2$ ou $4^x = -1$

- $4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2^1$

  $\therefore\ x = \frac{1}{2}$
- $4^x = -1 \Rightarrow \nexists x$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) $81^x - 9^x - 6 = 0 \Rightarrow 9^{2x} - 9^x - 6 = 0$

Sendo $y = 9^x$, temos:

$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -2$

Voltando à variável original:

- $y = 3 \Rightarrow 3 = 3^{2x}$

  $\therefore\ x = \frac{1}{2}$
- $y = -2 \Rightarrow -2 = 3^{2x}$

  $\therefore\ \nexists x$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $2^{x+3} = (2^x + 2)^2 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 = 2^{2x} + 4 \cdot 2^x + 4$

$\therefore\ 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 0$

$\therefore\ y = 2$

Voltando à variável original:

$y = 2 \Rightarrow 2^x = 2$

$\therefore\ x = 1$

Logo, S = {1}.

d) $4^x - (2 + \sqrt{2})2^x + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2x} - (2 + \sqrt{2})2^x + 2\sqrt{2} = 0$

Sendo $y = 2^x$:

$y^2 - (2 + \sqrt{2})y + 2\sqrt{2} = 0$

Resolvendo pelo método da soma e do produto, concluímos que as raízes são 2 e $\sqrt{2}$.

Logo:

- $y = 2 \Rightarrow 2 = 2^x$

  $\therefore\ x = 1$
- $y = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = 2^x$

  $\therefore\ x = \frac{1}{2}$

Portanto, $S = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.

30 A área do triângulo *ABC* da figura é dada por $\frac{AB \cdot BC}{2}$. Pelo gráfico da função $f(x) = 2^x$, temos:

- $AB = f(2n) - f(n) = 2^{2n} - 2^n = (2^n)^2 - 2^n =$
  $= [f(n)]^2 - f(n)$
- $BC = n$

Assim: $\frac{AB \cdot BC}{2} = 3n \Rightarrow \{[f(n)]^2 - f(n)\} \cdot \cancel{n} = 6\cancel{n}$

$[f(n)]^2 - f(n) - 6 = 0$

Resolvendo a equação, obtemos:

$f(n) = -2$ (não convém) ou $f(n) = 3$.

Alternativa **c**.

31 Os pontos comuns aos gráficos de *f* e *g* são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = 3^{x+1} - 25 & \text{(I)} \\ y = 18 \cdot 3^{-x} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$3^{x+1} - 25 = 18 \cdot 3^{-x} \Rightarrow 3 \cdot 3^x - 25 = \frac{18}{3^x}$

Fazendo $3^x = k$, temos:

$3k - 25 = \frac{18}{k} \Rightarrow 3k^2 - 25k - 18 = 0$

$\therefore\ k = 9$ ou $k = -\frac{2}{3}$

Voltando à variável original:

$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

ou

$3^x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \nexists x$

Substituindo x por 2 em (I) ou em (II), obtemos y = 2.

Assim, o ponto comum aos gráficos de *f* e *g* é (2, 2).

Alternativa **d**.

32 A equação é equivalente a:

$3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

Fazendo a mudança de variável: $3^{2\sqrt{x}} = t$, obtemos:

$t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 3$

Voltando à variável original:

$3^{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 0$

$\therefore\ x = 0$

ou

$3^{2\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1$

$\therefore\ x = \frac{1}{4}$

Assim, concluímos que:

$16(p + q) = 16\left(0 + \frac{1}{4}\right) = 4$

Alternativa **b**.

33 a) $(0{,}2)^{2x+1} > (0{,}04)^{3x+6} \Rightarrow \left(\frac{2}{10}\right)^{2x+1} > \left(\frac{4}{100}\right)^{3x+6}$

$\therefore \left(\frac{2}{10}\right)^{2x+1} > \left(\frac{2}{10}\right)^{6x+12}$

Como $0 < \frac{2}{10} < 1$, invertemos o sentido da desigualdade para os expoentes:

$2x + 1 < 6x + 12 \Rightarrow 4x > -11$

$\therefore x > -\frac{11}{4}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{11}{4}\right\}$.

b) $81^x \leqslant 243^{x+2} \Rightarrow 3^{4x} \leqslant 3^{5x+10}$

Como $3 > 1$, conservamos o sentido da desigualdade para os expoentes:

$4x \leqslant 5x + 10 \Rightarrow x \geqslant -10$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -10\}$.

c) $(\sqrt{2})^{2x+1} < (\sqrt{2})^{4x+2}$

Como $\sqrt{2} > 1$, conservamos o sentido da desigualdade para os expoentes:

$2x + 1 < 4x + 2 \Rightarrow 2x > -1$

$\therefore x > -\frac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$.

d) $(\sqrt{0{,}5})^{2x+1} \leqslant (\sqrt{0{,}5})^{x+4}$

Como $0 < \sqrt{0{,}5} < 1$, invertemos o sentido da desigualdade para os expoentes:

$2x + 1 \geqslant x + 4 \Rightarrow x \geqslant 3$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

34 a) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^x < 2^{x-2} - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \cdot 2 - 3 \cdot 2^x < \frac{2^x}{2^2} - 5$

Sendo $y = 2^x$:

$2y - 3y < \frac{y}{4} - 5 \Rightarrow \frac{5y}{4} > 5$

$\therefore y > 4$

Voltando à variável original:

$y > 4 \Rightarrow 2^x > 2^2$

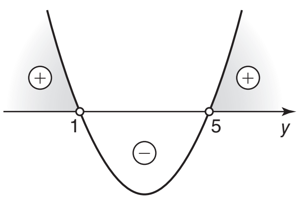
$\therefore x > 2$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

b) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 > 0 \Rightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$

Sendo $y = 5^x$:

$y^2 - 6y + 5 > 0$



Portanto, $y < 1$ ou $y > 5$.

Voltando à variável original:

- $y < 1 \Rightarrow 5^x < 5^0$
  $\therefore x < 0$
- $y > 5 \Rightarrow 5^x > 5^1$
  $\therefore x > 1$

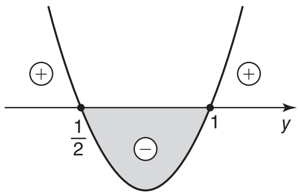
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$.

c) $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \leqslant 0$

Fazendo $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, temos:

$2y^2 - 3y + 1 \leqslant 0$



Portanto, $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$.

Voltando à variável original:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow x \leqslant 1$ (I)

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow x \geqslant 0$ (II)

O conjunto solução é dado por (I) ∩ (II); logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

35 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x-4} \leqslant 2^{x+1} \leqslant 16^{x+3} \Rightarrow 2^{3x+4} \leqslant 2^{x+1} \leqslant 2^{4x+12}$

Como $2 > 1$, o sentido das desigualdades se mantém para os expoentes:

$3x + 4 \leqslant x + 1 \leqslant 4x + 12 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4 \leqslant x + 1 \\ x + 1 \leqslant 4x + 12 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x \leqslant -\frac{3}{2} \\ x \geqslant -\frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{11}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{3}{2}$

Logo, os números inteiros que satisfazem a inequação são -3 e -2.

Exercícios contextualizados

36 Usando a propriedade citada no enunciado, para pesar 1.000 g são necessários e suficientes pesos de massas:

$3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^k$ tal que $3^k < 1.000$

Sabemos que $3^6 = 729$ e $3^7 = 2.187$. Logo, são necessários e suficientes os pesos de massas:

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ e 3^6, ou seja, são necessários 7 pesos.

Alternativa **b**.

37 $2.000.000 \cdot 10^{24}$ kg $= 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{24}$ kg $= 2 \cdot 10^{30}$ kg

38 $0{,}000045$ m $= 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ m

39 a) $27.000.000.000.000.000.000 = 2{,}7 \cdot 10^{19}$

b) Lembrando que 1 dm³ = 10^3 cm³, podemos obter o número x de moléculas, em 1 dm³, por meio de uma regra de três:

1 cm³ ———	$2{,}7 \cdot 10^{19}$
10^3 cm³ ———	x

$\Rightarrow x = 2{,}7 \cdot 10^{19} \cdot 10^3 = 2{,}7 \cdot 10^{22}$

Logo, $2{,}7 \cdot 10^{22}$ moléculas compõem 1 dm³ de ar atmosférico.

40 a) $5.000.000 = 5 \cdot 10^6$

b) Transformando 1 mL em mm^3, temos:

$1 \text{ mL} = 0{,}001 \text{ L} = 0{,}001 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ dm}^3 =$
$= 10^{-3} \cdot 10^6 \text{ mm}^3$
$\therefore 1 \text{ mL} = 10^3 \text{ mm}^3$

Com uma regra de três, encontramos o número x de glóbulos vermelhos de 1 mL de sangue:

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot 10^6 & \text{———} & 1 \text{ mm}^3 \\ x & \text{———} & 10^3 \text{ mm}^3 \end{array} \Rightarrow x = 5 \cdot 10^6 \cdot 10^3$$

$\therefore x = 5 \cdot 10^9$

41 Pelo enunciado, sabemos que 1 *googol* vale 10^{100}.

a) $\dfrac{10^{100}}{2} = \dfrac{2^{100} \cdot 5^{100}}{2} = 2^{99} \cdot 5^{100} = 2^{99} \cdot 5^{99} \cdot 5 =$
$= (2 \cdot 5)^{99} \cdot 5 = 5 \cdot 10^{99}$

b) 75% de $10^{100} = \dfrac{75}{100} \cdot 10^{100} = \dfrac{75 \cdot 10^{100}}{10^2} =$
$= 75 \cdot 10^{98} = 7{,}5 \cdot 10^{99}$

c) $\dfrac{3}{10^3} \cdot 10^{100} = 3 \cdot 10^{97}$

d) $4 \cdot \dfrac{1}{10^{100}} = 4 \cdot 10^{-100}$

42 Como $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$, temos que o volume de água do aquífero Guarani é $3 \cdot 10^{16}$ L. Assim, a razão do volume de água do aquífero Guarani para o volume de água do novo reservatório da Sabesp é:

$\dfrac{3 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 10^7} = 1{,}5 \cdot 10^9$

Ou seja, o volume de água do aquífero é $1{,}5 \cdot 10^9$ vezes a capacidade do novo reservatório da Sabesp.

Alternativa **e**.

43 Sabemos que a velocidade da luz é $3 \cdot 10^8$ m/s e que 1 ano equivale a:

$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ segundos $= 31.536.000$ segundos

Logo, 1 ano-luz é dado por:

$3 \cdot 10^8 \cdot 31.536.000 \text{ m} =$
$= 94.608 \cdot 10^{11} \text{ m} = 9{,}4608 \cdot 10^{15} \text{ m}$

Lembrando que $4{,}057 \cdot 10^{13}$ km $= 4{,}057 \cdot 10^{16}$ m, temos que a distância, em ano-luz, da Terra à estrela é:

$\dfrac{4{,}057 \cdot 10^{16}}{9{,}46608 \cdot 10^{15}} = \dfrac{40{,}57 \cdot 10^{15}}{9{,}46608 \cdot 10^{15}} \approx 4{,}29$

Logo, a distância da Terra à estrela Alfa de Centauro C é cerca de 4,29 anos-luz.

44 $A_0 = 580 \text{ m}^2$

$i = 5\% = 0{,}05$ (taxa diária)

$t = 10$ dias

Aplicando a fórmula $A = A_0(1 + i)^t$, temos:

$A = 580(1 + 0{,}05)^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 580(1{,}05)^{10} \approx 580 \cdot 1{,}629$
$\therefore A \approx 944{,}82 \text{ m}^2$

Logo, a área coberta daqui dez dias é, aproximadamente, $944{,}82 \text{ m}^2$.

45 $V_0 = 100{,}00$

$i = 1\% = 0{,}01$ (taxa mensal)

$t = 12$ meses

Aplicando a fórmula $V = V_0(1 + i)^t$, temos:

$V = 100(1 + 0{,}01)^{12} \Rightarrow V = (1{,}01)^{12} \cdot 100$

Alternativa **d**.

46 Sabemos que a taxa é $i = 10\% = 0{,}1$.

Aplicando a fórmula $C = Q_0(1 + i)^t$, temos:

$C = Q_0(1 + 0{,}1)^t \Rightarrow C = Q_0(1{,}1)^t$

Alternativa **a**.

47 $V_0 =$ R\$ 32.000,00

$i = -10\% = -0{,}1$ (taxa anual)

$t = 6$ anos

Aplicando a fórmula $V = V_0(1 + i)^t$, temos:

$V = 32.000(1 - 0{,}10)^6 \Rightarrow V = 32.000(0{,}9)^6$
$\therefore V = 32.000 \cdot 0{,}531441$
$\therefore V \approx 17.006{,}11$

Alternativa **e**.

48 O intervalo de tempo decorrido do início de 1701 ao fim de 1900 equivale a 200 anos. Assim, a taxa constante anual i de crescimento da população, nesse intervalo de tempo, é dada por:

$910 = 600(1 + i)^{200} \Rightarrow (1 + i)^{200} \approx 1{,}52$
$\therefore 1 + i = \sqrt[200]{1{,}52} = (1{,}52)^{\frac{1}{200}} = (1{,}52)^{0{,}005}$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos $(1{,}52)^{0{,}005} \approx 1{,}002$.

Logo:

$1 + i \approx 1{,}002 \Rightarrow i \approx 0{,}002 = 0{,}2\%$

Portanto, a taxa de crescimento anual foi 0,2%, aproximadamente.

49 a)

t	f(t)
0	100.000
1	$100.000 \cdot 2^1$
2	$100.000 \cdot 2^2$
3	$100.000 \cdot 2^3$
4	$100.000 \cdot 2^4$
5	$100.000 \cdot 2^5$

Generalizando:
$f(t) = 100.000 \cdot 2^t$

t	g(t)
0	70.000
1	$70.000 + 2.000 \cdot 1$
2	$70.000 + 2.000 \cdot 2$
3	$70.000 + 2.000 \cdot 3$
4	$70.000 + 2.000 \cdot 4$
5	$70.000 + 2.000 \cdot 5$

Generalizando:
$g(t) = 70.000 + 2.000t$

b) O número de ratos que haverá por habitante após cinco anos é dado pela razão $\dfrac{f(5)}{g(5)}$, ou seja:

$\dfrac{100.000 \cdot 2^5}{70.000 + 2.000 \cdot 5}$ ratos/habitante $= 40$ ratos/habitante

50 A população com 60 anos de idade ou mais, em 2030, em milhões, será

$y = 363 \cdot e^{0{,}03 \cdot 30} = 363 \cdot (e^{0{,}3})^3 = 363 \cdot (1{,}35)^3 \approx 893$

Alternativa **e**.

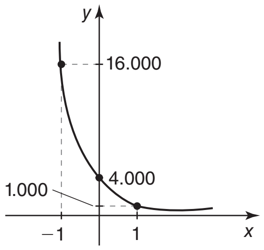
51 a) Observando que o número de indivíduos decresce através do produto por uma taxa constante (−0,75), podemos aplicar a fórmula: $M = C(1 + i)^t$, obtendo:

$f(x) = 4.000(1 - 0{,}75)^x \Rightarrow f(x) = 4.000 \cdot (0{,}25)^x$

ou, ainda, $f(x) = 4.000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

b) Para esboçar o gráfico dessa função, observamos que $0 < \frac{1}{4} < 1$; logo, a função é decrescente.

Assim:



52 a) $f(0) = 3^{0+1} = 3$ e $g(0) = 9^{1-0} = 9$

Logo, no início do experimento havia 300 bactérias do tipo A e 900 do tipo B.

b) $f(t) = g(t) \Rightarrow 3^{t+1} = 9^{1-t}$

$\therefore 3^{t+1} = 3^{2-2t} \Rightarrow t + 1 = 2 - 2t$

$\therefore t = \frac{1}{3}$

Logo, o número de bactérias dos dois tipos se igualaram 20 minutos após o início do experimento.

53 Calculando o valor do imóvel hoje ($t = 0$) e daqui a 2 anos ($t = 2$), por meio da função $V(t) = 1.000 \cdot (0{,}8)^t$, temos:

$V(0) = 1.000 \cdot (0{,}8)^0 = 1.000$

$V(2) = 1.000 \cdot (0{,}8)^2 = 1.000 \cdot 0{,}64 = 640$

Logo, a desvalorização foi de:

R$ 1.000,00 − R$ 640,00 = R$ 360,00

Alternativa **d**.

54 $P > 63.000 \Rightarrow 64.000(1 - 2^{-0{,}1t}) > 63.000$

$1 - 2^{-0{,}1t} > \frac{63}{64} \Rightarrow 2^{-0{,}1t} < \frac{1}{64}$

$\therefore 2^{-0{,}1t} < 2^{-6} \Rightarrow -0{,}1 \cdot t < -6$

$\therefore t > 60$

Alternativa **d**.

55 Pelo enunciado: $f(t) = 300 \cdot 2^{t-1} + 900$

$g(t) = 70 \cdot 2^{t+2} - 140$

a) Para $t = 0$: $f(0) = 150 + 900 = 1.050$

$g(0) = 280 - 140 = 140$

Logo, no instante zero, a população A era de 1.050 cupins e a B era de 140 cupins.

b) A população A permaneceu maior ou igual à B para $f(t) \geqslant g(t)$. Assim:

$300 \cdot 2^{t-1} + 900 \geqslant 70 \cdot 2^{t+2} - 140 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{300 \cdot 2^t}{2} - 70 \cdot 2^t \cdot 2^2 \geqslant -140 - 900$

$\therefore 150 \cdot 2^t - 280 \cdot 2^t \geqslant -1.040 \Rightarrow$

$\Rightarrow -130 \cdot 2^t \geqslant -1.040$

$\therefore 2^t \leqslant 8 \Rightarrow t = 3$

Logo, durante 3 meses, o número de indivíduos da população A permaneceu maior ou igual ao número de indivíduos da população B.

56 1. V, pois $N(0) = \frac{600}{5 + 3 \cdot 2^{-0{,}1 \cdot 0}} = \frac{600}{8} = 75$

2. F, pois $N(20) = \frac{600}{5 + 3 \cdot 2^{-0{,}1 \cdot 20}} = \frac{2.400}{23} \approx 104$

3. V, pois a inequação $N(t) > 120$ não tem solução, como mostra a resolução a seguir:

$\frac{600}{5 + 3 \cdot 2^{-0{,}1t}} > 120 \Rightarrow \frac{600 \cdot 2^{0{,}1t}}{5 \cdot 2^{0{,}1t} + 3} > 120$

$\therefore \frac{600 \cdot 2^{0{,}1t}}{5 \cdot 2^{0{,}1t} + 3} - 120 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{600 \cdot 2^{0{,}1t}}{5 \cdot 2^{0{,}1t} + 3} - \frac{120(5 \cdot 2^{0{,}1t} + 3)}{5 \cdot 2^{0{,}1t} + 3} > 0$

$\therefore -\frac{360}{5 \cdot 2^{0{,}1t} + 3} > 0 \Rightarrow \frac{360}{5 \cdot 2^{0{,}1t} + 3} < 0$

Como $2^{0{,}1t}$ é um número positivo para qualquer valor real de t, temos que a fração do primeiro membro dessa inequação é positiva para qualquer t real; logo, a inequação não tem solução.

Alternativa **c**.

Exercícios de revisão cumulativa

1 Temos:

$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6} = 2 + 2\sqrt{6} + 3 - 2\sqrt{6} = 5$

$5 \in \mathbb{Q}$

Alternativa **c**.

2 Observamos que os pontos (0, 1.000) e (2, 1.040) pertencem ao gráfico da função $M_1 = ax + b$. Assim:

$\begin{cases} 1.000 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1.000 \\ 1.040 = a \cdot 2 + b \end{cases}$

Substituindo b por 1.000:

$1.040 = a \cdot 2 + 1.000 \Rightarrow a = 20$

Logo, $M_1 = 20x + 1.000$.

Observamos que os pontos (0, 600) e (2, 720) pertencem ao gráfico da função $M_2 = cx + d$. Assim:

$\begin{cases} 600 = c \cdot 0 + d \Rightarrow d = 20 \\ 720 = c \cdot 2 + d \end{cases}$

Substituindo d por 600, temos:

$720 = c \cdot 2 + 600 \Rightarrow c = 60$

Logo, $M_2 = 60x + 600$.

As aplicações terão montantes iguais quando $M_1 = M_2$, ou seja:

$20x + 1.000 = 60x + 600 \Rightarrow x = 10$

Logo, os montantes tornam-se iguais aos 10 meses de aplicação.

3 Dada $f(x) = x^2 - 5x + 6$, temos:

$f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 \Rightarrow f(0) = 6$

Como f e g interceptam-se em $x = 0$, concluímos que $g(0) = 6$. Além disso, pelo gráfico, $g(6) = 0$. Assim, podemos determinar os números reais a e b tais que $g(x) = ax + b$:

- $g(0) = 6 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 6 \Rightarrow b = 6$
- $g(6) = 0 \Rightarrow a \cdot 6 + b = 0$ (I)

Substituindo b por 6 em (I), temos:

$a \cdot 6 + 6 = 0 \Rightarrow a = -1$

Logo, $g(x) = -x + 6$.

Determinando os pontos de intersecção de f e g, temos:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = -x + 6$

$\therefore x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0$

$\therefore x = 0$ ou $x = 4$

- Para $x = 0$, temos $y = 6$
- Para $x = 4$, temos $y = 2$

Logo, P(4, 2).

4 Considerando $2\sqrt{5} + 3 = a$ e $3\sqrt{5} + 0{,}76 = b$, vamos efetuar a subtração $(a - b)$.

- Se $a - b > 0$, então $a > b$
- Se $a - b < 0$, então $a < b$

Assim:

$a - b = (2\sqrt{5} + 3) - (3\sqrt{5} + 0{,}76) = 2{,}24 - \sqrt{5}$

Como $(2{,}24)^2 = 5{,}0176$, temos:

$2{,}24 - \sqrt{5} > 0$

Logo, $a - b > 0$ e, portanto, $a > b$.

Assim, $2\sqrt{5} + 3 > 3\sqrt{5} + 0{,}76$.

Análise da resolução

Representando a equação sob a forma $(2^x)^2 + (m - 3) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ e substituindo 2^x por y, obtemos:

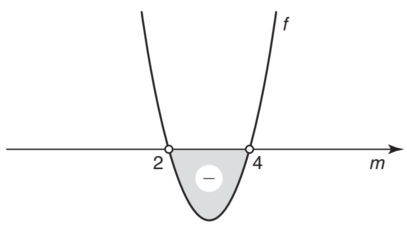
$$y^2 + (m - 3)y + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{(I)}$$

Para que a equação exponencial proposta não admita raiz real, a equação (I):
1. não pode ter raiz ou
2. ter raízes reais negativas

Para que ocorra a consição (1), devemos ter $\Delta < 0$:

$(m - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 8 < 0$

Esboçando o gráfico da função $f(m) = m^2 - 6m + 8$, temos:



Observando que $f(m) < 0$ se, e somente se, $2 < m < 4$, concluímos que ocorre a condição (1) se, e somente se, $2 < m < 4$.

- Como o produto das raízes da equação (I) é positivo $\left(\frac{1}{4}\right)$, temos que a condição (2) ocorrerá se, e somente se, o discriminante dessa equação não for negativo e a soma das raízes for negativa:

$$\begin{cases} (m - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \geqslant 0 \\ 3 - m < 0 \end{cases} \Rightarrow (m \leqslant 2 \text{ ou } m \geqslant 4) \text{ e } m > 3$$

De onde concluímos que $m \geqslant 4$.

Pelas análises das condições (1) e (2), concluímos que a equação exponencial proposta não terá raiz real se, e somente se, $m > 2$.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 O eixo horizontal representa a expectativa de vida ao nascer, em anos, e o eixo vertical representa a renda, PIB *per capita* em dólares.

2 Em um trecho, o eixo vertical varia de 100 em 100, em seguida de 1.000 em 1.000, depois de 10.000 em 10.000. Esse eixo apresenta uma escala logarítmica.

3 Analisando o infográfico, percebemos que a maior parte dos países com menor expectativa de vida estão localizados na África.

Exercícios propostos

1 a) $\log_2 256$ é o expoente x da potência de base 2 tal que $2^x = 256$.

Temos:

$2^x = 256 \Leftrightarrow 2^x = 2^8$

$\therefore x = 8$

Assim, $\log_2 256 = 8$.

b) $\log_7 \dfrac{1}{49}$ é o expoente x da potência de base 7 tal que $7^x = \dfrac{1}{49}$.

Temos:

$7^x = \dfrac{1}{49} \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2}$

$\therefore x = -2$

Assim, $\log_7 \dfrac{1}{49} = -2$.

c) $\log_{\frac{5}{2}} \dfrac{125}{8}$ é o expoente x da potência de base $\dfrac{5}{2}$ tal que $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{125}{8}$.

Temos:

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \dfrac{125}{8} \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{2}\right)^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3$

$\therefore x = 3$

Assim, $\log_{\frac{5}{2}} \dfrac{125}{8} = 3$.

d) $\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{16}{81}$ é o expoente x da potência de base $\dfrac{3}{2}$ tal que $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{16}{81}$.

Temos:

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}$

$\therefore x = -4$.

Assim, $\log_{\frac{3}{2}} = \dfrac{16}{81} - 4$.

e) $\log 10.000$ é o expoente x da potência de base 10 tal que $10^x = 10.000$.

Temos:

$10^x = 10.000 \Leftrightarrow 10^x = 10^4$

$\therefore x = 4$

Assim, $\log 10.000 = 4$.

f) $\log_{256} 128$ é o expoente x da potência de base 256 tal que $256^x = 128$.

Temos:

$(256)^x = 128 \Leftrightarrow 2^{8x} = 2^7$

$\therefore x = \dfrac{7}{8}$

Assim, $\log_{256} 128 = \dfrac{7}{8}$.

g) $\log_{\frac{8}{27}} \dfrac{16}{81}$ é o expoente x da potência de base $\dfrac{8}{27}$ tal que $\left(\dfrac{8}{27}\right)^x = \dfrac{16}{81}$.

Temos:

$\left(\dfrac{8}{27}\right)^x = \dfrac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$

$\therefore x = \dfrac{4}{3}$

Assim, $\log_{\frac{8}{27}} \dfrac{16}{81} = \dfrac{4}{3}$.

h) $\log \sqrt[5]{100}$ é o expoente x da potência de base 10 tal que $10^x = 100^{\frac{1}{5}}$.

Temos:

$10^x = 100^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 10^x = 10^{\frac{2}{5}}$

$\therefore x = \dfrac{2}{5}$

Assim, $\log \sqrt[5]{100} = \dfrac{2}{5}$.

i) $\log_{0,5} 0{,}125$ é o expoente x da potência de base 0,5 tal que $0{,}5^x = 0{,}125$.

Temos:

$0{,}5^x = 0{,}125 \Leftrightarrow 0{,}5^x = 0{,}5^3$

$\therefore x = 3$

Assim, $\log_{0,5} 0{,}125 = 3$.

2 a) $\log_2 k = 8 \Leftrightarrow 2^8 = k$

$\therefore k = 256$

Assim, $k = 256$.

b) $\log_3 m = 8 \Leftrightarrow m = 3^8$

$\therefore m = 6.561$

Assim, $m = 6.561$.

c) $\log_2 y = 2{,}3214 \Leftrightarrow y = 2^{2,3214}$

$\therefore y = 4{,}9981$

Assim, $y = 4{,}9981$.

d) $\log_3 t = 2{,}3214 \Leftrightarrow t = 3^{2,3214}$

$\therefore t = 12{,}8111$

Assim, $t = 12{,}8111$.

e) $\log u = 2{,}3214 \Leftrightarrow 10^{2,3214} = u$

$\therefore u = 209{,}6042$.

Assim, $u = 209{,}6042$.

f) Pela propriedade P1:
$\log_2 2 = 1$
$\therefore v = 1$

g) Pela propriedade P1:
$\log_3 3 = 1$
$\therefore p = 1$

h) Pela propriedade P1:
$\log 10 = 1$
$\therefore q = 1$

i) $\log_3 59.049 = r \Leftrightarrow 3^r = 59.049$
Pela tabela dada:
$59.049 = 3^{10}$
Logo:
$3^r = 3^{10} \Rightarrow r = 10$
Assim, $\log_3 59.049 = 10$.

j) $\log 39{,}8107 = s \Leftrightarrow 10^s = 39{,}8107$
Pela tabela dada:
$39{,}8107 = 10^{1{,}6}$
Logo:
$10^s = 10^{1{,}6} \Rightarrow s = 1{,}6$
Assim, $\log 39{,}8107 = 1{,}6$.

3 a) $\log_3 8 = \log_3 2^3$
Pela propriedade P3:
$\log_3 2^3 = 3 \log_3 2 = 3 \cdot 0{,}63 = 1{,}89$
Portanto, $\log_3 8 = 1{,}89$.

b) $\log_3 \frac{1}{16} = \log_3 16^{-1} = \log_3 2^{-4}$
Pela propriedade P3:
$\log_3 2^{-4} = -4 \cdot \log_3 2 = -4 \cdot 0{,}63 = -2{,}52$
Portanto, $\log_3 \frac{1}{16} = -2{,}52$.

c) $\log_3 \sqrt[3]{4} = \log_3 4^{\frac{1}{3}} = \log_3 2^{\frac{2}{3}}$
Pela propriedade P3:
$\log_3 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_3 2 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}63 = 0{,}42$
Portanto, $\log_3 \sqrt[3]{4} = 0{,}42$.

4 a) $\log_2 a = 2 \Leftrightarrow a = 2^2$
$\therefore a = 4$
Assim, $a = 4$.

b) Calculando $\log_{25} 5$, temos:
$\log_{25} 5 = x \Leftrightarrow 5^{2x} = 5$
$\therefore x = \frac{1}{2}$
Então, $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$.
Portanto, pela propriedade P3:
$\log_{25} 5^b = b + 1 \Leftrightarrow b \cdot \log_{25} 5 = b + 1$
Então:
$b \cdot \frac{1}{2} = b + 1$
$\therefore b = -2$

c) Calculando $\log_9 3$, temos:
$\log_9 3 = x \Leftrightarrow 3^{2x} = 3$
$\therefore x = \frac{1}{2}$
Então, $\log_9 3 = \frac{1}{2}$.
Portanto:
$c \cdot \log_9 3 = 2c + 1 \Leftrightarrow c \cdot \frac{1}{2} = 2c + 1$
$\therefore c = -\frac{2}{3}$

5 Seja $x = \sqrt[5]{7}$; então:
$\log x = \log \sqrt[5]{7} \Leftrightarrow \log x = \log 7^{\frac{1}{5}}$
Pela propriedade P3:
$\log x = \log 7^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{5} \cdot \log 7$
Portanto:
$\log x = \frac{1}{5} \cdot 0{,}85 = 0{,}17$
Assim, pela tabela podemos concluir que $\sqrt[5]{7} = 1{,}48$.

6 $x = \log_3 2 \Leftrightarrow 3^x = 2$
Calculando $9^{2x} + 81^{\frac{x}{2}}$ para $3^x = 2$, temos:
$9^{2x} + 81^{\frac{x}{2}} = 3^{4x} + 3^{2x} = (3^x)^4 + (3^x)^2 = 2^4 + 2^2 = 20$
Alternativa **b**.

7 a) De acordo com o enunciado, temos:
$\text{colog}_3 9 = -\log_3 9$
Calculando $\log_3 9$, temos:
$\log_3 9 = x \Leftrightarrow 3^x = 3^2$
$\therefore x = 2$
Como $\text{colog}_3 9 = -x$, concluímos:
$\text{colog}_3 9 = -2$

b) $\text{colog}_{25} 125 = -\log_{25} 125$
Calculando $\log_{25} 125$, temos:
$\log_{25} 125 = x \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^3$
$\therefore x = \frac{3}{2}$
Como $\text{colog}_{25} 125 = -x$, concluímos:
$\text{colog}_{25} 125 = -\frac{3}{2}$

c) $\text{colog}_{16} \frac{1}{8} = -\log_{16} \frac{1}{8}$
Calculando $\log_{16} \frac{1}{8}$, temos:
$\log_{16} \frac{1}{8} = x \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{-3}$
$\therefore x = -\frac{3}{4}$
Como $\text{colog}_{16} \frac{1}{8} = -x$, concluímos:
$\text{colog}_{16} \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

8 Dados $R_1 = 8$ e $R_2 = 5$, temos:
$R_1 - R_2 = \log N \Leftrightarrow 8 - 5 = \log N$
$\therefore N = 10^3$
Alternativa **e**.

9 Dado $i = 10$, temos:
$h = \log\left(10^{0{,}7} \cdot \sqrt{10}\right) = \log(10^{0{,}7} \cdot 10^{0{,}5}) = \log 10^{1{,}2}$
Pela propriedade P3:
$h = \log 10^{1{,}2} \Leftrightarrow h = 1{,}2 \log 10$
Pela propriedade P1:
$h = 1{,}2 \log 10 \Leftrightarrow h = 1{,}2 \cdot 1 \therefore h = 1{,}2$ m
Assim, uma criança de 10 anos, dessa cidade, terá altura de 120 cm.
Alternativa **a**.

10 Dados $M = 1.430$, $C = 1.000$ e $i = 10\% = 0,1$, temos:
$M = C\,(1 + i)^n \Rightarrow 1.430 = 1.000\,(1 + 0,1)^n$
$\therefore 1,43 = 1,1^n$
Pela definição de logaritmo:
$\log_{1,1} 1,43 = n$
Alternativa **b**.

11 Sendo $x = 8^{105} = 2^{315}$, temos pela propriedade P3:
$\log x = \log 2^{315} \Leftrightarrow \log x = 315 \cdot \log 2$
Como $\log 2 = 0,3$, obtemos:
$\log x = 315 \cdot 0,3 = 94,5$
Portanto:
$x = 10^{94,5} = 10^{94\,+\,0,5} = 10^{94} \cdot 10^{0,5}$
Sabendo que $\log 3,2 = 0,5$, temos $10^{0,5} = 3,2$.
$\therefore x = 3,2 \cdot 10^{94}$

12 a) $\log_6 22 = \log_6 (2 \cdot 11)$
Pela propriedade P6:
$\log_6 (2 \cdot 11) = \log_6 2 + \log_6 11 = 1,34 + 0,37 = 1,71$
Assim, $\log_6 22 = 1,71$.

b) Pela propriedade P7:
$$\log_6 \frac{2}{11} = \log_6 2 - \log_6 11 = 0,37 - 1,34 = -0,97$$
Portanto, $\log_6 \frac{2}{11} = -0,97$.

c) $\log_6 5,5 = \log_6 \frac{11}{2}$
Pela propriedade P7:
$$\log_6 \frac{11}{2} = \log_6 11 - \log_6 2 = 1,34 - 0,37 = 0,97$$
Portanto, $\log_6 5,5 = 0,97$.

d) Pela propriedade P8:
$$\log_2 11 = \frac{\log_6 11}{\log_6 2} = \frac{1,34}{0,37} \approx 3,62$$
Portanto, $\log_2 11 \approx 3,62$.

e) Pela propriedade P8:
$$\log_{11} 2 = \frac{\log_6 2}{\log_6 11} = \frac{0,37}{1,34} \approx 0,28$$
Portanto, $\log_{11} 2 \approx 0,28$.

f) $\log_6 16 = \log_6 2^4$
Pela propriedade P3:
$\log_6 2^4 = 4 \cdot \log_6 2 = 4 \cdot 0,37 = 1,48$
Portanto, $\log_6 16 = 1,48$.

13 $\log 6 = \log \frac{30}{5}$
Pela propriedade P7:
$\log \frac{30}{5} = \log 30 - \log 5 = \log (3 \cdot 10) - \log 5$
Pela propriedade P6:
$\log (3 \cdot 10) - \log 5 = \log 3 + \log 10 - \log 5 =$
$= 0,48 + \log 10 - 0,69 = \log 10 - 0,21$
Pela propriedade P1:
$\log 10 - 0,21 = 1 - 0,21 = 0,79$
Portanto, $\log 6 = 0,79$.

14 Aplicando a propriedade P8 em $\log_7 25$, temos:
$$x = \log_7 25 \cdot \log_5 7 \Leftrightarrow x = \frac{\log_5 25}{\cancel{\log_5 7}} \cdot \cancel{\log_5 7}$$
$\therefore x = \log_5 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2$
$\therefore x = 2$
Assim, $x = 2$.

15 Dado $5^a = 3$, então:
$\log 5^a = \log 3$
Pela propriedade P3:
$$a \cdot \log 5 = \log 3 \Rightarrow a = \frac{\log 3}{\log 5}$$
Calculando $\log_3 75$:
$\log_3 75 = \log_3 (5^2 \cdot 3)$
Pela propriedade P6:
$\log_3 (5^2 \cdot 3) = \log_3 5^2 + \log_3 3$
Pela propriedade P3:
$\log_3 5^2 + \log_3 3 = 2 \cdot \log_3 5 + \log_3 3$
Pela propriedade P8:
$$2 \cdot \log_3 5 + \log_3 3 = 2 \cdot \frac{\log 5}{\log 3} + \log_3 3$$
Pela propriedade P1:
$$2 \cdot \frac{\log 5}{\log 3} + \log_3 3 = 2 \cdot \frac{\log 5}{\log 3} + 1$$
Então:
$$2 \cdot \frac{\log 5}{\log 3} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{a} + 1 = \frac{2 + a}{a}$$
Assim, $\log_3 75 = \frac{2 + a}{a}$.
Alternativa **a**.

16 Para $x = 2.000$, temos:
$L(2.000) = 12\,(199 \log 2.000 - 651) =$
$= 12\,(199 \log (2 \cdot 1.000) - 651) =$
$= 12\,[199\,(\log 2 + \log 1.000) - 651] =$
$= 12\,[199\,(0,3 + 3) - 651] = 12 \cdot 5,7 = 68,4$
Então, uma pessoa dessa região que nasceu no ano 2000 tem expectativa de viver 68,4 anos.
Alternativa **d**.

17 Sendo $A(t)$ a área, em quilômetro quadrado, do deserto em função do tempo t, em ano, temos:
$A(t) = 50\,(1 + 0,024)^t$
Hoje a área do deserto é 50 km^2, então quando essa área dobrar ela será 100 km^2; assim:
$100 = 50\,(1 + 0,024)^t \Rightarrow 2 = (1 + 0,024)^t$
$\therefore \log 2 = \log (1 + 0,024)^t$
Pela propriedade P3:
$$\log 2 = t \cdot \log 1,024 \Rightarrow 0,301 = t \cdot \log \frac{1.024}{1.000}$$
Pela propriedade P7:
$0,301 = t\,(\log 1.024 - \log 1.000) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0,301 = t\,(\log 2^{10} - 3)$
Pela propriedade P3:
$0,301 = t(10 \cdot \log 2 - 3) \Rightarrow 0,301 = t(10 \cdot 0,301 - 3)$
$\therefore t = 30,1$
Portanto, a área desse deserto irá dobrar em 30,1 anos.

18 Sendo $C(t)$ a função que indica o número de indivíduos da cultura de microrganismos em função do tempo t, em hora, temos:

$C(t) = 100.000\ (1 + 0{,}2)^t$

Para que a cultura atinja 300.000 indivíduos, temos:

$300.000 = 100.000\ (1 + 0{,}2)^t \Rightarrow 3 = 1{,}20^t$

$\therefore\ \log 3 = \log 1{,}20^t$

Pela propriedade P3:

$0{,}48 = t \cdot \log \dfrac{12}{10}$

Pela propriedade P7:

$0{,}48 = t \cdot (\log 12 - \log 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}48 = t \cdot (\log (2^2 \cdot 3) - \log 10)$

Pela propriedade P6:

$0{,}48 = t \cdot (\log 2^2 + \log 3 - 1)$

Pela propriedade P3:

$0{,}48 = t\ (2 \cdot \log 2 + \log 3 - 1)$

Então:

$0{,}48 = t\ (2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48 - 1) \Rightarrow t = 6$

Portanto, a cultura atingirá 300.000 indivíduos em 6 horas.

19 A área $A(t)$ da mancha de óleo, t horas após o comunicado, é dada por: $A(t) = 10\ (1 + 0{,}02)^t$. Assim:

$12 = 10\ (1 + 0{,}02)^t \Rightarrow 1{,}2 = 1{,}02^t$

$\therefore\ \log 1{,}2 = \log 1{,}02^t$

Pela propriedade P3:

$\log 1{,}2 = t \cdot \log 1{,}02 \Rightarrow \log \dfrac{12}{10} = t \cdot \log \dfrac{102}{100}$

$\therefore\ \log \dfrac{2^2 \cdot 3}{10} = t \cdot \log \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 17}{100}$

Pela propriedade P7:

$\log (2^2 \cdot 3) - \log 10 = t\ (\log (2 \cdot 3 \cdot 17) - \log 100)$

Pela propriedade P6:

$\log 2^2 + \log 3 - \log 10 =$

$= t\ (\log 2 + \log 3 + \log 17 - \log 100)$

Pela propriedade P3:

$2 \cdot \log 2 + \log 3 - \log 10 =$

$= t\ (\log 2 + \log 3 + \log 17 - \log 100)$

Então:

$2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48 - 1 = t\ (0{,}30 + 0{,}48 + 1{,}23 - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 8$

Assim, o tempo decorrido desde o momento do comunicado à Capitania dos Portos até a conclusão da medição da área da mancha de óleo foi 8 horas.

20 a) $\ln e = \log_e e$

Pela propriedade P1:

$\log_e e = 1$

Então, $\ln e = 1$.

b) $\ln e^4 = \log_e e^4$

Pela propriedade P3:

$\log_e e^4 = 4 \cdot \log_e e$

Pela propriedade P1:

$4 \cdot \log_e e = 4 \cdot 1 = 4$

Então, $\ln e^4 = 4$.

c) $\ln \dfrac{1}{e} = \log_e \dfrac{1}{e} = \log_e e^{-1}$

Pela propriedade P3:

$\log_e e^{-1} = -1 \cdot \log_e e$

Pela propriedade P1:

$-1 \cdot \log_e e = (-1) \cdot 1 = -1$

Então, $\ln \dfrac{1}{e} = -1$.

21 a) $\ln 6 = \log_e 6 = \log_e (2 \cdot 3)$

Pela propriedade P6:

$\log_e 2 \cdot 3 = \log_e 2 + \log_e 3 =$

$= \ln 2 + \ln 3 = 0{,}6 + 1{,}1 = 1{,}7$

Portanto, $\ln 6 = 1{,}7$.

b) $\ln 1{,}5 = \log_e 1{,}5 = \log_e \dfrac{3}{2}$

Pela propriedade P7:

$\log_e \dfrac{3}{2} = \log_e 3 - \log_e 2 =$

$= \ln 3 - \ln 2 = 1{,}1 - 0{,}6 = 0{,}5$

Portanto, $\ln 1{,}5 = 0{,}5$.

c) $\ln \sqrt{12} = \log_e \sqrt{12} = \log_e 12^{\frac{1}{2}}$

Pela propriedade P3:

$\log_e 12^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \log_e (2^2 \cdot 3)$

Pela propriedade P6:

$\dfrac{1}{2} \cdot \log_e (2^2 \cdot 3) = \dfrac{1}{2}\ (\log_e 2^2 + \log_e 3)$

Pela propriedade P3:

$\dfrac{1}{2}\ (\log_e 2^2 + \log_e 3) = \dfrac{1}{2}\ (2 \cdot \log_e 2 + \log_e 3)$

Então:

$\dfrac{1}{2}\ (2 \cdot \log_e 2 + \log_e 3) = \dfrac{1}{2}\ (2 \cdot \ln 2 + \ln 3) =$

$= \dfrac{1}{2}\ (2 \cdot 0{,}6 + 1{,}1) = 1{,}15$

Portanto, $\ln \sqrt{12} = 1{,}15$.

d) $\log_6 e$

Pela propriedade P8:

$\log_6 e = \dfrac{\log_e e}{\log_e 6} = \dfrac{1}{\log_e 2 \cdot 3}$

Pela propriedade P6:

$\dfrac{1}{\log_e (2 \cdot 3)} = \dfrac{1}{\log_e 2 + \log_e 3}$

Então:

$\dfrac{1}{\log_e 2 + \log_e 3} = \dfrac{1}{\ln 2 + \ln 3} = \dfrac{1}{1{,}7} \approx 0{,}59$

Portanto, $\log_6 e \approx 0{,}59$.

22 Do enunciado, temos:

$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \Rightarrow N = \dfrac{N_0}{e^{\lambda t}}$

Então:

$\ln N = \ln \dfrac{N_0}{e^{\lambda t}} \Rightarrow \log_e N = \log_e \dfrac{N_0}{e^{\lambda t}}$

Pela propriedade P7:

$\log_e N = \log_e N_0 - \log_e e^{\lambda t}$

Pela propriedade P3:

$\log_e N = \log_e N_0 - \lambda t \cdot \log_e e$

Pela propriedade P1:

$\log_e N = \log_e N_0 - \lambda t \cdot 1 \Rightarrow \log_e N - \log_e N_0 = -\lambda t$

Pela propriedade P7:

$\log_e \dfrac{N}{N_0} = -\lambda t$

Então:

$t = -\dfrac{1}{\lambda} \cdot \ln \dfrac{N}{N_0}$

Assim, a equação que fornece o tempo, em qualquer instante, é $t = -\dfrac{1}{\lambda} \cdot \ln \dfrac{N}{N_0}$.

Alternativa **d**.

23 Seja Q a quantidade de água do reservatório, então:

$\dfrac{Q}{3} = Q(1 - 0{,}15)^t \Rightarrow \dfrac{1}{3} = 0{,}85^t$

$\therefore \log_e \dfrac{1}{3} = \log_e 0{,}85^t$

Pela propriedade P3:

$\log_e \dfrac{1}{3} = t \cdot \log_e 0{,}85$

Então:

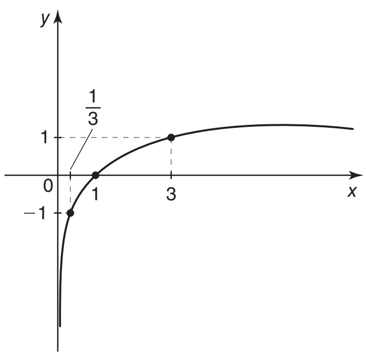
$\ln \dfrac{1}{3} = t \cdot \ln 0{,}85 \Rightarrow -1{,}10 = t \cdot (-0{,}16)$

$\therefore t = 6{,}875 \approx 7$

Portanto, a água ficará reduzida à terça parte em aproximadamente 7 meses.

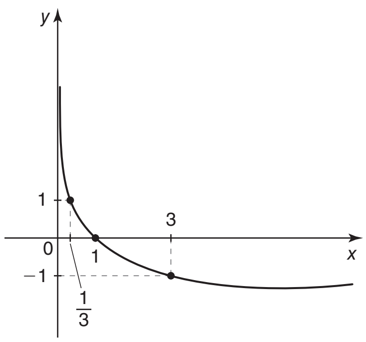
24 **a)** $f(x) = \log_3 x$ é uma função logarítmica. Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

x	$\log_3 x$
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1



b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ é uma função logarítmica. Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

x	$\log_{\frac{1}{3}} x$
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1



25 **a)** Como na função f a base do logaritmo (9) é positiva e maior que 1, então f é uma função crescente.

b) Como na função g a base do logaritmo (0,4) é positiva e menor que 1, então g é uma função decrescente.

c) Como na função h a base do logaritmo $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ é positiva e maior que 1, então h é uma função crescente.

d) Como na função t a base do logaritmo $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ é positiva e menor que 1, então t é uma função decrescente.

26 **a)** V, pois a função $f(x) = \log_3 x$ é injetora.

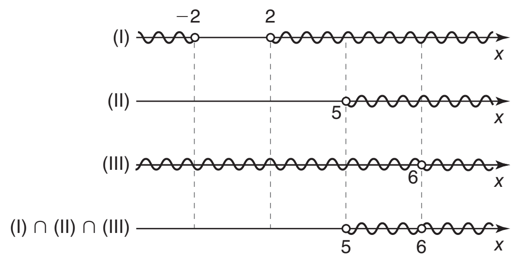
b) V, pois a função $f(x) = \log_3 x$ é crescente.

c) F, pois a função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ é decrescente.

d) V, pois a função $f(x) = \log_{0,7} x$ é decrescente.

e) V, pois a função $f(x) = \log_{\sqrt{1,5}} x$ é crescente.

27 Condição de existência: $\begin{cases} x^2 - 4x > 0 \text{ (I)} \\ x - 5 > 0 \text{ (II)} \\ x - 5 \neq 1 \text{ (III)} \end{cases}$



Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \text{ e } x \neq 6\}$

28 **a)** Condição de existência:

$5x - 6 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{6}{5}$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{6}{5}\right\}$.

b) Condição de existência:

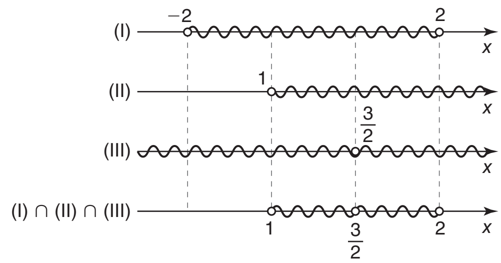
$x^2 - 5x + 6 > 0$

$\therefore x < 2$ ou $x > 3$

Logo, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

c) Condições de existência: $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \text{ (I)} \\ 2x - 2 > 0 \text{ (II)} \\ 2x - 2 \neq 1 \text{ (III)} \end{cases}$

O domínio de u é a intersecção dos conjuntos solução de (I), (II) e (III):



Logo, $D(u) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ e } x \neq \dfrac{3}{2}\right\}$.

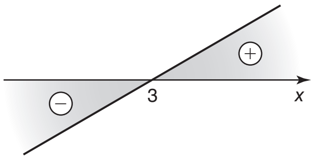
d) $t(x) = \log_5 \dfrac{2x - 6}{x - 2}$

Como a base do logaritmo (5) é positiva e diferente de 1, basta impormos a condição sobre o logaritmando, isto é:

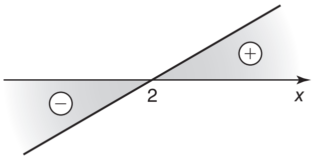
$\dfrac{2x - 6}{x - 2} > 0$

Estudando o sinal de $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = x - 2$, temos:

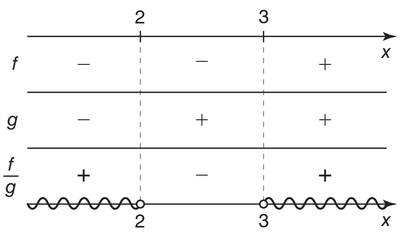
Estudo de sinal de $f(x) = 2x - 6$:



Estudo de sinal de $g(x) = x - 2$:



Representando f, g e $\dfrac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:



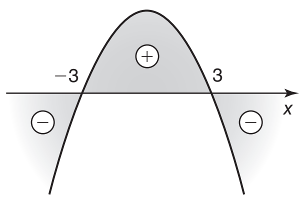
Logo, $D(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$.

e) $h(x) = \log_3 (9 - x^2) + \log_6 (3 - x)$

Condições de existência:

$9 - x^2 > 0$ e $3 - x > 0$

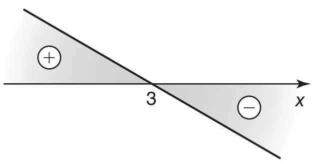
Estudando o sinal de $f(x) = 9 - x^2$:



Pelo esquema acima, podemos concluir que o conjunto solução para (I) $9 - x^2 > 0$ é:

$S_I = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

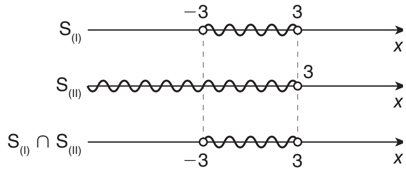
Estudando o sinal de $g(x) = 3 - x$:



Pelo esquema acima, podemos concluir que o conjunto solução para (II) $3 - x > 0$ é:

$S_{II} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

A intersecção de S_I e S_{II} é o domínio da função h:



Logo, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$.

29 No gráfico, consideremos que b seja a medida da base menor do trapézio sombreado, B a medida da base maior, h sua altura e A sua área.

Observando o gráfico, podemos concluir que $b = f(3)$, $B = f(9)$ e $h = 9 - 3 = 6$; então:

$b = f(3) = \log_3 3 = 1$

$B = f(9) = \log_3 9 = 2$

Assim, calculando a área A, concluímos:

$A = \dfrac{(b + B) \cdot h}{2} = \dfrac{(1 + 2) \cdot 6}{2}$

$\therefore\ A = 9$

Logo, a área do trapézio sombreado é 9.

30 **a)** Sendo $A(t)$ a área alagada em função do tempo t, temos:

$A(t) = 1 \cdot 2^t$

Logo:

para $t = 1 \Rightarrow A(1) = 1 \cdot 2 = 2 = a$

para $t = 2 \Rightarrow A(2) = 1 \cdot 4 = 4 = b$

para $t = 3 \Rightarrow A(3) = 1 \cdot 8 = 8 = c$

para $t = 4 \Rightarrow A(4) = 1 \cdot 16 = 16 = d$

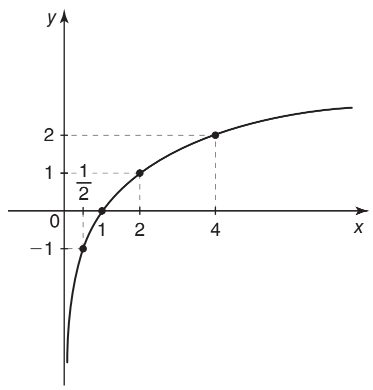
Portanto, $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$ e $d = 16$.

b) Pelo enunciado, temos:

$x = 2^y$ e, portanto, $y = \log_2 x$.

c) Como $f(x) = \log_2 x$ é uma função logarítmica, por meio de uma tabela podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

x	$\log_2 x$
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



O gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f, pois possui apenas ordenadas de valores não negativos e limitados por se tratar de uma função que determina a área de uma região.

31 **a)** Sendo $A(t)$ a área ocupada pela planta em função do tempo t, temos:

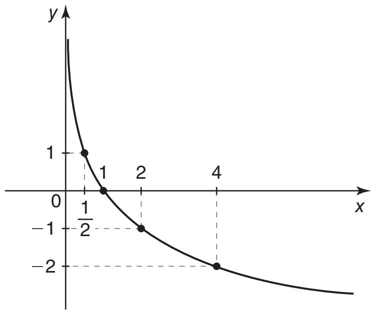
$A(t) = 1 \cdot (1 - 0{,}5)^t = 0{,}5^t$

Logo:
para $t = 1 \Rightarrow A(1) = 0{,}5 = a$
para $t = 2 \Rightarrow A(2) = 0{,}25 = b$
para $t = 3 \Rightarrow A(3) = 0{,}125 = c$
para $t = 4 \Rightarrow A(4) = 0{,}0625 = d$
Portanto, $a = 0{,}5$ km², $b = 0{,}25$ km², $c = 0{,}125$ km² e $d = 0{,}0625$ km².

b) Pelo enunciado, temos:
$x = 1\,(1 - 0{,}5)^y \Rightarrow x = 0{,}5^y$ e, portanto,
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

c) Como $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função logarítmica, por meio de uma tabela podemos obter alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçar o gráfico de f.

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2



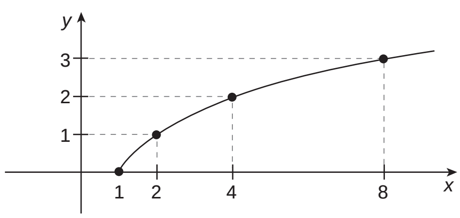
O gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f, pois possui apenas ordenadas de valores não negativos e limitados por se tratar de uma função que determina a área da região ocupada pela planta.

32 **a)**

Tempo (ano)	Preço (D$)
0	1
1	2
2	4
3	8
y	2^y

b) $y = \log_2 x$

c)



33 Pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} \log_b \dfrac{32k}{27} = 3 \\ \log_b \dfrac{8k}{9} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 = \dfrac{32k}{27} \text{ (I)} \\ b^2 = \dfrac{8k}{9} \text{ (II)} \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro, (I) por (II), obtemos $b = \frac{4}{3}$.

Substituindo b por $\frac{4}{3}$ em (I) ou (II), obtemos $k = 2$.

Concluímos, então, que $b = \frac{4}{3}$ e $k = 2$.

34 Pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} \log_a 4 = 4 \\ \log_b 4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = 4 \\ b^{-2} = 4 \end{cases}$$

$\therefore\ a = \sqrt{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

Logo:

a) $ab = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$

Como $0 < ab < 1$, concluímos que a função f é decrescente.

b) $2a - b = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \approx 2{,}3$

Como $2a - b > 1$, concluímos que a função g é crescente.

35 $y = \log_3 2 + \log_3 (x + 6)$
Substituímos x por y e y por x, obtendo:
$x = \log_3 2 + \log_3 (y + 6)$
Isolamos a variável y:
Pela propriedade P6:
$x = \log_3 2\,(y + 6)$
Pela definição de logaritmo:
$3^x = 2\,(y + 6)$
$\therefore\ y = \frac{3^x}{2} - 6$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{3^x}{2} - 6$.

Alternativa **c**.

36 $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$

Substituímos x por y e y por x, obtendo:

$x = \dfrac{e^y + 1}{e^y}$

Isolamos a variável y:
$e^y \cdot x = e^y + 1 \Rightarrow e^y \cdot (x - 1) = 1$

$\therefore\ e^y = \left(\dfrac{1}{x - 1}\right) \Rightarrow y = \log_e \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$

$\therefore\ y = \ln\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$

Logo, a inversa de f é $f^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$.

Alternativa **e**.

37 $f(x) = \log_3 (3x - 9) + \log_7 (18 - 2x)$
O conjunto imagem de f^{-1} é igual ao domínio de f; logo, determinaremos o domínio de f.
Condição de existência:
$3x - 9 > 0$ e $18 - 2x > 0 \Rightarrow x > 3$ e $x < 9$
Logo, $D(f) = \,]3, 9[$ e, portanto, $Im(f^{-1}) = \,]3, 9[$.

38 Pelo gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(2) = 13 \\ f(3) = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 2^2 + b = 13 \\ a \cdot 2^3 + b = 25 \end{cases}$$

$\therefore\ a = 3$ e $b = 1$

Logo, a função f é dada por: $y = 3 \cdot 2^x + 1$

Para obter a inversa de f adotamos os procedimentos a seguir.

- Permutamos as variáveis x e y entre si:
  $x = 3 \cdot 2^y + 1$

- Isolamos a variável y:

$y = \log_2 \frac{x-1}{3}$

Concluímos, então, que a inversa de f é:

$f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x-1}{3}$

39 Como $f(x) = b^x$ e $f^{-1} = \log_b x$, temos, de acordo com os gráficos:

$$\begin{cases} f(2) = \frac{16}{9} \\ f^{-1}\left(\frac{64}{27}\right) = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{16}{9} & \text{(I)} \\ \log_b \frac{64}{27} = k & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos $b = \frac{4}{3}$.

Substituindo b por $\frac{4}{3}$, em (II), obtemos:

$\log_{\frac{4}{3}} \frac{64}{27} = k \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^k = \frac{64}{27}$

$\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow k = 3$

Logo, $b = \frac{4}{3}$ e $k = 3$.

40 a) Pela fórmula do montante acumulado a juro composto e taxa constante, temos:

$f(x) = 1.000\ (1 + 0{,}2)^x$

Logo, a lei que expressa o montante $f(x)$ em função do tempo x de aplicação é $f(x) = 1.000\ (1{,}2)^x$.

b) Para obter a função $g(x)$, substituímos x por $g(x)$ e $f(x)$ por x na lei encontrada no item **a**; então:

$x = 1.000\ (1{,}2)^{g(x)} \Rightarrow (1{,}2)^{g(x)} = \frac{x}{1.000}$

$\therefore g(x) = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$

c) Para obter a inversa f^{-1} da função $f(x)$ obtida no item **a**, substituímos y por x e x por y em $y = 1.000\ (1{,}2)^x$; então:

$x = 1.000\ (1{,}2)^y$

Isolando a variável y:

$(1{,}2)^y = \frac{x}{1.000} \Rightarrow y = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$

Logo, $f^{-1}(x) = \log_{1,2} \frac{x}{1.000}$, ou seja, a inversa da função f do item **a** é a função g do item **b**.

41 a) Indicando a população final por y, a população inicial por p, a taxa de crescimento dessa população por i e o tempo por x, esquematizamos:

$y = ?$

$p = 191{,}5$ milhões

$i = 1{,}1\% = 0{,}011$

$x = 16$ anos

Temos:

$y = 191{,}5(1 + 0{,}011)^{16} = 227{,}885$

$y = 227{,}885$ milhões de habitantes

b) $y = 191{,}5 \cdot (1{,}011)^x$

c) $y = 191{,}5 \cdot (1{,}011)^x \Rightarrow (1{,}011)^x = \frac{y}{191{,}5}$

$\therefore x = \log_{1,011} \frac{y}{191{,}5}$

d) Substituindo x por y e y por x:

$x = 191{,}5 \cdot (1{,}011)^y \Rightarrow (1{,}011)^y = \frac{x}{191{,}5}$

$\therefore y = \log_{1,011} \frac{x}{191{,}5}$

42 a) $\log_3 (5x - 6) = 2$

Condição de existência:

$5x - 6 > 0 \Rightarrow x > \frac{6}{5}$

Pela definição de logaritmo:

$\log_3 (5x - 6) = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 5x - 6$

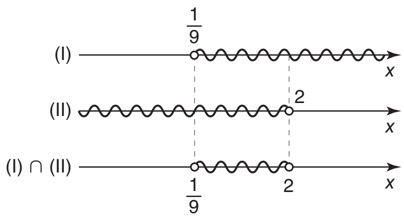
$\therefore x = 3$

Observando que $x = 3$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{3\}$.

b) $\log_7 (9x - 1) = \log_7 (4 - 2x)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 9x - 1 > 0 \\ 4 - 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{9} & \text{(I)} \\ x < 2 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $\frac{1}{9} < x < 2$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$\log_7 (9x - 1) = \log_7 (4 - 2x) \Leftrightarrow 9x - 1 = 4 - 2x$

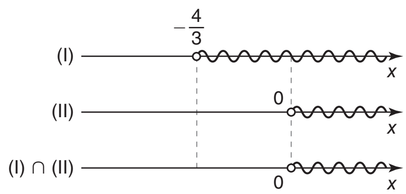
$\therefore x = \frac{5}{11}$

Observando que $x = \frac{5}{11}$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{5}{11}\right\}$.

c) $\log_2 (2x) + \log_2 (3x + 4) = 6$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 3x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{(I)} \\ x > -\frac{4}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 0$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P6 das funções logarítmicas:

$\log_2 (2x) + \log_2 (3x + 4) = 6 \Leftrightarrow \log_2 2x\,(3x + 4) = 6$

Pela definição de logaritmo:

$\log_2 2x\,(3x + 4) = 6 \Leftrightarrow 2x\,(3x + 4) = 2^6$

Então:

$6x^2 + 8x - 64 = 0$

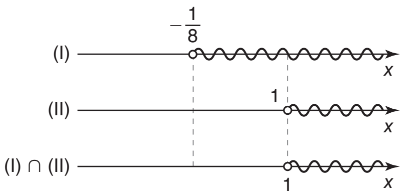
$\therefore x = \frac{8}{3}$ ou $x = -4$

Observando que somente $x = \frac{8}{3}$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

d) $\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 1) = 2$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 8x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{8} & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 1$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P7 das funções logarítmicas:

$$\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 1) = 2 \Leftrightarrow \log_3 \frac{(8x + 1)}{(x - 1)} = 2$$

Pela definição de logaritmo:

$$\log_3 \frac{8x + 1}{x - 1} = 2 \Leftrightarrow \frac{8x + 1}{x - 1} = 3^2$$

Então:

$8x + 1 = 9(x - 1)$

$\therefore\ x = 10$

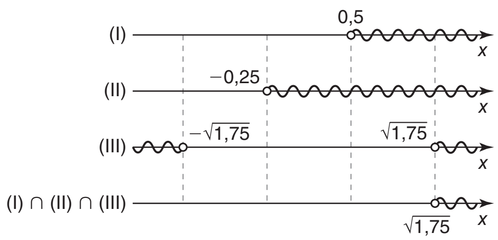
Observando que $x = 10$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{10\}$.

e) $\log_{1,5} (x - 0,5) + \log_{1,5} (x + 0,25) =$
$= \log_{1,5} (x^2 - 1,75) + 1$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 0,5 > 0 \\ x + 0,25 > 0 \\ x^2 - 1,75 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0,5 & \text{(I)} \\ x > -0,25 & \text{(II)} \\ x < -\sqrt{1,75} \text{ ou } x > \sqrt{1,75} & \text{(III)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > \sqrt{1,75}$.

Lembrando que $\log_{1,5} 1,5 = 1$, temos pela propriedade P6 das funções logarítmicas:

$\log_{1,5} (x - 0,5) \cdot (x + 0,25) = \log_{1,5} (x^2 - 1,75) \cdot 1,5$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$(x - 0,5) \cdot (x + 0,25) = (x^2 - 1,75) \cdot (1,5) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 0,25x - 0,125 = 1,5x^2 - 2,625$

$\therefore\ 0,5x^2 + 0,25x - 2,5 = 0$

$\therefore\ x = 2 \text{ ou } x = -\frac{5}{2}$

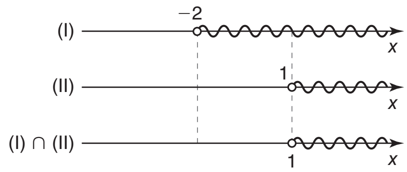
Observando que somente $x = 2$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{2\}$.

f) $\ln (x - 1) + \ln (x + 2) = \ln 4$

$\log_e (x - 1) + \log_e (x + 2) = \log_e 4$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 & \text{(I)} \\ x > -2 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 1$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P6 das funções logarítmicas:

$\log_e (x - 1) + \log_e (x + 2) = \log_e 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_e [(x - 1)(x + 2)] = \log_e 4$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$\log_e [(x - 1)(x + 2)] = \log_e 4 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 4$

Então:

$x^2 + x - 2 = 4$

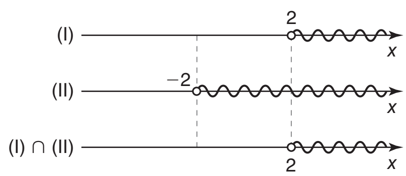
$\therefore\ x = 2 \text{ ou } x = -3$

Observando que somente $x = 2$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{2\}$.

43 **a)** $\log_2 (x - 2) = \log_4 (2x + 4)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 & \text{(I)} \\ x > -2 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 2$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P8:

$\log_2 (x - 2) = \log_4 (2x + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) = \frac{\log_2 (2x + 4)}{\log_2 4}$, ou, ainda,

$\log_2 (x - 2) = \frac{\log_2 (2x + 4)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \log_2 (x - 2) = \log_2 (2x + 4)$

Pela propriedade P3:

$\log_2 (x - 2)^2 = \log_2 (2x + 4)$

Finalmente, pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$(x - 2)^2 = (2x + 4) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x + 4$

$\therefore\ x = 0$ ou $x = 6$

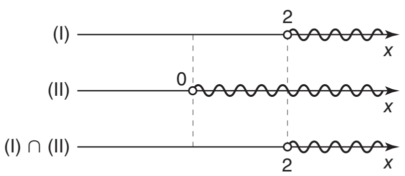
Observando que somente $x = 6$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{6\}$.

b) $\log_2 (x - 2) + 2 \cdot \log_4 x = 3 \log_8 (2x)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \\ x > 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Como (II) é igual a (III), representaremos apenas (II) na intersecção.



Logo, a condição de existência se resume a $x > 2$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P8:

$\log_2 (x - 2) + 2 \log_4 x = 3 \log_8 (2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) + 2 \cdot \left(\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) = 3 \cdot \left(\dfrac{\log_2 2x}{\log_2 8}\right)$

Que equivale a $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = \log_2 2x$.

Pela propriedade P6:

$\log_2 (x - 2) + \log_2 x = \log_2 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 [x(x - 2)] = \log_2 2x$

Aplicando a propriedade P1 das funções logarítmicas, obtemos:

$x^2 - 2x = 2x$

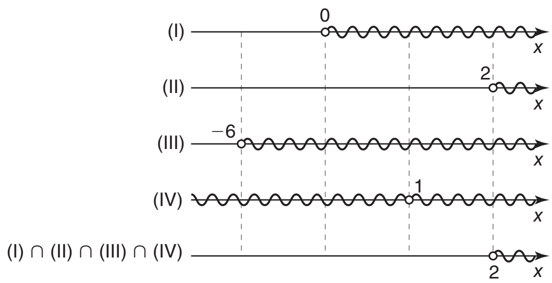
$\therefore\ x = 0$ ou $x = 4$

Observando que apenas $x = 4$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{4\}$.

44 $\log_x (3x) + \log_x (x - 2) = \log_x (x + 6)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x + 6 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{(I)} \\ x > 2 & \text{(II)} \\ x > -6 & \text{(III)} \\ x \neq 1 & \text{(IV)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > 2$.

Resolução da equação:

Pela propriedade P6:

$\log_x (3x) + \log_x (x - 2) = \log_x (x + 6) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_x [3x (x - 2)] = \log_x (x + 6)$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$3x (x - 2) = x + 6 \Rightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$

$\therefore\ x = 3$ ou $x = -\dfrac{2}{3}$

Logo, $S = \{3\}$.

45 $\log_2 (x - 2) - \log_4 x = 1$

Pelo enunciado, temos que a condição de existência é $x > 2$.

Pela propriedade P8:

$\log_2 (x - 2) - \log_4 x = 1 \Rightarrow \log_2 (x - 2) - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1,$

ou, ainda, $2 \cdot \log_2 (x - 2) - \log_2 x = 2$

Aplicando as propriedades P3 e P7, obtemos:

$\log_2 \dfrac{(x - 2)^2}{x} = 2$

Pela definição de logaritmo:

$\dfrac{(x - 2)^2}{x} = 2^2$

Então:

$x^2 - 8x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 4 + 2\sqrt{3}$ ou $x = 4 - 2\sqrt{3}$

Observando que apenas $x = 4 + 2\sqrt{3}$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o valor de x é $4 + 2\sqrt{3}$.

Alternativa **d**.

46 **a)** No momento em que as árvores são plantadas, temos $t = 0$; então:

$H(0) = 1 + (0{,}8) \log_2 1 = 1$ m

$D(0) = (0{,}1)\, 2^{\frac{0}{7}} = 0{,}1$ m $= 10$ cm

Portanto, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro da árvore no instante em que são plantadas são, respectivamente, 1 m e 10 cm.

b) Para $H(t) = 3{,}4$, temos:

$3{,}4 = 1 + (0{,}8) \cdot \log_2 (t + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}4 = 0{,}8 \cdot \log_2 (t + 1)$

$\therefore\ 3 = \log_2 (t + 1) \Rightarrow t + 1 = 8$

$\therefore\ t = 7$ anos

Logo, a árvore chega a 3,4 m de altura em 7 anos.

Então, para $t = 7$, temos:

$D(7) = (0{,}1) \cdot 2^{\frac{7}{7}} = 0{,}2$

Portanto, o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore é 0,2 m ou 20 cm.

47 Aplicando a fórmula do montante acumulado a taxa constante de juro, obtemos:

$$\begin{cases} M_A = 32 \cdot (1{,}01)^t \\ M_B = 16 \cdot (1{,}02)^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \log_{1,01} \dfrac{M_A}{32} \\ t = \log_{1,02} \dfrac{M_B}{16} \end{cases}$$

Assim:

$$\log_{1,01}\frac{M_A}{32} = \log_{1,02}\frac{M_A}{16} \Rightarrow \log_{1,01}\frac{M_A}{32} = \frac{\log_{1,01}\frac{M_B}{16}}{\log_{1,01} 1,02}$$

$$\therefore\ \log_{1,01}\frac{M_A}{32} = \frac{\log_{1,01}\frac{M_B}{16}}{2} \Rightarrow \log_{1,01}\frac{M_A}{32} = \log_{1,01}\left(\frac{M_B}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{M_A}{32} = \sqrt{\frac{M_B}{16}} \Rightarrow M_A = 8\sqrt{M_B}$$

Alternativa **d**.

48 **a)** $\log_3 (3x - 1) > 2$

Condição de existência:

$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

Preparação da inequação:

Representamos o número 2 como logaritmo de base 3, isto é:

$2 = 2 \cdot \log_3 3 = \log_3 3^2 = \log_3 9$

Assim, a inequação proposta é equivalente a:

$\log_3 (3x - 1) > \log_3 9$

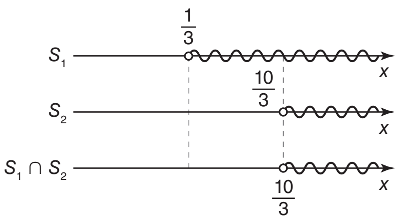
Resolução da inequação:

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (3) é maior que 1, o sentido da desigualdade ($>$) se mantém para os logaritmandos, ou seja:

$\log_3 (3x - 1) > \log_3 9 \Rightarrow 3x - 1 > 9$

$\therefore\ x > \frac{10}{3}$

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos valores reais x tais que $x > \frac{1}{3}$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos valores reais x tais que $x > \frac{10}{3}$:



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{10}{3}\right\}$.

b) $\log_{0,8} (5 - 2x) \leqslant \log_{0,8} (x - 1)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 5 - 2x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção do conjunto solução de (I) e (II) resulta na condição de existência:

$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{5}{2}\right\}$.

Resolução da equação:

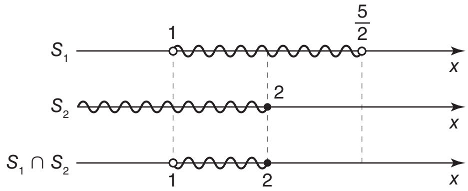
Pela propriedade P3 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (0,8) está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade ($\leqslant$) é invertido para os logaritmandos, ou seja:

$\log_{0,8} (5 - 2x) \leqslant \log_{0,8} (x - 1) \Rightarrow 5 - 2x \geqslant x - 1$

$\therefore\ x \leqslant 2$

Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 com o conjunto S_2:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$.

c) $\log_4 (x - 1) + \log_4 (3x - 1) \geqslant 2$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 & \text{(I)} \\ x > \frac{1}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 1$

Preparação da inequação:

Representamos o número 2 como logaritmo de base 4, isto é:

$2 = 2 \cdot \log_4 4 = \log_4 4^2 = \log_4 16$

Assim, a inequação proposta é equivalente a:

$\log_4 (x - 1) + \log_4 (3x - 1) \geqslant \log_4 16$

Pela propriedade P6 dos logaritmos:

$\log_4 (x - 1) + \log_4 (3x - 1) \geqslant \log_4 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_4 (x - 1)(3x - 1) \geqslant \log_4 16$

Ou, ainda: $\log_4 (3x^2 - 4x + 1) \geqslant \log_4 16$

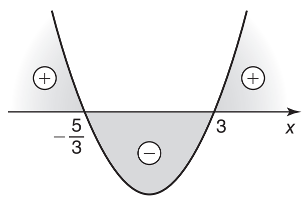
Resolução da inequação:

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (4) é maior que 1, o sentido da desigualdade ($\geqslant$) se mantém para os logaritmandos, ou seja:

$\log_4 (3x^2 - 4x + 1) \geqslant \log_4 16 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 \geqslant 16$

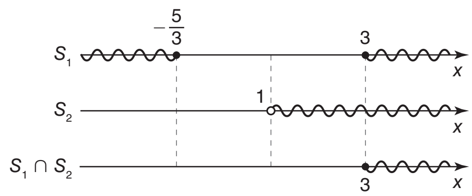
$\therefore\ 3x^2 - 4x - 15 \geqslant 0$

Estudando o sinal da função $f(x) = 3x^2 - 4x - 15$, temos:



Logo: $3x^2 - 4x - 15 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\frac{5}{3}$ ou $x \geqslant 3$

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > 1$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais x tais que $x \leqslant -\frac{5}{3}$ ou $x \geqslant 3$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > \log_{\frac{1}{2}} 3$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 1$

Preparação da inequação:

Pela propriedade P7 dos logaritmos:

$\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1) > \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{(x + 1)}{(x - 1)} > \log_{\frac{1}{2}} 3$

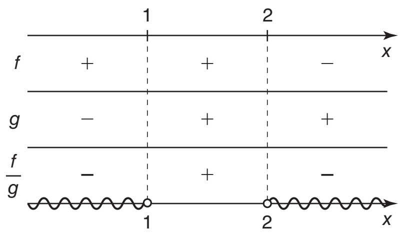
Resolução da inequação:

Pela propriedade P3 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ está entre 0 e 1, o sentido da desigualdade ($>$) é invertido para os logaritmandos, ou seja:

$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{(x + 1)}{(x - 1)} > \log_{\frac{1}{2}} 3 \Rightarrow \dfrac{x + 1}{x - 1} < 3$

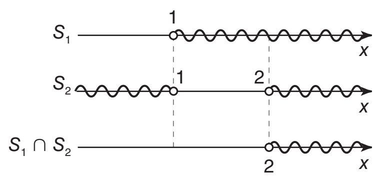
Ou, ainda: $\dfrac{x + 1}{x - 1} - 3 < 0 \Rightarrow \dfrac{-2x + 4}{x - 1} < 0$

Estudando o sinal das funções $f(x) = -2x + 4$, $g(x) = x - 1$ e $\dfrac{f}{g}$, temos:



Logo, $x < 1$ ou $x > 2$.

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > 1$ com o conjunto S_2 dos reais x tais que $x < 1$ ou $x > 2$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

e) $\ln (2x - e) + \ln x > 2$

$\log_e (2x - e) + \log_e x > 2$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x - e > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{e}{2} & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > \dfrac{e}{2}$

Preparação da inequação:

Representamos o número 2 como logaritmo de base e, isto é:

$2 = 2 \cdot \log_e e = \log_e e^2$

Assim, a inequação proposta equivale a:

$\log_e (2x - e) + \log_e x > \log_e e^2$

Pela propriedade P6 dos logaritmos:

$\log_e (2x - e) + \log_e x > \log_e e^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_e [(2x - e) \cdot x] > \log_e e^2$

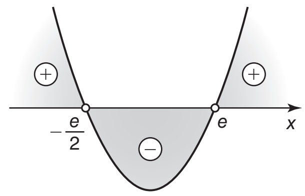
Resolução da inequação:

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (e) é maior que 1, o sentido da desigualdade ($>$) se mantém para os logaritmandos, ou seja:

$\log_e [(2x - e) \cdot x] > \log_e e^2 \Rightarrow x(2x - e) > e^2$

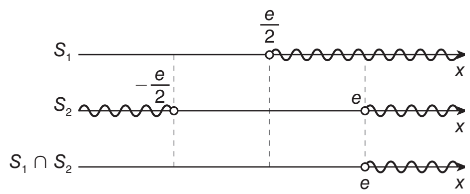
$\therefore\ 2x^2 - ex - e^2 > 0$

Estudando o sinal da função $f(x) = 2x^2 - ex - e^2$, temos:



Logo, $x < -\dfrac{e}{2}$ ou $x > e$.

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > \dfrac{e}{2}$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais tais que $x < -\dfrac{e}{2}$ ou $x > e$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > e\}$.

49 $1 + \log_2 x < \log_4 (x + 1)^2$

Condição de existência:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 > 0 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Para qualquer valor de x, (I) será satisfeita; porém, (II) só será satisfeita se $x > 0$; então, a intersecção de (I) e (II) resulta na condição de existência: $x > 0$

Preparação da inequação:

Representamos o número 1 como logaritmo de base 2, isto é:

$1 = 1 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^1 = \log_2 2$

Assim, a inequação proposta é equivalente a:

$\log_2 2 + \log_2 x < \log_4 (x + 1)^2$

Pela propriedade P8:

$\log_2 2 + \log_2 x < \dfrac{\log_2 (x + 1)^2}{\log_2 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \log_2 2 + \log_2 x^2 < \log_2 (x + 1)^2$

Pela propriedade P3:

$\log_2 2^2 + \log_2 x^2 < \log_2 (x + 1)^2$

Pela propriedade P6:

$\log_2 [4 \cdot x^2] < \log_2 (x + 1)^2$

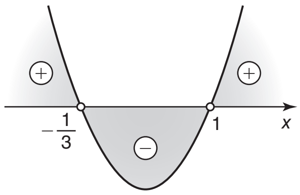
Resolução da inequação:

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (2) é maior que 1, o sentido da desigualdade (<) se mantém para os logaritmandos, ou seja:

$\log_2 4x^2 < \log_2 (x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 < (x+1)^2$

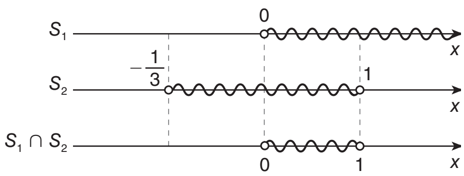
$\therefore\ 3x^2 - 2x - 1 < 0$

Estudando o sinal da função $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, temos:



Logo, $3x^2 - 2x - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > 0$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais x tais que $-\frac{1}{3} < x < 1$:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

50 $\log_2 (2x+5) - \log_2 (3x-1) > 1$

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{5}{2} & \text{(I)} \\ x > \frac{1}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

A intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II) resulta na condição de existência $x > \frac{1}{3}$.

Preparação da inequação:

Representamos o número 1 como logaritmo de base 2, ou seja:

$1 = 1 \cdot \log_2 2 = \log_2 2$

Assim, a inequação proposta é equivalente a:

$\log_2 (2x+5) - \log_2 (3x-1) > \log_2 2$

Pela propriedade P7:

$$\log_2 \frac{(2x+5)}{(3x-1)} > \log_2 2$$

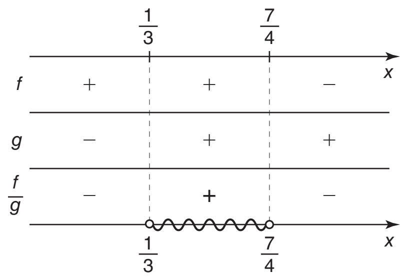
Resolução da inequação:

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos que, como a base dos logaritmos (2) é maior que 1, o sentido da desigualdade (>) se mantém para os logaritmandos, ou seja:

$$\log_2 \frac{(2x+5)}{(3x-1)} > \log_2 2 \Rightarrow \frac{2x+5}{3x-1} > 2$$

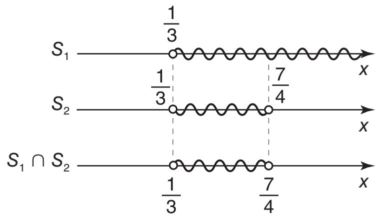
$$\therefore\ \frac{-4x+7}{3x-1} > 0$$

Estudando o sinal das funções $f(x) = -4x + 7$, $g(x) = 3x - 1$ e $\frac{f}{g}$, temos:



Logo, $\frac{1}{3} < x < \frac{7}{4}$.

O conjunto solução S da inequação proposta é a intersecção do conjunto S_1 dos reais x tais que $x > \frac{1}{3}$ (condição de existência) com o conjunto S_2 dos reais x tais que $\frac{1}{3} < x < \frac{7}{4}$:



Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < \frac{7}{4}\right\}$.

Alternativa **d**.

51 Pelos dados do enunciado, temos:

$300\,(1{,}04)^n > 600 \Rightarrow (1{,}04)^n > 2$

$$\therefore\ n \cdot \log 1{,}04 > \log 2 \Rightarrow n > \frac{\log 2}{-\log 100 + \log 104}$$

$$\therefore\ n > \frac{\log 2}{-2 + \log 104}$$

Alternativa **b**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $2^x = 3 \Rightarrow 2^{1{,}58} \approx 2{,}98$

Logo, $x \approx 1{,}58$.

b) $10^x = 5 \Rightarrow 10^{0{,}69} \approx 4{,}9$

Logo, $x \approx 0{,}69$.

2 a) $1{,}83337 \cdot 2{,}06196 = 10^{0{,}26325} \cdot 10^{0{,}31428} =$
$= 10^{0{,}26325 + 0{,}31428} = 10^{0{,}57753} = 3{,}78033$

b) $3{,}78033 : 2{,}06196 = 10^{0{,}57753} : 10^{0{,}31428} =$
$= 10^{0{,}26325} = 1{,}83337$

c) $(2{,}06196)^4 = (10^{0{,}31428})^4 = 10^{1{,}25712} = 18{,}07674$

d) $\sqrt{2{,}06196} = (10^{0{,}31428})^{\frac{1}{2}} = 10^{0{,}15714} = 1{,}43595$

3 a) $\log_{216} 36 = x \Leftrightarrow 216^x = 36$

$\therefore\ 6^{3x} = 6^2 \Rightarrow 3x = 2$

$\therefore\ x = \frac{2}{3}$

Assim, $\log_{216} 36 = \frac{2}{3}$.

b) $\log_{100} 10.000 = x \Leftrightarrow 100^x = 100^2$

$\therefore\ x = 2$

Assim, $\log_{100} 10.000 = 2$.

c) $\log_{\frac{25}{81}} \dfrac{729}{125} = x \Leftrightarrow \left(\dfrac{25}{81}\right)^x = \dfrac{729}{125}$

$\therefore\ \left(\dfrac{5}{9}\right)^{2x} = \left(\dfrac{5}{9}\right)^{-3} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Então, $\log_{\frac{25}{81}} \dfrac{729}{125} = -\dfrac{3}{2}$.

d) $\log_6 6 = x \Leftrightarrow 6^x = 6$

$\therefore\ x = 1$

Assim, $\log_6 6 = 1$.

e) $\log_7 1 = x \Leftrightarrow 7^x = 1$

$\therefore\ x = 0$

Assim, $\log_7 1 = 0$.

f) $\log_7 7^{10} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{10}$

$\therefore\ x = 10$

Assim, $\log_7 7^{10} = 10$.

g) $\log_{\sqrt[5]{2}} \sqrt{2} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{2}\right)^x = \sqrt{2}$

$\therefore\ 2^{\frac{x}{5}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

Assim, $\log_{\sqrt[5]{2}} \sqrt{2} = \dfrac{5}{2}$.

h) $\log_{0,04} 0{,}008 = x \Leftrightarrow 0{,}04^x = 0{,}008$

$\therefore\ \left(\dfrac{4}{100}\right)^x = \dfrac{8}{1.000} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{10}\right)^{2x} = \left(\dfrac{2}{10}\right)^3$

$\therefore\ 2x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Assim, $\log_{0,04} 0{,}008 = \dfrac{3}{2}$.

i) $\log_{\sqrt[3]{128}} 2\sqrt[5]{2} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{128}\right)^x = 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^6}$

$\therefore\ \sqrt[3]{128^x} = \sqrt[5]{2^6} \Rightarrow 2^{\frac{7x}{3}} = 2^{\frac{6}{5}}$

$\therefore\ \dfrac{7x}{3} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow x = \dfrac{18}{35}$

Assim, $\log_{\sqrt[3]{128}} 2\sqrt[5]{2} = \dfrac{18}{35}$.

4 $x = \sqrt[4]{5} \Rightarrow x = 5^{\frac{1}{4}}$

$\therefore x = 5^{0,25}$

Assim:

$\log_2 x = \log_2 5^{0,25} \Rightarrow \log_2 x = 0{,}25 \cdot \log_2 5$

$\therefore\ \log_2 x = 0{,}25 \cdot 2{,}32 \Rightarrow \log_2 x = 0{,}58$

$\therefore\ x = 2^{0,58} = 1{,}50$

Logo, $\sqrt[4]{5} = 1{,}50$.

5 Condição de existência: $x + 1 > 0$, ou seja, $x > -1$

$f(x) = g(x) \Rightarrow 3^{\log_5 (x+1)} = 9$

$\therefore\ 3^{\log_5 (x+1)} = 3^2 \Rightarrow \log_5 (x + 1) = 2$

$\therefore\ x + 1 = 5^2 \Rightarrow x = 24$

Alternativa **d**.

6 $\begin{cases} a^b = \dfrac{1}{16} \\ \log_{\frac{1}{2}} a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \log_a \dfrac{1}{16} & \text{(I)} \\ \log_{\frac{1}{2}} a = b & \text{(II)} \end{cases}$

De (I), temos:

$b = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}}{\log_{\frac{1}{2}} a} \Rightarrow b = \dfrac{4}{\log_{\frac{1}{2}} a} \quad \text{(III)}$

Substituindo (II) em (III), obtemos:

$b = \dfrac{4}{b} \Rightarrow b = 2$

Substituindo b por 2 em (I) ou (II), encontramos $a = \dfrac{1}{4}$.

Então, $a = \dfrac{1}{4}$ e $b = 2$.

$\therefore\ a \cdot b = \dfrac{1}{4} \cdot 2 = \dfrac{1}{2}$

Alternativa **c**.

7 $n = 8^{2 \log_2 15 - \log_2 45} = 2^{6 \log_2 15 - 3 \log_2 45} =$

$= 2^{\log_2 15^6 - \log_2 45^3} = \dfrac{2^{\log_2 15^6}}{2^{\log_2 45^3}} = \dfrac{15^6}{45^3} = \dfrac{15^6}{15^3 \cdot 3^3} =$

$= \dfrac{15^3}{3^3} = \left(\dfrac{15}{3}\right)^3 = 5^3 = 125$

Alternativa **d**.

8 **a)** $\log_6 44 = \log_6 (4 \cdot 11)$

Pela propriedade P6:

$\log_6 (4 \cdot 11) = \log_6 4 + \log_6 11 = 2 \log_6 2 + \log_6 11 = 2 \cdot 0{,}37 + 1{,}34 = 2{,}08$

Então, $\log_6 44 = 2{,}08$.

b) $\log_6 \dfrac{121}{8} = \log_6 11^2 - \log_6 2^3 =$

$= 2 \cdot 1{,}34 - 3 \cdot 0{,}37 = 2{,}68 - 1{,}11 = 1{,}57$

Então, $\log_6 \dfrac{121}{8} = 1{,}57$.

c) $\log_6 \sqrt[7]{2} = \log_6 2^{\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{7} \log_6 2 = \dfrac{0{,}37}{7} \approx 0{,}053$

d) $\log_{22} 3 = \dfrac{\log_6 3}{\log_6 22} = \dfrac{\log_6 \frac{6}{2}}{\log_6 (2 \cdot 11)} =$

$= \dfrac{\log_6 6 - \log_6 2}{\log_6 2 + \log_6 11} = \dfrac{1 - 0{,}37}{0{,}37 + 1{,}34} =$

$= \dfrac{0{,}63}{1{,}71} \approx 0{,}37$

Então, $\log_{22} 3 \approx 0{,}37$.

e) $\log_6 4\sqrt{11} = \log_6 2^2 + \log_6 11^{\frac{1}{2}} =$

$= 2 \log_6 2 + \dfrac{1}{2} \log_6 11 = 2 \cdot 0{,}37 + \dfrac{1{,}34}{2} =$

$= 0{,}74 + 0{,}67 = 1{,}41$

Então, $\log_6 4\sqrt{11} = 1{,}41$.

f) $\log_{\sqrt{2}} 22 = \dfrac{\log_6 (11 \cdot 2)}{\log_6 2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\log_6 11 + \log_6 2}{\frac{1}{2} \log_6 2} =$

$= \dfrac{1{,}34 + 0{,}37}{\frac{0{,}37}{2}} = \dfrac{1{,}71}{0{,}185} \approx 9{,}24$

Então, $\log_{\sqrt{2}} 22 \approx 9{,}24$.

9 $\log 35 = \log (7 \cdot 5) = \log 7 + \log \dfrac{10}{2} =$

$= \log 7 + \log 10 - \log 2 = 0{,}84 + 1 - 0{,}30 = 1{,}54$

Portanto, $\log 35 = 1{,}54$.

10 $\log \left(\dfrac{1}{xy}\right) = \log (xy)^{-1} = -1 \cdot \log (xy) =$

$= -1(\log x + \log y) = -1 \cdot t = -t$

Alternativa **b**.

11 $(\log A)^2 - (\log B)^2 = (\log A + \log B)(\log A - \log B) =$

$= \log (AB) \log \left(\frac{A}{B}\right) = 7 \cdot 3 = 21$

Alternativa **a**.

12 $\log 8 = a \Rightarrow \log 2^3 = a$

$\therefore 3 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a}{3}$

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \frac{a}{3}$

Alternativa **e**.

13 $\log_b \sqrt[5]{ab} = 5 \Rightarrow \log_b (ab)^{\frac{1}{5}} = 5$

$\therefore \frac{1}{5} (\log_b a + \log_b b) = 5 \Rightarrow \log_b a + 1 = 25$

$\therefore \log_b a = 24$

Alternativa **d**.

14 $\log_5 10 = \log_5 2 + \log_5 5 = \frac{\log 2}{\log 5} + \log_5 5 =$

$= \frac{0{,}301}{\log \left(\frac{10}{2}\right)} + 1 = \frac{0{,}301}{1 - 0{,}301} + 1 = \frac{1}{0{,}699}$

$\frac{x}{7} = \frac{1}{0{,}699} \Rightarrow x = \frac{7}{0{,}699} \quad \therefore x \approx 10{,}014$

Portanto, a melhor aproximação com fração irredutível será $\frac{10}{7}$.

Alternativa **c**.

15 Se $\log_7 875 = a$, temos:

$\log_7 (5^3 \cdot 7) = a \Rightarrow 3 \log_7 5 + \log_7 7 = a$

$\therefore 3 \log_7 5 = a - 1 \Rightarrow \log_7 5 = \frac{a - 1}{3}$

Calculando $\log_{35} 245$, temos:

$\log_{35} 245 = \frac{\log_7 (5 \cdot 7^2)}{\log_7 (5 \cdot 7)} = \frac{\log_7 5 + 2 \log_7 7}{\log_7 5 + \log_7 7} =$

$= \frac{\frac{a-1}{3} + 2}{\frac{a-1}{3} + 1} = \frac{a + 5}{a + 2}$

Alternativa **c**.

16 $\log_{1,5} 135 = \frac{\log 135}{\log 1{,}5} = \frac{\log (3^3 \cdot 5)}{\log \left(\frac{3}{2}\right)} =$

$= \frac{\log \left(\frac{3^3 \cdot 10}{2}\right)}{\log \left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\log 3^3 + \log 10 - \log 2}{\log 3 - \log 2} =$

$= \frac{3 \log 3 + \log 10 - \log 2}{\log 3 - \log 2} = \frac{3b + 1 - a}{b - a} =$

$= \frac{3b - a + 1}{b - a}$

Alternativa **e**.

17 Substituindo 2^x por t, obtemos a equação $t^2 - 8t + 12 = 0$.

Logo, as raízes da equação são dadas por $t = 2$ ou $t = 6$.

Para $t = 2$, temos:

$2^x = 2 \quad \therefore x = 1$

Para $t = 6$, temos:

$2^x = 6 \Rightarrow x = \log_2 6 \quad \therefore x = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2}$

Logo, $x = 1 + \frac{\log 3}{\log 2}$

Alternativa **b**.

18 **a)** $\log (\alpha\beta) = \log \alpha + \log \beta = 0{,}5 + 0{,}7 = 1{,}2$

$\therefore \log (\alpha\beta) = 1{,}2$

b) $\left(\frac{\alpha\beta}{10}\right)^x = (\alpha\beta)^2 \Rightarrow \log \left(\frac{\alpha\beta}{10}\right)^x = \log (\alpha\beta)^2$

$\therefore x [\log (\alpha\beta) - \log 10] = 2 \log (\alpha\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow x [\log (\alpha\beta) - 1] = 2 \log (\alpha\beta)$

$\therefore x = \frac{2 \log (\alpha\beta)}{\log (\alpha\beta) - 1}$

$\therefore x = \frac{2 \cdot 1{,}2}{1{,}2 - 1} = \frac{2{,}4}{0{,}2} = 12$

Logo, $x = 12$.

19
- $u = x \cdot \ln 2 \Rightarrow u = \ln 2^x$

  $\therefore e^u = 2^x$
- $v = x \cdot \ln 3 \Rightarrow v = \ln 3^x$

  $\therefore e^v = 3^x$

  Então:

  $e^u \cdot e^v = 36 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x = 36$

  $\therefore 6^x = 6^2 \Rightarrow x = 2$

20 $y(2) = \left[\ln (ab^3)^{\frac{1}{2}}\right] \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(2) = \left[\frac{1}{2} \ln (ab^3)\right] \cdot 2 = \ln (ab^3) = \ln a + \ln b^3$

$= \ln a + 3 \ln b$

$\therefore y(2) = 2 + 3 \cdot 4 = 14$

Alternativa **e**.

21 **a)** $\log 8 \approx 0{,}903$

b) $\log_5 8 = \frac{\log 8}{\log 5} \approx 1{,}292$

c) $\ln 5 \approx 1{,}609$

d) $\log_5 e = \frac{\ln e}{\ln 5} \approx \frac{1}{1{,}609} \approx 0{,}621$

22 Pelos gráficos, temos:
- f é uma função logarítmica crescente de base b e, portanto, $b > 1$.
- g é uma função logarítmica decrescente de base c e, portanto, $0 < c < 1$.

  Alternativa **c**.

23 Do gráfico, temos:

$2\ell n\ 2 = 1{,}38$ e $2\ell n\ 5 = 3{,}22$

Logo:

$\ell n\ 100 = \ell n\ (2 \cdot 5)^2 \Rightarrow \ell n\ 100 = 2\ell n\ 2 + 2\ell n\ 5 = 4{,}6$

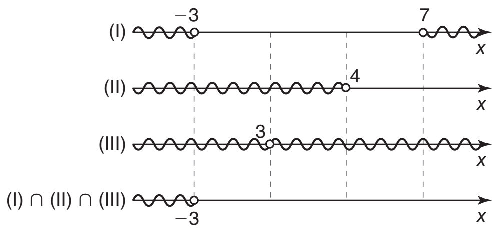
Alternativa **a**.

24 $f(x) = \log_{(4 - x)} (x^2 - 4x - 21)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 21 > 0 \\ 4 - x > 0 \\ 4 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \text{ ou } x > 7 & \text{(I)} \\ x < 4 & \text{(II)} \\ x \neq 3 & \text{(III)} \end{cases}$$

O domínio de f é a intersecção dos conjuntos solução de (I), (II) e (III):



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$.

Alternativa **c**.

25 Sendo $f(x) = \ln x$ e $g(x) = e^x$, então:

$f(g(1.000)) = f(e^{1.000}) = \ln e^{1.000} = \log_e e^{1.000} =$
$= 1.000 \cdot 1 = 1.000$

$\therefore\ f(g(1.000)) = 1.000$

26 Pelo gráfico, podemos observar que o valor da abscissa do ponto D é igual ao valor da abscissa do ponto A; então:

$y = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2$

Logo, o valor da ordenada do ponto D é -2.

$\therefore\ D\left(\frac{1}{4}, -2\right)$

Pelo enunciado, temos que a abscissa do ponto B é 8; então:

$y = \log_2 8 = 3$

$\therefore\ B = (8, 3)$

Como os lados de $ABCD$ são paralelos aos eixos coordenados, temos $A\left(\frac{1}{4}, 3\right)$ e $C(8, -2)$.

Seja d_{AB} a distância do ponto A ao ponto B e d_{AD} a distância do ponto A ao ponto D; então:

$d_{AB} = 8 - \frac{1}{4} = \frac{31}{4}$

$d_{AD} = 3 - (-2) = 5$

Sendo A a área do retângulo, concluímos:

$A = \frac{31}{4} \cdot 5 = \frac{155}{4} = 38{,}75$

Alternativa **a**.

27 A soma S das áreas dos seis retângulos é dada por:

$S = (\log_2 3 - \log_2 2) + (\log_2 4 - \log_2 3) +$
$+ (\log_2 5 - \log_2 4) + (\log_2 6 - \log_2 5) +$
$+ (\log_2 7 - \log_2 6) + (\log_2 8 - \log_2 7) \Rightarrow$
$\Rightarrow S = -\log_2 2 + \log_2 8 = -1 + 3 = 2$

Alternativa **a**.

28
$$\begin{cases} 6 = 2 + a\log\frac{b}{50} \\ 2 = 2 + a\log\frac{b}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = \log\left(\frac{b}{50}\right)^a \\ 0 = \log\left(\frac{b}{5}\right)^a \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \left(\frac{b}{50}\right)^a = 10.000 \\ \left(\frac{b}{5}\right)^a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{b}{50}\right)^a = 10.000 \\ \frac{b}{5} = 1 \end{cases}$$

$\therefore\ b = 5$ e $a = -4$

Assim, temos a função $f(x) = 2 - 4\log(5x)$.

O gráfico de f intercepta o eixo das abscissas em um ponto P de ordenada zero.

Assim:

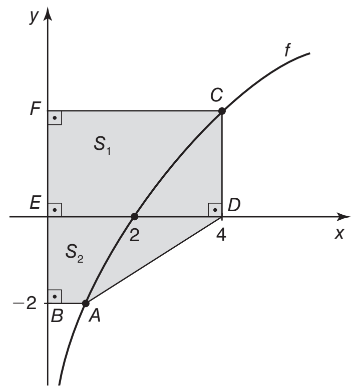
$0 = 2 - 4\log(5x) \Rightarrow \frac{1}{2} = \log(5x)$

$\therefore \sqrt{10} = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{5}$

Logo, $P\left(\frac{\sqrt{10}}{5}, 0\right)$.

Alternativa **c**.

29



$f(x) = \log_2 (kx)$

A área S procurada pode ser subdividida em S_1 e S_2, sendo S_1 a área do retângulo $CDEF$ e S_2 a área do trapézio $ABED$.

Pelo gráfico de $f(x) = \log_2 (kx)$, com $k > 0$, temos:

$f(2) = 0 \Rightarrow 0 = \log_2 (k \cdot 2)$

$\therefore\ 2k = 1$

$\therefore\ k = \frac{1}{2}$

Então, concluímos que $f(x) = \log_2 \frac{x}{2}$.

Considerando os pontos $A(a, -2)$ e $C(4, c)$, temos:

- $f(a) = -2 \Rightarrow -2 = \log_2 \frac{a}{2}$
  $\therefore\ \frac{a}{2} = 2^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
  $\therefore\ A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
- $f(4) = c \Rightarrow c = \log_2 2 = 1$
  $\therefore\ C(4, 1)$

Agora, podemos calcular as áreas S_1, S_2 e S:

$S_1 = 1 \cdot 4 = 4$

$S_2 = \dfrac{\left(\frac{1}{2} + 4\right) \cdot 2}{2} = \frac{9}{2}$

$S = S_1 + S_2 = 4 + \frac{9}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$

Alternativa **b**.

30 a) Substituindo x por y e y por x na função $y = 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$ e, depois, isolando a variável y, temos:

$x = 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{4y} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{4y} = 5 - x$

$\therefore\ 4y = \log_{\frac{1}{3}} (5 - x) \Rightarrow y = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} (5 - x)$

Logo, a inversa da função $y = 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$ é

$y = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{3}} (5 - x)$.

b) Substituindo x por y e y por x na função $y = -4 + 3\log_2(x - 1)$ e, depois, isolando y, temos:

$x = -4 + 3\log_2(y - 1) \Rightarrow \dfrac{x+4}{3} = \log_2(y-1)$

$\therefore y - 1 = 2^{\frac{x+4}{3}}$

$\therefore y = 2^{\frac{x+4}{3}} + 1$

Logo, a inversa da função $y = -4 + 3\log_2(x - 1)$ é $y = 2^{\frac{x+4}{3}} + 1$.

c) Trocando y por x e x por y em $y = -4 + e^{2x}$ e, depois, isolando y, temos:

$x = -4 + e^{2y} \Rightarrow x + 4 = e^{2y}$

$\therefore 2y = \ln(x + 4) \Rightarrow y = \dfrac{\ln(x+4)}{2}$

Logo, a inversa da função $y = -4 + e^{2x}$ é $y = \dfrac{\ln(x+4)}{2}$.

d) Trocando y por x e x por y na função $y = -1 + \ln x$ e, depois, isolando y, temos:

$x = -1 + \ln y \Rightarrow x + 1 = \ln y$

$\therefore y = e^{x+1}$

Logo, a inversa da função $y = -1 + \ln x$ é $y = e^{x+1}$.

31 Substituindo x por y e y por x na função $y = \dfrac{\ln(x^2) - 1}{2}$ e, depois, isolando a variável y, temos:

$x = \dfrac{\ln y^2 - 1}{2} \Rightarrow 2x = 2\ln y - 1$

$\therefore \ln y = \dfrac{2x+1}{2} \Rightarrow y = e^{\frac{2x+1}{2}} = \sqrt{e^{2x+1}}$

$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{e^{2x+1}}$

Alternativa **a**.

32 $y = \log_2 x^5 + \log_2 x^4 - \log_2 x^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 5\log_2 x + 4\log_2 x - 8\log_2 x$

$\therefore y = \log_2 x$

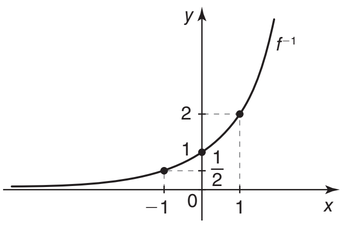
Para encontrar a inversa dessa função, trocamos y por x e x por y, obtendo:

$x = \log_2 y$

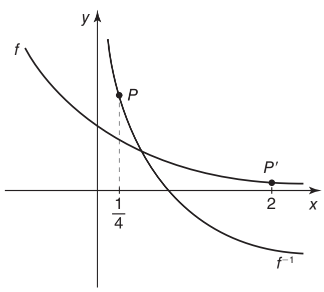
Isolando a variável y, concluímos:

$y = 2^x \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^x$

Assim, o gráfico de f^{-1} é:



33



a) Como P e P′ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, temos que $P\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ e $P'\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

b) A função $f(x) = a^x$ é decrescente; logo, $0 < a < 1$.

$P'\left(2, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = a^2$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

c) Para obter a inversa de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, substituímos y por x e x por y e, depois, isolamos y:

$x = \left(\frac{1}{2}\right)^y \Rightarrow y = \log_{\frac{1}{2}} x$

$\therefore f^{-1}(x) = y = \log_{\frac{1}{2}} x$

d) Sendo f e f^{-1} duas funções inversas quaisquer, temos a equivalência:

$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

Assim, se (x, y) é ponto comum aos gráficos de f e f^{-1}, temos que $(x, y) = (y, x)$ e, portanto, $x = y$, isto é, o ponto comum pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

34 Sabemos que os gráficos de funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, para determinar a lei da função em azul, basta encontrar a inversa de $y = \log_3 x$. Para isso, substituímos x por y e y por x e isolamos y:

$x = \log_3 y \Rightarrow y = 3^x$

Logo, o gráfico em azul representa a função $y = 3^x$.

Alternativa **d**.

35 Sendo $f(x) = \log_b x$ e $g(x) = b^x$, temos:

a) $f(g(x)) = \log_b b^x = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

b) $g(f(x)) = b^{\log_b x} = x \Rightarrow g(f(x)) = x$

36 **a)** Condição de existência:

$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 + 7 > 0 \end{cases}$

Como para qualquer x real teremos $x^2 + 7 > 0$, a condição de existência se resume a $x > -1$.

Resolução da equação:

Por P3 e P7, temos:

$2\log_4(x + 1) - \log_4(x^2 + 7) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_4 \dfrac{(x+1)^2}{x^2+7} = -1$

$\therefore \dfrac{(x+1)^2}{x^2+7} = 4^{-1}$

$\therefore \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+7} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x^2 + 7$

$\therefore 3x^2 + 8x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = -3$

Observando que $x = -3$ não satisfaz a condição de existência e $x = \dfrac{1}{3}$ satisfaz, concluímos:

$S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

b) Condição de existência:

$\begin{cases} x > \frac{3}{5} & \text{(I)} \\ x > 5 & \text{(II)} \\ x > -1 & \text{(III)} \end{cases}$

Fazendo (I) ∩ (II) ∩ (III), concluímos que a condição de existência se resume a $x > 5$.

Resolução da equação:

Por P3 e P6, temos:

$\log_{\frac{1}{2}}(5x - 3) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 5) = 2\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(5x - 3)(x - 5) = \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)^2$

Por P1 das funções logarítmicas, temos:

$(5x - 3)(x - 5) = (x + 1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 - 25x - 3x + 15 = x^2 + 2x + 1$

$\therefore 4x^2 - 30x + 14 = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = \frac{1}{2}$

Como $x = \frac{1}{2}$ não satisfaz a condição de existência e $x = 7$ satisfaz, concluímos: $S = \{7\}$

c) Condição de existência:

$$\begin{cases} x > -6 & \text{(I)} \\ x > 6 & \text{(II)} \\ x > -\frac{2}{3} & \text{(III)} \end{cases}$$

Fazendo (I) ∩ (II) ∩ (III), obtemos $x > 6$.

Resolução da equação:

Lembrando que $1 = \log_2 2$, por P6 e P7, temos:

$\log_2(x + 6) + \log_2(x - 6) = \log_2(12x + 8) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2(x + 6)(x - 6) = \log_2\frac{(12x + 8)}{2}$

Por P1 das funções logarítmicas:

$(x + 6)(x - 6) = \frac{12x + 8}{2} \Rightarrow x^2 - 36 = \frac{12x + 8}{2}$

$\therefore 2x^2 - 12x - 80 = 0 \Rightarrow x = 10$ ou $x = -4$

Como $x = -4$ não satisfaz a condição de existência e $x = 10$ satisfaz, concluímos: $S = \{10\}$

d) Condição de existência:

$$\begin{cases} x > -3 & \text{(I)} \\ x > 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II), temos: $x > 2$.

Resolução da equação:

Por P7:

$\ln(x + 3) - \ln(x - 2) = 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x + 3}{x - 2}\right) = 1$

$\therefore \frac{x + 3}{x - 2} = e \Rightarrow x + 3 = ex - 2e$

$\therefore x(1 - e) = -3 - 2e \Rightarrow x(e - 1) = 3 + 2e$

$\therefore x = \frac{3 + 2e}{e - 1}$

Como esse valor satisfaz a condição de existência, concluímos: $S = \left\{\frac{3 + 2e}{e - 1}\right\}$

37 a) Condição de existência:

$$\begin{cases} x > -2 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II) temos: $x > 0$.

Resolução da equação:

Por P8:

$\log_4(x + 2) + \log_2 3 = \log_2 x\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\log_2(x + 2)}{\log_2 4} + \log_2 3 = \log_2 x\sqrt{5}$

$\therefore \log_2(x + 2) + 2\log_2 3 = 2\log_2 x\sqrt{5}$

Por P3:

$\log_2(x + 2) + \log_2 9 = \log_2\left(x\sqrt{5}\right)^2$

Por P6:

$\log_2 9(x + 2) = \log_2\left(x\sqrt{5}\right)^2$

Pela propriedade P1 das funções logarítmicas:

$9(x + 2) = x^2 \cdot 5 \Rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = -\frac{6}{5}$

Como $x = -\frac{6}{5}$ não satisfaz a condição de existência e $x = 3$ satisfaz, concluímos: $S = \{3\}$

b) $\log_9 x^2 - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{x}{2}\right)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x^2 > 0 & \text{(I)} \\ \frac{x}{2} > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II), temos $x > 0$.

Resolução da equação:

Por P3:

$2\log_9 x - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{x}{2}\right)$

Por P8:

$2\left(\frac{\log_3 x}{\log_3 9}\right) - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{x}{2}\right)$

Por P7:

$\log_3\frac{x}{2} = \log_3\frac{x}{2}$

$\therefore S = \mathbb{R}_+^*$

38 a) $\log_x(x + 3) + \log_x(3x) - \log_x(x + 1) =$
$= \log_x(5x)$

Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 3x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ 5x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \\ x > -1 & \text{(III)} \\ x \neq 1 & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II) ∩ (III) ∩ (IV), temos: $x > 0$ e $x \neq 1$.

Resolução da equação:

$\log_x(x + 3) + \log_x(3x) - \log_x(x + 1) =$
$= \log_x(5x)$

Pelas propriedades P6 e P7:

$\log_x\left(\frac{(x + 3) \cdot 3x}{x + 1}\right) = \log_x(5x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x(x + 3)}{x + 1} = 5x$

$\therefore \frac{3\cancel{x}(x + 3)}{5\cancel{x}(x + 1)} = 1 \Rightarrow 3x + 9 = 5x + 5$

$\therefore x = 2$

Assim, $S = \{2\}$.

b) Condição de existência:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ ou } x > 2 \\ x > -1 \\ x > 1 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Fazendo a intersecção desses conjuntos de valores, obtemos a condição de existência: $x > 2$
Resolução da equação:
Por P6:
$\log_x (x^2 - 3x + 2) = \log_x (x + 1) + \log_x (x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_x (x^2 - 3x + 2) = \log_x [(x + 1)(x - 1)]$
Por P1 das funções logarítmicas:
$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 1 \Rightarrow -3x + 3 = 0$
$\therefore\ x = 1$
Como $x = 1$ não satisfaz a condição de existência, concluímos que $S = \varnothing$.

39 Como $2^{2x} + 12$ é positivo para qualquer x real, temos que existe $\log_2 (2^{2x} + 12)$ para qualquer x real.
$\log_2 (2^{2x} + 12) = 4x \Rightarrow 2^{2x} + 12 = 2^{4x}$
$\therefore (2^{2x})^2 - 2^{2x} - 12 = 0$
Fazendo a mudança de variável, $2^{2x} = y$, obtemos:
$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = -3$
Retornado à variável original:
$2^{2x} = 4 \Rightarrow x = 1$
ou
$2^{2x} = -3 \Rightarrow \nexists\, x$
Alternativa **c**.

40 Condição de existência: $x > 0$
$2\log_2 \left(1 + \sqrt{2}x\right) - \log_2 \left(\sqrt{2}x\right) = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2 \left(1 + \sqrt{2}x\right)^2 = \log_2 8 + \log_2 \left(\sqrt{2}x\right)$
$\therefore \log_2 \left(1 + \sqrt{2}x\right)^2 = \log_2 \left(8\sqrt{2}x\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(1 + \sqrt{2}x\right)^2 = 8\sqrt{2}x$
$\therefore\ 1 + 2\sqrt{2}x + 2x^2 = 8\sqrt{2}x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 1 = 0$
Resolvendo a equação, temos:
$x = \dfrac{3\sqrt{2} - 4}{2}$ ou $x = \dfrac{3\sqrt{2} + 4}{2}$
Assim, $a = \dfrac{3\sqrt{2} - 4}{2}$
Logo:
$$\log_2 \left(\frac{2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2} - 4}{2}\right) + 4}{3}\right) = \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$
Alternativa **b**.

41
$$\begin{cases} \log_8 x + \log_4 y^2 = 6 \\ \log_4 x^2 + \log_8 y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} + \dfrac{\log_2 y^2}{\log_2 4} = 6 \\ \dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 y}{\log_2 8} = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{3} + \dfrac{\log_2 y^2}{2} = 6 \\ \dfrac{\log_2 x^2}{2} + \dfrac{\log_2 y}{3} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\log_2 x + 3\log_2 y^2 = 36 \\ 3\log_2 x^2 + 2\log_2 y = 60 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} \log_2 x^2 + \log_2 y^6 = 36 \\ \log_2 x^6 + \log_2 y^2 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x^2 y^6 = 36 \\ \log_2 x^6 y^2 = 60 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x^2 y^6 = 2^{36} \\ x^6 y^2 = 2^{60} \end{cases}$$
Multiplicando, membro a membro, as equações desse sistema, obtemos:
$x^8y^8 = 2^{96} \Rightarrow xy = \sqrt[8]{2^{96}} = 2^{12}$
$\therefore \sqrt{xy} = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64$

42 Condição de existência: $x > 0$ e $y > 1$
$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2}{y - 1} = 1 \\ \log_2 \dfrac{x + 4}{\sqrt{y}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y - 1} = 2 \\ \dfrac{x + 4}{\sqrt{y}} = 4 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x^2 = 2y - 2 \\ x + 4 = 4\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 2}{2} & \text{(I)} \\ (x + 4)^2 = 16y & \text{(II)} \end{cases}$$
Das igualdades em (I) e (II), temos:
$x^2 + 8x + 16 = 16 \cdot \dfrac{x^2 + 2}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 8x^2 + 16$
$\therefore 0 = 7x^2 - 8x \Rightarrow$
$\Rightarrow x(7x - 8) = 0$
Como $x > 0$, temos $7x - 8 = 0$, ou seja, $x = \dfrac{8}{7}$.
Assim, $\dfrac{8}{7} + 4 = 4\sqrt{y}$ e, portanto, $\sqrt{y} = \dfrac{9}{7}$.
Logo, $7(\sqrt{y} - x) = 7\left(\dfrac{9}{7} - \dfrac{8}{7}\right) = 1$.
Alternativa **d**.

43 Condição de existência: $x \neq 3$ e $x > 2$
$1 = \log_2 (x - 2) - \log_2 (x^2 - 6x + 9) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = \log_2 \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x + 9}$
$\therefore \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x + 9} = 2 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 = x - 2$
$\therefore\ 2x^2 - 13x + 20 = 0 \Rightarrow x = 4$ ou $x = \dfrac{5}{2}$
Logo, o produto das raízes é 10.
Alternativa **c**.

44 $f(x) = 0 \Rightarrow 10 - \log_2 x^4 - \log_x 16 = 0$
$\therefore\ 10 - \dfrac{\log_2 x^4}{2} - \dfrac{\log_2 16}{\log_2 x} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10 - 4\log_2 x - \dfrac{4}{\log_2 x} = 0$
Fazendo a mudança de variável, $\log_2 x = y$, temos:
$10 - 4y - \dfrac{4}{y} = 0 \Rightarrow 4y^2 - 10y + 4 = 0$
$\therefore\ y = 2$ ou $y = \dfrac{1}{2}$
Retornando à variável original, temos:
$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$
ou
$\log_2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$
Logo, o produto das raízes é $4\sqrt{2}$.
Alternativa **d**.

45 Condição de existência: $9^x > 2 \Rightarrow x > \log_9 2$
$\log_3 (9^x - 2) = x \Rightarrow 9^x - 2 = 3^x$
$\therefore\ 3^{2x} - 3^x - 2 = 0$
Sendo $3^x = m$, temos:
$m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$ ou $m = -1$
- $m = 2 \Rightarrow 3^x = 2$
  $\therefore\ \log_3 2 = x$
- $m = -1 \Rightarrow 3^x = -1$
  $\therefore\ \nexists\, x$

Como $\log_3 2$ satisfaz a condição de existência, concluímos que $\log_3 2$ é raiz da equação.
Alternativa **d**.

46 Dos dados, temos:

$BC = x + 1 - x = 1$ e $AB = x - (x - 1) = 1$

E ainda, como $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares aos eixos das abscissas, temos:

$BE = \log_3 x$ e $CD = \log_3 (x + 1)$

Como a área do trapézio *BCDE* é o triplo da área do triângulo *ABE*, temos:

$$\frac{[\log_3 x + \log_3 (x + 1)] \cdot 1}{2} = 3 \cdot \frac{\log_3 x \cdot 1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_3 (x + 1) = 2 \cdot \log_3 x$

$\therefore \log_3 (x + 1) = \log_3 x^2 \Rightarrow x + 1 = x^2$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - x - 1 = 0$, em que, pelo gráfico, $x > 0$, obtemos:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (não convém)}$$

Assim:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Alternativa **a**.

47 **a)** Condição de existência:

$$\begin{cases} 4x - 1 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{4} & \text{(I)} \\ x > 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) ∩ (II), obtemos: $x > 5$ (III)

Resolução da inequação:

Por P6:

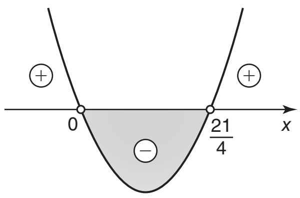
$\log_5 (4x - 1) + \log_5 (x - 5) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 [(4x - 1) \cdot (x - 5)] < \log_5 5$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas, temos:

$(4x - 1)(x - 5) < 5 \Rightarrow 4x^2 - 21x + 5 - 5 < 0$

$\therefore 4x^2 - 21x < 0$



$\therefore 0 < x < \dfrac{21}{4}$ (IV)

Fazendo a intersecção do conjunto de valores (IV) com o conjunto de valores da condição de existência (III), obtemos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, 5 < x < \frac{21}{4}\right\}$$

b) Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) ∩ (II), obtemos: $x > 0$

Resolução da inequação:

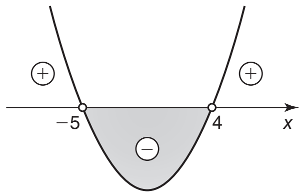
Por P6 e P7:

$\log_2 (x + 1) + \log_2 x - \log_2 5 < 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{x(x + 1)}{5} < \log_2 4$$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:

$$\frac{x(x + 1)}{5} < 4 \Rightarrow x^2 + x - 20 < 0$$



$\therefore -5 < x < 4$

Considerando a condição de existência ($x > 0$), concluímos: $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 4\}$

c) Condição de existência: $x > -5$

Resolução da inequação:

$\ln (x + 5) + 1 \leqslant \ln 5 \Rightarrow \ln (x + 5) + \ln e \leqslant \ln 5$

Por P6:

$\ln e(x + 5) \leqslant \ln 5$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:

$e(x + 5) \leqslant 5 \Rightarrow ex + 5e \leqslant 5$

$\therefore x \leqslant \dfrac{5 - 5e}{e}$

Como $\dfrac{5 - 5e}{e} < 0$ e a condição de existência é $x > 0$, concluímos: $S = \varnothing$

48 Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x > 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & \text{(I)} \\ x > -6 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II), temos: $x > 0$

Resolução da inequação:

Por P8:

$\log_9 (3x) \leqslant \log_3 (x + 6) - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\log_3 3x}{\log_3 9} \leqslant \log_3 (x + 6) - \log_3 3$$

Por P7:

$$\frac{\log_3 3x}{2} \leqslant \log_3 \frac{x + 6}{3} \Rightarrow \log_3 3x \leqslant 2 \log_3 \frac{x + 6}{3}$$

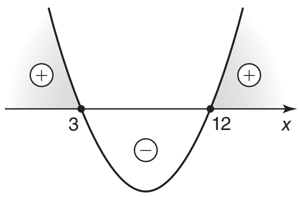
Por P3:

$$\log_3 3x \leqslant \log_3 \left(\frac{x + 6}{3}\right)^2$$

Pela propriedade P2 das funções logarítmicas:

$$3x \leqslant \left(\frac{x + 6}{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 36 \geqslant 0 \quad \text{(III)}$$

Estudando a variação de sinal da função $f(x) = x^2 - 15x + 36$, temos:



Logo, os valores de x que satisfazem (III) são tais que $x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 12$ (IV)

A intersecção do conjunto de valores (IV) com o conjunto de valores da condição de existência forma o conjunto solução S da inequação proposta:

$S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 12\}$

49 Condição de existência:

$$\begin{cases} x > 3 & \text{(I)} \\ x > 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II), temos: $x > 3$

Resolução da inequação:

Por P6:

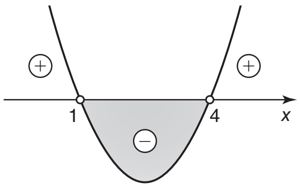
$\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 [(x - 3)(x - 2)] < \log_2 2$

Por P2 das funções logarítmicas:

$(x - 3)(x - 2) < 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 - 2 < 0$

$\therefore\ x^2 - 5x + 4 < 0$



$\therefore\ 1 < x < 4$

Considerando a condição de existência ($x > 3$), concluímos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$

Alternativa **d**.

50 Condição de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 8 > 0 \\ \log_3 \sqrt{x} + \log_9 (x - 8) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \\ \log_3 \sqrt{x} + \log_9 (x - 8) > 0 \end{cases}$$

Observando que $x > 8$ satisfaz as três inequações, temos que $x > 8$ é a condição de existência.

Resolução da inequação:

$\log_{\frac{1}{3}} (\log_3 \sqrt{x} + \log_9 (x - 8)) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} (\log_3 \sqrt{x} + \log_9 (x - 8)) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1$

Como $0 < \frac{1}{3} < 1$, por P3 das funções logarítmicas, temos:

$\log_3 \sqrt{x} + \log_9 (x - 8) \leq 1$

Por P8:

$\log_3 \sqrt{x} + \dfrac{\log_3 (x - 8)}{\log_3 9} \leq \log_3 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \log_3 \sqrt{x} + \log_3 (x - 8) \leq 2 \log_3 3$

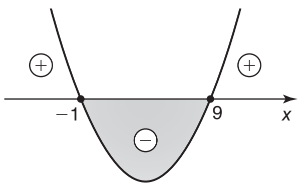
$\therefore\ \log_3 x + \log_3 (x - 8) \leq \log_3 3^2$

Por P6:

$\log_3 x(x - 8) \leq \log_3 9$

Por P2 das funções logarítmicas:

$x(x - 8) \leq 9 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 \leq 0$



$\therefore\ -1 \leq x \leq 9$

Considerando a condição de existência ($x > 8$), concluímos: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x \leq 9\}$

Logo, $\mathbb{Z} \cap S = \{9\}$ tem apenas 1 elemento.

Alternativa **c**.

51 Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{4}{3} & \text{(I)} \\ x > \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II), temos: $x > \frac{1}{2}$

Assim, f está definida para todo x real com $x > \frac{1}{2}$.

Resolução da inequação:

$f(x) > 1 \Rightarrow \log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1) > 1$

Por P7:

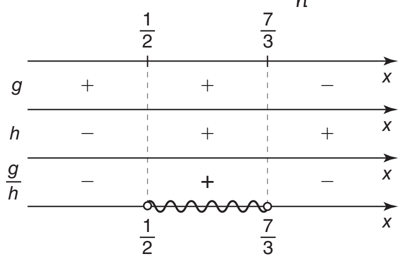
$\log_3 \dfrac{3x + 4}{2x - 1} > \log_3 3 \Rightarrow \dfrac{3x + 4}{2x - 1} > 3$

$\therefore\ \dfrac{3x + 4}{2x - 1} - 3 > 0$

$\therefore\ \dfrac{3x + 4 - 3(2x - 1)}{2x - 1} > 0$

$\therefore\ \dfrac{-3x + 7}{2x - 1} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $g(x) = -3x + 7$, $h(x) = 2x - 1$ e $\frac{g}{h}$, temos:



$\dfrac{g(x)}{h(x)} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{7}{3}$

Como todo x do intervalo $\left]\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right[$ satisfaz a condição de existência, temos que $f(x) > 1$ para qualquer x real com $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}$.

Alternativa **c**.

52 Condição de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$

Resolução da inequação:

Por P8:

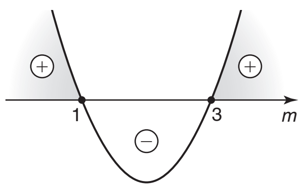
$\log_3 x + 3 \log_x 3 - 4 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 x + 3 \dfrac{\log_3 3}{\log_3 x} - 4 \geq 0$

$\therefore\ (\log_3 x)^2 + 3 - 4 \log_3 x \geq 0$

Sendo $\log_3 x = m$, temos:

$m^2 - 4m + 3 \geq 0$



$\therefore\ m \leq 1$ ou $m \geq 3$

Voltando à variável original:

$\log_3 x \leq 1$ ou $\log_3 x \geq 3$

$\therefore\ x \leq 3$ ou $x \geq 27$

Considerando as condições de existência ($x > 0$ e $x \neq 1$), concluímos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3 \text{ e } x \neq 1 \text{ ou } x \geq 27\}$

Exercícios contextualizados

53 Para juros compostos, o montante pode ser calculado por:

$M = C(1 + i)^t$

Para que o capital triplique, temos: $M = 3C$

Logo:

$3C = C(1 + i)^t \Rightarrow 3 = (1 + i)^t$

$\therefore t = \log_{1+i} 3$

Alternativa **a**.

54 Sendo E_1 a energia liberada no terremoto ocorrido no Chile, temos:

$\log E_1 = 1{,}44 + 1{,}5 \cdot 9 = 1{,}44 + 13{,}5 \Rightarrow \log E_1 = 14{,}94$

$\therefore E_1 = 10^{14{,}94}$

Sendo E_2 a energia liberada no terremoto ocorrido nos Estados Unidos, temos:

$\log E_2 = 1{,}44 + 1{,}5 \cdot 8 = 1{,}44 + 12 \Rightarrow \log E_2 = 13{,}44$

$\therefore E_2 = 10^{13{,}44}$

Comparando as energias liberadas, temos:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{14{,}94}}{10^{13{,}44}} = 10^{1{,}5} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = 10\sqrt{10} \approx 31{,}6$$

Logo, a energia liberada no terremoto do Chile é aproximadamente 31,6 vezes maior que a liberada no dos Estados Unidos.

Alternativa **d**.

55 **a)** Substituindo E_0 por $7 \cdot 10^{-3}$ e I por 8 na fórmula, $I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, temos:

$$8 = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 12 = \log\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$$

$$\therefore 10^{12} = \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow E = 7 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-3} = 7 \cdot 10^9$$

Logo, a energia liberada é $7 \cdot 10^9$ kWh.

b) Primeiro, vamos expressar E em função de I:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow \frac{3I}{2} = \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$\therefore 10^{\frac{3I}{2}} = \frac{E}{E_0} \Rightarrow E = 10^{\frac{3I}{2}} \cdot E_0$$

Sendo E' a energia liberada quando aumentamos a intensidade em uma unidade, temos:

$$E' = 10^{\frac{3(I+1)}{2}} \cdot E_0 \Rightarrow E' = 10^{\frac{3I}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2}} \cdot E_0$$

$$\therefore E' = 10^{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{10^{\frac{3I}{2}} \cdot E_0}_{E} \Rightarrow E' = 10^{\frac{3}{2}} \cdot E$$

Logo, aumentando em uma unidade a intensidade, a energia fica multiplicada por $10^{\frac{3}{2}}$ ou, aproximadamente, 31,6.

56 Substituindo B por 90 na expressão dada, determinamos a intensidade I_Q do som da orquestra:

$$90 = 10 \log\left(\frac{I_Q}{I_0}\right) \Rightarrow 9 = \log\left(\frac{I_Q}{I_0}\right)$$

$$\therefore 10^9 = \frac{I_Q}{I_0}$$

$\therefore I_Q = 10^9 \cdot I_0$

Substituindo B por 60 na expressão dada, determinamos a intensidade I_C do som da conversação normal:

$$60 = 10 \log\left(\frac{I_C}{I_0}\right) \Rightarrow 6 = \log\left(\frac{I_C}{I_0}\right)$$

$$\therefore 10^6 = \frac{I_C}{I_0}$$

$\therefore I_C = I_0 \cdot 10^6$

Comparando as intensidades do som de uma orquestra com o som de uma conversação normal, temos: $\frac{I_Q}{I_C} = \frac{I_0 \cdot 10^9}{I_0 \cdot 10^6} = 10^3 = 1.000$

$\therefore I_Q = 1.000 \cdot I_C$

Alternativa **a**.

57 $\sqrt[12]{2} = x \Rightarrow 2^{\frac{1}{12}} = x$

$\therefore \log 2^{\frac{1}{12}} = \log x \Rightarrow \frac{1}{12} \cdot \log 2 = \log x$

$\therefore \frac{1}{12} \cdot 0{,}3 = \log x \Rightarrow 0{,}025 = \log x$

Pela tabela, temos $x = 1{,}059 = 105{,}9\%$.

Logo, a frequência de cada nota é 105,9% da frequência da nota imediatamente abaixo. Isso significa um aumento de 5,9%.

Alternativa **c**.

58 **a)** Determinando a temperatura no instante em que o ocorreu a falha, $T(0)$, e uma hora depois, $T(1)$, temos:

$T(0) = 2^0 + 400 \cdot 2^{-0} = 401$

$T(1) = 2^1 + 400 \cdot 2^{-1} = 202$

Logo, as temperaturas são 401 °C e 202 °C, respectivamente.

b) Substituindo $T(t)$ por 40, temos:

$40 = 2^t + 400 \cdot 2^{-t}$

Fazendo $2^t = y$:

$40 = y + \frac{400}{y} \Rightarrow y^2 - 40y + 400 = 0$

$\therefore y = 20$

Como $2^t = y$, temos:

$2^t = 20 \Rightarrow t = \log_2 20$

$\therefore t = \log_2 (5 \cdot 2^2) = \log_2 5 + 2\log_2 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2{,}3 + 2 \cdot 1$

$\therefore t = 4{,}3.$

Logo, houve falha por 4,3 horas.

59 Temos:

$3^{-1{,}3d + 3{,}5} = 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 3^{-1{,}3d + 3{,}5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}2 \cdot 3^{-1{,}3d + 3{,}5} = 0{,}8 \therefore 3^{-1{,}3d + 3{,}5} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1{,}3d + 3{,}5 = \log_3 4 \therefore -1{,}3d + 3{,}5 = 2\log_3 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -1{,}3d + 3{,}5 = 2 \cdot 0{,}6$

$\therefore d \approx 1{,}77$

Logo, a distância d é aproximadamente 1,77 km.

60 **a)** $R_\beta = 12 + \log_{10} I \Leftrightarrow 10 \cdot R_\beta = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$

A medida do ruído $R_{d\beta}$, em decibéis, é dada por:

$R_{d\beta} = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$

A intensidade sonora máxima suportada pelo ouvido humano é a que corresponde a um ruído de 80 decibéis. Assim:

$120 + 10 \cdot \log_{10} I = 80 \Leftrightarrow 10 \log_{10} I = -40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{10} I = -4 \Leftrightarrow I = 10^{-4}$

Logo, 10^{-4} w/m²

b) Sendo I_A e I_T as intensidades sonoras do motor de avião a jato e do tráfego, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 160 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_A \\ 80 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_T \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_{10} I_A = 4 \\ \log_{10} I_T = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \log_{10} I_A - \log_{10} I_T = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{I_A}{I_T}\right) = 8 \Leftrightarrow \frac{I_A}{I_T} = 10^8$$

61 Sendo A o número de prótons do universo, temos:

$A = 136 \cdot 2^{256} \Rightarrow \log A = \log (136 \cdot 2^{256})$

$\therefore \log A = \log 136 + 256 \log 2$

$\therefore \log A = \log (2^3 \cdot 17) + 256 \cdot \log 2$

$\therefore \log A = 3 \log 2 + \log 17 + 256 \cdot \log 2$

Usando as aproximações $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 17 = 1{,}23$, temos:

$\log A = 0{,}90 + 1{,}23 + 76{,}8 \Rightarrow \log A = 78{,}93$

$\therefore A = 10^{78{,}93} \approx 10^{80}$

Alternativa **c**.

62 Sendo d a distância, em parsec, entre a estrela Ringel e a Terra, temos:

$-6{,}8 = 0{,}2 + 5\log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -7 = 5(\log_3 3 + \log_3 3 \cdot d^{-0{,}48})$

$\therefore -7 = 5 \cdot 1 + (-0{,}48) \cdot \log_3 d \Rightarrow$

$\Rightarrow -12 = -2{,}4\log_3 d \quad \therefore \log_3 d = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 3^5 = 243$, ou seja, a distância é 243 parsecs.

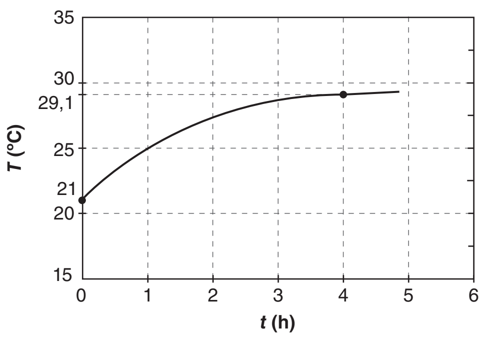
Logo, a distância pedida, em quilômetro, é:

$243 \cdot 3 \cdot 10^{13}$ km, ou seja, $7{,}29 \cdot 10^{15}$ km.

63 a) $T(t) = (21 - 30) \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + 30$

$T(t) = -9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + 30$

$T(4) = -9 \cdot 10^{-1} + 30 = 29{,}1$ °C



b) $T(t) = 21 + 4 = 25$ °C

$-9 \cdot 10^{-\frac{t}{4}} + 30 = 25$

$10^{-\frac{t}{4}} = \frac{5}{9}$

$-\frac{t}{4} = \log \frac{5}{9} = \log 5 - \log 3^2$

$t = -4\,(0{,}70 - 2 \cdot 0{,}48) = 1{,}04$ h

64 I. F, pois para $t = 0$ temos:

$$P(0) = \frac{11.480}{1 + 3^4} = 140$$

II. F, pois $P(0) = 140$ e a função P é decrescente.

III. V, pois para $P(t) = 4.100$ temos:

$$4.100 = \frac{11.480}{1 + 3^{4 - t}} \Rightarrow 2{,}8 = 1 + 3^{4 - t}$$

$\therefore 1{,}8 = 3^{4 - t} \Rightarrow 1{,}8 = 3^4 \cdot 3^{-t}$

$\therefore \frac{1}{45} = \frac{1}{3^t} \Rightarrow 3^t = 45$

$\therefore t = \log_3 45 = \log_3 (3^2 \cdot 5) = \log_3 3^2 + \log_3 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2 + \log_3 5$

IV. F, pois o número de frangos infectados somente no terceiro dia é dado por:

$$P(3) - P(2) = \frac{11.480}{1 + 3^1} - \frac{11.480}{1 + 3^2} =$$

$= 2.870 - 1.148 = 1.722$

65 No instante $t = 0$ existem 1.500 indivíduos da espécie e em $t = 10$ estima-se que existirão 750 indivíduos. Então:

$f(0) = 1.500 = K \cdot a^0 \Rightarrow K = 1.500$

$f(10) = 750 = 1.500 \cdot a^{10} \Rightarrow a^{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2^{-\frac{1}{10}}$

$100 = 1.500 \cdot \left(2^{-\frac{1}{10}}\right)^t \Rightarrow \frac{1}{15} = 2^{-\frac{t}{10}}$

$$\log\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{-t}{10} \cdot \log 2 \Rightarrow \frac{-t}{10} = \frac{\log\left(\frac{1}{15}\right)}{\log 2} = \log_2\left(\frac{1}{15}\right)$$

Logo, temos:

$$\frac{-t}{10} = \log_2\left(\frac{1}{15}\right) \Rightarrow t = 10 \cdot \frac{\log 15}{\log 2}$$

$\log 15 = \log (10 \cdot 1{,}5) = \log\left(10 \cdot \frac{3}{2}\right) = \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log 10 + \log 3 - \log 2$

Então:

$$t = 10 \cdot \frac{\log 15}{\log 2} = 10 \cdot \frac{\log 10 + \log 3 - \log 2}{\log 2} =$$

$$= 10 \cdot \frac{1 + 0{,}47 - 0{,}30}{0{,}30} = 39$$

Portanto, o nível de população para que a espécie tenha sua extinção dada como irreversível será atingido em aproximadamente 39 anos.

66 Sendo x a produção inicial de doses da vacina e $D(t)$ o número de doses produzidas após t anos da produção inicial, temos:

$D(t) = x \cdot 2^t$

Para a produção ser 10 vezes a produção inicial, devemos ter:

$10x = x \cdot 2^t \Rightarrow 10 = 2^t$

$\therefore \log 10 = \log 2^t \Rightarrow 1 = t \cdot \log 2$

Usando $\log 2 = 0{,}3$, obtemos:

$1 = t \cdot 0{,}3 \Rightarrow t = \frac{1}{0{,}3}$

$\therefore t \approx 3{,}333...$

Logo, após aproximadamente 3 anos e 4 meses o número de doses produzidas será 10 vezes a produção inicial.

Alternativa **e**.

67 Para $A = 160$, temos:

$160 = 40 \cdot (1{,}1)^t \Rightarrow (1{,}1)^t = 4$

$\therefore \log (1{,}1)^t = \log 4 \Rightarrow t \cdot \log\left(\frac{11}{10}\right) = \log 2^2$

$\therefore t(\log 11 - \log 10) = 2 \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t(1{,}04 - 1) \approx 2 \cdot 0{,}3$

$\therefore t \approx \frac{0{,}6}{0{,}04} = 15$

Logo, a planta terá altura de 1,6 metro aproximadamente aos 15 anos.
Alternativa **a**.

68 Basta substituir $P(t)$ por 22.000 na equação $P(t) = 2.000\ (1,1)^t$, isto é:
$22.000 = 2.000\ (1,1)^t \Rightarrow 11 = 1,1^t$
$\therefore \log 11 = t(\log 11 - \log 10)$
Usando $\log 11 = 1,04$:
$1,04 = t(1,04 - 1) \Rightarrow t = 26$
Logo, a população de roedores atingirá 22.000 indivíduos em 26 meses ou 2 anos e 2 meses.

69 Substituindo C(t) por 16 na equação $C(t) = 50 \cdot 2^{-2t} + 20 \cdot 2^{-t}$, temos:
$16 = 50 \cdot 2^{-2t} + 20 \cdot 2^{-t}$
Sendo $y = 2^{-t}$:
$16 = 50 \cdot y^2 + 20y \Rightarrow 50y^2 + 20y - 16 = 0$
$\therefore y = \frac{2}{5}$ ou $y = -\frac{4}{5}$
Voltando à variável original:
$2^{-t} = \frac{2}{5} \Rightarrow -t \cdot \log 2 = \log 2 - \log 5$
$\therefore -0,3t = 0,3 - \log 10 + \log 2$
$\therefore -0,3t = 0,3 - 1 + 0,3$
$\therefore t = \frac{0,4}{0,3} = \frac{4}{3}$
$\therefore t = \frac{4}{3}$ anos $= \frac{4}{3} \cdot 365$ dias $= 486,666...$ dias
Logo, o tempo necessário para a concentração se reduzir a 16 indivíduos por litro é 487 dias.

70 Sendo a e b o número de tartarugas das espécies A e B, respectivamente, e t o tempo decorrido, em ano, após a observação inicial, temos:
$a = 400(1 - 0,2)^t$ e $b = 200(1 + 0,1)^t$
Para as populações serem iguais, devemos ter:
$400(0,8)^t = 200(1,1)^t \Rightarrow \frac{400}{200} = \left(\frac{1,1}{0,8}\right)^t$
$\therefore 2 = \left(\frac{11}{8}\right)^t \Rightarrow \log 2 = t(\log 11 - 3\log 2)$
$\therefore 0,30 = t(1,04 - 0,90) \Rightarrow 0,30 = t \cdot 0,14$
$\therefore t \approx 2,14$
Logo, as populações serão iguais decorridos, aproximadamente, 2,14 anos.

71 $\begin{cases} Q_0 = 10 \\ Q(12) = 50 \end{cases} \Rightarrow 50 = 10 \cdot e^{12a}$
$\therefore e^{12a} = 5 \Rightarrow 12a = \ln 5$
$\therefore a = \frac{1}{12} \cdot \ln 5 = \ln 5^{\frac{1}{12}} \Rightarrow a = \ln \sqrt[12]{5}$
Alternativa **a**.

72 O número $f(t)$ de pessoas que já sabiam da notícia após t horas de sua divulgação é dado por:
$f(t) = \frac{A}{1 + 4e^{-\frac{At}{40}}}$

a) O número de pessoas que tomaram conhecimento do plano no instante em que ele foi noticiado ($t = 0$) é dado por $f(0)$.
$f(0) = \frac{A}{1 + 4e^0} = \frac{A}{5}$
Portanto, no instante em que foi noticiado, $\frac{1}{5} = 20\%$ da população tomou conhecimento do plano.

b) Sabe-se que, após 1 hora, 50% da população estava ciente da notícia.
$f(1) = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{1 + 4e^{-\frac{At}{40}}} = \frac{A}{2}$
$\therefore 1 + 4e^{-\frac{A}{40}} = 2 \Rightarrow e^{-\frac{A}{40}} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$
$\therefore \ln e^{-\frac{A}{40}} = \ln 2^{-2} \Rightarrow -\frac{A}{40} = -2\ln 2$
$\therefore A = 80 \ln 2 = 55,2$
Portanto, a população do país é 55,2 milhões de habitantes.

73 $P(t) = 0,6 \cdot 500 \Rightarrow \frac{100.000}{200 + 300 \cdot e^{-2t}} = 300$
$\therefore 100.000 = 60.000 + 90.000 \cdot e^{-2t} \Rightarrow e^{-2t} = \frac{4}{9}$
$\therefore -2t = \ln\left(\frac{4}{9}\right) \Rightarrow -2t = -0,8$
$\therefore t = 0,4$
Alternativa **a**.

74 **a)** $Q = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) \Rightarrow \frac{Q}{Q_0} = 1 - e^{-\frac{t}{2}}$
$\therefore 1 - \frac{Q}{Q_0} = e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow -\frac{t}{2} = \ln\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)$
Portanto: $t = -2 \cdot \ln\left(1 - \frac{Q}{Q_0}\right)$

b) Queremos determinar t tal que:
$Q = 0,9 \cdot Q_0$
Assim:
$t = -2\ln \cdot \left(1 - \frac{0,9Q_0}{Q_0}\right) \Rightarrow t = -2 \cdot \ln(0,1)$
$\therefore t = -2 \cdot \ln\frac{1}{10} = -2 \cdot (\ln 1 - \ln 10)$
$\therefore t = 2 \cdot \ln 10 = 4,6$
Logo, para recarregar 90% da carga máxima o capacitor leva 4,6 segundos.

75 Devemos ter: $C(t) = 0,4d \Rightarrow d \cdot (0,8)^t = 0,4d \Rightarrow$
$\Rightarrow d \cdot (0,8)^t = 0,4d$
$\therefore (0,8)^t = 0,4 \Rightarrow \ln(0,8)^t = \ln(0,4)$
$\therefore t\ln(0,8) = \ln(0,4) \Rightarrow t(\ln 8 - \ln 10) = \ln 4 - \ln 10$
$\therefore t(2,08 - 2,30) = 1,39 - 2,30 \Rightarrow -0,22t = -0,91$
$\therefore t \approx 4,1$
Logo, a concentração atinge 40% da dose administrada 4,1 horas após a injeção, aproximadamente, o que equivale a 4 horas e 6 minutos.

76 $t(x) = (0,01) \cdot 2^{(0,05)x}$
Para determinar em que ano $(x + 1.880)$ a temperatura terá aumentado 3 °C, é necessário encontrar x tal que:
$t(x) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{100} \cdot 2^{0,05x}$
$\therefore 2^{0,05x} = 300 = 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \Rightarrow \log_2 2^{0,05x} = \log_2(3 \cdot 2^2 \cdot 5^2)$
$\therefore 0,05 \cdot x \cdot \log_2 2 = \log_2 3 + 2 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot \log_2 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0,05x = 1,6 + 2 + 2 \cdot 2,3$
$\therefore x = 164$
Logo: $1.880 + 164 = 2.044$
Portanto, a temperatura média terá aumentado 3 °C no ano 2044.

77 a) Para $t = 0$, temos $Q = 1$; logo:

$$1 = \log \frac{10^k}{0 + 1} \Rightarrow 10^k = 10^1$$

$\therefore\ k = 1$

Logo, $k = 1$.

b) A experiência terminará quando a quantidade de água no recipiente for nula, ou seja, no tempo t tal que $Q(t) = 0$.

$$0 = \log \frac{10}{t + 1} \Rightarrow 10^0 = \frac{10}{t + 1}$$

$\therefore\ t + 1 = 10 \Rightarrow t = 9$

Portanto, a experiência terminará decorridas 9 horas.

78 $f(t) = 7 \cdot (1{,}04)^{t - 90}$, para $90 < t < 130$

Queremos determinar a temperatura t quando a pressão interna for $f(t) = 15{,}33$. Ou seja:

$15{,}33 = 7 \cdot (1{,}04)^{t - 90} \Rightarrow 2{,}19 = 1{,}04^{t - 90}$

$\therefore\ \log 2{,}19 = (t - 90) \cdot \log 1{,}04 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 219 - \log 100 = (t - 90) \cdot (\log 104 - \log 100)$

$\therefore\ 2{,}34 - 2 = (t - 90) \cdot (2{,}02 - 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}34 = (t - 90) \cdot (0{,}02)$

$\therefore\ 17 = t - 90 \Rightarrow t = 107$

Logo, a temperatura no interior da panela é 107 °C.

Alternativa **d**.

79 Para $t = 50$, temos:

$$m = \frac{2^{50}}{10^{11}}$$

Logo, $\log m = \log 2^{50} - \log 10^{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log m = 50 \cdot 0{,}3 - 11 = 4$

$\therefore\ m = 10^4 = 10.000$

Portanto, a massa da população de fungos, em 50 horas, é 10.000 g.

Alternativa **c**.

80 a) O tempo, em século, em que a substância A perde 0,12 g é dado por $f(0{,}12)$. Assim:

$$f(0{,}12) = \log_{0,99} \frac{11{,}88}{12} = \log_{0,99} 0{,}99 = 1$$

Logo, a substância perde 0,12 g de sua massa em 1 século.

b) O valor da massa perdida em 4 séculos é dado pelo valor de x tal que $g(x) = 4$.

Assim:

$$4 = \frac{1}{2} \cdot \log_{0,99} \frac{8 - x}{8} \Rightarrow 8 = \log_{0,99} \frac{8 - x}{8}$$

$$\therefore\ (0{,}99)^8 = \frac{8 - x}{8} \Rightarrow 0{,}92 = \frac{8 - x}{8}$$

$\therefore\ 7{,}36 - 8 = -x \Rightarrow x = 0{,}64$

Logo, a massa perdida será 0,64 g.

c) Condição de existência:

$$\begin{cases} \dfrac{12 - x}{12} > 0 \Rightarrow x < 12 & \text{(I)} \\[2ex] \dfrac{8 - x}{8} > 0 \Rightarrow x < 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) ∩ (II), temos que a condição de existência é $x < 8$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{0,99} \frac{12 - x}{12} = \frac{1}{2} \cdot \log_{0,99} \frac{8 - x}{8}$$

$$\therefore\ \log_{0,99} \frac{12 - x}{12} = \log_{0,99} \left(\frac{8 - x}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pela P1 da função logarítmica:

$$\frac{12 - x}{12} = \left(\frac{8 - x}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{144 - 24x + x^2}{144} = \frac{8 - x}{8}$$

$\therefore\ 1.152 - 192x + 8x^2 = 1.152 - 144x \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x^2 - 48x = 0$

$x = 0$ (não convém) ou $x = 6$

Logo, $f(x) = g(x)$ para $x = 6$g.

81 As cidades A e B terão o mesmo número de habitantes quando $A(t) = B(t)$. Assim:

$A(t) = B(t) \Rightarrow \log_4 (2 + t)^5 = \log_2 (2t + 4)^2$

$$\therefore\ \frac{\log_2 (2 + t)^5}{2} = \log_2 (2t + 4)^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_2 (2 + t)^5 = \log_2 (2t + 4)^4$

$\therefore\ (2 + t)^5 = (2t + 4)^4 \Rightarrow (2 + t)^5 - 2^4(2 + t)^4 = 0$

$\therefore\ (2 + t)^4(2 + t - 16) = 0 \Rightarrow t = -2$ (não convém) ou $t = 14$

Alternativa **e**.

82 a) Sendo E_I e E_B as energias liberadas nos terremotos da Indonésia e do Brasil, respectivamente, temos:

$\log E_I = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 9{,}3 \Rightarrow E_I = 10^{25{,}75}$

$\log E_B = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 6{,}3 \Rightarrow E_B = 10^{21{,}25}$

Logo:

$$\frac{E_I}{E_B} = \frac{10^{25{,}75}}{10^{21{,}25}} = 10^{4{,}5}$$

b) $$\begin{cases} \log E_2 = 11{,}8 + 1{,}5(\log A_2 - \log A_0) & \text{(I)} \\ \log E_1 = 11{,}8 + 1{,}5(\log A_1 - \log A_0) & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, I e II, obtemos:

$\log E_2 - \log E_1 = 1{,}5(\log A_2 - \log A_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{3}{2} \cdot \log \left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

$$\therefore\ \log \left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{E_2}{E_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \log \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Logo, $K = \dfrac{2}{3}$.

83 a) O capital pode ser calculado pela equação $C = 12.000\,(1 + 0{,}08)^t$ para $t = 2$, isto é:

$C = 12.000 \cdot 1{,}08^2 \Rightarrow C = 13.996{,}80$

Assim, em 2 anos o capital acumulado será R$ 13.996,80.

b) Devemos ter $12.000 \cdot 1{,}08^t > 24.000 \Rightarrow 1{,}08^t > 2$

$\therefore \log(1{,}08)^t > \log 2 \Rightarrow t \log 1{,}08 > \log 2$

$\therefore t \log \dfrac{2^2 \cdot 3^3}{100} > \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t\,(2 \log 2 + 3 \log 3 - 2) > 0{,}301$

$\therefore t(0{,}602 + 1{,}431 - 2) > 0{,}301 \Rightarrow t \cdot 0{,}033 > 0{,}301$

$\therefore t > 9{,}12$

Logo, o tempo mínimo, em número inteiro de anos, para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial é 10 anos.

84 Sejam $A(t) = 284{,}5\,(1{,}2)^t$ e $B(t) = 728{,}32\,(1{,}1)^t$ as equações que calculam o número de usuários dos países A e B, respectivamente, daqui a t anos. De acordo com o enunciado, devemos ter:

$284{,}5\,(1{,}2)^t > 728{,}32 \cdot (1{,}1)^t \Rightarrow \left(\dfrac{1{,}2}{1{,}1}\right)^t > 2{,}56$

$\therefore t \log\left(\dfrac{2^2 \cdot 3}{11}\right) > \log \dfrac{2^8}{10^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t(2 \log 2 + \log 3 - \log 11) > 8 \log 2 - 2 \log 10$

$\therefore t(0{,}6 + 0{,}48 - 1{,}04) > 2{,}4 - 2 \Rightarrow 0{,}04t > 0{,}4$

$\therefore t > 10$

Assim, o número mínimo de anos necessários é 11.

85 Sendo P a população mundial, em bilhão de habitantes, após t anos, temos:

$P = 6(1 + 0{,}016)^t$. Para que a população ultrapasse 7 bilhões de habitantes, devemos ter:

$6\,(1{,}016)^t > 7 \Rightarrow (1{,}016)^t > \dfrac{7}{6}$

$\therefore t \log(1{,}016) > \log 7 - \log 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow t(\log 1{,}016 - 3) > 0{,}8450 - 0{,}7781$

$\therefore t(3{,}0068 - 3) > 0{,}0669 \Rightarrow t > \dfrac{0{,}0669}{0{,}0068}$

$\therefore t > 9{,}83$

A população ultrapassa 7 bilhões de habitantes 9,83 anos depois do ano 2000, ou seja, no decorrer de 2009.

86 a) V, pois $\dfrac{1}{1 + 9e^{-x}} \geq \dfrac{1}{10} \Rightarrow 1 + 9e^{-x} \leq 10$

$\therefore e^{-x} \leq 1 \Rightarrow e^{-x} \leq e^0$

$\therefore -x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0$

b) F, pois $\dfrac{1}{1 + 9e^{-x}} > \dfrac{11}{10} \Rightarrow 1 + 9e^{-x} < \dfrac{10}{11}$

$\therefore e^{-x} < -\dfrac{1}{99}$ o que é absurdo, pois e^{-x} é positivo para qualquer x real.

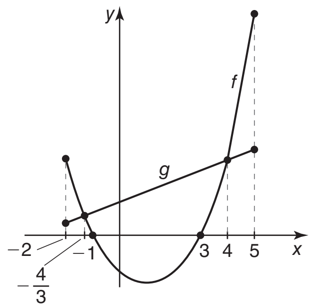
c) F, pois $f(x) = \dfrac{1}{1 + 9 \cdot e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^x + 9}$ e, portanto:

- Para o atleta A, em que $x_A = 1$, temos:
  $f(1) = \dfrac{e}{e + 9} \approx 0{,}23$
  Assim, o tempo final de A é, aproximadamente, $t_{F_A} = t_{i_A} \cdot 0{,}23$.
- Para o atleta B, em que $x_B = 3$, temos:
  $f(3) = \dfrac{e^3}{e^3 + 9} \approx 0{,}69$
  Assim, o tempo final de B é aproximadamente $t_{F_B} = t_{i_B} \cdot 0{,}69$.
  Suponha que o tempo gasto de B seja 20 s e o de A, 30 s. Nesse caso:

$$\begin{cases} t_{F_B} = 20 \cdot 0{,}69 = 13{,}8 \\ t_{F_A} = 30 \cdot 0{,}23 = 6{,}9 \end{cases} \Rightarrow t_{F_B} > t_{F_A}$$

Exercícios de revisão cumulativa

1 Observando o gráfico, temos:



a) $f(x) = 0$ quando $x = -1$ ou $x = 3$

b) $f(x) > 0$ quando $-2 \leq x \leq 1$ ou $3 < x \leq 5$

c) $f(x) \leq 0$ quando $-1 \leq x \leq 3$

d) $f(x) > g(x)$ quando $-2 \leq x < -\dfrac{4}{3}$ ou $4 < x \leq 5$

e) $f(x) \cdot g(x) < 0$ quando $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$.

Observando o gráfico, temos $g(x) > 0$ para todo $x \in D$. Assim, a única possibilidade é:

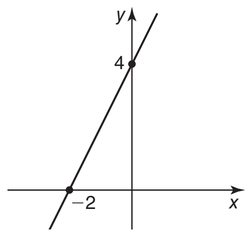
$f(x) < 0$ e $g(x) > 0 \Rightarrow -1 < x < 3$

f) $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$.

Observando o gráfico, temos $g(x) > 0$ para todo $x \in D$. Assim, a única possibilidade é:

$f(x) > 0$ e $g(x) > 0 \Rightarrow -2 \leq x < -1$ ou $3 < x \leq 5$

2



Pela figura, $(-2, 0)$ e $(0, 4)$ pertencem ao gráfico da função. Substituindo em $y = ax + b$, temos:

$0 = -2a + b$ (I)

$4 = 0 + b \Rightarrow b = 4$

Substituindo b por 4 em (I):

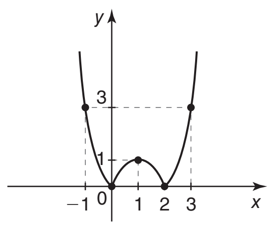
$0 = -2a + 4 \Rightarrow a = 2$

Logo, $a = 2$ e $b = 4$ e, portanto, $y = 2x + 4$.

3 a) $f(x) = |x^2 - 2x|$

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -x^2 + 2x, \text{ se } f(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

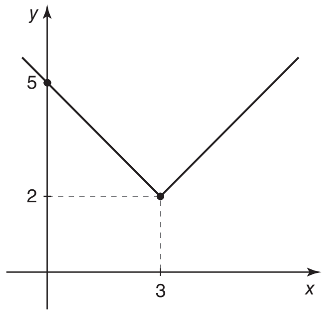
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x, \text{ se } 0 < x < 2 \end{cases}$$



b) $g(x) = 2 + |x - 3|$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ se } x < 3 \end{cases}$$

Deslocando o gráfico de $|x - 3|$ verticalmente 2 unidades para cima, obtemos o gráfico de g.



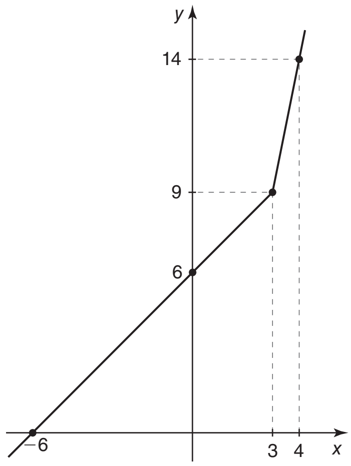
c) $h(x) = 3x + |2x - 6|$

$$|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6, \text{ se } x \geqslant 3 \\ -2x + 6, \text{ se } x < 3 \end{cases}$$

Logo:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 6 + 3x, \text{ se } x \geqslant 3 \\ -2x + 6 + 3x, \text{ se } x < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} 5x - 6, \text{ se } x \geqslant 3 \\ x + 6, \text{ se } x < 3 \end{cases}$$

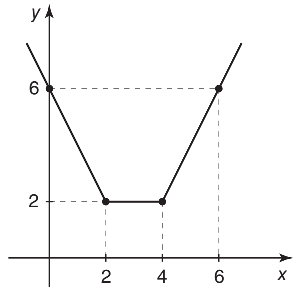


d) $t(x) = |x - 4| + |2 - x|$

$$|x - 4| = \begin{cases} x - 4, \text{ se } x \geqslant 4 \\ -x + 4, \text{ se } x < 4 \end{cases}$$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -2 + x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

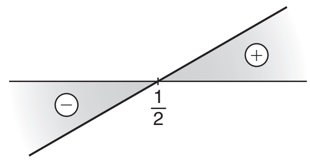
		2		4	
$\|x - 4\|$	$-x + 4$		$-x + 4$		$x - 4$
$\|2 - x\|$	$2 - x$		$-2 + x$		$-2 + x$
$\|x - 4\| + \|2 - x\|$	$\mathbf{-2x + 6}$		$\mathbf{2}$		$\mathbf{2x - 6}$



4 Condição de existência: $\frac{2x - 1}{x - 3} \geqslant 0$, $x \neq 3$

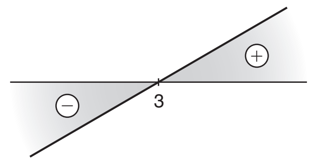
Estudando a variação de sinal da função $g(x) = 2x - 1$, temos:

$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

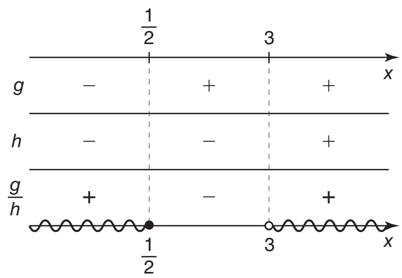


Estudando o sinal da função $h(x) = x - 3$, temos:

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$



Assim, a variação de sinal de $\frac{g}{h}$ é dada por:



Logo, o domínio da função f é:

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\right\}$

Análise da resolução

Para $P = 70$, temos:

$70 = 95e^{-0{,}49t} \Rightarrow e^{-0{,}49t} = \frac{70}{95}$

$\therefore -0{,}49t = \log_e\left(\frac{70}{95}\right) \Rightarrow t = -\frac{\log_e\left(\frac{70}{95}\right)}{0{,}49}$

$\therefore t = -\frac{\log_e 70 - \log_e 95}{0{,}49} = \frac{\log_e 95 - \log_e 70}{0{,}49}$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos $\ln 95 \approx 4{,}55$ e $\ln 70 \approx 4{,}25$; logo:

$t \approx \frac{4{,}55 - 4{,}25}{0{,}49} \Rightarrow t \approx 0{,}61$

Concluímos, então, que a pressão 70 mmHg será atingida em 0,61 s.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 A medida α do ângulo determinado pela vareta e pelo raio de Sol é:

$$\frac{1}{50} \cdot 360° = 7{,}2°$$

2 Os ângulos $A\hat{D}B$ e $D\hat{C}S$ tinham a mesma medida porque eram alternos internos.

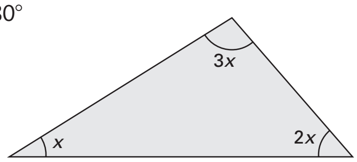
3 Como 1 estádio equivale a 185 metros, temos:

1 estádio ———— 185 metros
250.000 estádios ———— x metros

$x = 250.000 \cdot 185 = 46.250.000$
Portanto, o comprimento da circunferência da Terra obtido por Eratóstenes foi 46.250.000 metros ou 46.250 quilômetros.

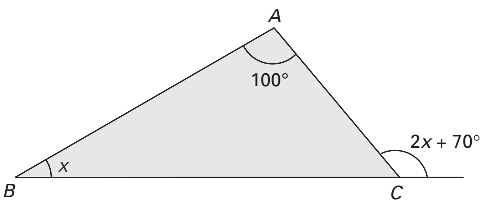
Exercícios propostos

1 $x + 2x + 3x = 180°$
$6x = 180°$
$x = 30°$



Concluímos, então, que os ângulos internos do triângulo medem 30°, 60° e 90°. Portanto, o menor ângulo mede 30°.

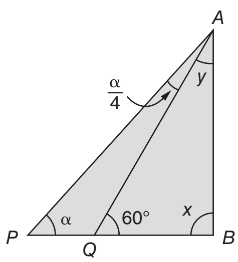
2



$2x + 70° = x + 100° \Rightarrow x = 30°$
Logo, o ângulo externo relativo ao vértice C mede:
$2 \cdot 30° + 70° = 130°$

3 No triângulo QAB, temos:
$y + x + 60° = 180°$
$y = 120° - x \quad \text{(I)}$

No triângulo PAB, temos:
$\alpha + \frac{\alpha}{4} + y + x = 180°$



Substituindo y por $120° - x$, temos:

$\alpha + \frac{\alpha}{4} + 120° - x + x = 180° \Rightarrow 5\alpha = 240°$
$\therefore\ \alpha = 48°$
Assim, $\alpha = 48°$.

4 a) Quadrilátero: $2 \cdot 180° = 360°$;
pentágono: $3 \cdot 180° = 540°$;
hexágono: $4 \cdot 180° = 720°$

b) Espera-se que os alunos percebam que um polígono de n vértices pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos. Como a soma dos ângulos internos em cada um é 180°, concluímos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados (ou n vértices) é: $180 \cdot (n - 2)$

5 (I) $\cong$ (III), pelo caso LLL
(II) $\cong$ (VIII), pelo caso RHC
(IV) $\cong$ (VI), pelo caso LAA_o
(V) $\cong$ (VII), pelo caso LAL

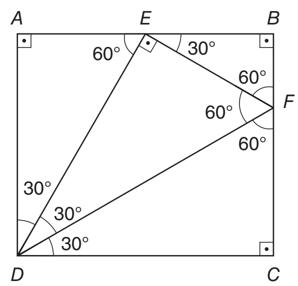
6 a) Temos:
I. $\overline{CB} \cong \overline{ED}$, por hipótese;
II. $B\hat{C}A \cong D\hat{E}A$, pois são ângulos de mesma medida (40°);
III. $B\hat{A}C \cong D\hat{A}E$, pois são opostos pelo vértice.

As condições I, II e III caracterizam o caso LAA_o de congruência de triângulos; logo:

$$\triangle ABC \cong \triangle ADE$$

b) Como os triângulos ABC e ADE são congruentes, temos que os lados correspondentes são congruentes; logo:
$\overline{AB} \cong \overline{AD} \Rightarrow 2x + 20 = 5x + 8$
$\therefore\ x = 4$
Concluímos, então, que: $AD = 2 \cdot 4 + 20 = 28$

7 a) Calculando as medidas dos ângulos internos dos triângulos da figura, obtemos:



Assim,
I. $\overline{DF}$ é lado comum aos triângulos EFD e CFD;
II. $E\hat{D}F \cong C\hat{D}F$, pois ambos têm medidas iguais (30°);
III. $E\hat{F}D \cong C\hat{F}D$, pois ambos têm medidas iguais (60°).

As condições I, II e III caracterizam o caso ALA de congruência de triângulos; logo: $\Delta EFD \cong \Delta CFD$

b) Como os triângulos EFD e CFD são congruentes, temos que os lados correspondentes são congruentes; logo:

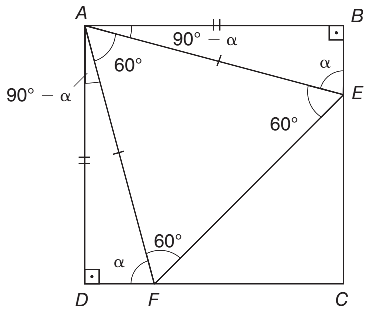
$\overline{EF} \cong \overline{CF} \Rightarrow 4x = \frac{5x}{2} + 9$
$\therefore\ x = 6$
Concluímos, então, que:
$\overline{EF} = 24$ dm

8 Temos:

I. $A\hat{B}E$ e $A\hat{D}F$ são ângulos retos;
II. $\overline{AF} \cong \overline{AE}$, pois o triângulo AEF é equilátero;
III. $\overline{AD} \cong \overline{AB}$, pois o quadrilátero $ABCD$ é quadrado.

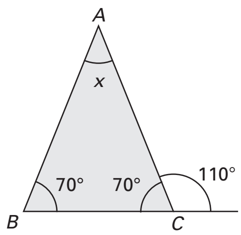
As condições I, II e III caracterizam o caso RHC de congruência de triângulos; logo: $\triangle ABE \cong \triangle ADF$.
Uma consequência dessa congruência é que $m(A\hat{F}D) = m(A\hat{E}B) = \alpha$. Assim, temos:

$$90° - \alpha + 60° + 90° - \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 75°$$



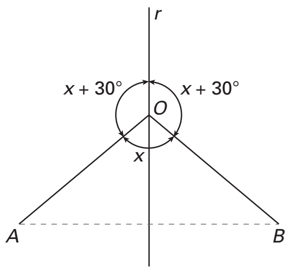
Alternativa **e**.

9 Como o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, temos:
$m(A\hat{B}C) = m(A\hat{C}B)$



Logo:
$x + 70° + 70° = 180° \Rightarrow x = 40°$

10

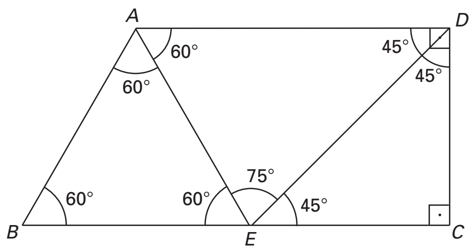


$x + x + 30° + x + 30° = 360° \Rightarrow x = 100°$
No triângulo isósceles OAB, temos:

$$\begin{cases} m(O\hat{B}A) = m(O\hat{A}B) \\ 100° + m(O\hat{A}B) + m(O\hat{B}A) = 180° \end{cases}$$

Logo: $m(O\hat{B}A) = 40°$
Alternativa **a**.

11

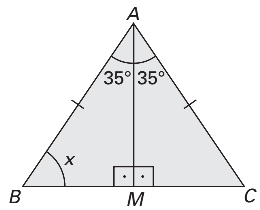


I. Verdadeira, pois $\triangle CDE$ tem dois ângulos internos congruentes;
II. Verdadeira, pois $\triangle ABE$ tem os três ângulos internos congruentes;
III. Verdadeira, pois $B\hat{A}E \cong E\hat{A}D$.

Alternativa **e**.

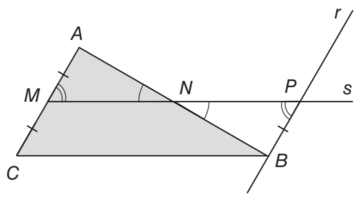
12 O triângulo ABC é isósceles, pois
$m(B\hat{C}A) = m(C\hat{B}A) = 45°$
Logo: $AB = AC = 1.260$ m

13



A mediana $\overline{AM}$ coincide com a bissetriz interna relativa ao vértice A e coincide com a altura relativa a esse vértice; logo:
$m(B\hat{A}M) = 35°$ e $m(A\hat{M}B) = 90°$
Assim, temos: $x + 90° + 35° = 180° \Rightarrow x = 55°$

14 **a)** Em um triângulo ABC, consideremos a reta s que passa pelo ponto médio M do lado $\overline{AC}$ e intercepta o lado $\overline{AB}$ no ponto N; e a reta r que passa pelo vértice B, é paralela ao lado $\overline{AC}$ e intercepta s em P, conforme mostra a figura.

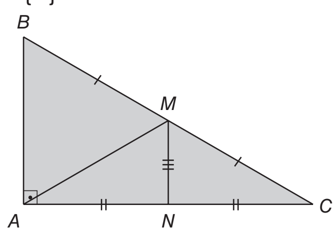


Temos:

I. $\overline{AM} \cong \overline{CM}$, pois M é ponto médio do lado $\overline{AC}$;
II. $A\hat{M}N \cong B\hat{P}N$, pois são ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal;
III. $A\hat{N}M \cong B\hat{N}P$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

As condições I, II e III caracterizam o caso **LAA$_o$** de congruência de triângulos; logo, $\triangle ANM \cong \triangle BNP$. Dessa congruência, temos que $\overline{AN} \cong \overline{BN}$, ou seja, N é ponto médio do lado $\overline{AB}$.

b) Em um triângulo retângulo ABC, seja M o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$ e seja s a reta que passa por M e é paralela ao cateto $\overline{AB}$, obtendo $s \cap \overline{AC} = \{N\}$.



Pela propriedade demonstrada no item **a**, temos que N é ponto médio do cateto $\overline{AC}$. Assim:

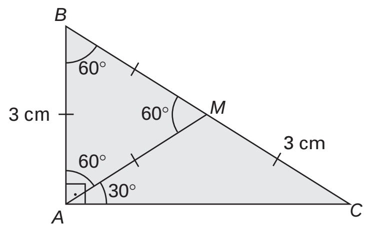
I. $\overline{MN}$ é lado comum aos triângulos AMN e CMN;

II. $M\hat{N}A$ e $M\hat{N}C$ são ângulos retos, pelo fato de $B\hat{A}C$ ser reto e pelos teoremas que relacionam os ângulos formados por duas paralelas e uma transversal;

III. $\overline{AN} \cong \overline{CN}$, pois N é ponto médio de $\overline{AC}$.

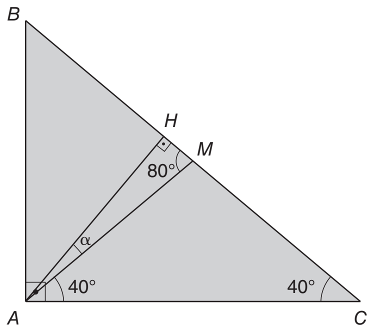
As condições I, II e III caracterizam o caso LAL de congruência de triângulos; logo, os triângulos AMN e CMN são congruentes. Dessa congruência concluímos que $\overline{AM} \cong \overline{CM}$. Logo, a mediana $\overline{AM}$ mede metade da hipotenusa $\overline{BC}$.

15



- $30° + m(M\hat{A}B) = 90° \Rightarrow m(M\hat{A}B) = 60°$ (I)
- $AM = BM = CM \Rightarrow \Delta ABM$ é isósceles de base $\overline{AB}$ e, portanto, $m(M\hat{B}A) = m(M\hat{A}B)$; logo, por (I): $m(M\hat{B}A) = 60°$ (II)
- Do triângulo ABM, temos:
  $m(M\hat{A}B) + m(M\hat{B}A) + m(A\hat{M}B) = 180°$ e, por (I) e (II): $m(A\hat{M}B) = 60°$ (III)
- Por (I), (II) e (III) concluímos que o triângulo ABM é equilátero.
  Como $AB = 3$ cm, temos que o perímetro do triângulo equilátero ABM é 9 cm.

16 Indicando por ABC o triângulo retângulo em A e por α a medida do ângulo agudo formado pela mediana $\overline{AM}$ e pela altura $\overline{AH}$, temos:



- $\overline{AM} \cong \overline{MC} \Rightarrow m(M\hat{A}C) = m(M\hat{C}A) = 40°$
- $H\hat{M}A$ é ângulo externo do triângulo AMC; logo, $m(H\hat{M}A) = 40° + 40° = 80°$
- $A\hat{H}M$ é reto, pois $\overline{AH}$ é altura do triângulo ABC.

Temos, então:

$$\alpha + 80° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 10°$$

Alternativa **a**.

17 Como M é ponto médio da hipotenusa, temos:

$$\frac{2 + x}{3} = \frac{x}{2} - 5 \Rightarrow x = 34$$

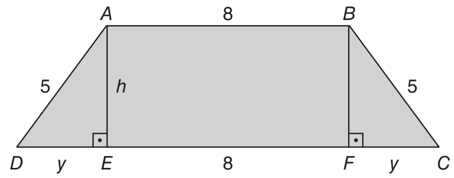
Logo, $AM = MC = \dfrac{34}{2} - 5 \Rightarrow AM = 12$

18 **a)** Sendo x a medida de cada um dos lados não paralelos, temos:

$2x + 8 + 14 = 32 \Rightarrow x = 5$

Logo, cada um dos lados não paralelos mede 5 cm.

b) Sendo $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ alturas do trapézio, temos:



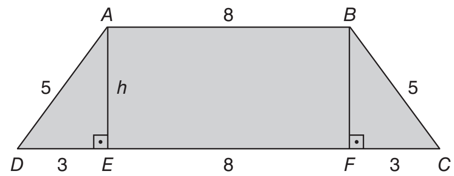
$\triangle ADE \cong \triangle BFC$, pelo caso RHC. Logo, $\overline{DE} \cong \overline{CF}$.

Indicando por y as medidas das projeções $\overline{DE}$ e $\overline{CF}$, temos:

$2y + 8 = 14 \Rightarrow y = 3$

Logo, cada projeção mede 3 cm.

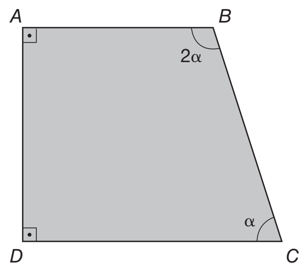
c) Sendo h a medida da altura do trapézio, temos:



$h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$

Logo, a altura mede 4 cm.

19 Indicando por α a medida do menor ângulo interno do trapézio, temos:

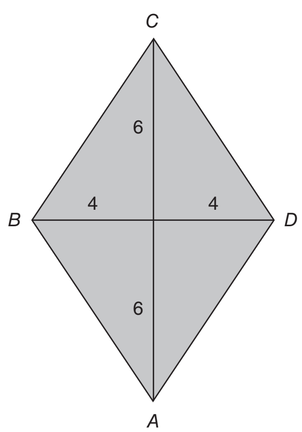


Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°, concluímos:

$90° + 90° + 2\alpha + \alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 60°$

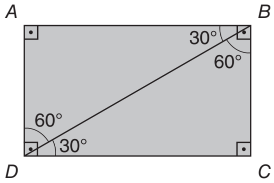
Logo, o menor ângulo interno do trapézio mede 60° e o maior mede 120°.

20 **a)** F, pois, por exemplo, no paralelogramo a seguir, as diagonais não são congruentes.

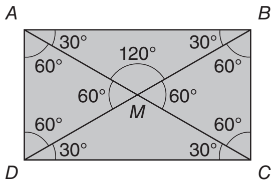


b) V, conforme a propriedade P2 dos quadriláteros notáveis.

c) F, pois, por exemplo, no paralelogramo a seguir a diagonal $\overline{BD}$ não está contida na bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$.

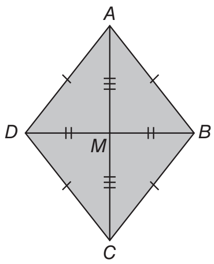


d) F, pois, por exemplo, no retângulo a seguir, os triângulos *ABM* e *BCM* não são congruentes.



e) V, pois, sendo *M* o ponto de intersecção das diagonais de um losango *ABCD*, temos que *M* é ponto médio de cada uma dessas diagonais. Assim, pelo caso LLL de congruência de triângulos, temos:

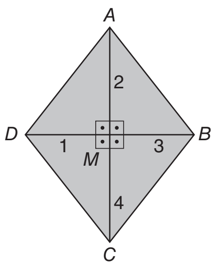
$$\triangle AMB \cong \triangle AMD \cong \triangle CMB \cong \triangle CMD$$



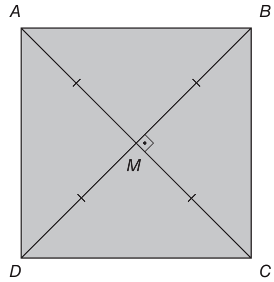
f) V, pois, da congruência entre os quatro triângulos *AMB*, *AMD*, *CMB* e *CMD* do losango do item anterior, temos que os ângulos $A\hat{M}B$, $A\hat{M}D$, $C\hat{M}B$ e $C\hat{M}D$ são congruentes entre si. Sendo α a medida de cada um deles, temos:

$$4\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 90°$$

g) F, como se pode observar no quadrilátero *ABCD* abaixo.



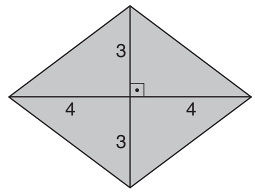
h) V, como mostra a justificativa a seguir: em qualquer retângulo *ABCD* as diagonais são congruentes e o ponto *M* comum a elas é o ponto médio de cada uma. Se além disso elas forem perpendiculares, então pelo caso LAL os triângulos *AMB*, *BMC*, *CMD* e *DMA* serão congruentes entre si.



Logo, $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$.

Como o retângulo *ABCD* tem os quatro lados congruentes entre si, concluímos que *ABCD* é um quadrado.

i) F, pois, por exemplo, no losango a seguir as diagonais têm medidas diferentes.



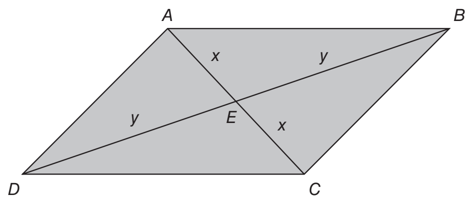
21 Ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, pois são ângulos colaterais internos formados por duas paralelas e uma transversal. Logo:

$2x + 5° + 5x = 180° \Rightarrow x = 25°$

Ângulos opostos de um paralelogramo têm medidas iguais; logo:

$m(A\hat{B}C) = m(A\hat{D}C) = 2 \cdot 25° + 5° \Rightarrow m(A\hat{B}C) = 55°$

22 O ponto *E* é o ponto médio de cada diagonal do paralelogramo *ABCD*. Assim, indicando as medidas das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ por $2x$ e $2y$, respectivamente, temos:

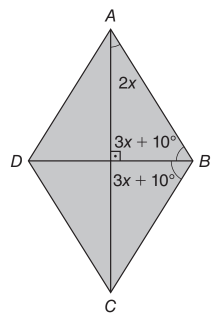


$AC + BD = 28 \Rightarrow 2x + 2y = 28$

$\therefore\ x + y = 14$

Logo, $EC + EB = 14$ cm

23 Como as diagonais do losango são perpendiculares e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos, temos:



$2x + 3x + 10° + 90° = 180° \Rightarrow x = 16°$

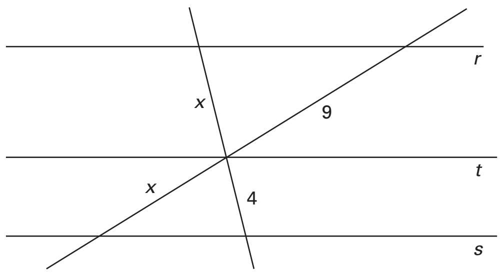
Logo: $m(A\hat{B}C) = 2 \cdot (3 \cdot 16° + 10°) = 116°$

24 a) $\frac{9}{12} = \frac{x}{8} \Rightarrow 12x = 72$
$\therefore\ x = 6$

b) $\frac{12}{x} = \frac{8}{6} \Rightarrow 8x = 72$
$\therefore\ x = 9$

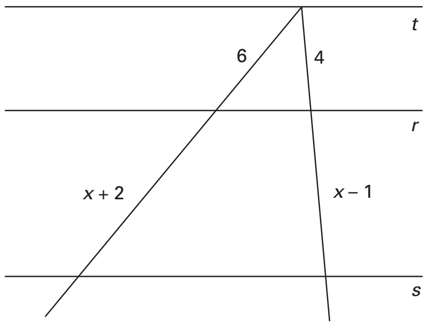
c) $\frac{x+2}{x+1} = \frac{10}{8} \Rightarrow 10x + 10 = 8x + 16$
$\therefore\ x = 3$

d)



$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36$
$\therefore\ x = 6$ ou $x = -6$ (não convém)

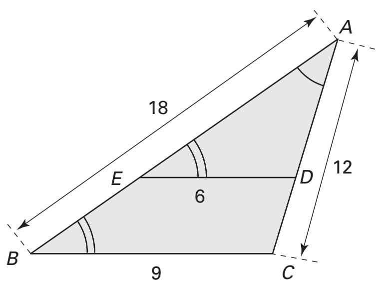
e)



$\frac{6}{x+2} = \frac{4}{x-1} \Rightarrow 4x + 8 = 6x - 6$
$\therefore\ x = 7$

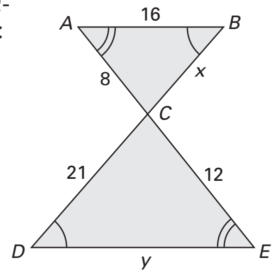
25 $\frac{9}{3} = \frac{12}{FC} \Rightarrow FC = 4$
Logo, a distância FC é 4 km.

26

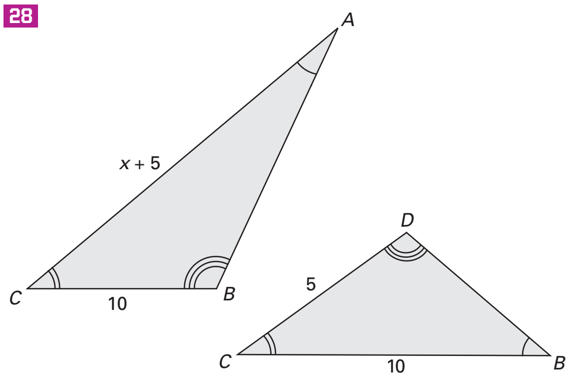


I. $\hat{A}$ é ângulo comum aos triângulos ABC e AED;
II. $A\hat{B}C \cong A\hat{E}D$ (correspondentes).
As condições I e II caracterizam o caso AA; logo:
$\triangle ABC \sim \triangle AED$
Assim, temos:
$\frac{AE}{18} = \frac{AD}{12} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cdot AE = 36$ e $3 \cdot AD = 24$
$\therefore\ AE = 12$ e $AD = 8$

27 I. $A\hat{B}C \Rightarrow C\hat{D}E$ (alternos internos);
II. $B\hat{A}C \Rightarrow C\hat{E}D$ (alternos internos).
As condições I e II caracterizam o caso AA; logo:
$\triangle ABC \sim \triangle EDC$
Assim, temos:
$\frac{x}{21} = \frac{16}{y} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = 42$ e $2y = 48$
$\therefore\ x = 14$ e $y = 24$

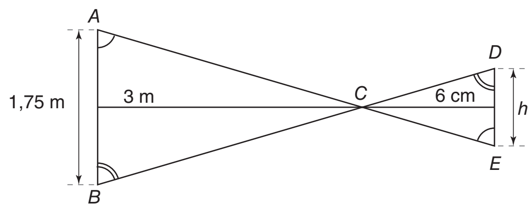


28



$\triangle ABC \sim \triangle BDC \Rightarrow \frac{x+5}{10} = \frac{10}{5}$ e, portanto: $x = 15$
Alternativa **d**.

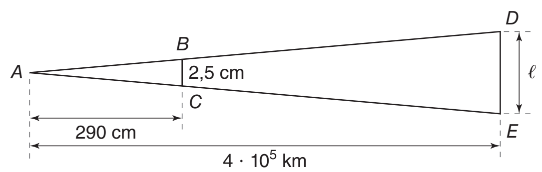
29 Sendo h a altura procurada, temos:
$\triangle ABC \sim \triangle EDC$ e a razão de semelhança é a razão entre dois comprimentos correspondentes quaisquer.



Assim: $\frac{3}{6} = \frac{1{,}75}{h} \Rightarrow h = 3{,}5$
Logo, a altura da imagem projetada é 3,5 cm.

30 Indicando por A o olho do observador e por $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ os diâmetros da moeda e da Lua, respectivamente, temos:

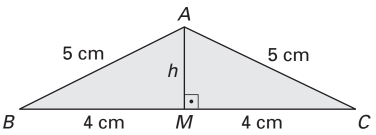
$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{290}{4 \cdot 10^5} = \frac{2{,}5}{\ell} \Rightarrow \ell \approx 3{,}45 \cdot 10^3$



Logo, o diâmetro da Lua encontrado foi, aproximadamente, $3{,}45 \cdot 10^3$ km.

31
- $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow a = 5$
- $5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = 2{,}4$
- $3^2 = 5m \Rightarrow m = 1{,}8$
- $1{,}8 + n = 5 \Rightarrow n = 3{,}2$

32



A altura $\overline{AM}$ coincide com a mediana relativa à base $\overline{BC}$.
Indicando por h a medida dessa altura, temos:
$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h^2 = 9$
$\therefore\ h = 3$
Logo, a altura mede 3 cm.

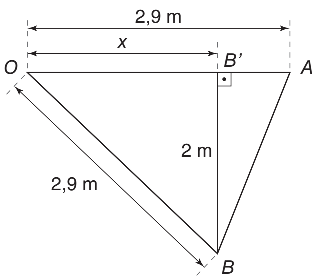
33 Sendo $HC = n$, temos: $12^2 = 5n \Rightarrow n = 28{,}8$

34 $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$

35 $a^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$

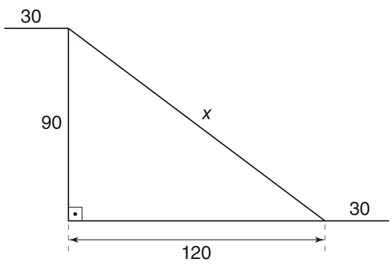
$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

36 Sabendo que OA e OB representam o mesmo cabo, portanto medem 2,9 m, temos:



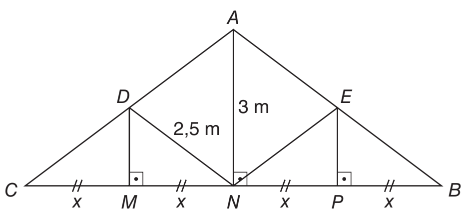
$OB^2 = OB'^2 + BB'^2 \Rightarrow 2{,}9^2 = x^2 + 2^2$
$\therefore\ x = 2{,}1$ m, que equivale a 21 dm.
Logo, a medida horizontal da embarcação ao cais será 21 dm.

37 Sendo x o comprimento, em centímetro, da parte inclinada do corrimão, temos:



$x^2 = 90^2 + 120^2 \Rightarrow x = 150$
Assim, o comprimento total do corrimão é dado por:
(30 + 150 + 30) cm = 210 cm, que equivale a 2,1 m.
Alternativa **d**.

38

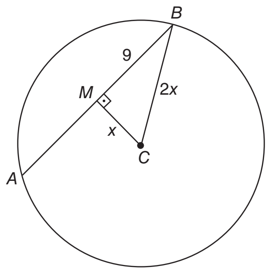


$\triangle DMC \sim \triangle ANC$: $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{DM}{MC} \Rightarrow \dfrac{3}{2x} = \dfrac{DM}{x}$

$\therefore\ DM = 1{,}5$

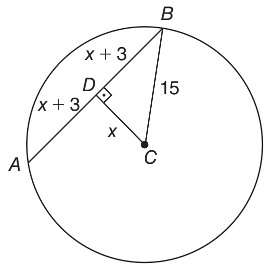
No $\triangle DMN$, o valor de x é dado por:
$(DN)^2 = (DM)^2 + (MN)^2 \Rightarrow 6{,}25 = 2{,}25 + x^2$
$\therefore\ x = 2$
No $\triangle ACN$, temos:
$(AC)^2 = (AN)^2 + (CN)^2 \Rightarrow AC^2 = 3^2 + 4^2$
$\therefore\ AC = 5$
Como a metragem linear l dos caibros é dada por:
$l = AB + BC + AC + AN + DN + DM + EP + EN$,
com $DN = EN$, $DM = EP$ e $AB = AC$, temos:
$l = (5 + 8 + 5 + 3 + 2{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5)$ m $= 29$ m
Logo, a metragem linear de caibro necessária é 29 m.

39 Indicando por x a medida CM, em centímetro, temos que $BC = 2x$. Assim:



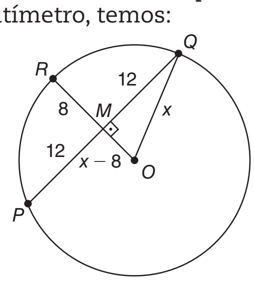
$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \Rightarrow 3x^2 = 81$
$\therefore\ x = 3\sqrt{3}$
Logo, a medida do raio $\overline{BC}$ é $3\sqrt{3}$ cm.

40 Como $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, temos que D é ponto médio de $\overline{AB}$. Indicando por x a medida CD, em centímetro, temos:



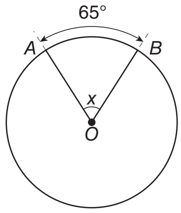
$(x + 3)^2 + x^2 = 15^2 \Rightarrow 2x^2 + 6x - 216 = 0$
$\therefore\ x^2 + 3x - 108 = 0 \Rightarrow x = 9$ ou $x = -12$ (não convém)
Logo, a medida da corda $\overline{AB}$ é dada por:
$AB = 2(9 + 3)$ cm $\Rightarrow AB = 24$ cm

41 A mediatriz $\overleftrightarrow{RM}$ da corda $\overline{PQ}$ passa pelo centro O da circunferência. Indicando por x a medida do raio, em centímetro, temos:



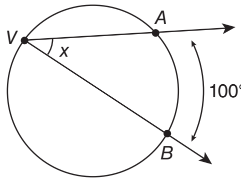
$(x - 8)^2 + 12^2 = x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 16x + 64 + 144 = x^2$
$\therefore\ 16x = 208 \Rightarrow x = 13$
Logo, o raio da circunferência mede 13 cm.

42 a)



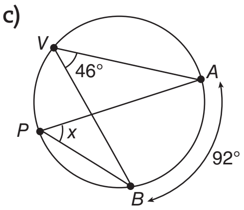
$x = 65°$

b)



$x = \frac{100°}{2} \Rightarrow x = 50°$

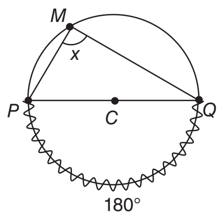
c)



$m(\widehat{AB}) = 2 \cdot m(A\hat{V}B) = 92°$

$x = \frac{92°}{2} \Rightarrow x = 46°$

43 a)



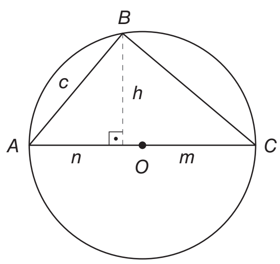
(C é o centro da circunferência)

$x = \frac{180°}{2}$

$x = 90°$

b) triângulo retângulo

44 O triângulo ABC é retângulo em B, pois está inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}$. Assim:



Sabemos que $h = 0{,}48$; então:

$$\begin{cases} m + n = 1 \\ h^2 = m \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 - n & \text{(I)} \\ m \cdot n = 0{,}2304 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(1 - n)n = 0{,}2304 \Rightarrow -n^2 + n - 0{,}2304 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-0{,}2304) = 0{,}0784$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{0{,}0784}}{2 \cdot (-1)}$$

$\therefore\ n = 0{,}64$ ou $n = 0{,}36$

Como $AB < BC$, usamos $n = 0{,}36$.

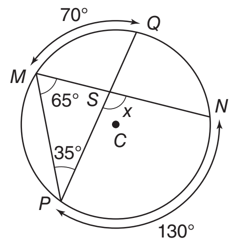
Então:

$c^2 = h^2 + n^2 \Rightarrow c^2 = 0{,}2304 + 0{,}1296$

$\therefore\ c = 0{,}6$

Logo, a distância AB percorrida é 0,6 km.

45



C é o centro da circunferência.

- $M\hat{P}Q$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 70°; logo:

  $m(M\hat{P}Q) = \frac{70°}{2} = 35°$

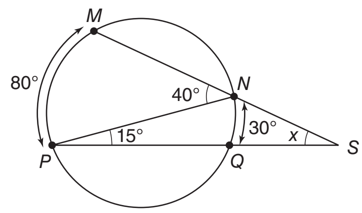
- $P\hat{M}N$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 130°; logo:

  $m(P\hat{M}N) = \frac{130°}{2} = 65°$

- $P\hat{S}N$ é ângulo externo de triângulo MSP; logo:

  $x = 35° + 65° = 100°$

46



- $N\hat{P}Q$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 30°; logo:

  $m(N\hat{P}Q) = \frac{30°}{2} = 15°$

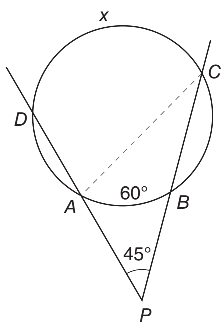
- $P\hat{N}M$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 80°; logo:

  $m(P\hat{N}M) = \frac{80°}{2} = 40°$

- $P\hat{N}M$ é um ângulo externo do triângulo SNP; logo:

  $40° = x + 15° \Rightarrow x = 25°$

47 Indicando por x a medida, em grau, do arco $\widehat{CD}$, esquematizamos:



- $A\hat{C}B$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 60°; logo:

  $m(A\hat{C}B) = \frac{60°}{2} = 30°$

- $C\hat{A}D$ é um ângulo externo do triângulo PAC; logo:

  $m(C\hat{A}D) = m(C\hat{P}A) + m(A\hat{C}P) \Rightarrow$

  $\Rightarrow m(C\hat{A}D) = 45° + 30° = 75°$

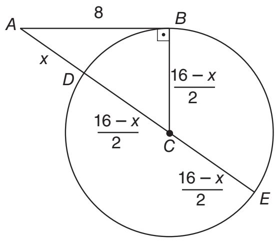
- $C\hat{A}D$ é um ângulo inscrito que determina um arco de medida x; logo:

  $m(C\hat{A}D) = \dfrac{x}{2} \Rightarrow 75° = \dfrac{x}{2}$

  $\therefore\ x = 150°$

Concluímos, então, que do ponto P o maior arco descrito pelo avião, visto sob o ângulo $A\hat{P}B$, mede 150°.

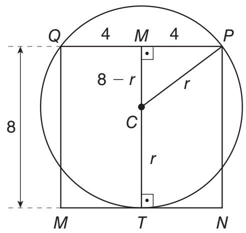
48 O raio $\overline{CB}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Indicando por x a medida AD, em centímetro, temos:



$$8^2 + \left(\frac{16 - x}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{16 - x}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8^2 + \left(\frac{16 - x}{2}\right)^2 = \left(\frac{16 + x}{2}\right)^2$$
$$\therefore\ 64 + \frac{256 - 32x + x^2}{4} = \frac{256 + 32x + x^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 256 + \cancel{256} - 32x + \cancel{x^2} = \cancel{256} + 32x + \cancel{x^2}$$
$$\therefore\ 256 = 64x \Rightarrow x = 4$$

Logo, $AD = 4$ cm

49 Sendo C o centro da circunferência, a reta $\overleftrightarrow{CT}$ é perpendicular a $\overline{QP}$ e, portanto, o ponto M comum a $\overleftrightarrow{CT}$ e $\overline{QP}$ é ponto médio de $\overline{QP}$. Assim, indicando por r a medida do raio, temos:

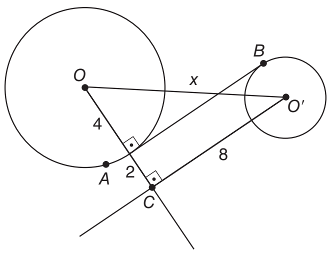


$4^2 + (8 - r)^2 = r^2 = 16 + 64 - 16r + r^2 = r^2$

$\therefore\ 80 = 16r \Rightarrow r = 5$

Logo, o raio da circunferência mede 5 cm.

50 Seja s a reta que passa por O' e é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, com $s \cap \overleftrightarrow{OA} = \{C\}$. Indicando por x a medida OO', em centímetro, temos:



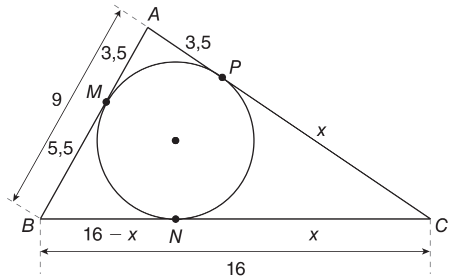
$8^2 + 6^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 100$

$\therefore\ x = 10$

Logo, $OO' = 10$ cm.

Alternativa **d**.

51 Indicando por x a medida PC, temos:



Logo, $16 - x = 5,5 \Rightarrow x = 10,5$

Concluímos, então, que $AC = 3,5 + 10,5 = 14$.

52 $c = 2\pi r \Rightarrow c = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$

$\therefore\ c \approx 2 \cdot 3,14 \Rightarrow c \approx 6,28$

Logo, o comprimento dessa circunferência é 2π m ou, aproximadamente, 6,28 m. Assim, serão necessários 2π m de renda ou 6,28 m, aproximadamente.

53 Indicando por r a medida do raio da roda, a distância d percorrida por ela em uma volta é dada por:

$d = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \text{ m} = 3,14 \text{ m}$

Logo, o número n de voltas necessárias para que essa roda percorra 12,56 km é dado por:

$$n = \frac{12,56 \text{ km}}{3,14 \text{ m}} = \frac{12.560 \text{ m}}{3,14 \text{ m}} \Rightarrow n = 4.000$$

54 a) $c = 2\pi r \Rightarrow c = 2 \cdot \pi \cdot 6.370 = 12.740\pi$ km

$\therefore\ c \approx 12.740 \cdot 3,14 \Rightarrow c \approx 40.003,6$ km

Logo, o comprimento da linha do equador é 12.740π km ou, aproximadamente, 40.003,6 km.

b) Sendo x o comprimento, em quilômetro, do arco percorrido, temos:

$$x = \frac{40.003,6}{360} \cdot 10 \Rightarrow x \approx 1.111,21$$

Logo, o comprimento percorrido pelo navio é, aproximadamente, 1.111,21 km.

55 A área A da sala é dada por:

$A = 63 \cdot (2,8 \cdot 0,25) \text{ m}^2 = 44,1 \text{ m}^2$

Assim, o número x de tacos necessários é dado por:

$44,1 = x\,(0,21 \cdot 0,07) \Rightarrow x = 3.000$

Logo, são necessários 3.000 tacos.

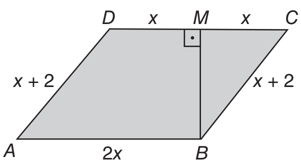
Alternativa **d**.

56 $(3 + x)(4 + x) = 30 \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0$

$\therefore\ x = 2$ ou $x = -9$ (não convém)

Logo, o lado do quadrado mede 2 cm.

57



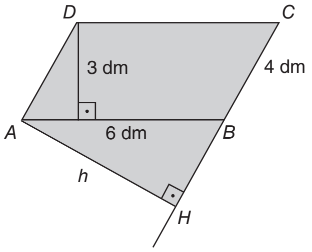
$2x + 2x + x + 2 + x + 2 = 22 \Rightarrow x = 3$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CBM, temos:

$(MB)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow MB = 4$

Logo, a área do paralelogramo, em centímetro quadrado, é $6 \cdot 4$, ou seja, 24 cm^2.

58



Indicando por h a medida dessa altura, temos:
$6 \cdot 3 = 4 \cdot h \Rightarrow h = 4{,}5$
Logo, a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 4,5 dm.

59 **a)** $A = \frac{4 \cdot 6}{2}$ m^2 = 12 m^2

b) Por Pitágoras, obtém-se que a altura relativa à base do triângulo isósceles mede 6 cm; logo:
$A = \frac{16 \cdot 6}{2}$ cm^2 = 48 cm^2

c) A medida da altura do triângulo equilátero é $3\sqrt{3}$ cm; logo:
$A = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$ cm^2 = $9\sqrt{3}$ cm^2

d) Por Pitágoras, obtém-se que $CD = 3$ dm; logo:
$A = \frac{6 \cdot 3}{2}$ dm^2 = 9 dm^2

60 Sendo ℓ a medida, em centímetro, do lado desse triângulo equilátero, temos:
$\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 4 \Rightarrow \ell = \frac{8\sqrt{3}}{3}$
Logo, a área A do triângulo é:
$A = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot 4}{2}$ cm^2 = $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^2

61 A área do quadrado é 64 cm^2 e a área de cada um dos triângulos retângulos isósceles é 2 cm^2; logo, a área A do octógono é dada por:
$A = (64 - 4 \cdot 2)$ cm^2 = 56 cm^2
Alternativa **c**.

62 A área A do terreno, em metro quadrado, é dada por:
$A = (16 \cdot 14) - \left(\frac{9 \cdot 4}{2}\right) - \left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) - \left(\frac{14 \cdot 7}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 224 - 18 - 15 - 49$
$\therefore A = 142$ m^2

63 O quadrado da figura I tem diagonal de 12 cm, isto é, metade do lado do quadrado maior; então, a medida x de seu lado é dada por:
$12^2 = 2 \cdot x^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$
Logo, a área A_I da figura I é dada por:
$A_I = \left(6\sqrt{2}\right)^2$ cm^2 = 72 cm^2
Os triângulos IV e V são congruentes, e a área de cada um é a quarta parte da área de um quadrado com 12 cm de lado; logo:
$A_{IV} = A_V = \frac{12^2}{4}$ cm^2 = 36 cm^2
A área da figura II é dada por:
$A_{IV} + A_I = A_V + A_{II} \Rightarrow A_{II} = 72 + 36 - 36$
$\therefore A_{II} = 72$ cm^2
A figura III é um triângulo retângulo em que cada cateto mede 12 cm; logo: $A_{III} = \frac{12 \cdot 12}{2}$ cm^2 = 72 cm^2

Os triângulos VI e VII são congruentes, e a área de cada um é a quarta parte da área de um quadrado com 24 cm de lado; logo:
$A_{VI} = A_{VII} = \frac{24^2}{4}$ cm^2 = 144 cm^2

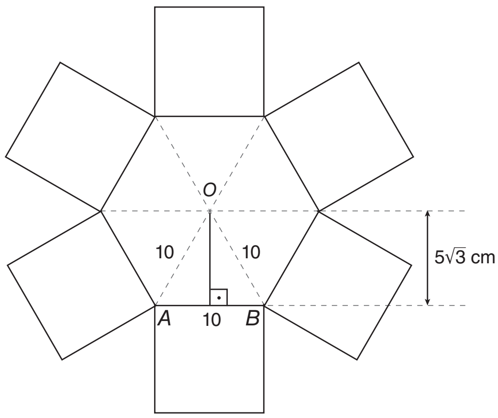
64 A área A de cada face trapezoidal é dada por:
$A = \frac{(20 + 18) \cdot 22}{2}$ cm^2 $\Rightarrow A = 418$ cm^2
As áreas T e F da tampa e do fundo são, respectivamente:
$T = 324$ cm^2 e $F = 400$ cm^2
Logo, a área da caixa é dada por:
$4A + T + F = (4 \cdot 418 + 324 + 400)$ cm^2
$4A + T + F = 2.396$ cm^2

65 Sendo h a medida, em centímetro, da altura relativa do lado $\overline{DC}$ do triângulo BCD, temos:
$\frac{4h}{2} = 6 \Rightarrow h = 3$
Observando que h também é altura do trapézio, concluímos que a área A pedida é dada por:
$A = \frac{(5 + 4) \cdot 3}{2}$ cm^2 = 13,5 cm^2
Alternativa **c**.

66 As diagonais de um losango interceptam-se perpendicularmente no ponto médio de cada uma. Assim, por Pitágoras, concluímos que a outra diagonal mede 6 cm. Logo, a área A do losango é dada por:
$A = \frac{8 \cdot 6}{2}$ cm^2 = 24 cm^2

67 Traçando a diagonal menor, observa-se que o losango é formado por dois triângulos equiláteros de lado 4 cm. Logo, a área A do losango é dada por:
$A = 2 \cdot \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$ cm^2 = $8\sqrt{3}$ cm^2
Alternativa **a**.

68



A área A_H do hexágono é igual ao sêxtuplo da área do triângulo OAB, ou seja:
$A_H = 6 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2}$ cm^2 = $150\sqrt{3}$ cm^2
A área A_Q de cada quadrado é dada por:
$A_Q = 10^2$ cm^2 = 100 cm^2
Temos, portanto, que a área A da figura é dada por:
$A = \left(150\sqrt{3} + 600\right)$ cm^2 = $150\left(\sqrt{3} + 4\right)$ cm^2

69 **a)** A medida r do raio do círculo inscrito no quadrado é igual à metade da medida do lado desse quadrado; logo, $r = 3$ cm. Assim, a área A do círculo é dada por:

$A = \pi \cdot 3^2 \text{ cm}^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

b) A medida da diagonal do quadrado é $6\sqrt{2}$ cm; logo, a medida do raio do círculo é $3\sqrt{2}$ cm. Assim, a área A do círculo é:

$A = \pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 \text{cm}^2 \Rightarrow A = 18\pi \text{ cm}^2$

70 A área A da janela, em centímetro quadrado, é dada por:

$$A = \frac{\pi \cdot 60^2}{2} + 2 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 60 \Rightarrow A = 1.800(\pi + 12)$$

$\therefore A = 27.252$

Logo, a quantidade de madeira é, aproximadamente, 27.252 cm^2, o que equivale a 2,7252 m^2.

71 A área A do terreno, em metro quadrado, é dada por:

$A = \pi \cdot 500^2 \Rightarrow A = 250.000\pi$

Assim, a quantidade x de litros necessária para irrigar o terreno é dada pela regra de três:

Terreno (m^2)		Quantidade de água (litros)
1	———	5
250.000π	———	x

$\therefore x = 1.250.000\pi$ L

Como 1.000 litros equivalem a 1 m^3, serão necessários 1.250π m^3 de água ou, aproximadamente, 3.925 m^3.

72 Os raios das tampas grandes, médias e pequenas são iguais a 1 m, $\frac{1}{2}$ m e $\frac{1}{4}$ m, respectivamente.

- Para cada chapa da qual é retirada a tampa grande, a área A da sobra é dada por:

  $A_g = (2^2 - \pi \cdot 1^2)\text{ m}^2 \Rightarrow A_g = (4 - \pi)\text{ m}^2$
- Para cada chapa da qual são retiradas as tampas médias, a área A_m da sobra é dada por:

  $$A_m = \left[2^2 - 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\text{m}^2 \Rightarrow A_m = (4 - \pi)\text{ m}^2$$
- Para cada chapa da qual são retiradas as tampas pequenas, a área A_p da sobra é dada por:

  $$A_p = \left[2^2 - 16 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\text{m}^2 \Rightarrow A_p = (4 - \pi)\text{ m}^2$$

  Como $A_g = A_m = A_p$, concluímos que as três entidades recebem quantidades iguais de material. Alternativa **e**.

73 Indicando por A_S a área do setor, temos:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 6^2$
80	———	A_s

$\Rightarrow A_s = 8\pi \text{ cm}^2$

74 **a)** Área A_I do setor I:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 6^2$
100	———	A_I

$$\therefore A_I = \frac{100 \cdot 36\pi}{360}\text{ cm}^2 = 10\pi \text{ cm}^2$$

b) Ângulo central do setor III:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 36$
α	———	8π

$$\therefore \alpha = \frac{360 \cdot 8\pi}{36\pi} = 80°$$

c) Ângulo central do setor II:

Ângulo central (grau)		Comprimento do arco (cm)
360	———	$2\pi \cdot 6$
β	———	$\frac{13\pi}{3}$

$$\therefore \beta = \frac{360 \cdot \frac{13\pi}{3}}{12\pi} = 130°$$

d) Ângulo central, γ, do setor IV:

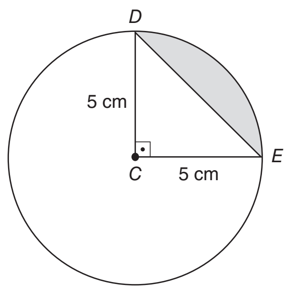
$100° + 80° + 130° + \gamma = 360° \Rightarrow \gamma = 50°$

Indicando por A_{IV} a área do setor IV, temos:

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 36$
50	———	A_{IV}

$$\therefore A_{IV} = \frac{50 \cdot 36\pi}{360}\text{ cm}^2 = 5\pi \text{ cm}^2$$

75



As áreas A_{set} e A_t do setor circular CDE e do triângulo CDE, respectivamente, são dadas por:

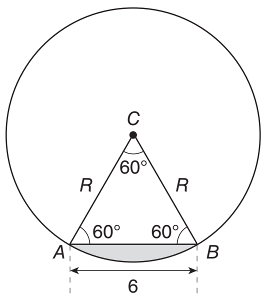
$$A_{set} = \frac{\pi \cdot 5^2}{4}\text{ cm}^2 = \frac{25\pi}{4}\text{ cm}^2 \text{ e}$$

$$A_t = \frac{5 \cdot 5}{2}\text{ cm}^2 = \frac{25}{2}\text{ cm}^2$$

Logo, a área $A_{seg} = A_{set} - A_t = \left(\frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2}\right)\text{cm}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{seg} = \frac{25(\pi - 2)}{4}\text{ cm}^2$$

76 O arco menor $\widehat{AB}$ mede 60°, portanto o ângulo central $A\hat{C}B$ mede 60°. Sendo R a medida do raio da circunferência, temos:



Como ACB é um triângulo equilátero, temos:

$R = 6$ cm

Calculamos:

- A área A_s do setor circular ACB.

Ângulo central (grau)		Área (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 6^2$
60	———	A_s

$\Rightarrow A_s = 6\pi \text{ cm}^2$

- A área A_t do triângulo equilátero ACB.

$$A_t = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Logo, a área A_{seg} do segmento circular colorido é dada por:

$A_{seg} = A_s - A_t \Rightarrow A_{seg} = (6\pi - 9\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

$\therefore A_{seg} = 3(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

77 Sendo r e R as medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado, respectivamente, temos:

$r = 2$ cm e $R = 2\sqrt{2}$ cm

Logo, a área A da coroa circular é dada por:

$A = \pi\left[(2\sqrt{2})^2 - 2^2\right] \text{ cm}^2 = 4\pi \text{ cm}^2$

78 $\pi(5^2 - 4^2) = \pi r^2 \Rightarrow r = 3$

Logo, a medida r do raio da circunferência menor é 3 cm.

79 Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, e a razão de semelhança, do maior para o menor, é $\frac{2}{1}$.

Assim, concluímos:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

Alternativa **a**.

80 Os triângulos CDP e APB são semelhantes, e a razão de semelhança, do maior para o menor, é $\frac{3}{1}$.

Assim, indicando por S a área do triângulo CDP, temos:

$$\frac{S}{6} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 \Rightarrow S = 54$$

Logo, a área do triângulo CDP é 54 cm^2.

81 A razão de semelhança do mapa para a região é $\frac{2 \text{ cm}}{5 \text{ km}}$. Indicando por A a área da região real, em quilômetro quadrado, temos:

$$\frac{9}{A} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow A = 56{,}25 \text{ km}^2$$

<u>Outro modo</u>

Cada centímetro no mapa representa 2,5 km da região real. Logo, o quadrado de lado 3 cm do mapa representa um quadrado de lado 7,5 km da região real. Assim, a área pedida é $(7{,}5)^2$ km^2, ou seja, 56,25 km^2.

Alternativa **b**.

82 A razão de semelhança da foto para a região real é $\frac{3 \text{ cm}}{150 \text{ m}}$. Indicando por A a área da região, em metro quadrado, temos:

$$\frac{18}{A} = \left(\frac{3}{150}\right)^2 \Rightarrow A = 45.000 \text{ m}^2$$

Logo, a área da região fotografada é 45.000 m^2.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $95° + 2x + 10° + x = 180° \Rightarrow 3x = 75°$

$\therefore x = 25°$

b) $x + 90° = 40 + 90°$

$\therefore x = 40°$

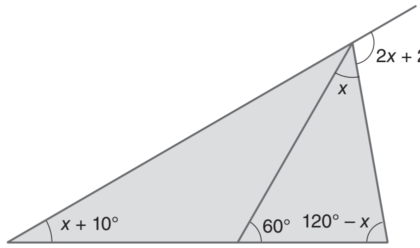
c) $2x + 25° = 65° + x \Rightarrow 2x - x = 40°$

$\therefore x = 40°$

d) $x - 10° + x + 30° = 110° \Rightarrow 2x = 90°$

$\therefore x = 45°$

e)



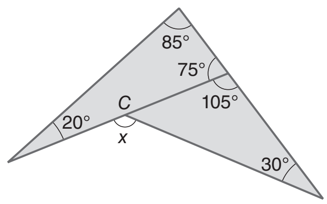
$2x + 20° = x + 10° + 120° - x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 55°$

f) $3x + 90° + 30° = 180° \Rightarrow 3x = 60°$

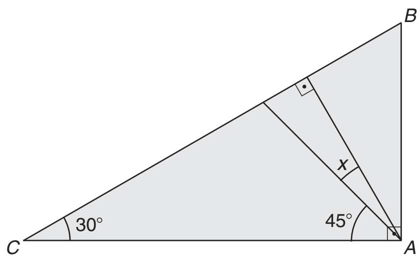
$\therefore x = 20°$

g)



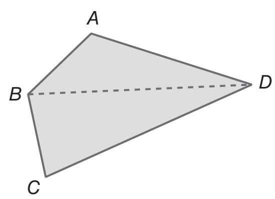
$x = 105° + 30° = 135°$

2 Sendo x a medida do ângulo pedido, temos:



$x + 45° + 30° + 90° = 180° \Rightarrow x = 15°$

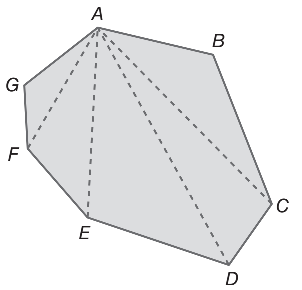
3 a) Uma diagonal de um quadrilátero convexo separa-o em dois triângulos:



Logo, a soma S_i dos ângulos internos do quadrilátero é igual à soma dos ângulos internos de dois triângulos, isto é:

$S_i = 180° \cdot 2 = 360°$

b) As diagonais que partem de um mesmo vértice de um heptágono convexo separam-no em cinco triângulos:



Logo, a soma S_i dos ângulos internos do heptágono é igual à soma dos ângulos internos de cinco triângulos, isto é:
$S_i = 180° \cdot 5 = 900°$

c) Raciocinando como nos itens **a** e **b**, temos:
$S_i = 180° \cdot 7 = 1.260°$

d) Raciocinando como nos itens **a** e **b**, temos:
$S_i = 180° \cdot 28 = 5.040°$

4 No triângulo, temos:
$E\hat{C}F + 30° + 90° = 180°$
$\therefore\ E\hat{C}F = 60°$
Como $E\hat{C}F \cong D\hat{C}B$, então, no quadrilátero, temos:
$150° + 90° + x + D\hat{C}B = 360° \Rightarrow x = 120° - 60°$
$\therefore\ x = 60°$

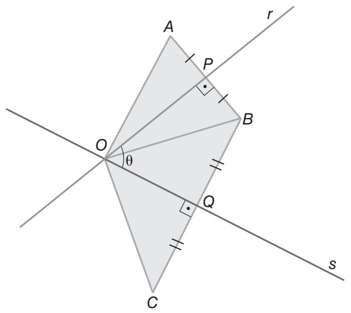
5 **a)** Temos:
I. $A\hat{E}D$ e $B\hat{F}C$ são ângulos retos, por hipótese;
II. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, por hipótese;
III. $A\hat{D}E \cong B\hat{C}F$, por hipótese.
As condições I, II e III caracterizam o caso LAA_o de congruência de triângulos; logo: $\triangle ADE \cong \triangle BCF$

b) Como os triângulos *ADE* e *BCF* são congruentes, temos que seus lados correspondentes são congruentes; logo:
$3x + 5 = x + 9 \Rightarrow x = 2$
Portanto: $AE = 3 \cdot 2 + 5 = 11$

6 Como o triângulo *ABC* é equilátero, temos:
- $C\hat{A}B \cong A\hat{B}C \cong B\hat{C}A$
- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$
- $\overline{AE} \cong \overline{BF} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{CF} \cong \overline{DA} \cong \overline{EB}$

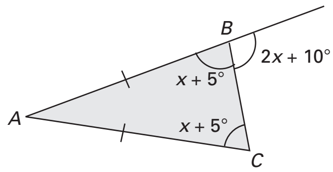
Assim, pelo caso *LAL* de congruência de triângulos, temos:
$$\triangle ADE \cong \triangle BEF \cong \triangle CFD$$
Dessa congruência, concluímos:
$\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$; portanto, o triângulo *DEF* é equilátero.

7 Traçando os segmentos $\overline{AO}$, $\overline{CO}$ e $\overline{BO}$, temos:



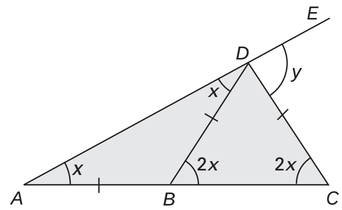
Pelo caso *LAL* de congruência de triângulos, concluímos que $\triangle AOP \cong \triangle BOP$ e $\triangle BOQ \cong \triangle COQ$. Assim:
$$\begin{cases} m(A\hat{O}P) = m(B\hat{O}P) & \text{(I)} \\ m(C\hat{O}Q) = m(B\hat{O}Q) & \text{(II)} \end{cases}$$
Adicionando, membro a membro, I e II, obtemos: $m(A\hat{O}P) + m(C\hat{O}Q) = m(B\hat{O}P) + m(B\hat{O}Q) \Rightarrow$
$\Rightarrow m(A\hat{O}P) + m(C\hat{O}Q) = \theta$
Concluímos, então, que:
$m(A\hat{O}C) = 2\theta$
Alternativa **a**.

8



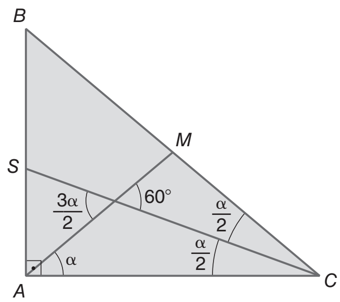
$2x + 10° + x + 5° = 180° \Rightarrow x = 55°$
Logo, o ângulo $\hat{A}$ mede 60°.

9



$E\hat{D}C$ é ângulo externo do triângulo *ACD*. Logo:
$y = x + 2x \Rightarrow y = 3x$
Alternativa **a**.

10 Sendo $\overline{AM}$ a mediana relativa à hipotenusa, temos que o triângulo *AMC* é isósceles; portanto, $M\hat{A}C \cong M\hat{C}A$. Indicando por α a medida do ângulo $A\hat{C}B$ e por $\overline{CS}$ a bissetriz interna relativa ao vértice *C*, temos:



Logo, $\dfrac{3\alpha}{2} = 60° \Rightarrow \alpha = 40°$

Concluímos, então, que $m(A\hat{C}B) = 40°$

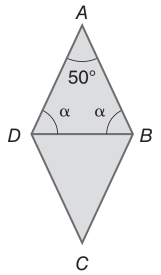
11 Temos:
I. $\overline{AE} \cong \overline{CE}$, pois *E* é ponto médio do lado $\overline{AC}$;
II. $A\hat{E}F \cong B\hat{G}F$, pois são ângulos alternos internos formados por duas paralelas e uma transversal;
III. $A\hat{F}E \cong B\hat{F}G$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

As condições I, II e III caracterizam o caso $\mathbf{LAA_o}$ de congruência de triângulos; logo, $\triangle AFE \cong \triangle BFG$. Dessa congruência, temos que $\overline{AF} \cong \overline{BF}$ e $\overline{EF} \cong \overline{GF}$, ou seja, *F* é ponto médio de cada um dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{EG}$. Como $AB = 8$ cm e $EG = CB = 10$ cm, concluímos que: $AF = 4$ cm e $EF = 5$ cm.

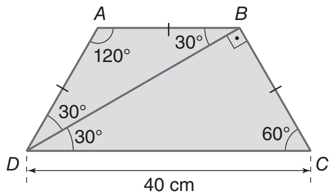
12 Como os lados do losango são congruentes, temos que o triângulo ABD é isósceles. Indicando por α a medida de cada um dos ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{D}B$, temos:

$\alpha + \alpha + 50° = 180° \Rightarrow \alpha = 65°$

Logo, o ângulo que a diagonal $\overline{BD}$ forma com o lado $\overline{AD}$ mede 65°.



13 Traçando a diagonal $\overline{DB}$, obtemos o triângulo DBC, retângulo em B:



Logo, a distância x do vértice B ao ponto médio de $\overline{DC}$ é a medida da mediana relativa à hipotenusa do triângulo CBD, isto é:

$$x = \frac{DC}{2} = \frac{40}{2} \text{ cm} \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

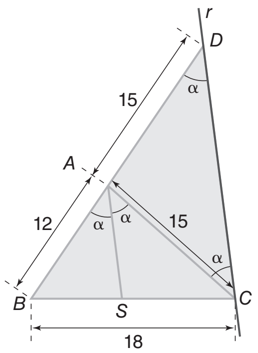
14 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{EH}{EF} \Rightarrow \dfrac{24}{AB} = \dfrac{18}{3} \quad \therefore\ AB = 4 \text{ cm}$

$\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{EH}{FG} \Rightarrow \dfrac{24}{BC} = \dfrac{18}{9} \quad \therefore\ BC = 12 \text{ cm}$

$\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{EH}{GH} \Rightarrow \dfrac{24}{CD} = \dfrac{18}{6} \quad \therefore\ CD = 8 \text{ cm}$

15 a) As retas paralelas $\overleftrightarrow{AS}$ e r formam com a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ os ângulos alternos internos $S\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$ e os ângulos correspondentes $B\hat{A}S$ e $B\hat{D}C$; logo, $S\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ e $B\hat{A}S \cong B\hat{D}C$.

Assim, concluímos que $A\hat{D}C \cong A\hat{C}D$, portanto o triângulo ACD é isósceles:



b) Pelo teorema de Tales, temos:

$\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BC}{BS} \Rightarrow \dfrac{27}{12} = \dfrac{18}{BS} \quad \therefore\ BS = 8$

$CS = BC - BS \Rightarrow CS = 18 - 8 = 10$

16 a) Temos:

I. $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$, pois P e M são os pontos médios dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente;

II. $P\hat{A}M \cong C\hat{A}B$, pois são ângulos coincidentes. As condições I e II caracterizam o caso LAL de semelhança de triângulos; logo: $\triangle AMP \sim \triangle ABC$

b) Da semelhança entre os triângulos AMP e ABC, temos que $A\hat{M}P \cong A\hat{B}C$. Assim, as retas coplanares $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{CB}$ formam com a transversal $\overleftrightarrow{AB}$ ângulos correspondentes congruentes; logo, $\overleftrightarrow{PM}$ é paralela a $\overleftrightarrow{CB}$.

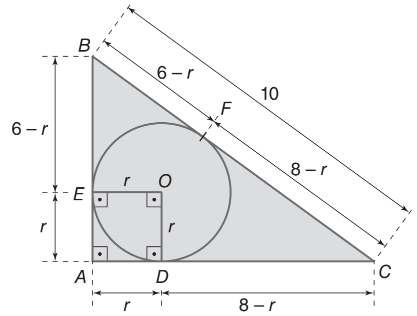
c) A medida da base média $\overline{PM}$ é metade da medida do lado paralelo $\overline{CB}$, pois a razão de semelhança do triângulo AMP para o triângulo ABC é $\frac{1}{2}$.

17 A diagonal do quadrado, cuja medida é $5\sqrt{2}$ cm, é um dos lados do triângulo equilátero.

Logo, a medida h da altura desse triângulo é:

$h = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \text{ cm}$

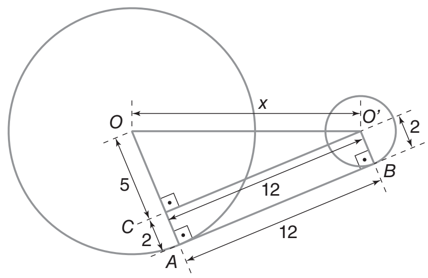
18 Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $BC = 10$ cm. Indicando por r a medida do raio, temos:



Logo, $6 - r + 8 - r = 10 \Rightarrow r = 2$

Concluímos, então, que o raio da circunferência mede 2 cm.

19 Traçando por O' a reta r paralela a $\overline{AB}$, com $r \cap \overline{OA} = \{C\}$, e indicando por x a medida OO', temos:



$x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x = 13$

Logo, a distância entre os centros O e O' é 13 cm.

20 a) A medida r do raio da circunferência inserida no quadrado é metade da medida do lado do quadrado:

$$r = \frac{6}{2} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$$

Logo, o comprimento c da circunferência é:

$$c = 2\pi \cdot 3 \text{ cm} = 6\pi \text{ cm}$$

ou, aproximadamente, 18,84 cm.

b) A medida r do raio da circunferência inscrita ao quadrado é metade da medida da diagonal do quadrado:

$$r = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Logo, o comprimento c da circunferência é:

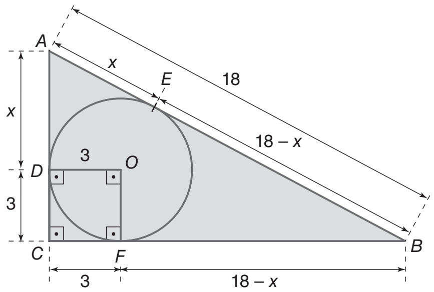
$$c = 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 5\sqrt{2}\pi \text{ cm}$$

ou, aproximadamente, 22 cm.

c) A medida r do raio da circunferência circunscrita ao hexágono regular é igual à medida do lado do hexágono:
$r = 10$ cm
Logo, o comprimento c da circunferência é:
$c = 2\pi \cdot 10 \text{ cm} = 20\pi \text{ cm}$
ou, aproximadamente, 62,8 cm.

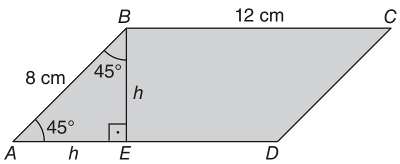
21 a) A medida r do raio da circunferência circunscrita ao triângulo é metade da medida da hipotenusa:
$$r = \frac{18}{2} \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$
Logo, o comprimento c dessa circunferência é:
$$c = 2\pi \cdot 9 \text{ cm} = 18\pi \text{ cm}$$
Concluímos, então, que o comprimento da circunferência circunscrita ao triângulo é 18π cm ou, aproximadamente, 56,52 cm.

b) Sejam D, E e F os pontos de tangência sobre os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$, respectivamente. Indicando por x a medida AE, temos:



Logo, o perímetro p do triângulo é dado por:
$p = 18 + x + 3 + 3 + 18 - x$
$\therefore\ p = 42$ cm

22

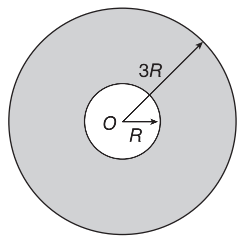


Os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$ são suplementares; logo: $m(B\hat{A}D) = 45°$
Considerando a altura $\overline{BE}$, de medida h, temos que o triângulo retângulo BEA é isósceles, pois tem dois ângulos de mesma medida; logo: $BE = AE = h$
Temos então:
$h^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$
Concluímos, assim, que a área A do paralelogramo é dada por:
$A = (12 \cdot 4\sqrt{2}) \text{ cm}^2 = 48\sqrt{2} \text{ cm}^2$

23 $\text{Área}_{(EMC)} = \text{Área}_{(ABCD)} \Rightarrow \dfrac{\frac{x}{2} \cdot (x + 4)}{2} = x^2$
$\therefore\ x = \dfrac{4}{3}$ ou $x = 0$ (não convém)
Alternativa **d**.

24 Sendo ℓ a medida do lado do quadrado, temos:
$\ell\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 3$
Assim, a medida a do lado do hexágono é $a = 2$ m e, portanto, a área A desse hexágono é dada por:
$$A = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ m}^2 = 6\sqrt{3} \text{ m}^2$$

25



$\pi[(3R)^2 - R^2] = 16\pi \Rightarrow R = \sqrt{2}$
Logo, o raio externo mede $3\sqrt{2}$ cm.

26 A área A_t do triângulo equilátero é dada por:
$$A_t = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$$
A área A_s do setor circular APQ é a sexta parte da área de um círculo de raio 3 cm.
$$A_s = \frac{\pi \cdot 3^2}{6} \text{ cm}^2 = \frac{3\pi}{2} \text{ cm}^2$$
Logo, a área A da região pedida é dada por:
$$A = A_t - A_s \Rightarrow A = \frac{3(6\sqrt{3} - \pi)}{2} \text{ cm}^2$$

27 A área A_h do hexágono regular é dada por:
$$A_h = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_h = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$
A área A_s obtida pela soma das áreas dos setores circulares FAE e CBD equivale a $\frac{2}{3}$ da área de um círculo de raio 4 cm:
$$A_s = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_s = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^2$$
Logo, a área A da região pedida é dada por:
$$A = A_h - A_s \Rightarrow A = \frac{8(9\sqrt{3} - 4\pi)}{3} \text{ cm}^2$$

28 Sejam A', B', C' e D' os simétricos de M em relação aos pontos A, B, C e D, respectivamente. Os retângulos $A'B'C'D'$ e $ABCD$ são semelhantes, e a razão de semelhança do maior para o menor é $\frac{2}{1}$.
Assim, indicando por S a área do retângulo maior, temos:
$$\frac{S}{45} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \Rightarrow S = 180$$
Logo, a área do retângulo $A'B'C'D'$ é 180 dm^2.

29 Dois octógonos regulares são semelhantes. Assim, indicando por ℓ a medida de um lado do octógono menor, temos:
$$\frac{72(1 + \sqrt{2})}{8(1 + \sqrt{2})} = \left(\frac{48}{8\ell}\right)^2 \Rightarrow 9 = \left(\frac{6}{\ell}\right)^2$$
$$\therefore\ 3 = \frac{6}{\ell} \Rightarrow \ell = 2$$
Logo, a medida do lado menor do octógono é 2 cm.

30 Os triângulos ABC e AED são semelhantes, e a razão de semelhança do maior para o menor é $\frac{8}{2} = \frac{4}{1}$. Assim, indicando por S_{ABC}, S_{AED} e S_{BCDE} as áreas dos triângulos ABC e AED e do trapézio $BCDE$, respectivamente, temos:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AED}} = 4^2 \Rightarrow \frac{S_{AED} + S_{BCDE}}{S_{AED}} = 16$$

$$\therefore \frac{S_{AED}}{S_{AED}} + \frac{S_{BCDE}}{S_{AED}} = 16 \Rightarrow 1 + \frac{S_{BCDE}}{S_{AED}} = 16$$

$$\therefore \frac{S_{BCDE}}{S_{AED}} = 15 \Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{BCDE}} = \frac{1}{15}$$

Logo, a razão entre as áreas do triângulo AED e do trapézio $BCDE$, nessa ordem, é $\frac{1}{15}$.

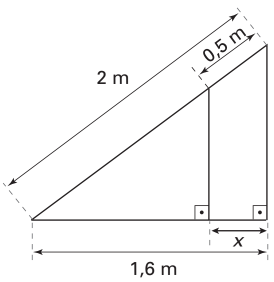
Exercícios contextualizados

31 $\frac{MP}{NP} = \frac{M'P'}{N'P'} \Rightarrow \frac{100 - 0}{75 - 0} = \frac{212 - 32}{x - 32}$

$\therefore x = 167$

Logo, 75 °C equivale a 167 °F.

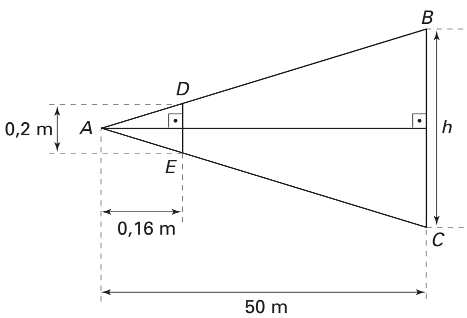
32



$\frac{2}{0,5} = \frac{1,6}{x} \Rightarrow x = 0,4$

Logo, a sombra percorreu 0,4 m.

33



$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{0,2}{h} = \frac{0,16}{50}$

$\therefore h = 62,5$

Logo, a altura do prédio é 62,5 m.

34 $\triangle POA \sim \triangle PBC$

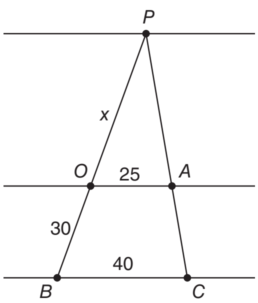
Sabendo que $BP = OP + BO$, temos:

$\frac{BP}{BC} = \frac{OP}{OA}$

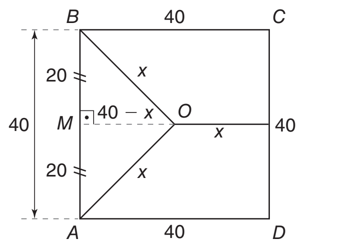
$\frac{30 + x}{40} = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 50$

Logo, a distância de O até P é 50 m.

Alternativa **e**.



35 Sendo O o ponto onde deve ser construída a estação e x a distância em quilômetro do ponto O à reta $\overline{DC}$ e aos vértices A e B, temos:



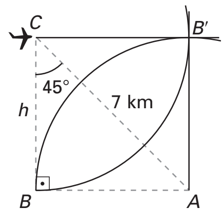
No $\triangle AOM$, temos:

$x^2 = 20^2 + (40 - x)^2 \Rightarrow x = 25$

Logo, a estação deve ser construída perpendicularmente à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km da estrada.

Alternativa **c**.

36



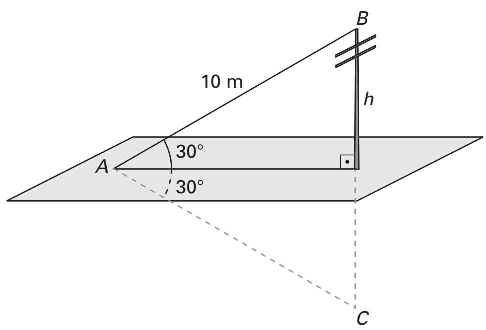
$ABCB'$ é um quadrado.

Indicando por h a altura em que se encontra o avião, temos:

$h\sqrt{2} = 7 \Rightarrow h = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} = 3,5\sqrt{2}$

Concluímos, então, que o avião está à altura de $3,5\sqrt{2}$ km ou, aproximadamente, 4,9 km.

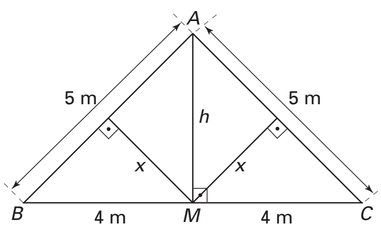
37



O triângulo ABC é equilátero cujo lado mede 10 m.

Logo, $h = 5$ m.

38



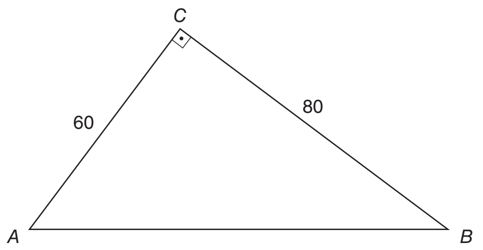
$h^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = 3$

$5x = 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 2,4$

Logo, o total de metros de viga usados nessa peça foi:

$5 + 5 + 4 + 4 + 2,4 + 2,4 + 3$, ou seja, 25,8 m

39



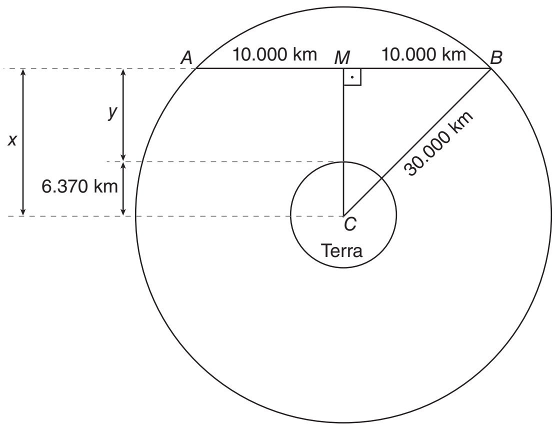
$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 60^2 + 80^2$

$\therefore AB = 100$

Logo, o comprimento do túnel será 100 m.

Alternativa **b**.

40 Sendo x a distância da corda ao centro da Terra e y a distância da corda à superfície terrestre, temos:



a) $x^2 + 10.000^2 = 30.000^2 \Rightarrow x^2 + 10^8 = 9 \cdot 10^8$

$\therefore x^2 = 8 \cdot 10^8$

$\therefore x = 2 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} = 20.000\sqrt{2}$

Logo, a menor distância entre o asteroide e o centro da Terra é $20.000\sqrt{2}$ km.

b) $y = (20.000\sqrt{2} - 6.370)$ km $= 21.630$ km

41 A distância percorrida é, aproximadamente, o comprimento C de uma semicircunferência de raio 6.370 km, isto é:

$C \approx 3{,}14 \cdot 6.370$ km $= 20.001{,}8$ km

Logo, o tempo t necessário para percorrer essa distância a 800 km/h é:

$t = \dfrac{20.001{,}8}{800}$ h ≈ 25 h

Alternativa **c**.

42 Sendo r a medida do raio de cada pneu, sob a especificação do manual do proprietário, a medida do raio de cada pneu, fora da especificação, de acordo com o enunciado, será $1{,}01r$. Logo, a distância percorrida em cada volta dos pneus, fora de especificação, será: $2\pi \cdot 1{,}01r$, ou seja, $2\pi r + 0{,}01 \cdot 2\pi r$

Note, portanto, que a distância percorrida em uma hora será 1% maior que a registrada no velocímetro. Assim, concluímos que, quando o velocímetro registrar 120 km/h, a velocidade real do veículo será $(120 + 0{,}01 \cdot 120)$ km/h, ou seja, 121,2 km/h.

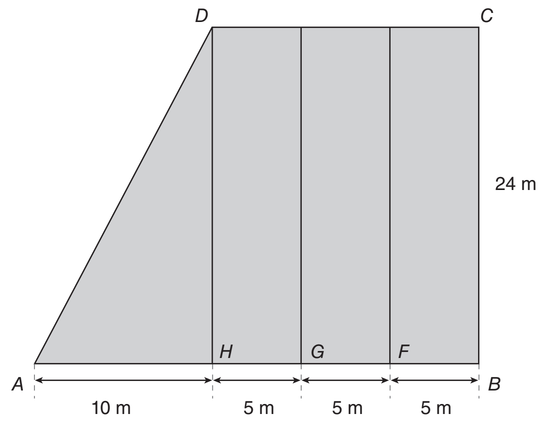
Alternativa **b**.

43 a) A área A do trapézio é dada por:

$A = \dfrac{(25 + 15) \cdot 24}{2}$ m^2 $= 480$ m^2

Logo, o valor do terreno, em real, é $50 \cdot 480$, ou seja, R$ 24.000,00.

b) Considerando a altura $\overline{DH}$, temos que a área do triângulo ADH é $\dfrac{10 \cdot 24}{2}$ m^2, ou seja, 120 m^2, que é a quarta parte da área do trapézio; logo, $\overline{DH}$ é um dos segmentos procurados. Assim, para determinar os outros segmentos, basta dividir o retângulo $CDHB$ em três partes de mesma área, por meio de segmentos de reta paralelos a $\overline{BC}$.



44 A área A de cada arruela é dada por:

$A = \pi[(1{,}5)^2 - (0{,}5)^2]$ cm^2 $= 2\pi$ cm^2

O número máximo de arruelas que podem ser retiradas da placa é 200; logo, a área que será utilizada é: $200 \cdot 2\pi$ cm^2, ou seja, 400π cm^2

45 Indicando por A a área do piso real, em centímetro quadrado, temos:

$\dfrac{168}{A} = \left(\dfrac{1}{50}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{168}{A} = \dfrac{1}{2.500}$

$\therefore A = 420.000$ cm^2

Logo, a área real do piso é 420.000 cm^2, o que equivale a 42 m^2.

Exercícios de revisão cumulativa

1 a) $f(1) = f(1 + 0)$

Pela condição (I), temos:

$f(1 + 0) = 1 + f(0)$

Pela condição (II), temos:

$f(0) = 4$

Então:

$f(1) = 1 + 4 = 5$

b) $f(100) = f(99 + 1)$

Pela condição (I), temos:

$f(99 + 1) = 99 + f(1)$

Como calculado no item **a**, temos que $f(1) = 5$; então:

$f(100) = 99 + 5 = 104$

c) $\sum_{j=1}^{20} f(j) = f(1) + f(2) + ... + f(20)$
em que:
$f(1) = f(1 + 0) = 1 + f(0) = 5$
$f(2) = f(1 + 1) = 1 + f(1) = 6$
$f(3) = f(2 + 1) = 2 + f(1) = 7$
$f(4) = f(3 + 1) = 3 + f(1) = 8$
$\vdots$
$f(20) = f(19 + 1) = 19 + f(1) = 24$
Logo, $\sum_{j=1}^{20} f(j)$ é a soma dos termos de uma progressão aritmética, em que o 1º termo é 5, o último termo é 24 e o número de termos é 20. Sendo S a soma dos termos dessa progressão, temos:
$$S = \frac{(5 + 24) \cdot 20}{2} = 290$$
Portanto, $\sum_{j=1}^{20} f(j) = 290$.

2 a) $f(2) = f(2 \cdot 1)$
Pela condição (I), temos:
$f(2 \cdot 1) = 2 \cdot f(1)$
Pela condição (II), temos:
$2 \cdot f(1) = 2 \cdot 3$
Logo, $f(2) = 2 \cdot 3 = 6$.

b) $f(10) = f(10 \cdot 1)$
Pela condição (I), temos:
$f(10 \cdot 1) = 10 \cdot f(1)$
Pela condição (II), temos:
$10 \cdot f(1) = 10 \cdot 3$
Logo, $f(10) = 10 \cdot 3 = 30$.

c) $\sum_{j=1}^{10} f(j) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(10)$
em que:
$f(1) = 3$
$f(2) = f(2 \cdot 1) = 2 \cdot f(1) = 6$
$f(3) = f(3 \cdot 1) = 3 \cdot f(1) = 9$
$f(4) = f(4 \cdot 1) = 4 \cdot f(1) = 12$
$\vdots$
$f(10) = f(10 \cdot 1) = 10 \cdot f(1) = 30$
Logo, $\sum_{j=1}^{10} f(j)$ é a soma dos termos de uma progressão aritmética, em que o 1º termo é 3, o último termo é 30 e o número de termos é 10. Sendo S a soma dos termos dessa progressão, temos:
$$S = \frac{(3 + 30) \cdot 10}{2} = 165$$
Portanto, $\sum_{j=1}^{10} f(j) = 165$.

3 a) Sendo C o capital aplicado, i a taxa de juro e t o tempo, em ano, temos:
$f(x) = C(1 + i)^x \Rightarrow f(x) = 2.000(1 + 0,1)^x$
Logo, $f(x) = 2.000 \cdot 1,1^x$.

b) $x = 2.000 \cdot 1,1^{g(x)} \Rightarrow \frac{x}{2.000} = 1,1^{g(x)}$
$\therefore\ g(x) = \log_{1,1} \frac{x}{2.000}$

c) $f(x) = 2.000 \cdot 1,1^x \Rightarrow y = 2.000 \cdot 1,1$
$\therefore\ x = 2.000 \cdot 1,1^y \Rightarrow \frac{x}{2.000} = 1,1^y$
$\therefore\ \log \frac{x}{2.000} = y \cdot \log 1,1 \Rightarrow y = \frac{\log \frac{x}{2.000}}{\log 1,1}$
Portanto, $f^{-1}(x) = \log_{1,1} \frac{x}{2.000}$.

Análise da resolução

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$(3 - 2x)^2 = (1 - x)^2 + 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 - 12x + 4x^2 = 1 - 2x + x^2 + 9$
$\therefore\ 3x^2 - 10x - 1 = 0$
O discriminante dessa equação do 2º grau é dado por:
$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 112$
Logo:
$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{112}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 4\sqrt{7}}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{5 + 2\sqrt{7}}{3} \text{ ou } x = \frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$$
Como as medidas dos lados de um triângulo são números reais estritamente positivos, temos as seguintes condições para a existência dessas medidas:
$m(\overline{AC}) = 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$ (I)
$m(\overline{BC}) = 3 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$ (II)
De I ∩ II, temos $x < 1$.
Sendo $x' > 1$ e $x'' < 1$, então x'' é o único valor possível para x.
Logo, o número real x é $\frac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

Os doze primeiros números da sequência de Fibonacci são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Exercícios propostos

1 Na sequência dada, os termos são:

$a_1 = 5$ $a_5 = 6$

$a_2 = -4$ $a_6 = 6$

$a_3 = 8$ $a_7 = 6$

$a_4 = \sqrt{3}$

2 **a)** De acordo com o enunciado, temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot 2 + 5 = 9$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot 3 + 5 = 11$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot 4 + 5 = 13$

Portanto, a sequência é (7, 9, 11, 13, ...).

b) De acordo com o enunciado, temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 2 = 6$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 3 = 12$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 4 = 20$

Portanto, a sequência é (2, 6, 12, 20, ...).

c) Do enunciado, temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

Portanto, a sequência é $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, ...\right)$.

d) Dadas as informações da sequência, temos:

$a_1 = 4$

$n = 1 \Rightarrow a_2 = 5 + a_1 = 5 + 4 = 9$

$n = 2 \Rightarrow a_3 = 5 + a_2 = 5 + 9 = 14$

$n = 3 \Rightarrow a_4 = 5 + a_3 = 5 + 14 = 19$

Portanto, a sequência é (4, 9, 14, 19, ...).

e) Do enunciado, temos:

$a_1 = 3$

$a_2 = 7$

$n = 1 \Rightarrow a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

$n = 2 \Rightarrow a_4 = a_3 - a_2 = 4 - 7 = -3$

Portanto, a sequência é (3, 7, 4, −3, ...).

3 **a)** Indicando a soma dos dez primeiros termos da sequência dada por S_{10}, temos:

$n = 10 \Rightarrow S_{10} = 10^2 + 10 = 110$

b) O primeiro termo pode ser encontrado atribuindo-se o valor 1 à variável n:

$n = 1 \Rightarrow S_1 = 1^2 + 1 = 2$

$\therefore\ a_1 = 2$

c) $a_5 = S_5 - S_4 = (5^2 + 5) - (4^2 + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_5 = 10$

d) $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - [(n-1)^2 + (n-1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 2n$

4 **a)** Dividindo 23 por 4, obtém-se quociente 5 e resto 3. Isso significa que na primeira troca o cliente ficará com 5 livros novos e 3 já lidos.

Para a segunda troca, o cliente possui 8 livros. Dividindo 8 por 4, obtém-se quociente 2 e resto zero. Isso significa que na segunda troca o cliente ficará com 2 livros novos.

Assim, o cliente poderá ler 7 livros novos dessa livraria, sem nenhum custo.

b) Repetindo o raciocínio do item **a**, temos:

Divisão	Quociente	Resto	Total de livros do cliente após a troca
505 por 4	126	1	126 novos e 1 já lido
127 por 4	31	3	31 novos e 3 já lidos
34 por 4	8	2	8 novos e 2 já lidos
10 por 4	2	2	2 novos e 2 já lidos
4 por 4	1	0	1 novo

Assim, a sequência pedida é (126, 31, 8, 2, 1).

5 **a)** Como os mosaicos são formados por quadrados, no 15º mosaico teremos um quadrado de 15 × 15 azulejos brancos.

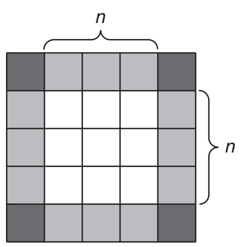
Logo, sendo a_{15} o número de azulejos brancos no 15º mosaico, temos:

$a_{15} = 15^2 = 225$

Portanto, o 15º mosaico terá 225 azulejos brancos.

b) Raciocinando como no item **a**, temos: $a_n = n^2$

c) Como o quadrado branco é composto de $n \times n$ azulejos brancos, o número de azulejos pretos varia de acordo com os n azulejos brancos. Como o quadrado é formado por 4 lados, teremos $4n + 4$ azulejos pretos, de acordo com o esquema:



Somamos 4 azulejos, referentes aos vértices do quadrado preto.
Logo, para $n = 20$ temos que o total p_n azulejos pretos é dado por:
$p_{20} = 20 \cdot 4 + 4 = 84$
Portanto, o 20º mosaico dessa sequência terá 84 azulejos pretos.

d) Raciocinando como no item **c**, temos: $p_n = 4n + 4$

6 **a)** Os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci são:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) Temos:
$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geqslant 3$
Logo, a lei de formação é:
$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{com } n \geqslant 3 \end{cases}$$

7 Como $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \geqslant 1.024$, temos:
$\dfrac{4^n}{2^n} \geqslant 1.024 \Rightarrow 2^n \geqslant 1.024$
$\therefore\ 2^n \geqslant 2^{10} \Rightarrow n \geqslant 10$
Alternativa **a**.

8 **a)** Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.
b) Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.
c) Como a diferença entre dois termos consecutivos é uma constante, a sequência é uma PA.
d) Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, a sequência é uma PA.
e) Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.
f) Como a diferença entre dois termos consecutivos é uma constante, a sequência é uma PA.
g) Como a diferença entre dois termos consecutivos não é constante, a sequência não é PA.

9 **a)** Temos $a_2 = 2$ e $a_1 = 0$; então:
$r = a_2 - a_1 = 2 - 0 = 2$
Logo, a razão é 2.

b) Temos $a_2 = 7$ e $a_1 = 10$; então:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$
Logo, a razão é -3.

c) Temos $a_2 = \dfrac{17}{12}$ e $a_1 = \dfrac{13}{6}$; então:
$$r = a_2 - a_1 = \frac{17}{12} - \frac{13}{6} = \frac{17 - 26}{12} = -\frac{3}{4}$$
Logo, a razão é $-\dfrac{3}{4}$.

d) Como $(-7, -7, -7, -7, \ldots)$ é uma PA constante, sua razão é nula.

e) Temos que $a_3 = 4$ e $a_2 = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$; então:
$$r = a_3 - a_2 = 4 - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} =$$
$= 2 - \sqrt{3}$

10 Nessa PA de razão $r = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1}$, temos:
$a_6 + r = a_7$
Então:
$$1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = a_7 \Rightarrow a_7 = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1}$$
$\therefore\ a_7 = 2$

11 Os números a, b e c estão em PA de razão 2; logo:
$b = a + 2$
$c = a + 4$
Temos, do enunciado:
$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow a^2 + (a + 2)^2 - (a + 4)^2 = 0$
$\therefore a^2 - 4a - 12 = 0$
$\Delta = 16 + 48 = 64$
$$\therefore a = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow a = 6 \text{ ou } a = -2$$
Como a, b e c são naturais, temos $a = 6$.
Como a, b e c estão em PA de razão 2, concluímos:
$a = 6$, $b = 8$ e $c = 10$
Então:
$a + b + c = 6 + 8 + 10 = 24$
Alternativa **c**.

12 Dado $a_n = 3n + 5$, temos:
$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) + 5 - (3n + 5) = 3$
Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante, essa sequência é uma PA.

13 **a)** Temos $a_1 = 4$ e $a_2 = 7$; então:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$
Como a razão r é positiva, a PA é crescente.
b) Temos $a_1 = -14$ e $a_2 = -10$; assim:
$r = a_2 - a_1 = -10 - (-14) = 4$
Como a razão r é positiva, PA é crescente.
c) Temos $a_1 = 28$ e $a_2 = 20$; então:
$r = a_2 - a_1 = 20 - 28 = -8$
Como a razão r é negativa, a PA é decrescente.
d) Temos $a_1 = -30$ e $a_2 = -35$; então:
$r = a_2 - a_1 = -35 + 30 = -5$
Como a razão r é negativa, a PA é decrescente.
e) Temos que os termos da PA são iguais; logo, a razão é nula.
Portanto, a PA é constante.
f) Temos $a_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $a_2 = 1$; então:
$r = a_2 - a_1 = 1 - (2 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2}$
Como a razão r é positiva, a PA é crescente.

14 **a)** $(5, 2, -1, -4, \ldots)$: PA decrescente
b) $(-3, -3, -3, -3, \ldots)$: PA constante
c) $(10, 18, 26, 34, \ldots)$: PA crescente

15 $a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - 1 - (x - 2) = x - 2 - (1 - x)$
$\therefore x + 1 = 2x - 3 \Rightarrow x = 4$

16 Observando que o coeficiente de r tem uma unidade a menos que o índice do termo (número da posição do termo), concluímos que
$a_n = a_1 + (n - 1)r$.

17 Representando a PA por $(x - r, x, x + r)$, temos:

$$\begin{cases} (x-r) + x + (x+r) = 6 \\ (x-r) \cdot x \cdot (x+r) = -10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{(I)} \\ (x-r) \cdot x \cdot (x+r) = -10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$4 - r^2 = -5 \Rightarrow r = \pm 3$

Como a PA é crescente, deduzimos que $r = 3$.

Portanto, a PA é $(-1, 2, 5)$.

18 Vamos representar a PA de quatro termos por:

$(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x - 3r + x - r + x + r + x + 3r = 4 \\ (x+r)(x+3r) = 40 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{(I)} \\ (x+r)(x+3r) = 40 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II), obtendo:

$(1 + r)(1 + 3r) = 40 \Rightarrow 3r^2 + 4r - 39 = 0$

$\therefore r = 3$ ou $r = -\dfrac{13}{3}$

Como a PA é crescente, deduzimos que $r = 3$.

Logo, a PA é $(-8, -2, 4, 10)$.

19 Indicando por $(x - r, x, x + r)$ a PA crescente formada pelas medidas dos ângulos internos do triângulo, temos:

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 180° \\ x + r = 2(x - r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60° \\ x = 3r \end{cases}$$

Logo, $x = 60°$ e $r = 20°$ e, portanto, o maior ângulo interno do triângulo mede 80°.

Alternativa **d**.

20 Representando a PA por $(x - r, x, x + r)$, temos:

$x - r + x + x + r = 2.790 \Rightarrow x = 930$

Logo, o valor aplicado no segundo mês foi R$ 930,00.

21 Dada a PA (2, 13, 24, 35, ...), temos:

$a_1 = 2$ e $a_2 = 13$

Assim, a razão r é dada por:

$r = a_2 - a_1 = 13 - 2 = 11$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 40$, concluímos:

$a_{40} = 2 + (40 - 1)11 = 431$

Portanto, o 40º termo da PA é $a_{40} = 431$.

22 Sabendo que a PA é $(2k + 1, 3k, 4k - 1, ...)$, temos:

$a_1 = 2k + 1$ e $a_2 = 3k$

Sendo r a razão da PA, temos:

$r = a_2 - a_1 = 3k - (2k + 1) = k - 1$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 21$, concluímos:

$a_{21} = 2k + 1 + (21 - 1)(k - 1) = 2k + 1 + 20k - 20$

$\therefore a_{21} = 22k - 19$

23 Temos a PA (2, 8, 14, 20, ...). Então:

$a_1 = 2$ e $a_2 = 8$

Assim, a razão r da PA é dada por:

$r = a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, concluímos:

$a_n = 2 + (n - 1)6 = 6n - 4$

24 Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 20$, temos:

$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow 131 = a_1 + (20 - 1)7$

$\therefore 131 = a_1 + 133 \Rightarrow a_1 = -2$

Logo, o 1º termo da PA é $a_1 = -2$.

25 Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 11$, temos:

$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow 29k - 18 = a_1 + (11 - 1)(2 - k)$

$\therefore\ 29k - 18 = a_1 + 20 - 10k$

$\therefore\ a_1 = 39k - 38$

Logo, o 1º termo da PA é $a_1 = 39k - 38$.

26 Sabemos que $a_n = a_k + (n - k)r$ é a fórmula do termo geral, então:

$$\begin{cases} a_8 = 3a_5 \\ a_8 = a_5 + 3r \end{cases}$$

Logo:

$a_8 = 3(a_8 - 3r) \Rightarrow a_8 = \dfrac{9}{2}r$

Então:

$\dfrac{9}{2}(-5) = a_1 + (8 - 1)(-5) \Rightarrow a_1 = \dfrac{25}{2}$

$a_2 = a_1 + r = \dfrac{25}{2} - 5 = \dfrac{15}{2}$

$a_3 = a_2 + r = \dfrac{15}{2} - 5 = \dfrac{5}{2}$

$a_4 = a_3 + r = \dfrac{5}{2} - 5 = -\dfrac{5}{2}$

Logo, temos a PA:

$\left(\dfrac{25}{2}, \dfrac{15}{2}, \dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{2}, ...\right)$

27 Dada a PA (3, 7, 11, ..., 99), temos que a razão r é:

$r = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

Aplicando a fórmula do termo geral

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $a_n = 99$, temos:

$99 = 3 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 25$

Logo, a PA tem 25 termos.

28 Temos:

$a_1 = 15b - 47$, $a_2 = 14b - 43$ e

$r = a_2 - a_1 = 14b - 43 - (15b - 47) = -b + 4$

Pela fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$, concluímos:

$13 = 15b - 47 + (n - 1)(-b + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \dfrac{16(b - 4)}{(b - 4)}$, para $b \neq 4$

$\therefore\ n = 16$

Logo, a PA tem 16 termos.

29 Sendo r a razão da PA, temos:

$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow \dfrac{17}{3} = \dfrac{1}{6} + 11r$

$\therefore\ 34 = 1 + 66r \Rightarrow r = \dfrac{1}{2}$

30 Queremos interpolar 6 meios aritméticos entre 2 e 10, nessa ordem. Então teremos uma PA com 8 termos, sendo $a_1 = 2$ e $a_8 = 10$.
Logo:
$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 10 = 2 + 7r$
$\therefore r = \frac{8}{7}$
Logo, PA é $\left(2, \frac{22}{7}, \frac{30}{7}, \frac{38}{7}, \frac{46}{7}, \frac{54}{7}, \frac{62}{7}, 10\right)$.

31 Do enunciado, temos:
$a_2 + a_3 = 11 \Rightarrow a_1 + r + a_1 + 2r = 11$
$a_4 + a_7 = 21 \Rightarrow a_1 + 3r + a_1 + 6r = 21$
Temos, então, o sistema:
$$\begin{cases} 2a_1 + 3r = 11 & \text{(I)} \\ 2a_1 + 9r = 21 & \text{(II)} \end{cases}$$
Subtraímos, membro a membro, (I) e (II), obtendo:
$-6r = -10 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$
Portanto, a razão da PA é $r = \frac{5}{3}$.

32 Sabemos que:
$a_{23} = a_{15} + 8r \Rightarrow a_{23} = 18 + 8 \cdot 6$
$\therefore a_{23} = 66$
Logo, o 23º termo é 66.

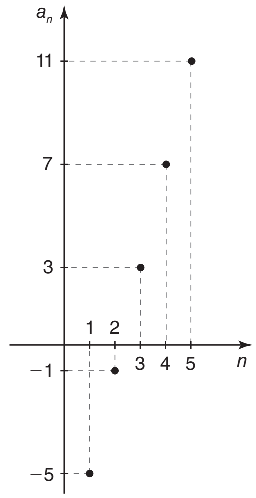
33 Temos:
$a_{32} = a_{20} + 12r \Rightarrow 8 = 5 + 12r$
$\therefore r = \frac{1}{4}$
Logo, a razão da PA é $r = \frac{1}{4}$.

34 Observando a evolução nos 4 primeiros minutos, notamos que os números de vírus 1, 5, 9 e 13 formam uma PA de razão 4.
Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, para $n = 60$, temos:
$a_{60} = 1 + (60 - 1) \cdot 4 \Rightarrow a_{60} = 237$
Logo, no 60º minuto haverá 237 vírus.
Alternativa **c**.

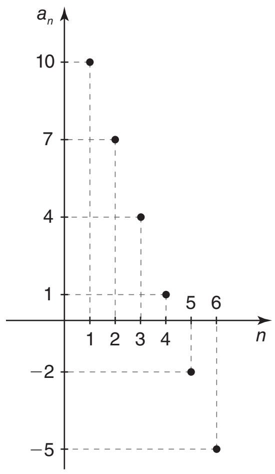
35 Temos que o 1º cone está no quilômetro 0 (zero) e o 261º cone está no quilômetro 13. Como os cones estão igualmente espaçados, as distâncias entre cada cone e o início da serra formam uma PA de razão r, em que r é a distância, em quilômetro, entre dois cones consecutivos quaisquer. Sabendo que o termo geral da PA é $a_m = a_n + (m - n)r$, temos:
$a_{261} = a_1 + (261 - 1)r \Rightarrow 13 = 0 + 260r$
$\therefore r = 0{,}05$
Logo, a distância entre dois cones consecutivos é 0,05 km ou 50 m.

36 Como a diferença entre as frequências de duas emissoras consecutivas deve ser 0,2 MHz, temos que todas as frequências de uma determinada região formam uma PA de razão $r = 0{,}2$, com $a_1 = 87{,}9$ e $a_n = 107{,}9$.
Para saber o número máximo de emissoras, basta determinar o número de elementos dessa PA, ou seja, determinar n tal que $a_n = 107{,}9$.
A fórmula do termo geral é dada por $a_n = a_1 + (n - 1)r$; assim:
$107{,}9 = 87{,}9 + (n - 1) \cdot 0{,}2 \Rightarrow n = 101$
Alternativa **c**.

37 a)



b)



38 A representação gráfica da PA está contida no gráfico de uma função afim $y = px + q$.
Como (1, 8) e (2, 13) são pontos dessa representação gráfica, temos:
$$\begin{cases} 8 = p + q \\ 13 = 2p + q \end{cases} \Rightarrow p = 5 \text{ e } q = 3$$
Logo, $y = 3 + 5x$.
Alternativa **a**.

39 A reta s é o gráfico da função afim $f(x) = ax + b$.
Como os pontos $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ pertencem a s, temos:
$$\begin{cases} 4 = -\frac{a}{2} + b \\ 6 = \frac{a}{2} + b \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 5$$
Logo, $f(x) = 2x + 5$
Para $x = 40$, temos:
$f(40) = 2 \cdot 40 + 5 = 85$
Portanto: $a_{40} = 85$
Como $a_{40} = 85$, temos:
$a_{41} = f(41) = 2 \cdot 41 + 5 = 82 + 5 = 87$
$r = a_{41} - a_{40} = 87 - 85 = 2$
Portanto, $r = 2$.

40 Sabemos que a soma dos extremos de uma PA é igual à soma dos termos equidistantes dos extremos.
Logo, como a soma de dois termos equidistantes é $3a_1$, sendo a_1 o primeiro termo, temos:
$a_1 + a_n = 3a_1 \Rightarrow a_1 + 36 = 3a_1$
$\therefore a_1 = 18$
Logo, o primeiro termo dessa PA é 18.

41 O termo médio a_i é tal que:
$i = \dfrac{1 + 49}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$
Portanto, o termo médio é a_{25}.
Alternativa **c**.

42 Como os termos a_i e a_j são equidistantes dos extremos, o termo médio a_m da PA é a média aritmética de a_i e a_j, isto é:
$a_m = \dfrac{a_i + a_j}{2} = \dfrac{8 + 12}{2} = 10$

43 A sequência é PA se, e somente se:
$3x - 1 = \dfrac{(2x - 2) + (2x + 6)}{2} \Rightarrow x = 3$
Portanto, para que a sequência seja PA, devemos ter $x = 3$.

44 Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ é a fórmula do termo geral da PA, temos:
$a_{51} = 2 + (51 - 1) \cdot 7 = 352$
Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 51$, temos:
$S_{51} = \dfrac{(2 + 352) \cdot 51}{2} = 9.027$

45 Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos que o 30º termo a_{30} é:
$a_{30} = -15 + (30 - 1) \cdot 4 = 101$
Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ para $n = 30$, temos:
$S_{30} = \dfrac{(-15 + 101) \cdot 30}{2} = 1.290$

46 Os múltiplos positivos de 9 menores que 100 formam uma PA de 1º termo 9 e razão $r = 9$.
Sabemos que essa PA tem 11 termos e é dada por:
(9, 18, 27, ..., 90, 99)
Como $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, concluímos:
$S_{11} = \dfrac{(9 + 99) \cdot 11}{2} = 594$
Portanto, a soma dos múltiplos positivos de 9 menores que 100 é 594.

47 Os múltiplos de 2 e 3 são, simultaneamente, todos os múltiplos de 6.
Esses múltiplos, compreendidos entre 100 e 700, formam uma PA cuja razão é 6, o 1º termo é $a_1 = 102$ e o último termo é $a_n = 696$.
Temos então a PA:
(102, 108, 114, ..., 696)
O número n de termos dessa PA pode ser calculado por:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow 696 = 102 + (n - 1) \cdot 6$
$\therefore n = 100$
Pela fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, com $n = 100$, concluímos:
$S_{100} = \dfrac{(102 + 696) \cdot 100}{2} = 39.900$

48 a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{50} 2j = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot 50 =$
$= 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$
Essa soma é a soma dos 50 primeiros termos de uma PA tal que $a_1 = 2$, $a_{50} = 100$ e $r = 2$.
Usando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, obtemos:
$S_{50} = \dfrac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 2.550$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{40} (3j - 1) = (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) +$
$+ (3 \cdot 3 - 1) + \ldots + (3 \cdot 40 - 1) = 2 + 5 + 8 +$
$+ \ldots + 119$
Essa soma é a soma dos 40 primeiros termos de uma PA em que $a_1 = 2$, $a_{40} = 119$ e $r = 3$.
Aplicando a fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, obtemos:
$S_{40} = \dfrac{(2 + 119) \cdot 40}{2} = 2.420$

49 a) Sendo $a_1 = 2$ e $a_2 = 7$, a razão r da PA é dada por:
$r = a_2 - a_1 = 7 - 2 = 5$
Logo, o n-ésimo termo é:
$a_n = 2 + (n - 1)5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$

b) Sabemos que a soma dos n primeiros termos da PA é $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Logo:
$S_n = \dfrac{(2 + a_n)n}{2} = \dfrac{(2 + 5n - 3)n}{2} = \dfrac{5n^2 - n}{2}$

50 Os n primeiros números naturais ímpares formam a PA (1, 3, 5, ..., $2n - 1$).
Sabemos que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, logo:
$S_n = \dfrac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \dfrac{2n^2}{2} = n^2$
Logo, a soma dos n primeiros números ímpares naturais é n^2.

51 Sabemos que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é a soma dos termos da PA.
Do enunciado, temos $S_n = 33$, $a_1 = -7$ e $r = 2$.
Assim:
$a_n = a_1 + (n - 1)r = -7 + (n - 1)2 = 2n - 9$
Então:
$33 = \dfrac{(-7 + 2n - 9)n}{2} \Rightarrow 66 = -16n + 2n^2$
$\therefore n^2 - 8n - 33 = 0$
$\Delta = 64 + 132 = 196$
$\therefore n = \dfrac{8 \pm \sqrt{196}}{2} = \dfrac{8 \pm 14}{2} \Rightarrow$
$n = 11$ ou $n = -3$
Como n representa o número de termos da PA, temos $n = 11$.
Logo, essa PA tem 11 termos.

52 Os números de tijolos da fileira superior para a inferior formam uma PA tal que $a_1 = 1$ e $r = 1$. Logo:
$(1, 2, 3, ..., a_n)$
Temos:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1 + (n - 1) \cdot 1 = r$
Pela fórmula $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$:
$820 = \dfrac{(1 + n)n}{2} \Rightarrow 1.640 = n + n^2$
$\therefore\ n^2 + n - 1.640 = 0$
$\Delta = 1 + 6.560 = 6.561$
$\therefore\ n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{6.561}}{2} = \dfrac{-1 \pm 81}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 40$ ou $n = -41$
Temos $n = 40$, pois n representa a quantidade de tijolos.
Como $a_n = n$, a primeira fileira deverá ser composta de 40 tijolos.
Alternativa **c**.

53 As áreas desmatadas nos dias desse mês formam uma PA em que o primeiro termo é $a_1 = 50$ e a razão é $r = 4$.
a) Para $n = 20$, temos:
$a_{20} = 50 + (20 - 1)4 = 126$
Logo, no 20º dia do mês foram desmatadas 126 ha.
b) Sabendo que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:
$S_{20} = \dfrac{(50 + 126) \cdot 20}{2} = 1.760$
Logo, nos primeiros 20 dias desse mês foram desmatados 1.760 ha.

54 Os números de poltronas das fileiras formam uma PA tal que o termo inicial é $a_1 = 20$, a razão é $r = 2$ e o número de termos é $n = 16$.
Para calcular quantas poltronas teremos na última fileira, aplicamos a fórmula do termo geral:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_{16} = 20 + (16 - 1)2$
$\therefore\ a_{16} = 50$
Como $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n termos da PA, temos:
$S_{16} = \dfrac{(20 + 50) \cdot 16}{2} = 560$
Então, esse cinema terá 560 poltronas.

55 **a)** A sequência é uma PG, pois a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, é constante, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.
b) Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, não é constante, a sequência não é uma PG.
c) Essa sequência é uma PG, pois $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = \dfrac{1}{3}$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.
d) Temos do enunciado:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 3 \cdot 2^{2-1} = 6$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 12$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 24$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 48$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 96$
Então, a sequência é:
$(3, 6, 12, 24, 48, 96)$
Essa sequência é uma PG, pois $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = 2$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$.
e) Do enunciado:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = (1 - 1)^2 = 0$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = (2 - 1)^2 = 1$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = (3 - 1)^2 = 4$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = (4 - 1)^2 = 9$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = (5 - 1)^2 = 16$
Logo, a sequência é:
$(0, 1, 4, 9, 16)$
Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, não é constante, a sequência não é uma PG.
f) Temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = 5^{2-1} = 5$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5^{2-2} = 1$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 5^{2-3} = \dfrac{1}{5}$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 5^{2-4} = \dfrac{1}{25}$
$n = 5 \Rightarrow a_5 = 5^{2-5} = \dfrac{1}{125}$
$n = 6 \Rightarrow a_6 = 5^{2-6} = \dfrac{1}{625}$
Então, a sequência é dada por:
$\left(5, 1, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{25}, \dfrac{1}{125}, \dfrac{1}{625}\right)$
Assim:
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = \dfrac{1}{5}$
Como a razão entre dois termos consecutivos quaisquer, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante, a sequência é uma PG.
g) Temos:
$n = 1 \Rightarrow a_1 = (-1)^1 \cdot 2^{1-4} = -\dfrac{1}{8}$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = (-1)^2 \cdot 2^{2-4} = \dfrac{1}{4}$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = (-1)^3 \cdot 2^{3-4} = -\dfrac{1}{2}$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = (-1)^4 \cdot 2^{4-4} = 1$
Então, a sequência é:
$\left(-\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}, 1\right)$
Assim:
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = -2$
Logo, essa sequência é uma PG, pois a razão entre dois termos consecutivos quaisquer é constante, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 4$.

56 **a)** Da sequência, temos: $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$
Como a razão da PG é dada por
$q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2}{1} = 2$

b) Da sequência, temos: $a_1 = -3$ e $a_2 = 9$. A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{-3} = -3$

c) Da sequência, temos: $a_1 = \frac{4}{3}$ e $a_2 = 2$
A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$

d) Da sequência, temos: $a_1 = \frac{5}{3\sqrt{2}}$ e $a_2 = \frac{5}{9}$
Como a razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{3\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

e) Da sequência, temos:
$a_1 = \frac{3}{\sqrt{5} - 2}$ e $a_2 = \frac{6}{5 - 2\sqrt{5}}$
Sabendo que a razão da PG é dada por
$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, temos:
$$q = \frac{\frac{6}{5 - 2\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{5} - 2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

57 $q = \frac{a_{39}}{a_{38}} \Rightarrow q = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

58 $a_{11} = a_{10} \cdot q \Rightarrow a_{11} = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$
$\therefore a_{11} = 2$

59 $q = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$
Sendo $a_n = 1$, queremos achar a_{n-1}. Logo:
$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{a_{n-1}}$
$\therefore a_{n-1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1$
Portanto, o termo que precede imediatamente o 1 é $\sqrt{3} + 1$.
Alternativa **e**.

60 Temos: $a = \frac{b}{3}$ e $c = 3b$
Logo:
$b = ac \Rightarrow b = \frac{b}{3} \cdot 3b$
$\therefore b^2 - b = 0 \Rightarrow b(b - 1) = 0$
Então, $b = 0$ ou $b = 1$.
Como a, b e c são reais não nulos, obtemos:
$a = \frac{1}{3}$, $b = 1$ e $c = 3$
Portanto:
$a + b + c = \frac{1}{3} + 1 + 3 = \frac{13}{3}$

61 Temos que $a_n = 5 \cdot 2^n$ e $a_{n+1} = 5 \cdot 2^{n+1}$; logo:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{5 \cdot 2^n} = 2$
Como a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ entre dois termos consecutivos quaisquer é constante, a sequência é uma PG.

62 a) A razão da PG é dada por $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, logo:
$q = \frac{6}{3} = 2$
Como $a_1 > 0$ e $q > 1$, a PG é crescente.

b) $q = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$
Como $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, a PG é crescente.

c) $q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Como $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, a PG é decrescente.

d) $q = \frac{10}{-5} = -2$
Como $a_1 \neq 0$ e $q < 0$, a PG é oscilante.

e) Como todos os termos são nulos, a PG é constante com razão indeterminada.

f) Como todos os termos são iguais e não nulos, a PG é constante com $q = 1$.

g) Como o primeiro termo é não nulo e os demais são nulos, temos $q = 0$, então a PG é quase nula.

h) Temos $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; assim:
$$q = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$
Como $a_1 > 0$ e $q > 1$, a PG é crescente.

i) $$q = \frac{2 + \sqrt{3}}{\frac{1}{2 - \sqrt{3}}} = 1$$
Como $q = 1$, a PG é crescente.

63 Sendo x o termo a_1 dessa progressão, temos:
$a_2 = x + 0{,}1x = 1{,}1x$
$a_3 = 1{,}1x + 0{,}1 \cdot 1{,}1x = 1{,}1x(1 + 0{,}1) = (1{,}1)^2x$
$a_4 = (1{,}1)^2x + 0{,}1 \cdot (1{,}1)^2x = (1{,}1)^2x \cdot (1 + 0{,}1) =$
$= (1{,}1)^3x$
$\vdots$
Assim, temos que cada termo da sequência (a_n), a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por 1,1. Trata-se, portanto, de uma PG de razão 1,1 ou, ainda, $\frac{11}{10}$.
Alternativa **b**.

64 Sendo $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ a PG, temos:
$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 64 \\ \frac{x}{q} + x + xq = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 64 \\ \frac{x}{q} + x + xq = 14 \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} x = 4 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} + x + xq = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituindo (I) em (II), temos:
$\frac{4}{q} + 4 + 4q = 14 \Rightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0$
$\Delta = 100 - 64 = 36$
$\therefore q = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{10 \pm 6}{8} \Rightarrow q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$
Como a PG deve ser crescente, deduzimos que $q = 2$. Logo, a PG é (2, 4, 8).

65 Sendo $\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$ a PG, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q^3} \cdot \frac{x}{q} \cdot xq \cdot xq^3 = 81 \\ \frac{x}{q} + xq = \frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 81 \\ \frac{x}{q} + xq = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \pm 3 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} + xq = \frac{15}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

- Substituindo x por 3 em (II), temos:
  $\frac{3}{q} + 3q = \frac{15}{2} \Rightarrow 6q^2 - 15q + 6 = 0$
  $\Delta = 225 - 144 = 81$
  $\therefore q = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{12} = \frac{15 \pm 9}{12} \Rightarrow q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$
  Como a PG deve ser crescente, deduzimos que $q = 2$.
  Portanto, nesse caso, a PG é $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.
- Substituindo x por -3 em (II), temos:
  $\frac{-3}{q} - 3q = \frac{15}{2} \Rightarrow 6q^2 + 15q + 6 = 0$
  $\Delta = 225 - 144 = 81$
  $\therefore q = \frac{-15 \pm 9}{12} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$ ou $q = -2$
  Para $q = -\frac{1}{2}$, temos a PG $\left(24, 6, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)$, que não convém, pois é decrescente.
  Para $q = -2$, temos a PG $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.
  Logo, a única PG que satisfaz as condições enunciadas é $\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{2}, 6, 24\right)$.

66 Sendo x, xq, xq^2 as medidas do cateto menor, do cateto maior e da hipotenusa, respectivamente, temos, pelo teorema de Pitágoras:
$(xq^2)^2 = x^2 + (xq)^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$
Resolvendo essa equação para $q > 0$, obtemos:
$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1{,}2$
$\therefore 1 < q < 2$
Alternativa **c**.

67 Sendo q a razão da PG, temos:
$q = \frac{768}{1.536} = \frac{1}{2}$
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $n = 14$, temos:
$a_{14} = 1.536 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{1.536}{8.192} = \frac{3}{16}$
Portanto, o 14º termo da sequência é $\frac{3}{16}$.

68 Sendo q a razão da PG, temos:
$q = \frac{k-1}{\frac{k-1}{k+1}} = k + 1$
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $n = 30$, temos:
$a_{30} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right) \cdot (k+1)^{29} = (k-1)(k+1)^{28}$
Alternativa **c**.

69 Temos que a razão da PG é $q = 2$.
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos:
$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

70 $a_{15} = a_1 \cdot q^{14} \Rightarrow 5 = a_1 \cdot (\sqrt[7]{3})^{14}$
$\therefore a_1 = \frac{5}{9}$

71 Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$a_6 = a_1 \cdot q^5$ e $a_4 = a_1 \cdot q^3$
Assim:
$a_6 = a_1 \cdot a_4 \Rightarrow a_1 \cdot q^5 = a_1 \cdot a_1 \cdot q^3$
$\therefore a_1 = q^2$
Como $q = \frac{2}{3}$, obtemos:
$a_1 = \frac{4}{9}$
Portanto, a PG é:
$\left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \ldots\right)$

72 A razão q da PG é dada por:
$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, obtemos:
$\frac{1}{3^{10}} = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^{10}} = \frac{3^5}{3^{n-1}}$
$\therefore 3^{n-1} = 3^{15} \Rightarrow n - 1 = 15$
$\therefore n = 16$
Logo, essa PG tem 16 termos.

73 Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é fórmula do termo geral da PG. Então:
$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$
$\therefore 81 = \frac{1}{243} \cdot q^9 \Rightarrow 3^4 \cdot 3^5 = q^9$
$\therefore q^9 = 3^9 \Rightarrow q = 3$
Logo, a razão da PG é 3.

74 Queremos interpolar 4 meios geométricos entre 1 e 7, nessa ordem. Teremos, assim, uma PG com 6 termos, sendo $a_1 = 1$ e $a_6 = 7$.
Usando a fórmula do termo geral da PG, temos:
$a_6 = a_1 \cdot q^5$
$7 = 1 \cdot q^5 \Rightarrow q = \sqrt[5]{7}$
Assim, interpolando 4 meios geométricos entre 1 e 7, obtemos a sequência:
$(1, \sqrt[5]{7}, \sqrt[5]{7^2}, \sqrt[5]{7^3}, \sqrt[5]{7^4}, 7)$

75 Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$\begin{cases} a_5 + a_8 = 9 \\ a_7 + a_{10} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^7 = 9 \\ a_1 \cdot q^6 + a_1 \cdot q^9 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 \cdot q^4(1 + q^3) = 9 & \text{(I)} \\ a_1 \cdot q^6(1 + q^3) = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a memtro (II) por (I), obtemos:
$q^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm\frac{1}{3}$
Como a PG é oscilante, concluímos que $q = -\frac{1}{3}$.

76 Sabemos que $a_m = a_n \cdot q^{m-n}$; logo:

$a_{19} = a_7 \cdot q^{12} \Rightarrow a_{19} = 10 \cdot (\sqrt[6]{2})^{12} = 10 \cdot 4 = 40$

77 Sabendo que $a_m = a_n \cdot q^{m-n}$, temos:

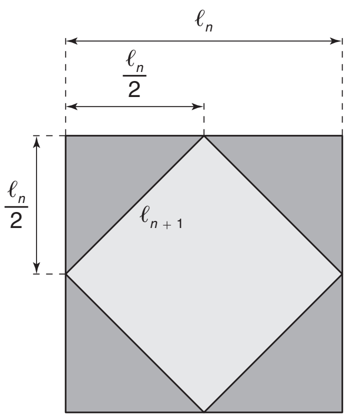
$a_{22} = a_{16} \cdot q^{22-16} \Rightarrow 4 = q^6$

$\therefore\ q = \pm\sqrt[3]{2}$

Logo, a razão dessa PG é $\sqrt[3]{2}$ ou $-\sqrt[3]{2}$.

78 Sendo ℓ_n a medida do lado do quadrado n, a medida ℓ_{n+1} do lado do quadrado $(n + 1)$, imediatamente interior, é dada por:

$$\left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 = (\ell_{n+1})^2 \Rightarrow \ell_{n+1} = \frac{\ell_n\sqrt{2}}{2}$$



O 1º quadrado tem 24 cm de perímetro e, portanto, 6 cm de lado.

As medidas dos lados dos quadrados formam uma PG em que o 1º termo é $\ell_1 = 6$ e a razão é $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, a medida do lado do décimo quadrado é:

$$\ell_{10} = \ell_1 \cdot q^9 \Rightarrow \ell_{10} = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = 3 \cdot \frac{\sqrt{2^9}}{2^8}$$

Portanto, a área A desse quadrado, em centímetro quadrado, é:

$$A = \left(3 \cdot \frac{\sqrt{2^9}}{2^8}\right)^2 = \frac{9 \cdot 2^9}{2^{16}} = \frac{9}{2^7} = \frac{9}{128}$$

Alternativa **e**.

79 Os números da 2ª coluna da tabela formam a PG com $a_1 = 100$ e $q = 2$.

Como 4 h = 240 min e equivalem a 12 períodos de 20 min, temos que o número n de bactérias após 4 horas do início do experimento é dado por:

$n = 100 \cdot 2^{12} = 409.600$

Alternativa **c**.

80 Os números de pessoas que receberam os e-mails a cada geração formam uma PG de razão $q = 10$.

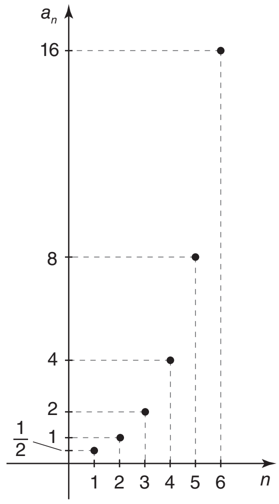
Considerando a 1ª geração de destinatários como termo inicial, temos $a_1 = 50$.

Aplicando a fórmula do termo geral da PG, obtemos:

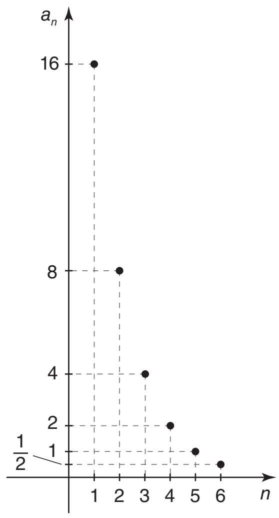
$a_6 = 50 \cdot 10^{6-1} = 50 \cdot 10^5 = 5.000.000$

Logo, na 6ª geração serão 5 milhões de destinatários.

81 a) Sendo (n, a_n) as coordenadas no plano cartesiano, temos:



b) Sendo (n, a_n) as coordenadas no plano cartesiano, temos:



82 Pela fórmula do termo geral da PG, temos:

$a_n = 7 \cdot 3^{n-1} = 7 \cdot \frac{3^n}{3}$

Logo, os pontos (n, a_n) pertencem ao gráfico da função $y = 7 \cdot \frac{3^x}{3}$.

Alternativa **e**.

83 O ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ pertence ao gráfico de f; logo:

$\frac{2\sqrt{3}}{3} = K^{\frac{1}{2}}$

Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos:

$K = \frac{4}{3}$

Assim: $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

Para $x = 30$, temos:

$f(30) = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$

Concluímos, então, que $a_{30} = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$

Para $x = 31$, temos:

$f(31) = \left(\frac{4}{3}\right)^{31}$

Logo:

$$\frac{f(31)}{f(30)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{31}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{30}} = \frac{4}{3}$$

$\therefore\ q = \frac{4}{3}$

84 Sabemos que o produto dos extremos a_1 e a_{10} da PG é igual ao produto de dois termos equidistantes dos extremos.
Logo:
$3 \cdot a_{10} = 4 \cdot 3 \Rightarrow a_{10} = 4$
Como $a_{10} = a_1 q^9$, concluímos:
$3q^9 = 4 \Rightarrow q = \sqrt[9]{\frac{4}{3}}$
Portanto, a razão da PG é $q = \sqrt[9]{\frac{4}{3}}$.

85 Em uma PG de número ímpar de termos, temos que o produto dos extremos e dos termos equidistantes dos extremos é igual ao quadrado do termo médio.
Sendo a_k o termo médio, temos:
$a_i \cdot a_j = (a_k)^2 \Rightarrow 2 \cdot 72 = (a_k)^2$
$\therefore\ a_k = \pm 12$
Logo, o termo médio dessa PG é 12 ou -12.

86 Uma sequência de três termos consecutivos com o primeiro não nulo será PG se o quadrado do termo médio for igual ao produto dos outros dois. Então:
$(x - 1)^2 = (-1) \cdot (4x - 1) \Rightarrow x^2 + 2x = 0$
Assim, para que a sequência seja uma PG, devemos ter: $x = 0$ ou $x = -2$.

87 Devemos ter:
$(3x - 2)^2 = 5x(x + 1)$
$\therefore\ 9x^2 - 12x + 4 = 5x^2 + 5x \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$
$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 225$
$\therefore\ x = \frac{-(-17) \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 4} = \frac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = \frac{1}{4}$

- Para $x = 4$, temos a PG (5, 10, 20), que é uma PG crescente.
- Para $x = \frac{1}{4}$, temos a PG $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$, que é uma PG oscilante da razão -1.

Logo, para a sequência apresentada ser uma PG crescente devemos ter $x = 4$.

88 Para que uma sequência de três números seja PA, o termo médio deve ser a média aritmética dos outros dois; para ser PG, o termo médio ao quadrado deve ser igual ao produto dos outros dois. Então:

$$\begin{cases} \frac{a + c}{2} = 4 \\ (c + 2)a = 4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 8 \\ ac + 2a = 16 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} c = 8 - a & \text{(I)} \\ ac + 2a = 16 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:
$a(8 - a) + 2a = 16$
$\therefore\ 8a - a^2 + 2a = 16$
$\therefore\ a^2 - 10a + 16 = 0$
$\Delta = 100 - 64 = 36$
$\therefore\ a = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$
Logo, $a = 8$ ou $a = 2$.
Substituindo a em (I), temos:
$c = 0$ ou $c = 6$
Como, por hipótese, c é positivo, temos $c = 6$. Substituindo c por 6 em (I), concluímos que $a = 2$.
Portanto, $a = 2$ e $c = 6$.

89 Sabendo que o primeiro termo é a_1, o termo médio é $a_n = \sqrt{a_1}$ e o último termo é x, temos:
$(a_n)^2 = a_1 \cdot x \Rightarrow \left(\sqrt{a_1}\right)^2 = a_1 \cdot x$
$\therefore\ x = 1$
Logo, o último termo dessa PG é 1.

90 A sequência de valores do imóvel forma a PG:
$(100, x + 30, 2x - 39)$
Então:
$(x + 30)^2 = 100(2x - 39) \Rightarrow x^2 + 60x + 900 =$
$= 200x - 3.900$
$\therefore\ x^2 - 140x + 4.800 = 0$
$\Delta = (140)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4.800 = 400$
$\therefore\ x = \frac{140 \pm \sqrt{400}}{2} \Rightarrow x = 80 \text{ ou } x = 60$
Para essa PG ser crescente, pois o imóvel se valorizou, devemos ter: $x = 80$
Logo, ao final desse período o apartamento valia R$ 121.000,00.

91 Sejam os números em PA:
$(x - r, x, x + r)$
Como a soma é 30, temos:
$x - r + x + x + r = 30 \Rightarrow x = 10$
Os números em PG são:
$(10 - r + 4, 10 - 4, 10 + r - 9) = (14 - r, 6, 1 + r)$
Sabemos que numa PG de três termos, o produto dos extremos é igual ao quadrado do termo médio. Logo:
$(14 - r)(1 + r) = 36$
$\therefore\ r^2 - 13r + 22 = 0$
$\Delta = 169 - 88 = 81$
$\therefore\ r = \frac{13 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2} \Rightarrow r = 2 \text{ ou } r = 11$
Como os números que formam a PA são positivos, $r = 2$. Logo, a PA é:
$(10 - 2, 10, 10 + 2) = (8, 10, 12)$
Alternativa **c**.

92 Temos que a razão da PG é:
$q = \frac{2}{1} = 2$
Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, da soma dos n primeiros termos da PG temos, para $n = 10$:
$S_{10} = \frac{1(1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{-1.023}{-1} = 1.023$

93 Temos que é a razão da PG é:
$q = \frac{1}{2}$.

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos, para $n = 11$:

$$S_{11} = \frac{2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{2.047}{2.048}}{\frac{1}{2}} = \frac{2.047}{1.024} \cdot 2 = \frac{2.047}{512}$$

94 a) Temos $q = -1$ e $a_1 = 1$.
Como a soma dos n primeiros termos da PG é dada por $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$, temos, para $n = 50$:

$$S_{50} = \frac{1[1 - (-1)^{50}]}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

b) Baseado no item **a**, para $n = 51$, temos:

$$S_{51} = \frac{1[1 - (-1)^{51}]}{1 - (-1)} = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

95 Pela fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$$765 = \frac{a_1(1 - 2^8)}{1 - 2} \Rightarrow -765 = a_1(-255)$$

$\therefore a_1 = 3$
Logo, o primeiro termo dessa PG é 3.

96 Nessa PG, a razão é $q = k$ e o primeiro termo é $a_1 = 1$.
Como $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ é a soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$$S_{30} = \frac{1(1 - k^{30})}{1 - k} = \frac{1 - k^{30}}{1 - k}$$

97 Temos $a_1 = 5$ e $q = 2$.
Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$$S_n = \frac{5(1 - 2^n)}{1 - 2} = -5(1 - 2^n) = 5(2^n - 1)$$

Alternativa **c**.

98 Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PG, temos:

$$12.285 = \frac{3(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow -4.095 = 1 - 2^n$$

$\therefore 2^n = 4.096 \Rightarrow 2^n = 2^{12}$
$\therefore n = 12$

99 Os números de pessoas das gerações anteriores à minha formam uma PG em que a 1ª geração é o primeiro termo, ou seja, $a_1 = 2$, e a razão é $q = 2$.
Assim:

$$S_{20} = \frac{2(1 - 2^{20})}{1 - 2} = -2(1 - 2^{20}) =$$
$$= -2(1 - 1.048.576) = 2.097.150$$

Portanto, o número de meus antepassados até a 20ª geração anterior à minha é maior que 2.000.000.
Alternativa **a**.

100 a) Como a cada semana as vendas devem dobrar, temos que os números de cópias vendidas formam uma PG com $q = 2$ e $a_1 = 20$.
Aplicando a fórmula do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, para $a_n = 10.240$, temos:
$10.240 = 20 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1}$
$\therefore 2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow 9 = n - 1$
$\therefore n = 10$
Logo, na 10ª semana o CD venderá 10.240 cópias.

b) Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a^1(1 - q^n)}{1 - q}$, da soma dos n primeiros termos da PG, temos, para $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{20 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = -20 \cdot (1 - 1.024) =$$
$$= 20.460$$

Logo, até a 10ª semana terão sido vendidas 20.460 cópias.

101 Da PG, temos $q = 2$ e $a_1 = \frac{1}{256}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos, para $n = 18$:

$$P_{18} = \left(\frac{1}{256}\right)^{18} \cdot 2^{\frac{17 \cdot 18}{2}} = \frac{1}{(2^8)^{18}} \cdot 2^{153} = \frac{2^{153}}{2^{144}} =$$
$$= 2^9 = 512$$

Portanto, o produto dos 18 primeiros termos da PG é 512.

102 Da PG, temos $q = 7^2$ e $a_1 = \frac{1}{7^{12}}$. Aplicando $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, temos, para $n = 14$:

$$P_{14} = \left(\frac{1}{7^{12}}\right)^{14} \cdot (7^2)^{\frac{13 \cdot 14}{2}} = \frac{(7^2)^{91}}{(7^{12})^{14}} = \frac{7^{182}}{7^{168}} =$$
$$= 7^{182 - 168} = 7^{14}$$

Portanto, o produto dos 14 primeiros termos da PG é 7^{14}.

103 Aplicando a fórmula $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, para $a_1 = 1$ e $P_8 = 81$, temos:

$$81 = 1^8 \cdot q^{\frac{7 \cdot 8}{2}} \Rightarrow 81 = q^{28}$$

$\therefore q = \pm\sqrt[28]{3^4} = \pm\sqrt[7]{3}$
Como a PG é crescente, deduzimos que $q = \sqrt[7]{3}$; logo, a PG é $(1, \sqrt[7]{3}, \sqrt[7]{3^2}, \sqrt[7]{3^3}, \sqrt[7]{3^4}, \sqrt[7]{3^5}, \sqrt[7]{3^6}, 3)$.

104 a) Temos $a_1 = 63$ e $q = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$.
Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{63}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow S_\infty = \frac{189}{2}$$

Portanto, a soma dos infinitos termos da PG é $\frac{189}{2}$.

b) Temos $a_1 = 40$ e $q = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$.
Aplicando $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, temos:

$$S_\infty = \frac{40}{1 + \frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \frac{80}{3}$$

Assim, a soma dos infinitos termos da PG é $\frac{80}{3}$.

c) Temos $a_1 = 0{,}4$ e $q = \frac{0{,}04}{0{,}4} = 0{,}1$.

Aplicando $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$S_\infty = \frac{0{,}4}{1-0{,}1} \Rightarrow S_\infty = \frac{4}{9}$

Logo, nessa PG, a soma dos infinitos termos é $\frac{4}{9}$.

105 $a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow \frac{16}{27} = 3 \cdot q^4$

$\therefore\ q = \pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\frac{2}{3}$

Como a PG é oscilante, deduzimos que $q = -\frac{2}{3}$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, concluímos:

$S_\infty = \frac{3}{1+\frac{2}{3}} \Rightarrow S_\infty = \frac{9}{5}$

106 a) Temos:

$5{,}222... = 5 + \underbrace{0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + ...}_{\text{PG de razão } q\,=\,0{,}1}$

Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$S_\infty = \frac{0{,}2}{1-0{,}1} = \frac{2}{9}$

Logo:

$5{,}222... = 5 + \frac{2}{9} = \frac{47}{9}$

b) Temos:

$4{,}5333... = 4{,}5 + \underbrace{0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + ...}_{\text{PG de razão } 0{,}1}$

Aplicando a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$S_\infty = \frac{0{,}03}{1-0{,}1} = \frac{1}{30}$

Logo:

$4{,}5333... = 4{,}5 + \frac{1}{30} = \frac{45}{10} + \frac{1}{30} = \frac{68}{15}$

107 Da PG, temos $q = \frac{2}{5}$.

Sabendo que $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ é a soma dos infinitos termos da PG, temos:

$\frac{25}{3} = \frac{a_1}{1-\frac{2}{5}} \Rightarrow a_1 = 5$

Como $a_1 = x$, temos que $x = 5$.

108 As distâncias, em metro, percorridas em alguns segundos após a freada são os primeiros termos da PG $\left(20, 5, \frac{5}{4}, ...\right)$. Como a soma dos infinitos termos dessa PG é $\frac{80}{3} \approx 26{,}66$, que é menor que 100, concluímos que não haverá o choque do caminhão com a pedra.

109 Nessa sequência, cada lado de um triângulo qualquer, a partir do segundo, é base média do triângulo precedente e, portanto, o perímetro de cada triângulo, a partir do segundo, é metade do perímetro do triângulo precedente. Assim, os perímetros, em centímetro, formam a PG infinita, com $a_1 = 20$ e $q = \frac{1}{2}$:

$\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...\right)$

A soma dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{20}{1-\frac{1}{2}} = 40$

Logo, a soma dos perímetros dos infinitos triângulos é 40 cm.

110 a) Indicando por ℓ o comprimento do lado do quadrado *ABCD*, temos que a cada divisão do quadrado o comprimento dos lados dos novos quadrados é metade do quadrado anterior.

Logo, temos que a soma das áreas das infinitas figuras é:

$3\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{\ell}{8}\right)^2 + ... = 3\underbrace{\left(\frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{16} + \frac{\ell^2}{64} + ...\right)}_{\text{Soma de PG de razão } \frac{1}{4}}$

Aplicando $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$, temos:

$S_\infty = \frac{\frac{\ell^2}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\ell^2}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\ell^2}{3}$

Assim, a soma S_A das áreas das infinitas figuras é dada por:

$S_A = 3 \cdot \frac{\ell^2}{3} = \ell^2$

Como a área do quadrado *ABCD* é ℓ^2, demonstramos a proposição.

b) De modo análogo, temos que a soma dos perímetros das infinitas figuras é dada por:

$8 \cdot \frac{\ell}{2} + 8 \cdot \frac{\ell}{4} + 8 \cdot \frac{\ell}{8} + ... = 8\underbrace{\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} + \frac{\ell}{8} + ...\right)}_{\text{PG}}$

Aplicando $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ na PG, em que $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = \frac{\ell}{2}$, temos:

$S_\infty = \frac{\frac{\ell}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \ell$

Assim, a soma S_p dos perímetros das infinitas figuras é dada por:

$S_p = 8 \cdot \ell$

Como o perímetro do quadrado *ABCD* é 4ℓ, demonstramos a proposição.

111 **1º modo**

Sabemos que o barco dos contrabandistas está a 10 km do barco dos policiais.

Como os policiais desenvolvem o dobro da velocidade dos contrabandistas, eles percorrem o dobro da distância percorrida pelos contrabandistas em um intervalo de tempo.

Então, quando os contrabandistas percorrerem 10 km, os policiais percorrerão o dobro, ou seja, 20 km, alcançando assim o barco dos contrabandistas.

Portanto, o barco da polícia deverá percorrer 20 km para alcançar os contrabandistas.

2º modo

Quando o barco da polícia percorrer a distância inicial $d_1 = 10$ km, o barco dos criminosos terá percorrido 5 km; assim, a distância entre os barcos será $d_2 = 5$ km. Quando o barco da polícia percorrer mais a distância $d_2 = 5$ km, o barco dos criminosos terá percorrido mais 2,5 km; assim, a distância entre os barcos será $d_3 = 2{,}5$ km. Quando o barco da polícia percorrer mais a distância $d_3 = 2{,}5$ km, o barco dos criminosos terá percorrido mais 1,25 km; assim, a distância entre os barcos será $d_4 = 1{,}25$ km. E assim, sucessivamente, temos a PG (10; 5; 2,5; 1,25; ...) formada pelas distâncias $d_1, d_2, d_3, d_4, ...,$ em que $a_1 = 10$ e $q = 0{,}5$.

Aplicando a fórmula $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$, temos:

$S_\infty = \dfrac{10}{1 - 0{,}5} = 20.$

Concluímos, então, que o barco da polícia percorrerá 20 km até alcançar o barco dos criminosos.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 Se o número 2 estiver no visor, teremos:

$$2 \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{V} 1 \xrightarrow{T} 1 \xrightarrow{V} 2 \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{V} 1 \xrightarrow{T} 1$$

Ou seja, a cada 4 digitações, T, V, T e V, o número 2 volta ao visor.

Dividindo as 1.999 digitações por 4, temos:

$1.999 = 4 \cdot 499 + 3$

Assim, depois de 1.996 digitações aparecerá o número 2 no visor e ainda teremos de digitar 3 teclas:

$$2 \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{V} 1 \xrightarrow{T} 1.$$

Logo, após 1.999 digitações, aparecerá o número 1 no visor.

Alternativa **b**.

2 Indicando por A a área da figura 1, temos a seguinte sequência de áreas:

$$\left\{A, \frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \frac{A}{4}, ..., \frac{A}{n}, ...\right\}$$

Logo, a área da figura 100 é:

$\dfrac{A}{100} = \dfrac{20^2}{100} = 4$

Alternativa **c**.

3 Temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = f(1) = 1 + 1 = 2$	$a_7 = f(1) = 2$	etc.
$a_3 = f(2) = 2 + 1 = 3$	$a_8 = f(2) = 3$	
$a_4 = f(3) = 3 + 1 = 4$	$a_9 = f(3) = 4$	
$a_5 = f(4) = 4 + 1 = 5$	$a_{10} = f(4) = 5$	
$a_6 = f(5) = \dfrac{5}{5} = 1$	$a_{11} = f(5) = 1$	

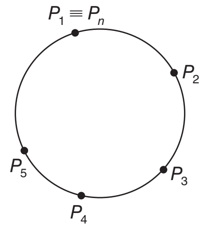
Observamos que a sequência (a_n) é formada apenas pelos números 1, 2, 3, 4 e 5 repetidos seguidamente nessa ordem. Assim, dividindo 123 por 5, temos:

$123 = 24 \cdot 5 + 3$

Portanto:

$a_{123} = a_3 = 3$

4



Para P_n, a circunferência é dividida em $(n - 1)$ arcos.

a) Para $\alpha = 30°$, temos $\dfrac{360°}{30°} = 12$ arcos.

Logo, $n = 13$.

b) $n - 1 = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow n = \dfrac{360° + \alpha}{\alpha}$

5 Pelo enunciado:

$a_1 = 7$
$a_2 = (4 + 9) + 1 = 14$
$a_3 = (1 + 9 + 6) + 1 = 17$
$a_4 = (2 + 8 + 9) + 1 = 20$
$a_5 = (4 + 0 + 0) + 1 = 5$
$a_6 = (2 + 5) + 1 = 8$
$a_7 = (6 + 4) + 1 = 11$
$a_8 = (1 + 2 + 1) + 1 = 5$
$a_9 = (2 + 5) + 1 = 8$
$\vdots$

Assim, temos a seguinte sequência:
(7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, ...)

A partir do 5º termo, temos uma repetição de 3 em três.

Observamos que, para $n \geqslant 6$, com n divisível por 3, temos $a_n = 8$.

Então:

$a_6 = a_9 = a_{12} = a_{15} = ... = a_{1.998} = a_{2.001} = 8$

Logo, o 2.002º termo $a_{2.002}$ é 11.

6 Temos que, para uma sequência de n termos, a_i e a_j são equidistantes dos extremos se:

$i = 1 + m$ e $j = n - m$ para qualquer número natural m, com $m \leqslant n$.

Logo:

$i + j = (1 + m) + (n - m) \Rightarrow i + j = 1 + n$

Alternativa **a**.

7 Como a_k e a_{k+7} são equidistantes dos extremos de uma sequência de 20 termos, temos pela questão 6:

$k + k + 7 = 1 + 20 \Rightarrow k = 7$

8 Sabemos que a razão r de uma PA é a diferença entre um termo e seu precedente. Logo:

a) $r = a_{10} - a_9 = 15 - 6 = 9$

b) $r = b_{k+1} - b_k = 5 - 8 = -3$

c) $r = c_2 - c_1 = \dfrac{2k^2}{k^2 - 1} - \dfrac{k}{k - 1} =$

$= \dfrac{2k^2 - k(k + 1)}{k^2 - 1} = \dfrac{2k^2 - k^2 - k}{k^2 - 1} =$

$= \dfrac{k^2 - k}{k^2 - 1} = \dfrac{k \cdot (k - 1)}{(k + 1)(k - 1)} = \dfrac{k}{k + 1}$

9 $a_9 = a_8 + r \Rightarrow a_8 = a_9 - r$

$\therefore a_8 = 5\sqrt{3} - 1 - \dfrac{5}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{11\sqrt{3} - 22}{2 - \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{-11(-\sqrt{3} + 2)}{2 - \sqrt{3}}$

$\therefore a_8 = -11$

10 Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:
$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2 + 1) = 2n + 1$
Como essa diferença não é constante, concluímos que a sequência não é PA.

11 Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, temos:
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+7}{3} - \frac{2n+7}{3} = \frac{2}{3}$$
Como essa diferença é constante, concluímos que a sequência é PA.

12 a) Sendo $r = a_{n+1} - a_n$ a razão da PA, temos:
$r = 2 - (1 - k^2) = 1 + k^2$
Como $1 + k^2 > 0$, temos que a razão é positiva e, portanto, a PA é crescente.
b) Sendo r a razão da PA, temos:
$$r = \frac{h^2 - 1}{h - 1} - (h + 1) = \frac{(h^2 - 1) - (h^2 - 1)}{h - 1} = 0$$
Logo, a PA é constante.
c) Sendo r a razão da PA, temos:
$r = 5 - (5 + a^2) = -a^2$
Como a razão é negativa, a PA é decrescente.

13 Sendo a PA $(x - r, x, x + r)$, temos:
$$\begin{cases}(x - r) + (x + r) = 10\\ x \cdot (x + r) = -40\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 5\\ x^2 + xr = -40\end{cases}$$
Substituindo x por 5 na segunda equação:
$25 + 5r = -40 \Rightarrow r = -13$
Portanto, temos a PA:
$(5 - (-13), 5, 5 - 13) = (18, 5, -8)$

14 Representando a PA por $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$, temos:
$$\begin{cases}x - 3r + x + 3r = 10\\ (x - 3r)(x - r) = -3\end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases}x = 5 & \text{(I)}\\ x^2 - 4rx + 3r^2 = -3 & \text{(II)}\end{cases}$$
Substituindo (I) em (II), obtemos:
$5^2 - 4r \cdot 5 + 3r^2 = -3 \Rightarrow 3r^2 - 20r + 28 = 0$
$\therefore r = 2$ ou $r = \dfrac{14}{3}$
Assim:
- para $x = 5$ e $r = 2$, temos a PA $(-1, 3, 7, 11)$;
- para $x = 5$ e $r = \dfrac{14}{3}$, temos a PA:
$\left(-9, \dfrac{1}{3}, \dfrac{29}{3}, 19\right)$

15 Sabemos que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
Da PA dada, temos $r = \dfrac{1}{4}$ e $a_1 = \dfrac{3}{2}$; então:
$$a_n = \frac{3}{2} + (n - 1)\frac{1}{4} = \frac{6 + n - 1}{4} = \frac{n + 5}{4}$$
Alternativa **b**.

16 Observamos que $f(n + 1) = f(n) + \dfrac{2}{5}$; e concluímos que a sequência $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$ é uma PA de razão $\dfrac{2}{5}$.
Como $f(1) = 5$, temos:
$\left(5, \dfrac{27}{5}, \dfrac{29}{5}, \ldots\right)$
Logo:
$$f(101) = a_{101} = a_1 + 100r \Rightarrow a_{101} = 5 + \frac{200}{5} =$$
$$= \frac{225}{5} = 45$$
Alternativa **a**.

17 Temos que $r = 3$, $a_1 = -10$ e $a_n = 47$.
Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, concluímos:
$47 = -10 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 3n = 60$
$\therefore n = 20$
Logo, a PA tem 20 termos.

18 Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$$\frac{164}{3} = 2 + (n - 1) \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow 164 = 6 + 2n - 2$$
$\therefore n = 80$
Logo, a PA tem 80 termos.

19 Os números n, com $3 \leq n < 1.000$, que resultam da soma de três números inteiros consecutivos são:
$a_1 = 0 + 1 + 2 = 3$
$a_2 = 1 + 2 + 3 = 6$
$a_3 = 2 + 3 + 4 = 9$
$\vdots$
$a_n = 332 + 333 + 334 = 999$
Logo, esses números formam uma PA de razão 3.
Sendo $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$999 = 3 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow 3n = 999$
$\therefore n = 333$
Alternativa **a**.

20 Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$8 = 5 + (20 - 1) \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{3}{19}$
Logo, a razão da PA é $\dfrac{3}{19}$.

21 Ao inserir 5 meios aritméticos, formamos uma PA de 7 termos, com $a_1 = 1$ e $a_7 = 20$.
Logo
$20 = 1 + 6 \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{19}{6}$
Então, a PA é $\left(1, \dfrac{25}{6}, \dfrac{44}{6}, \dfrac{63}{6}, \dfrac{82}{6}, \dfrac{101}{6}, 20\right)$.

22 Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$$\begin{cases}a_5 + a_7 = -20\\ a_3 - a_6 = 12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1 + 4r + a_1 + 6r = -20\\ a_1 + 2r - a_1 - 5r = 12\end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases}2a_1 + 10r = -20 & \text{(I)}\\ -3r = 12 & \text{(II)}\end{cases}$$
De (II): $r = -4$.
Substituindo r por -4 em (I), temos:
$2a_1 - 40 = -20 \Rightarrow a_1 = 10$
Logo, o primeiro termo é 10.

23 $$\begin{cases}a_{10} = -51\\ a_{18} = -91\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1 + 9r = -51 & \text{(I)}\\ a_1 + 17r = -91 & \text{(II)}\end{cases}$$
Subtraindo membro a membro (I) e (II), temos:
$8r = -40 \Rightarrow r = -5$
Substituindo r por -5 em (I), concluímos:
$a_1 + 9 \cdot (-5) = -51 \Rightarrow a_1 = -6$
Logo, o primeiro termo é -6.

24 Sabemos que $a_m = a_k + (m - k) \cdot r$; então:
$a_{18} = a_7 + (18 - 7) \cdot r \Rightarrow k - 1 = 2k - 6 + 11 \cdot r$
$\therefore r = \dfrac{5 - k}{11}$

25 Pela fórmula do term geral da PA, temos $a_k = 37 + (k - 1) \cdot 2$, em que k é um número natural não nulo. Para que a_k seja um múltiplo de k, deve existir um número natural n tal que $a_k = nk$, ou seja:
$37 + (k - 1) \cdot 2 = nk \Rightarrow 35 + 2k = nk$
$\therefore n = \dfrac{35}{k} + 2$

O maior número natural k tal que n também seja natural é 35.
Assim, concluímos que o maior valor possível de a_k é:
$a_{35} = 37 + 34 \cdot 2 \Rightarrow a_{35} = 105$

26 Sabemos que, se n é ímpar, o índice k do termo médio a_k é a média aritmética de 1 e n, isto é:
$k = \frac{n + 1}{2}$
Alternativa **a**.

27 Sabemos que o termo médio a_k é a média aritmética entre o primeiro termo a_1 e o último, a_n. Então:
$a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow 4a_1 = \frac{a_1 + 42}{2}$
$\therefore a_1 = 6$

28 Sabemos que em três termos consecutivos de uma PA o termo médio é a média aritmética dos outros dois. Logo:
$x^2 - 4 = \frac{(x - 1) + (3x - 1)}{2} \Rightarrow 2x^2 - 8 = 4x - 2$
$\therefore 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$
- Para $x = -1$, temos: $(-2, -3, -4)$
- Para $x = 3$, temos: $(2, 5, 8)$

Como a PA deve ser crescente, concluímos que $x = 3$.

29 Para ser PA, o termo médio é média aritmética dos outros dois. Então:
$3x - 1 = \frac{(2x + 5) + (4x - 7)}{2} \Rightarrow 6x - 2 = 6x - 2$
$\therefore 0x = 0$
Portanto, para qualquer x, a sequência é uma PA.

30 Para ser PA, o termo médio é média aritmética dos outros dois. Então:
$2x + 1 = \frac{3x + 6 + x + 4}{2} \Rightarrow 4x + 2 = 4x + 10$
$\therefore 0x = 8$
Logo, não existe valor real de x para que a sequência seja uma PA

31 Sendo $r = a_{n+1} - a_n$, temos:
$r = \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4}$
Sabendo que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$a_{20} = 2 + 19 \cdot \frac{3}{4} = \frac{65}{4}$
Sabemos que a soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.
Logo:
$S_{20} = \frac{\left(2 + \frac{65}{4}\right) \cdot 20}{2} = \frac{365}{2}$

32 Observando que a sequência é uma PA, temos:
$a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$
$a_{18} = 2 \cdot 18 + 5 = 41$
Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma da PA de n termos, obtemos:
$S_{18} = \frac{(7 + 41) \cdot 18}{2} = 432$

33 Temos:
$a_{30} = 12 + 29 \cdot 7 = 215$ e $a_{42} = 12 + 41 \cdot 7 = 299$
Assim, a soma S pedida é a soma dos 13 termos da PA (215, 222, 229, ..., 299), ou seja:
$S = \frac{(215 + 299) \cdot 13}{2} = 3.341$

34 Os múltiplos de 13 entre 100 e 1.000 formam uma PA de razão 13, com termo inicial $a_1 = 13 \cdot 8 = 104$ e último termo $a_n = 13 \cdot 76 = 988$.
Como $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$988 = 104 + (n - 1) \cdot 13 \Rightarrow n = 69$
Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos da PA, concluímos:
$S_{69} = \frac{(104 + 988) \cdot 69}{2} = 37.674$

35 Vamos separar duas sequências:
(I) Os múltiplos positivos de 2 menores que 300 formam uma PA, em que $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$ e o último termo é $a_{149} = 2 \cdot 149 = 298$. A soma dos termos dessa PA é:
$\frac{(2 + 298) \cdot 149}{2} = 22.350$
(II) Os múltiplos ímpares positivos de 3 menores que 300 formam uma PA, em que $b_1 = 3 \cdot 1 = 3$, $b_2 = 3 \cdot 3 = 9$, ..., $b_{50} = 3 \cdot 99 = 297$. A soma dos termos dessa PA, é:
$\frac{(3 + 297) \cdot 50}{2} = 7.500$
A soma S dos múltiplos de 2 ou 3 menores que 300 é dada pela soma dos resultados obtidos em (I) e (II).
Assim:
$S = 22.350 + 7.500 = 29.850$

36 A lei de formação $a_j = 2j + 1$, com $j \in \mathbb{N}^*$ e $j \leqslant n$, determina a PA:
$(3, 5, 7, ..., 2n + 1)$
Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, temos:
$143 = \frac{(3 + 2n + 1) \cdot n}{2} \Rightarrow 286 = 4n + 2n^2$
$\therefore n^2 + 2n - 143 = 0 \Rightarrow n = 11$ ou $n = -13$
Como n deve ser positivo, concluímos que $n = 11$.

37 Sabemos que a sequência dos n primeiros números naturais pares é a PA:
$(0, 2, 4, 6, 8, ..., 2n - 2)$
Sabendo que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:
$S_n = \frac{(0 + 2n - 2) \cdot n}{2} = \frac{2n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$
Portanto, a soma dos n primeiros números pares é $S_n = n^2 - n$.

38 A sequência dos n primeiros números naturais pares diferentes de zero é a PA $(2, 4, 6, ..., 2n)$.
Como $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos de uma PA, concluímos:
$S_n = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = n^2 + n$

39 Os números inteiros, entre 50 e 350, que possuem o algarismo das unidades igual a 1 formam a PA (51, 61, 71, ..., 341).
O número n de termos dessa PA é dado por:
$341 = 51 + (n - 1) \cdot 10 \Rightarrow n = 30$
Assim, sendo S_{30} a soma dos 30 termos dessa PA, concluímos:
$$S_{30} = \frac{(51 + 341) \cdot 30}{2} = 5.880$$
Alternativa **e**.

40 Temos que $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA. Então:
$$150 = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} \Rightarrow a_1 + a_{15} = 20$$
Como a_8 é o termo médio, concluímos
$$a_8 = \frac{a_1 + a_{15}}{2}.$$
$$\therefore a_8 = \frac{20}{2} = 10$$
Alternativa **a**.

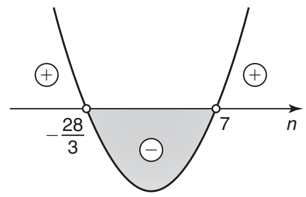
41 Sendo $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{10})$ a PA formada pelas medidas dos ângulos obtidos pelas divisões de um ângulo de medida 60°, temos:
$$S_{10} = 60° \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 60°$$
$\therefore a_1 + a_{10} = 12°$
Alternativa **d**.

42 **a)** Para $n \geqslant 2$, temos:
$a_n = S_n - S_{n-1} = bn^2 + n - [b(n-1)^2 + (n-1)]$
$\therefore a_n = 2bn - b + 1$
Como $a_3 = 7$, temos:
$a_3 = 2b \cdot 3 - b + 1 \Rightarrow 7 = 6b - b + 1$
$\therefore b = \frac{6}{5}$
Temos que a razão da PA é dada por:
$r = a_n - a_{n-1}$; logo:
$r = 2bn - b + 1 - [2b(n-1) - b + 1] = 2b$
$\therefore r = \frac{12}{5}$

b) Sendo $a_n = 2bn - b + 1$, temos:
$$a_{20} = 2 \cdot \frac{6}{5} \cdot 20 - \frac{6}{5} + 1 \Rightarrow a_{20} = \frac{239}{5}$$
c) Como $S_n = bn^2 + n$, temos:
$$S_{20} = \frac{6}{5} \cdot 20^2 + 20 = 500$$

43 **a)** Temos $r = 3$ e $a_1 = 5$.
Sabemos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$; logo:
$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 2 + 3n$
Como $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ é a soma dos n primeiros termos da PA, temos:
$$185 = \frac{(5 + 2 + 3n) \cdot n}{2} \Rightarrow 3n^2 + 7n - 370 = 0$$
$\therefore n = 10$ ou $n = -\frac{37}{3}$
Como n deve ser natural não nulo, concluímos que $n = 10$.

b) Pelo item anterior, a soma dos n primeiros termos da PA é dada por $S_n = \frac{(7 + 3n)n}{2}$. Assim, devemos ter:
$$\frac{(7 + 3n)n}{2} > 98 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 196 > 0$$
O gráfico da função $f(n) = 3n^2 + 7n - 196$ está contido na parábola representada abaixo:



Como n deve ser inteiro positivo, concluímos que $f(n) > 0$ para qualquer n inteiro positivo maior que 7.

44 Como $T_n = T_{n-1} + n$, temos que $T_n - T_{n-1} = n$.
Assim:
$T_1 = 1$
$T_2 - T_1 = 2$
$T_3 - T_2 = 3$
$T_4 - T_3 = 4$
⋮
$T_{100} - T_{99} = 100$
Adicionando, membro a membro, essas igualdades, obtemos:
$T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + (T_4 - T_3) + ... +$
$+ (T_{100} - T_{99}) = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow T_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100$
$$T_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5.050$$
Alternativa **a**.

45 **a)** Temos que $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ é razão da PG; então:
$$q = \frac{4}{\frac{8}{3}} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$
b) Sendo $q = \frac{b_{k+1}}{b_k}$, obtemos:
$$q = \frac{\frac{2}{5}}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{15}$$
c) Sendo $q = \frac{c_{k+1}}{c_k}$, obtemos:
$$q = \frac{k^2 - 1}{k - 1} \Rightarrow q = k + 1 \text{ para } k \neq 1$$

46 $a_{15} = a_{14} \cdot q \Rightarrow a_{14} = \frac{a_{15}}{q} = \frac{k^3 + 1}{k + 1}$
$$\therefore a_{14} = \frac{(k+1)(k^2 - k + 1)}{(k+1)} \Rightarrow a_{14} = k^2 - k + 1$$

47 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{3^{a_{n+1}}}{3^{a_n}} = 3^{a_{n+1} - a_n} = 3^{a_{n+1} - a_n}$
Como $a_{n+1} - a_n$ é uma constante positiva, pois a sequência (a_n) é PA crescente, temos que $3^{a_{n+1} - a_n}$ é uma constante maior que 1. Portanto, a sequência (b_n) é uma PG crescente.
Alternativa **a**.

48 Calculando a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5(n+1)}{5n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

Como essa razão não é constante, concluímos que a sequência não é PG.

49 Calculando a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, para qualquer n, com $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1+3}}{27 \cdot 3^{n+1}}}{\frac{2^{n+3}}{27 \cdot 3^n}} = \frac{2^{n+4}}{27 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{27 \cdot 3^n}{2^{n+3}} = \frac{2}{3}$$

Como essa razão é constante, concluímos que a sequência é uma PG.

50 a) Temos que $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ é razão da PG. Então:

$$q = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{k}} \Rightarrow q = \frac{k}{3}$$

Como $k > 3$, temos que $q > 1$ e $a_1 > 0$. Logo, a PG é crescente.

b) Sendo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, temos:

$$q = \frac{a^2}{a} = a$$

Como $a > 1$, temos que o primeiro termo da PG é positivo e a razão é maior que 1. Logo, a PG é crescente.

c) Sendo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, temos:

$$q = \frac{\frac{t^2 - 9}{t+3}}{t-3} = 1$$

Como $q = 1$, temos que a PG é constante.

d) Temos que $q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$; então:

$$q = \frac{5a^5}{5a^2} = a^3$$

Como $a < 0$, temos que $q < 0$. Logo, a PG é oscilante.

51 Indicando a PG por $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x = 15 \\ \frac{x}{q} \cdot xq = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} + x = 15 & \text{(I)} \\ x = \pm 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

- Substituímos $x = 3$ em (I), obtendo:

  $\frac{3}{q} + 3 = 15 \Rightarrow q = \frac{1}{4}$

  Assim, temos a PG $\left(12, 3, \frac{3}{4}\right)$.

- Substituímos $x = -3$ em (I), obtendo:

  $-\frac{3}{q} - 3 = 15 \Rightarrow q = -\frac{1}{6}$

  Assim, temos a PG $\left(18, -3, \frac{1}{2}\right)$.

Como a PG deve ser decrescente, temos como resposta: $\left(12, 3, \frac{3}{4}\right)$

52 Indicando a PG por: $\left(\frac{a_1}{q^3}, \frac{a_1}{q}, a_1q, a_1q^3\right)$, temos:

$$\begin{cases} \frac{a_1}{q^3} \cdot \frac{a_1}{q} \cdot a_1q \cdot a_1q^3 = 256 \\ \frac{a_1}{q} + a_1q = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1)^4 = 256 & \text{(I)} \\ \frac{a_1}{q} + a_1q = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$a_1 = \pm 4$

- Para $a_1 = 4$, temos:

  $\frac{4}{q} + 4q = 10 \Rightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0$

  $\therefore q = 2$ ou $q = \frac{1}{2}$

- Para $a_1 = -4$, temos:

  $-\frac{4}{q} - 4q = 10 \Rightarrow 4q^2 + 10q + 4 = 0$

  $\therefore q = -2$ ou $q = -\frac{1}{2}$

Como a PG deve ser crescente, concluímos que $a_1 = 4$ e $q = 2$. Portanto, a PG é:

$\left(\frac{1}{2}, 2, 8, 32\right)$

53 Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é a fórmula do termo geral da PG. Então:

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow (k+2)^7 = a_1 \cdot (k+2)^9$

$\therefore a_1 = \frac{1}{(k+2)^2}$ para $k \neq -2$

54 Sendo $q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = 2$ a razão da PG e $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:

$256 = \frac{1}{2^{15}} \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 2^8 = \frac{2^n}{2^{16}}$

$2^n = 2^{24} \Rightarrow n = 24$

Logo, a PG tem 24 termos.

55 Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral da PG, temos:

$\frac{1}{5^{20}} = 625 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{5^{20}} = 5^4 \cdot \frac{1}{5^{n-1}}$

$\therefore 5^{-20} = 5^4 \cdot 5^{-n+1} \Rightarrow -20 = 4 - n + 1$

$\therefore n = 25$

Logo, a PG tem 25 termos.

56 Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:

$\frac{1}{1.024} = 512 \cdot q^{19} \Rightarrow \frac{1}{2^{10}} = 2^9 \cdot q^{19}$

$\therefore q^{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Portanto, a razão da PG é $\frac{1}{2}$.

57 Ao inserir 5 meios geométricos entre 10 e 20, formamos uma PG com 7 termos, em que $a_1 = 10$ e $a_7 = 20$.

Assim, temos:

$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 20 = 10 \cdot q^6$

$\therefore q = \pm\sqrt[6]{2}$

Logo, temos duas interpolações possíveis:

$\left(10, 10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, 10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, 10\sqrt[6]{2^5}, 20\right)$ e

$\left(10, -10\sqrt[6]{2}, 10\sqrt[6]{2^2}, -10\sqrt[6]{2^3}, 10\sqrt[6]{2^4}, -10\sqrt[6]{2^5}, 20\right)$

58 Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$\begin{cases} a_2 \cdot a_4 = 3 \\ a_5 \cdot a_6 = 96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^3 = 3 \\ a_1 \cdot q^4 \cdot a_1 \cdot q^5 = 96 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (a_1)^2 \cdot q^4 = 3 & \text{(I)} \\ (a_1)^2 \cdot q^9 = 96 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, (II) por (I), obtemos:
$q^5 = 32 \Rightarrow q = 2$
Substituindo q por 2 na equação (I), temos:
$(a_1)^2 \cdot 2^4 = 3 \Rightarrow (a_1)^2 = \dfrac{3}{16}$
$\therefore a_1 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}$
Como a PG é crescente, concluímos que o primeiro termo é $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

59 Temos que $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$; então:
$a_{11} = a_6 \cdot q^5 \Rightarrow 4 = 2 \cdot q^5$
$\therefore q = \sqrt[5]{2}$
Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:
$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 2 = a_1 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^5$
$\therefore a_1 = 1$
Logo, o primeiro termo é 1.

60 Sendo $a_m = a_k \cdot q^{m-k}$, temos:
$a_{12} = a_5 \cdot q^7 \Rightarrow k^2 = 3k \cdot q^7$
$\therefore q = \sqrt[7]{\dfrac{k}{3}}$ para $k \neq 0$
Portanto, a razão da PG é $\sqrt[7]{\dfrac{k}{3}}$.

61 Como o 25º termo está na posição ímpar, ele pertence à PA.
Sabemos que as posições ímpares da PA têm a forma $2n - 1$. Logo:
$25 = 2n - 1 \Rightarrow n = 13$
Então, queremos o 13º termo da PA.
Sabemos que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ e, do enunciado, obtemos $r = 3$. Então:
$a_{13} = 2 + 12 \cdot 3 = 38$
Alternativa **b**.

62 Considere r a razão da PA e q a razão da PG.
Do enunciado, temos:
- $a_1 = b_1 = 2$ (I)
- $a_2 = b_7 \Rightarrow a_1 \cdot q = b_1 + 6r$ (II)

Substituindo (I) em (II):
$2 \cdot q = 2 + 6r$
Mas sabemos que $r = \dfrac{3}{10} \cdot q$; então:
$2q = 2 + 6 \cdot \dfrac{3}{10} \cdot q \Rightarrow q = 10$
Assim: $r = \dfrac{3}{10} \cdot 10 = 3$
Temos:
$b_7 = b_1 + 6 \cdot r = 2 + 6 \cdot 3 = 20$
Sendo $S_n = \dfrac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2}$ a soma dos n primeiros termos da PA, concluímos:
$S_7 = \dfrac{(2 + 20) \cdot 7}{2} = 77$
Logo, $b_1 + ... + b_7 = 77$.

63 Temos que $a_n = 4 \cdot 3^n$; logo:
$a_n > 36 \Rightarrow 4 \cdot 3^n > 36$
$\therefore 3^n > 3^2 \Rightarrow n > 2$
Como n representa um número natural, concluímos que o menor valor possível de n é 3.

64 Sendo a_2, $\sqrt{a_2}$ e a_{n-1} o segundo, o termo médio e o penúltimo termo da PG, respectivamente, temos:
$\left(\sqrt{a_2}\right)^2 = a_2 \cdot a_{n-1} \Rightarrow a_2 = a_2 \cdot a_{n-1}$
$\therefore a_{n-1} = 1$
Logo, o penúltimo termo da PG é 1.

65 Observamos que para $x - 1 = 0$, ou seja, $x = 1$, a sequência não é PG.
Assim, devemos ter $x - 1 \neq 0$. Sob essa condição, a sequência é PG se, e somente se,
$$(x + 1)^2 = (x - 1)(3x - 1)$$
ou seja,
$x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - x - 3x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$
$\therefore x = 0$ ou $x = 3$
- Para $x = 0$, temos a PG oscilante: $(-1, 1, -1)$
- Para $x = 3$, temos a PG crescente: $(2, 4, 8)$

Logo, a sequência é uma PG crescente para $x = 3$.

66 Para que três termos consecutivos com o primeiro não nulo formem uma PG, basta que o produto dos extremos seja igual ao quadrado do termo médio. Então:
$$(x - 2) \cdot \frac{25}{(x - 2)} = 5^2 \Rightarrow 25 = 25$$
Portanto, para qualquer valor de x, com $x \neq 2$, a sequência $\left(x - 2, 5, \dfrac{25}{x - 2}\right)$ é uma PG.

67 A sequência só será uma PG se o quadrado do termo médio for o produto dos extremos. Então:
$(x - 1)^2 = -4 \cdot (x + 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -4x - 4$
$x^2 + 2x + 5 = 0$
Como $\Delta = -16 < 0$, então não existe x real que satisfaça a equação.
Portanto, não existe valor real de x para que a sequência seja uma PG.

68 Pelo enunciado, temos que a PG é dada por: $(1, 2, 4, 8)$
Logo, a soma dos termos da PG é $S_4 = 15$.
Sabemos que a soma dos termos da PA, $S_4 = \dfrac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2}$, é igual à soma dos termos da PG. Então:
$15 = \dfrac{(1 + a_4) \cdot 4}{2} \Rightarrow a_4 = \dfrac{13}{2}$
Porém, sabemos que $a_4 = a_1 + 3r$; então:
$\dfrac{13}{2} = 1 + 3r \Rightarrow \dfrac{11}{2} = 3r$
$\therefore r = \dfrac{11}{6}$
Alternativa **e**.

69 Temos que (x, y, z) é a PG (x, xq, xq^2); portanto, a PA é:
$(x, 2xq, 3xq^2)$

Sabendo que numa PA a média aritmética dos extremos é igual ao termo médio, temos:

$2xq = \dfrac{x + 3xq^2}{2} \Rightarrow 4xq = x + 3xq^2$

$\therefore\ 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow q = 1$ ou $q = \dfrac{1}{3}$

- Para $q = 1$, a PG é:
  (x, x, x)
- Para $q = \dfrac{1}{3}$, a PG é:
  $\left(x, \dfrac{x}{3}, \dfrac{x}{9}\right)$

Como, pelo enunciado, o 1º termo deve ser diferente do 2º, concluímos que $q = \dfrac{1}{3}$.

Alternativa **b**.

70 Como $(a, b, a + b)$ é uma PA, temos que a média aritmética dos extremos é igual ao termo médio. Logo:

$\dfrac{a + a + b}{2} = b \Rightarrow 2a - b = 0 \quad \text{(I)}$

Temos que $(2^a, 16, 2^b) = (2^a, 2^4, 2^b)$ é uma PG. Logo, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos. Então:

$(2^4)^2 = 2^a \cdot 2^b \Rightarrow 2^8 = 2^{a+b}$

$\therefore\ a + b = 8 \quad \text{(II)}$

Formamos, assim, o sistema com as equações (I) e (II):

$$\begin{cases} 2a - b = 0 & \text{(I)} \\ a + b = 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, (I) e (II), obtemos:

$3a = 8 \Rightarrow a = \dfrac{8}{3}$

Alternativa **e**.

71 Sendo x, y e z as três parcelas em que dividimos o número 38, temos a PA $(x, y + 1, z)$ e a PG (x, y, z).

Do enunciado:

$x + y + 1 + z = 39 \Rightarrow$

$\Rightarrow (y + 1) - r + (y + 1) + (y + 1) + r = 39$

$\therefore\ 3y = 36 \Rightarrow y = 12$

Sabemos que numa PG o produto dos extremos é igual ao quadrado do termo médio; então:

$12^2 = [(y + 1) - r][(y + 1) + r] \Rightarrow 144 = (13)^2 - r^2$

$r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Assim, determinamos as progressões aritméticas (8, 13, 18) e (18, 13, 8). Concluímos, assim, que a maior das parcelas é 18.

Alternativa **c**.

72 Como os três primeiros termos formam uma PG e o último termo é igual ao primeiro, temos:

(a, aq, aq^2, a)

Sabemos que a soma dos três primeiros termos é 6 e que, como os três últimos formam uma PA, o termo médio, entre eles, é a média aritmética entre os outros dois.

Então:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 6 \\ 2aq^2 = a + aq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1 + q + q^2) = 6 & \text{(I)} \\ a(2q^2 - q - 1) = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), temos:

- $a = 0$ (não convém, pois não satisfaz (I); ou
- $2q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q = 1$ ou $q = -\dfrac{1}{2}$

Substituindo $q = 1$ em (I), temos:

$a \cdot (1 + 1 + 1) = 6 \Rightarrow a = 2$

Substituindo $q = -\dfrac{1}{2}$ em (I), temos:

$a \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = 6 \Rightarrow a = 8$

Então, a sequência é (2, 2, 2, 2) ou (8, −4, 2, 8).

Logo, a soma de seus termos é 8 ou 14.

Alternativa **d**.

73 A soma dos termos de uma PG de n termos, com $q \neq 1$, é

$S_n = \dfrac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$

Sendo $a_1 = 3$ e $q = 3$, temos:

$S_{15} = \dfrac{3 \cdot (1 - 3^{15})}{1 - 3} = \dfrac{3 - 3^{16}}{-2} = \dfrac{3^{16} - 3}{2}$

Alternativa **c**.

74 Sabendo que $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é razão da PG, temos $q = \sqrt{2}$.

Sendo $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ a soma dos n primeiros termos de uma PG, temos:

$S_{18} = \dfrac{3\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{2}^{18}\right)}{1 - \sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}\left(1 - 2^9\right)}{1 - \sqrt{2}} =$

$= \dfrac{3\sqrt{2}\left(2^9 - 1\right)}{\left(\sqrt{2} - 1\right)} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{2} + 1\right)} = 3 \cdot 511 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) =$

$= 1.533\left(2 + \sqrt{2}\right)$

Logo, a soma dos 18 primeiros termos é $1.533\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

75 a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{40} 5^j = 5^1 + 5^2 + \dots + 5^{40}$

Temos assim a soma dos termos de uma PG de 40 termos, com $a_1 = 5$ e $q = 5$.

Logo:

$S_{40} = \dfrac{5(1 - 5^{40})}{1 - 5} = \dfrac{5 - 5^{41}}{-4} = \dfrac{5^{41} - 5}{4}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{j=1}^{40} 5^j = \dfrac{5^{41} - 5}{4}$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^n =$

$= 6 + 18 + 54 + \dots + 2 \cdot 3^n$

Temos assim a soma dos termos de uma PG de n termos, com $a_1 = 6$ e $q = 3$. Então:

$S_n = \dfrac{6(1 - 3^n)}{1 - 3} = \dfrac{6(1 - 3^n)}{-2} = -3(1 - 3^n) =$

$= 3^{n+1} - 3$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2 \cdot 3^j = 3^{n+1} - 3$

76 Temos:

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2^j = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 4.094$

Pela fórmula $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, temos:

$4.094 = \dfrac{2(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow 4.094 = 2^{n+1} - 2$

$2^{n+1} = 4.096 \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{12}$

$\therefore\ n = 11$

77 Temos:

$\sum_{j=1}^{15}(j + 2^j) =$

$= (1 + 2^1) + (2 + 2^2) + (3 + 2^3) + \dots + (15 + 2^{15}) =$

$= (1 + 2 + 3 + \dots + 15) + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15})$

- $1 + 2 + 3 + \dots + 15$ é a soma dos 15 primeiros termos da PA de razão $r = 1$ e $a_1 = 1$. Logo:

  $1 + 2 + 3 + \dots + 15 = \dfrac{(1 + 15) \cdot 15}{2} = 120$

- $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15}$ é a soma dos 15 primeiros termos da PG de razão $q = 2$ e $a_1 = 2$. Logo:

  $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{15} = \dfrac{2(1 - 2^{15})}{1 - 2} = 2^{16} - 2 =$

  $= 65.536 - 2 = 65.534$

$\therefore \sum_{j=1}^{15}(j + 2^j) = 120 + 65.534 = 65.654.$

78 $S_n > \dfrac{8.191}{4.096} \Rightarrow \dfrac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} > \dfrac{8.191}{4.096}$

$\therefore 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n > \dfrac{8.191}{8.192} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{8.192}$

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{13} \Rightarrow n > 13$

Como n representa um número natural, concluímos que o menor valor possível de n é 14.

79 A sequência é a seguinte PG de 30 termos:

$\left(\dfrac{1}{5^9}, \dfrac{1}{5^8}, \dfrac{1}{5^7}, \dots, 5^{19}, 5^{20}\right)$

Aplicando a fórmula $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}$, para $n = 30$, concluímos:

$P_{30} = \left(\dfrac{1}{5^9}\right)^{30} \cdot 5^{\frac{(30-1)30}{2}} \Rightarrow P_{30} = \dfrac{1}{5^{270}} \cdot 5^{435} = 5^{165}$

Logo, o produto dos 30 termos da sequência é 5^{165}.
Alternativa **a**.

80 Sabemos que $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ é o produto dos n termos da PG; então:

$7^{630} = 7^n \cdot 7^{\frac{(n-1)n}{2}} \Rightarrow 630 = n + \dfrac{(n-1)n}{2}$

$\therefore 1.260 = 2n + n^2 - n \Rightarrow n^2 + n - 1.260 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos:
$n = 35$ ou $n = -36$ (não convém)
Assim, $n = 35$.

81 A sequência (5, 25, 125, ...) é uma PG de razão $q = 5$ e $a_1 = 5$.
Sendo $P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ o produto dos n primeiros termos, temos:

$P_n = 5^n \cdot 5^{\frac{(n-1)n}{2}} = 5^{n + \frac{(n-1)n}{2}} = 5^{\frac{2n + n^2 - n}{2}} =$

$= 5^{\frac{n^2 + n}{2}}$

$\therefore P_n = 5^{\frac{n^2 + n}{2}}$

82 **a)** Temos $P_1 = a_1$; então, para $n = 1$, temos:

$P_1 = 3^{\frac{1+1}{2}} \Rightarrow P_1 = 3$

$\therefore a_1 = 3$

b) Temos $P_2 = a_1 \cdot a_2$; então, para $n = 2$, temos:

$P_2 = 3^{\frac{4+2}{2}} \Rightarrow P_2 = 3^3 = 27$

Do item **a**, $a_1 = 3$, então:
$P_2 = a_1 \cdot a_2 \Rightarrow 27 = 3 \cdot a_2$
$\therefore a_2 = 9$

Sabemos que $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ é razão da PG; então

$q = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{9}{3} = 3$

c) Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:

$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = 3 \cdot 3^3 = 81$

d) Temos $a_3\, a_4\, a_5 = \dfrac{P_5}{P_2}$. Assim:

$a_3\, a_4\, a_5 = \dfrac{3^{\frac{5^2+5}{2}}}{3^{\frac{2^2+2}{2}}} = \dfrac{3^{15}}{3^3} = 3^{12}$

83 **a)** Sabemos que $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q}$ é a soma dos infinitos termos de uma PG com $-1 < q < 1$. Então, para $q = \dfrac{2}{5}$ e $a_1 = 1$, temos:

$S_\infty = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \dfrac{5}{3}$

b) Para $q = -\dfrac{2}{3}$ e $a_1 = -4$, temos:

$S_\infty = \dfrac{-4}{1 + \frac{2}{3}} = -\dfrac{12}{5}$

c) Para $q = 0{,}2$ e $a_1 = 1$, temos:

$S_\infty = \dfrac{1}{1 - 0{,}2} = \dfrac{1}{0{,}8} = \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4}$

84 **a)** Temos:
$7{,}484848\ldots = 7 + 0{,}48 + 0{,}0048 + 0{,}000048 + \ldots$
em que $(0{,}48 + 0{,}0048 + 0{,}000048 + \ldots)$ é a soma dos infinitos termos da PG de razão $q = 0{,}01$ e $a_1 = 0{,}48$.

Aplicando $S_\infty = \dfrac{a^1}{1 - q}$, temos:

$S_\infty = \dfrac{0{,}48}{1 - 0{,}01} = \dfrac{0{,}48}{0{,}99} = \dfrac{48}{99}$

$\therefore 7{,}484848\ldots = 7 + \dfrac{48}{99} = \dfrac{741}{99} = \dfrac{247}{33}$

b) Temos:
$2{,}54666\ldots = 2{,}54 + 0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + \ldots$
Observando que $(0{,}006 + 0{,}0006 + 0{,}00006 + \ldots)$ é a soma dos infinitos termos da PG de razão $q = 0{,}1$ e $a_1 = 0{,}006$, temos:

$S_\infty = \dfrac{0{,}006}{1 - 0{,}1} = \dfrac{0{,}006}{0{,}9} = \dfrac{6}{900}$

$\therefore 2{,}54666\ldots = \dfrac{254}{100} + \dfrac{6}{900} = \dfrac{2.292}{900} = \dfrac{191}{75}$

85 O perímetro de um círculo de raio r é $2\pi r$. Assim, a sequência dos perímetros é a PG infinita:

$\left(8\pi, 4\pi, 2\pi, \pi, \dfrac{\pi}{2} \ldots\right)$

A soma S_∞ dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$S_\infty = \dfrac{8\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 16\pi$

Logo, a soma dos perímetros dos infinitos círculos é 16π cm.
Alternativa **c**.

86 O produto dos infinitos termos da sequência é:

$$\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^5}}}\cdot\ldots=\sqrt[3]{2^5}\cdot\sqrt[9]{2^5}\cdot\sqrt[27]{2^5}\cdot\ldots=$$

$$=2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{9}}\cdot 2^{\frac{5}{27}}\cdot\ldots=2^{\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\ldots}$$

em que $\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\ldots$ é a soma S_∞ dos infinitos termos da PG de razão $q=\frac{1}{3}$ e $a_1=\frac{5}{3}$. Assim:

$$S_\infty=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$$

Logo:

$$2^{\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\ldots}=2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}$$

87 As áreas dos círculos, em ordem decrescente, formam a PG infinita:

$$\left(\frac{\pi m^2}{4}, \frac{\pi m^2}{8}, \frac{\pi m^2}{16}, \ldots\right)$$

Logo, a soma S_∞ dessas infinitas áreas é dada por:

$$S_\infty=\frac{\frac{\pi m^2}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi m^2}{2}$$

Alternativa **a**.

88 Sendo $AB = d$ e $BB' = h$, temos que a área do triângulo ABB' é $\frac{dh}{2}$.

As áreas dos triângulos destacados, em ordem decrescente, formam a PG $\left(\frac{dh}{4}, \frac{dh}{8}, \frac{dh}{16}, \ldots\right)$, cuja soma dos infinitos termos é dada por:

$$S_\infty=\frac{\frac{dh}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{dh}{2}$$

Concluímos, então, que a soma das áreas dos triângulos destacados é igual à área do triângulo ABB'.

Alternativa **a**.

Exercícios contextualizados

89 Sendo x o 1º número a aparecer na tela, temos:

2º número: $x \rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x+1}{x}$

3º número: $\frac{x+1}{x} \rightarrow \frac{x}{x+1} \rightarrow \frac{2x+1}{x+1}$

4º número: $\frac{2x+1}{x+1} \rightarrow \frac{x+1}{2x+1} \rightarrow \frac{3x+2}{2x+1}$

5º número: $\frac{3x+2}{2x+1} \rightarrow \frac{2x+1}{3x+2} \rightarrow \frac{5x+3}{3x+2}$

Portanto, o 5º número que aparecerá na tela será $\frac{5x+3}{3x+2}$.

90 Observando o esquema abaixo, constatamos que a cada 7 dias a sequência de dias da semana S = (sáb., 4ª f, dom., 5ª f, 2ª f, 6ª f, 3ª f) se repete:

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
sáb.	4ª f	dom.	5ª f	2ª f	6ª f	3ª f

8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª		98ª
sáb.	4ª f	dom.	5ª f	2ª f	6ª f	3ª f	...	... 3ª f

Dividindo 100 por 7, obtemos:

$100 = 14 \cdot 7 + 2$

Assim, na 100ª vez ele terá completado 14 sequências S e terá nadado mais dois dias: sábado e 4ª feira.

Logo, na 100ª vez, José foi nadar na 4ª feira.

Alternativa **b**.

91 **a)** Do enunciado, temos a sequência:

(48, 58, 68, 78, ..., 2.848)

b) A lei de formação dessa sequência é:

$a_n = a_1 + (n - 1)10$

$a_n = 48 + (n - 1)\cdot 10 \Rightarrow a_n = 38 + 10n$

92 **a)** Do enunciado, temos:

$(10.000,\ 10.200,\ 10.404,\ \ldots,\ 10.000(1{,}02)^{20})$

b) A lei de formação da sequência é dada por:

$a_n = 10.000\cdot(1+0{,}02)^{n-1} \Rightarrow a_n = 10.000\cdot 1{,}02^{n-1}$

93 **a)** 1º dia: $\frac{t}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{2}$

2º dia: $\frac{t-\frac{t+1}{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{4}$

3º dia: $\frac{t-\frac{t+1}{2}-\frac{t+1}{4}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{8}$

4º dia: $\frac{t-\frac{t+1}{2}-\frac{t+1}{4}-\frac{t+1}{8}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{t+1}{16}$

Logo, a sequência dos tempos trabalhados nesses quatro dias é:

$$\left(\frac{t+1}{2}, \frac{t+1}{4}, \frac{t+1}{8}, \frac{t+1}{16}\right)$$

b) $\frac{t+1}{2}+\frac{t+1}{4}+\frac{t+1}{8}+\frac{t+1}{16}=t \Rightarrow t=15$

Logo, o pedreiro trabalhou 15 horas para completar a tarefa.

94 **a)** Chamaremos de "rodada" o conjunto de duas jogadas consecutivas dos jogadores A e B, nessa ordem. Assim, esquematizamos:

	Quantidade de bolas retiradas pelo jogador A	Quantidade de bolas retiradas pelo jogador B	Total retirado	Total de bolas na caixa
1ª rodada	2	$5 - 2 = 3$	$2 + 3 = 5$	95
2ª rodada	n_2	$5 - n_2$	$n_2 + 5 - n_2 = 5$	90
3ª rodada	n_3	$5 - n_3$	$n_3 + 5 - n_3 = 5$	85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Da tabela observamos que a cada rodada diminuem sempre 5 bolas da caixa. Os números de bolas na caixa no fim de cada rodada formam a sequência (95, 90, ..., 0), em que $a_n = 100 - 5n$.

Assim, a última bola será retirada quando $a_n = 0$. Portanto: $100 - 5n = 0 \Rightarrow n = 20$

Logo, a última bola será retirada no fim da 20ª rodada.

Então, podemos concluir que o jogador B vencerá, pois é ele quem termina a 20ª rodada.

b) Como cada rodada é composta de 2 jogadas (1 do jogador A e outra do jogador B), o total de jogadas será $2 \cdot 20 = 40$.
Ou seja, o jogo será composto de 40 jogadas.

95 Temos uma PA com $a_1 = 40$ e $r = 6$.
Aplicando $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$136 = 40 + (n - 1)6 \Rightarrow 6n = 102$
$\therefore\ n = 17$
Logo, na 17ª semana foi atingida pela primeira vez a cota máxima de pessoas.
Então, excluindo o primeiro sábado, passaram-se 16 sábados para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez.
Alternativa **b**.

96 As distâncias, em centímetro, alcançadas pelo dardo formam uma PA (a_n) de razão $r = 2$ e $a_{30} = 1.500$. Assim, temos:
$a_{30} = a_3 + (30 - 3)r \Rightarrow 1.500 = a_3 + (30 - 3) \cdot 2$
$\therefore\ a_3 = 1.446$
Logo, no terceiro lançamento o dardo alcançou 1.446 cm, o que equivale a 14,46 m.
Alternativa **c**.

97 A altura da onda no dia 1º de setembro, em metro, seria o termo a_1 da PA (a_n) de razão $r = -0{,}5$ e $a_{25} = 2{,}5$; logo:
$a_{25} = a_1 + 24r \Rightarrow 2{,}5 = a_1 + 24 \cdot (-0{,}5)$
$\therefore\ a_1 = 14{,}5$
Assim, no dia 1º de sentembro, a altura da onda teria sido 14,5 m.
Alternativa **a**.

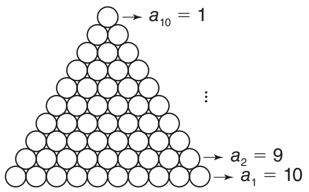
98 Temos que a produção inicial p_i é 10% do consumo mensal de 150 m^3; logo $p_i = 15$ m^3.
Queremos que a produção atinja 70% do consumo mensal, ou seja, $p_F = 105$ m^3.
A cada mês temos um aumento de 3 m^3 na produção; então, as quantidades produzidas do reagente, mês a mês, formam a PA de razão $r = 3$, $a_1 = 15$ e $a_n = 105$.
Aplicando a fórmula do termo geral da PA $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:
$105 = 15 + (n - 1)3 \Rightarrow 3n = 93$
$\therefore\ n = 31$
Portanto, serão necessários 31 meses para que a indústria produza, em um único mês, 70% do volume de reagente consumido.
Alternativa **d**.

99 Os anos em que o corpo celeste pode ser visto da Terra a olho nu podem ser representados pela PA de razão $r = -63$:
(1968, 1905, 1842, ...)
O primeiro ano da era cristã é o último termo da PA tal que $a_n \geqslant 0$. Assim:
$a_n \geqslant 0 \Rightarrow 1968 + (n - 1) \cdot (-63) \geqslant 0$
$\therefore\ 2031 - 63n \geqslant 0 \Rightarrow n \leqslant \dfrac{2031}{63} \approx 32{,}24$
Então, o maior valor inteiro de n que satisfaz $a_n \geqslant 0$ é 32.
Assim, temos:
$a_{32} = 1968 + (32 - 1) \cdot (-63) \Rightarrow a_{32} = 15$
Logo, o primeiro ano do calendário cristão em que o corpo esteve visível foi o ano 15.
Alternativa **a**.

100 Em cada linha da tabela temos uma PA de razão 6. Sendo $a_n = 275$ um termo de uma dessas progressões aritméticas, temos:
$275 = a_1 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow 275 - a_1 = (n - 1) \cdot 6$
Assim, a diferença $275 - a_1$ deve ser um número múltiplo de 6. Testando o primeiro termo de cada PA, temos:
$275 - 1 = 274$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 6 = 269$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 2 = 273$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 5 = 270$ (é múltiplo de 6)
$275 - 3 = 272$ (não é múltiplo de 6)
$275 - 4 = 271$ (não é múltiplo de 6)
O único múltiplo de 6 ocorreu na linha da tabela correspondente à quinta-feira. Logo, a filial atenderá o setor 275 na quinta-feira.
Alternativa **b**.

101 Sabemos que o século XXI vai de 2001 a 2100.
Como 2.100 é o único múltiplo de 100 desse intervalo, e como nesse intervalo não há múltiplo de 400, temos que os anos bissextos desse período formam uma PA de 2.004 a 2.096, de razão $r = 4$.
Da fórmula do termo geral, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 2.096 = 2.004 + (n - 1)4$
$\therefore\ 4n = 96 \Rightarrow n = 24$
Portanto, o século XXI terá 24 anos bissextos.
Alternativa **b**.

102 Se uma camada é um quadrado com a_n laranjas em cada lado, então essa camada contém $(a_n)^2$ laranjas.



Como $(a_1, ..., a_{10})$ é uma PA de razão $r = -1$, temos:
$a_n = 10 + (n - 1)(-1) = 10 + 1 - n = 11 - n$
Assim, concluímos que o número de laranjas da camada de número n dessa pilha é:
$(11 - n)^2$
Alternativa **e**.

103 **a)** As distâncias percorridas pela pedra em cada segundo da queda formam uma PA cujo primeiro termo é $a_1 = 10$, $r = 10$ e cujo último termo é $a_n = 10n$.
(10, 20, 30, ..., 10n)
Logo, temos que a soma dos n termos da PA será a altura do prédio.
Sabendo que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos:
$S_n = \dfrac{(10 + 10n)n}{2} \Rightarrow S_n = 5n^2 + 5n$
Portanto, a altura do prédio é $(5n^2 + 5n)$ metros.

b) Sabemos que no n-ésimo segundo a distância, em metro, percorrida pela pedra foi $10n$. Logo, a velocidade da pedra nesse último segundo foi $10n$ m/s.

104 Como a sequência $(F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ...)$ representa a PA (4, 12, 20, 28, ...) de razão $r = 8$, temos:

a) O termo geral dessa PA é dado por:

$F_n = F_1 + (n - 1)r$. Portanto:

$F_{10} = F_1 + 9r \Rightarrow F_{10} = 4 + 9 \cdot 8 = 76$

b) O número de palitos necessários para construir as 50 primeiras figuras é a soma S_{50} dos 50 primeiros termos da PA $(F_1, F_2, F_3, ..., F_n, ...)$, isto é:

$$S_{50} = \frac{(F_1 + F_{50})50}{2}$$

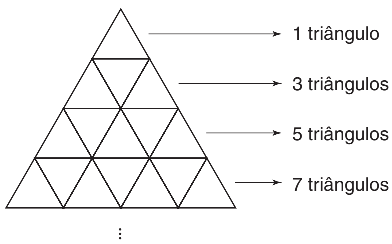
Calculando F_{50}, temos: $F_{50} = 4 + 49 \cdot 8 = 396$.

Logo:

$$S_{50} = \frac{(4 + 396)50}{2} = 10.000$$

Assim, a construção das 50 primeiras figuras exige exatamente 10.000 palitos.

105 Nota-se que, a cada linha de um triângulo assim formado, o número de triângulos aumenta em 2.



Logo, temos que os números de triângulos congruentes ao triângulo T das fileiras formam uma PA de razão 2.

Como queremos um triângulo formado por 49 triângulos congruentes a T, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = 49$$

Usando $a_n = a_1 + (n - 1)r$, obtemos:

$a_n = 1 + (n - 1)2 = 2n - 1$

Assim:

$$\frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = 49 \Rightarrow 2n^2 = 2 \cdot 49$$

$\therefore n = 7$

Portanto, um triângulo formado por 49 triângulos T terá 7 fileiras e, como consequência, terá lado medindo 7 unidades de comprimento.

Alternativa **a**.

106 Só nos 10 primeiros dias, 290 pessoas foram socorridas nesse posto médico.

Sendo $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$, temos:

$$290 = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \Rightarrow a_1 + a_{10} = 58$$

Temos $a_n = a_1 + (n - 1)r$; logo:

$a_{10} = a_1 + 9r$

Assim:

$a_1 + a_1 + 9r = 58 \Rightarrow 2a_1 + 9r = 58 \quad$ (I)

No 21º dia foram atendidos 91 pacientes; então:

$a_{21} = a_1 - (21 - 1)r \Rightarrow a_1 + 20r = 91 \quad$ (II)

Temos, assim, o sistema formado por (I) e (II):

$$\begin{cases} 2a_1 + 9r = 58 \\ a_1 + 20r = 91 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $r = 4$ e $a_1 = 11$.

Logo, o número de pacientes atendidos até o dia 21 é dado por:

$$S_{21} = \frac{(11 + 91) \cdot 21}{2} = 1.071$$

Do dia 22 ao 30 temos uma nova PA, (b_n), com razão $R = -10$, sendo $b_1 = 91 - 10 = 81$

Então, temos que no dia 30 foram atendidos b_9 pacientes, tal que:

$b_9 = 81 + (9 - 1) \cdot (-10) \Rightarrow b_9 = 1$

Logo, o número de pacientes atendidos nesse período é dado por:

$$S_9 = \frac{(81 + 1) \cdot 9}{2} = 41 \cdot 9 = 369$$

Portanto, o número total de pacientes atendidos nesse posto no mês de junho foi $1.071 + 369 =$
$= 1.440$.

Alternativa **b**.

107 **a)** Os números de acessos ao site no mês de janeiro, em ordem crescente, formam a PA de primeiro termo $a_1 = 1.800$ e razão $r = 100$. Assim, o número n do dia de janeiro em que houve 3.700 acessos é obtido por:

$3.700 = 1.800 + (n - 1) \cdot 100 \Rightarrow n = 20$

Logo, o site foi acessado por 3.700 pessoas no dia 20 de janeiro.

b) O número de acessos no mês de janeiro até o dia 20 é a soma S_{20} dos 20 primeiros termos da PA (a_n), com $a_1 = 1.800$ e $a_{20} = 3.700$, ou seja:

$$S_{20} = \frac{(1.800 + 3.700)20}{2} = 55.000$$

Logo, no mês de janeiro, até o dia 20, o site foi acessado por 55.000 internautas.

108 **a)** F, pois:

Os números de fichas distribuídas nos dias 1, 2, 3, ..., n formam a PA $(6, 15, 24, ..., a_n)$ na qual $a_n = 9n - 3$

Para que a soma $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ dos termos dessa PA seja 276, devemos ter:

$$\frac{(6 + 9n - 3) \cdot n}{2} = 276 \Rightarrow 9n^2 + 3n - 552 = 0$$

$\therefore 3n^2 + n - 184 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-184) = 2.209$

$$\therefore n = \frac{-1 \pm 47}{6} \Rightarrow n = \frac{23}{3} \text{ ou } n = -8$$

Como nenhum dos valores de n encontrados é natural, concluímos que não é possível sobrarem 4 fichas após a distribuição.

b) V, pois

Calculando S_7 e a_8 da PA do item a, temos:

$$S_7 = \frac{[6 + (6 + 6 \cdot 9)] \cdot 7}{2} = 231 \text{ e}$$

$a_8 = 6 + 7 \cdot 9 = 69$

Como $S_7 < 280$ e $S_7 + a_8 > 280$, concluímos que a última distribuição ocorreu no 7º dia.

c) V, pois

Os números de fichas recebidas por Z nos 7 dias formam a PA (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21). Logo, o total de fichas recebidas por Z foi 84.

d) F, pois

Os números de fichas recebidas por X nos 7 dias formam a PA (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19). Logo, no 5º dia X recebeu 13 fichas.

e) V, pois

Os números de fichas recebidas por Y nos 7 dias formam a PA (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20). Logo, no fim da distribuição do 6º dia Y havia recebido 57 fichas.

109 Em ordem crescente, as distâncias percorridas, em metro, formam a PA (a_n) de razão $r = 100$ e $a_{21} = 6.000$.

Assim, temos:

$a_{21} = a_1 + 20r \Rightarrow 6.000 = a_1 + 20 \cdot 100$

$\therefore a_1 = 4.000$

A distância percorrida nos 21 dias é a soma S_{20} dos 20 primeiros termos da PA (4.000, 4.100, 4.200, ...), isto é:

$$S_{20} = \frac{(4.000 + 6.000)21}{2} = 105.000$$

Logo, nos 21 dias de caminhada foram percorridos 105.000 m.

Alternativa **b**.

110 Temos que a proliferação do fungo apresenta o comportamento de uma PG de razão $q = 3$.

A área contaminada um mês após a descoberta era $a_1 = 8 \cdot 3 = 24$. Como queremos determinar n tal que a área contaminada a_n seja $\frac{1}{3}$ da área da floresta, temos:

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 472.392 = 157.464$$

Temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é a fórmula do termo geral da PG; então:

$157.464 = 24 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 6.561 = 3^{n-1}$

$\therefore 3^8 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 9$

Portanto, em 9 meses após a descoberta somente $\frac{2}{3}$ da área dessa reserva ainda não estará contaminada.

Alternativa **b**.

111 Os números de lados dos polígonos obtidos nesse processo são multiplicados por 4 a cada figura; assim, temos que os números de lados formam uma PG de primeiro termo $a_1 = 3$ e $q = 4$.

Então, para $n = 6$, temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1 \cdot q^5$

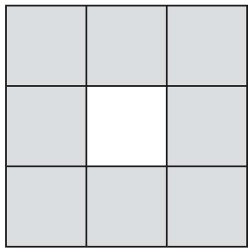
$\therefore a_6 = 3 \cdot 4^5 \Rightarrow a_6 = 3.072$

Portanto, o 6º polígono tem 3.072 lados.

Alternativa **e**.

112 Consideramos apenas uma face do cubo inicial.

A cada processo, a área dessa face reduz-se a $\frac{8}{9}$ de sua área.



A área inicial dessa face é 1 m². Logo, as áreas dessa face formam a PG $\left(1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, ...\right)$.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ e $q = \frac{8}{9}$, temos, para $n = 30$:

$$a_{30} = 1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{29} = \left(\frac{8}{9}\right)^{29}$$

Assim a área da face na figura 30 será $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$ m².

Alternativa **b**.

113 **a)** Temos que a quantidade de coelhos infectados nos períodos de 5 dias forma uma PG de primeiro termo $a_1 = 5$ e razão $q = 3$.

Sendo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a fórmula do termo geral, temos:

$a_5 = 5 \cdot 3^4 = 405$

Logo, serão 405 coelhos infectados.

b) Temos o total de 3.645 coelhos. Então, para que todos estejam infectados devemos ter $a_n = 3.645$.

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$\therefore 3.645 = 5 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 729 = 3^{n-1}$

$\therefore 3^6 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 7$

Portanto, no fim do dia $5 \cdot n - 4 = 31$ todos os coelhos estarão infectados.

114 No período de 1971 a 2320 temos 10 períodos de 35 anos. Como o número de furacões dobra a cada 35 anos, os números de furacões ocorridos nesses períodos formam uma PG com 10 termos, tal que $q = 2$ e $a_1 = x$.

Assim, ao longo dos 10 períodos teremos:

$$S_{10} = \frac{x(1 - 2^{10})}{1 - 2} = 1.023x$$

Portanto, no período de 1971 a 2320 ocorrerão $1.023x$ furacões.

115 Temos que os valores pagos nessas parcelas formam uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ de 10 termos e $a_1 = 256$.

Sendo $S_n = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ a soma dos n primeiros termos da PG, para $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{256\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 512 \cdot \frac{1.023}{1.024} = 511{,}50$$

Portanto, Hélio pagou o total de R$ 511,50 pela máquina de lavar.
Alternativa **b**.

116 A sequência decrescente da 2ª coluna da tabela é a PG (a_n) de razão $q = \dfrac{1}{2}$ e $a_1 = 1$. Após 20 minutos sob a atuação do fermento, obtemos o termo a_{21} da PG, cuja soma S_{21} dos 21 primeiros termos é dada por:

$$S_{21} = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$

Como $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{21}$ é um número muito próximo de zero, podemos obter uma aproximação de S_{21}, por:

$$S_{21} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow s_{21} \approx 2$$

Assim, o volume da massa após 20 minutos de atuação do fermento é, aproximadamente, 2 vezes o volume inicial.
Alternativa **c**.

117 A cada ano a produção dessa indústria dobra e no período de 2001 a 2005 ela produziu 74.400 unidades, ou seja:

Ano	Produção
2001	x
2002	$2x$
2003	$4x$
2004	$8x$
2005	$16x$
Total	74.400

Logo, $31x = 74.400 \Rightarrow x = 2.400$.
Portanto, em 2001 a produção foi de 2.400 unidades.
As produções dessa indústria a cada ano formam uma PG de razão $q = 2$ e $a_1 = x = 2.400$. Queremos determinar a partir de qual ano a produção será superior a 76.800 unidades.
Sendo $a_n = a_1 q^{n-1}$, temos:
$76.800 < 2.400 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 32 < 2^{n-1}$
$\therefore\ 2^5 < 2^{n-1} \Rightarrow n > 6$
Então, a partir de 2007 a produção será superior a 76.800 unidades.
Alternativa **b**.

118 Temos:
$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{20} = 2^{1+2+\ldots+20}$
Temos no expoente a soma dos 20 termos da PA de razão $r = 1$ e $a_1 = 1$.
Sendo $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ a soma dos termos da PA, temos:

$$S_{20} = \frac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$$

$\therefore\ 2^{210} = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \ldots 2^{20}$
Portanto, devem ser acionadas as teclas

$\boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$

Alternativa **c**.

119 Cada contribuinte gasta 90% de sua receita, e esse gasto torna-se receita para outros contribuintes; então, a cada valor gasto, sempre 90% vai gerar novos gastos. Esses gastos, em bilhões de reais, formam uma PG de primeiro termo $a_1 = 36$ e $q = 0{,}9$:
(36; 32,4; 29,16; ...)
O valor global do consumo dos contribuintes é a soma dos infinitos termos dessa PG dada por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{36}{1 - 0{,}9} = 360$$

Portanto, o consumo global será de 360 bilhões de reais.
Alternativa **d**.

120 A afirmação é falsa, pois a velocidade de Aquiles é dez vezes a velocidade da tartaruga; assim, enquanto Aquiles percorre uma distância d, a tartaruga percorre uma distância $\dfrac{d}{10}$.
Portanto, as distâncias entre Aquiles e a tartaruga a cada vez que Aquiles cobre a distância A_0J_{n-1} formam uma PG tal que o primeiro termo é $a_1 = d_0$ e a razão é $q = \dfrac{1}{10}$.

$$\left(d_0, \frac{d_0}{10}, \frac{d_0}{10^2}, \frac{d_0}{10^3}, \frac{d_0}{10^4}, \ldots\right)$$

A soma dos infinitos termos dessa PG é dada por:

$$S_\infty = \frac{d_0}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10d_0}{9}$$

Assim, Aquiles alcançará a tartaruga após percorrer a distância $\dfrac{10d_0}{9}$ no tempo $\dfrac{10t_0}{9}$.

Exercícios de revisão cumulativa

1 O lucro do vendedor será o valor recebido pela venda das x unidades menos o valor gasto com a compra desses produtos, ou seja, $4 \cdot x - 600$. Como esse lucro foi uma quantia entre 160 e 220 reais, temos:
$160 < 4 \cdot x - 600 < 220 \Rightarrow 760 < 4 \cdot x < 820$
$\therefore\ 190 < x < 205$
$\therefore\ x \in\ ]190, 205[$
Alternativa **a**.

2 Como o raio da mancha cresce em função do tempo t obedecendo à relação $R(t) = 16t + 1$, temos que para $t = 5$:

$R(t) = 16 \cdot 5 + 1 = 81$

Assim, após 5 minutos do início do vazamento, o raio da mancha será de 81 m e, portanto, a área A ocupada por ela será:

$A = \pi \cdot 81^2 \text{ m}^2 = 6.561\pi \text{ m}^2$

3 Sabendo que o valor M de uma grandeza qualquer a partir de seu valor inicial C, do tempo t e da taxa constante i de crescimento é dado por $M = C(1 + i)^t$, temos, nesse caso:

$t = 50$ anos

$C = 1{,}2$ bilhões

$i = -0{,}5\%$ ao ano

$\therefore\ M = 1{,}2 \cdot (1 - 0{,}005)^{50} \Rightarrow M = 1{,}2 \cdot 0{,}995^{50} =$
$= 1{,}2 \cdot 0{,}9^2$

$\therefore\ M = 0{,}972$ bilhões

Portanto a população da China no ano 2050 será de 0,972 bilhões de habitantes, o que equivale a:

$0{,}972 \cdot 10^9$ habitantes $= 9{,}72 \cdot 10^8$ habitantes

Alternativa **a**.

Análise da resolução

O primeiro membro da equação representa a soma dos infinitos termos da PG em que o primeiro termo a_1 e a razão q são x e $\frac{x}{2}$, respectivamente. A condição para que exista essa soma é que $-1 < \frac{x}{2} < 1$, ou seja, $-2 < x < 2$.

Sob essa condição, aplicamos a fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$:

$$6 - 4x = \frac{x}{1 - \frac{x}{2}} \Rightarrow 6 - 4x = \frac{x}{\frac{2 - x}{2}}$$

$$\therefore\ 6 - 4x = \frac{2x}{2 - x} \Rightarrow 12 - 6x - 8x + 4x^2 = 2x$$

$$\therefore\ 4x^2 - 16x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Calculando o discriminante da equação, temos:

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

Logo:

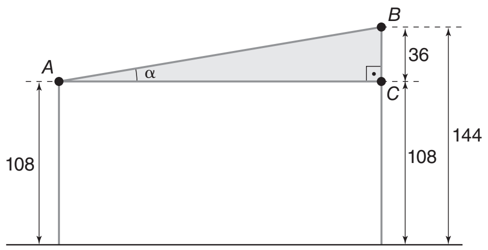
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Apenas $x = 1$ satifaz a condição de existência; portanto, o conjunto solução é $S = \{1\}$.

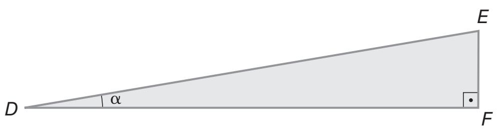
RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Esquematizando a situação, temos:



Para calcular a distância AB, podemos construir com régua e compasso um triângulo DEF semelhante ao triângulo ABC:

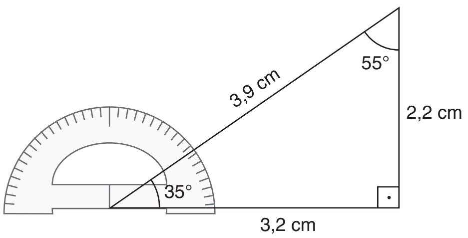


Medindo os lados DE e EF desse triângulo, obtemos a medida AB pela proporção:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{36}{EF} \Rightarrow AB = \frac{36 \cdot DE}{EF}$$

Exercícios propostos

1 a) Resposta possível:



b) Valores aproximados:

	35°	55°
sen	0,56	0,82
cos	0,82	0,56
tg	0,69	1,45

2 a) $\cos 28° = \frac{x}{4} \Rightarrow 0{,}88 = \frac{x}{4}$

Logo: $x = 3{,}52$ cm

b) $\text{sen}\ 28° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0{,}46 = \frac{x}{5}$

Logo: $x = 2{,}3$ cm

c) $\text{tg}\ 28° = \frac{x}{10} \Rightarrow 0{,}53 = \frac{x}{10}$

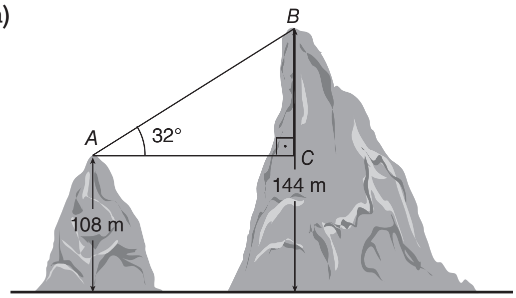
Logo: $x = 5{,}3$ dm

3 No triângulo retângulo ABC, estão relacionados o ângulo agudo (44°), o cateto oposto (ℓ) e o cateto adjacente (40 m). A razão trigonométrica que relaciona essas medidas é a tangente; logo:

$\text{tg}\ 44° = \frac{\ell}{40} \Rightarrow 0{,}96 = \frac{\ell}{40}$, ou seja, $\ell = 38{,}4$

Assim, a largura do rio é 38,4 m.

4 a)



b) $\text{sen}\ 32° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow 0{,}52 = \frac{36}{AB}$

$AB \approx 69{,}23$

Logo, a distância entre A e B é 69,23 m, aproximadamente.

5 $\text{tg}\ 55° = \frac{x}{27}$

Como $\text{tg}\ 55° = \frac{0{,}81}{0{,}57} \approx 1{,}42$, temos:

$1{,}42 \approx \frac{x}{27} \Rightarrow x \approx 38{,}34$

Logo, o valor x na figura é, aproximadamente, 38,34 cm.

6 Temos:

$\cos 10° = \text{sen}\ 80° = 0{,}98$

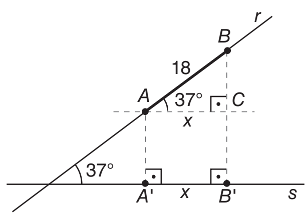
$\cos 80° = \text{sen}\ 10° = 0{,}17$

$\text{tg}\ 10° = \frac{\text{sen}\ 10°}{\cos 10°} = \frac{0{,}17}{0{,}98} \approx 0{,}17$

$\text{tg}\ 80° = \frac{\text{sen}\ 80°}{\cos 80°} = \frac{0{,}98}{0{,}17} \approx 5{,}76$ e, portanto:

	10°	80°
sen	0,17	0,98
cos	0,98	0,17
tg	0,17	5,76

7



$\cos 37° = \frac{x}{18}$

Como $\cos 37° = \text{sen}\ 53° = 0{,}79$, temos:

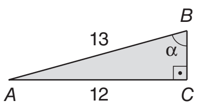
$0{,}79 = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 14{,}22$

Logo: $A'B' = 14{,}22$ cm

8 Temos: sen $(90° - \alpha) = \cos \alpha$ e $\cos(90° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$

$\therefore\ E = \dfrac{\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \text{sen}\ \alpha} + \text{sen}\ \alpha = 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

9 Como α é a medida de um ângulo agudo e sen $\alpha = \dfrac{12}{13}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a ele mede 12 e a hipotenusa mede 13:



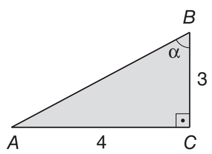
Aplicando o teorema de Pitágoras:

$13^2 = (BC)^2 + 12^2 \Rightarrow BC = 5$

Logo:

$\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{12}{5}$

10 Se α é a medida de um ângulo agudo e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{4}{3}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo de medida α tal que o cateto oposto a esse ângulo mede 4 e o cateto adjacente mede 3:



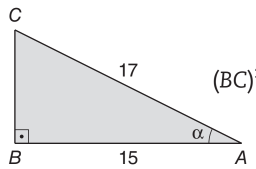
Pelo teorema de Pitágoras:

$(AB)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AB = 5$

Logo:

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{4}{5}$ e $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$

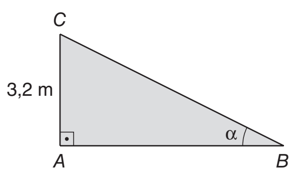
11 a) Sendo α a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AC = 17$ e $AB = 15$, temos:



$(BC)^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow BC = 8$

Logo: $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{BC}{15} = \dfrac{8}{15}$

b) Temos $\triangle ABC$:



A distância dos olhos do espectador à base da tela é a medida do segmento $\overline{AB}$.

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{8}{15} = \dfrac{3{,}2}{AB}$

$\therefore\ AB = 6$ m

Então, a distância dos olhos do espectador à base da tela é 6 m.

12 $E = \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4}{\left(\sqrt{3}\right)^4} = \dfrac{\dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{16}}{9} = \dfrac{1}{16}$

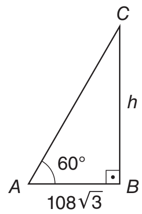
13 $E = \dfrac{\text{sen}\ 30° + \cos 15° - \text{sen}\ 75°}{\text{tg}^2\ 60°}$

Como 15° e 75° são complementares, temos:

$E = \dfrac{\text{sen}\ 30° + \cos 15° - \cos 15°}{\text{tg}^2\ 60°} = \dfrac{\text{sen}\ 30°}{\text{tg}^2\ 60°}$

$E = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{1}{6}$

14 Indicando por h a medida da altura $\overline{BC}$ da torre Eiffel, esquematizamos:



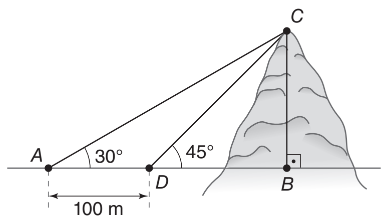
Logo:

$\text{tg}\ 60° = \dfrac{h}{108\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot 108\sqrt{3} = h$

$\therefore\ h = 324$

Concluímos, então, que a torre Eiffel tem 324 m de altura.

15 Esquematizando a situação, temos:



Assim:

$\text{tg}\ 30° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{BC}{100 + BD}$ (1)

$\text{tg}\ 45° = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow 1 = \dfrac{BC}{BD}$

$\therefore\ BC = BD$ (2)

De (1) e (2), temos:

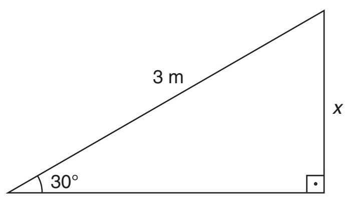
$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{BC}{100 + BC} \Rightarrow \sqrt{3}(100 + BC) = 3 \cdot BC$

$\therefore\ \left(3 - \sqrt{3}\right)BC = 100\sqrt{3} \Rightarrow BC = \dfrac{100\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$

$\therefore\ BC = 50\left(\sqrt{3} + 1\right) \approx 137$

Logo, a altura da parte emersa é $50\left(\sqrt{3} + 1\right)$ m ou, aproximadamente, 137 m.

16



$\text{sen}\ 30° = \dfrac{x}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{3}$; logo $x = 1{,}5$

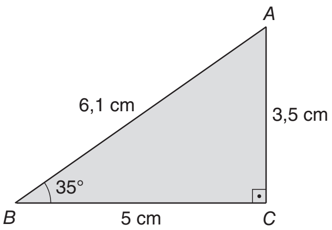
Assim, a altura de cada degrau é $\dfrac{1{,}5}{6}$ m, ou seja, 0,25 m.

Alternativa **c**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) Com régua e transferidor, construímos um triângulo retângulo ABC que tenha um ângulo interno de medida 35° e medimos seus lados.



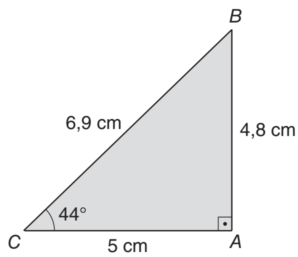
Então, do $\triangle ABC$, temos:

$\text{sen } 35° = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3{,}5}{6{,}1} \approx 0{,}57$

$\cos 35° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{6{,}1} \approx 0{,}82$

$\text{tg } 35° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3{,}5}{5} = 0{,}70$

b) Com régua e transferidor, construímos um triângulo retângulo ABC que tenha um dos ângulos internos de medida 44°.



Pelas definições de sen α, cos α e tg α, temos:

$\text{sen } 44° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4{,}8}{6{,}9} \approx 0{,}69$

$\cos 44° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{6{,}9} \approx 0{,}72$

$\text{tg } 44° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4{,}8}{5} = 0{,}96$

(**Nota:** Quando medimos um segmento de reta com régua graduada, inevitavelmente cometemos erros de aproximação. Por isso, os resultados obtidos nesses itens são valores aproximados.)

2 a) $\text{tg } 70° = \dfrac{x + 18}{2x} \Rightarrow 2{,}75 = \dfrac{x + 18}{2x}$

$\therefore x = 4$

b) Como 20° e 70° são ângulos complementares, temos que sen 20° = cos 70°. Então:

$\text{sen } 20° = \cos 70° = \dfrac{2x - 8{,}26}{x + 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}34 = \dfrac{2x - 8{,}26}{x + 5}$

$\therefore x = 6$

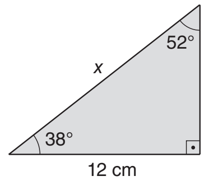
c) $\text{sen } 70° = \dfrac{x + \sqrt{2}}{x + 2\sqrt{2}} \Rightarrow 0{,}94 = \dfrac{x + \sqrt{2}}{x + 2\sqrt{2}}$

$\therefore x = \dfrac{44\sqrt{2}}{3}$

3 Aplicando o teorema da soma dos ângulos internos:

$(\alpha + 34°) + (\alpha + 20°) + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 18°$

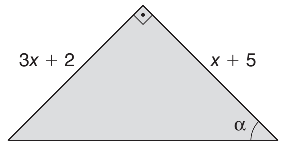
Logo:



$\text{sen } 52° = \dfrac{12}{x} \Rightarrow 0{,}79x = 12$

$\therefore x \approx 15{,}19$ cm

4



$\text{tg } \alpha = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3x + 2}{x + 5} \Rightarrow x = \dfrac{7}{9}$

5 Queremos mostrar que:

$\text{sen } \alpha + \cos \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha + 1 = \cos \alpha$

Dividindo ambos os membros da primeira igualdade por cos α, temos:

$\text{sen } \alpha + \cos \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} + \dfrac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$\therefore \text{tg } \alpha + 1 = \cos \alpha$

6 $4 \text{ sen } \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{3}{4}$

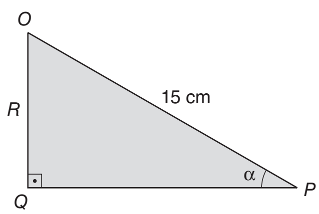
$\therefore \text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4}$

Logo, $E = \dfrac{4 \cdot \frac{3}{4} - 2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{9}{16}} = \dfrac{16}{9}$

7 Os ângulos de medidas 72° e 18° são complementares; portanto: sen 72° = cos 18° = 0,95 e sen 18° = cos 72° = 0,31

Assim: $x = 0{,}31$ e $y = 0{,}95$

8 Sendo R a medida do raio $\overline{OQ}$, temos o $\triangle OPQ$:

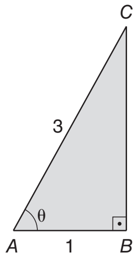


Do enunciado, $\cos (90° - \alpha) = 0{,}3$. Como $\cos (90° - \alpha) = \text{sen } \alpha$, então $\text{sen } \alpha = 0{,}3$.

$\text{sen } \alpha = \dfrac{OQ}{PO} \Rightarrow 0{,}3 = \dfrac{R}{15}$

$\therefore R = 4{,}5$ cm

9 Sendo θ a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AB = 1$ e $AC = 3$, temos:

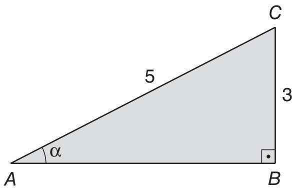


$(BC)^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$

Logo, $\text{sen}\ \theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ e

$\text{tg}\ \theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$

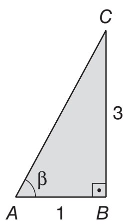
10 $\text{sen}\ \alpha = 0{,}6 = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$. Assim, sendo α a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AC = 5$ e $BC = 3$, temos:



$(AB)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AB = 4$

Logo, $\cos \alpha \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

11 $\text{tg}\ \beta = \dfrac{3}{1}$. Assim, sendo β a medida de um ângulo agudo $B\hat{A}C$ de um triângulo retângulo ABC, com $AB = 1$ e $BC = 3$, temos:



$(AC)^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$

Logo, $\text{sen}\ \beta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ e

$\cos \beta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

12 a) $\text{tg}\ 60° = \dfrac{AB}{AD} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{AB}{20}$

$\therefore\ AB = 20\sqrt{3}$ cm

Pelo teorema da soma dos ângulos internos, $m(A\hat{B}C) = 45°$; então, o $\triangle ABC$ é isósceles.

Sabemos que em um triângulo isósceles retângulo os catetos têm a mesma medida; então, $AB = AC$.

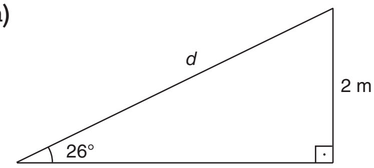
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \Rightarrow x^2 = (20\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2$

$\therefore\ x = 20\sqrt{6}$ cm

Exercícios contextualizados

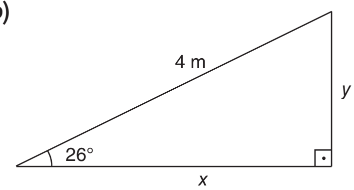
13 a)



$\text{sen}\ 26° = \dfrac{2}{d} \Rightarrow 0{,}43 = \dfrac{2}{d}$, ou seja, $d \approx 4{,}6$

Logo, o carrinho percorrerá 4,6 m, aproximadamente.

b)

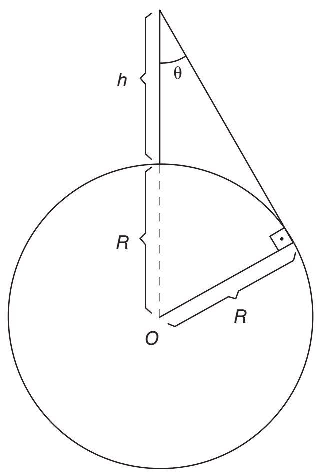


$\cos 26° = \dfrac{x}{4} \Rightarrow 0{,}89 = \dfrac{x}{4}$, ou seja, $x = 3{,}56$

$\text{sen}\ 26° = \dfrac{y}{4} \Rightarrow 0{,}43 = \dfrac{y}{4}$, ou seja, $y = 1{,}72$

Logo, os deslocamentos horizontal e vertical são 3,56 m e 1,72 m, respectivamente.

14



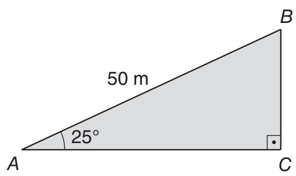
O é o centro da Terra.

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{R}{h + R} \Rightarrow R = h\text{sen}\ \theta + R\text{sen}\ \theta$

$\therefore\ R - R\text{sen}\ \theta = h\text{sen}\ \theta \Rightarrow R(1 - \text{sen}\ \theta) = h\text{sen}\ \theta$

$\therefore\ R = \dfrac{h\text{sen}\ \theta}{1 - \text{sen}\ \theta}$

15 A altura pedida é igual à medida do cateto $\overline{BC}$ de um triângulo ABC, retângulo em C, com $AB = 50$ m e $m(B\hat{A}C) = 25°$.

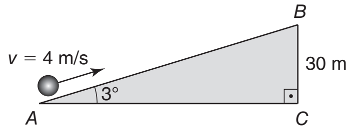


$\text{sen}\ 25° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow 0{,}42 = \dfrac{BC}{50}$

$\therefore\ BC = 21$ m

Logo, a altura procurada é 21 m.

16 Temos o esquema:



Sabendo que sen 3° = 0,05, temos:

$\text{sen } 3° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow 0{,}05 = \dfrac{30}{AB}$

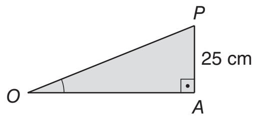
$\therefore\ AB = 600$ m

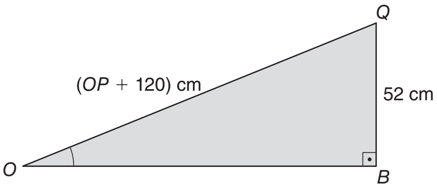
Sabemos que $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ em que v é a velocidade durante o trajeto, Δs a distância percorrida e Δt o tempo gasto; então:

$4 = \dfrac{600}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 150 \text{ s} = 2{,}5 \text{ min}$

Alternativa **a**.

17 Pelo caso AA, os $\triangle OPA$ e $\triangle OQB$ são semelhantes; então:





Por semelhança de triângulos, temos:

$\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{PA}{QB} \Rightarrow \dfrac{OP}{OP + 120} = \dfrac{25}{52}$

$\therefore\ OP = \dfrac{1.000}{9}$ cm

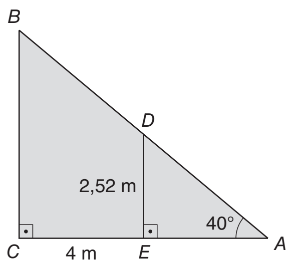
Sendo $m(A\hat{O}P) = \alpha$, temos:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{AP}{OP} = \dfrac{25}{\dfrac{1.000}{9}} \Rightarrow \text{sen } \alpha \approx 0{,}225$

Da tabela, temos que sen 13° = 0,225.

Alternativa **c**.

18 Temos o esquema:



No $\triangle ADE$:

$\text{tg } 40° = \dfrac{DE}{AE} \Rightarrow 0{,}84 = \dfrac{2{,}52}{AE}$

$\therefore\ AE = 3$ m

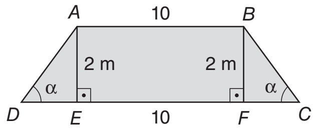
No $\triangle ABC$:

$\cos 40° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow 0{,}77 = \dfrac{4 + 3}{AB}$

$\therefore\ AB = \dfrac{700}{77} \text{ m} \approx 9{,}09$ m

Portanto, a escada tem, aproximadamente, 9,09 m de comprimento.

19 Temos que a calçada é formada por 5 trapézios isósceles $ABCD$:

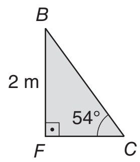


Sabendo que a medida a_i de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por $a_i = \dfrac{180° (n - 2)}{n}$, temos:

$a_i = \dfrac{180° (5 - 2)}{5} = 108°$

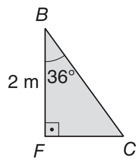
Como o lado $\overline{BC}$ do trapézio está contido na bissetriz do ângulo interno do pentágono, temos: $\alpha = 54°$

Temos então que os triângulos BCF e ADE são congruentes.



Pelo teorema da soma dos ângulos internos, temos:

$m(C\hat{B}F) = 36°$



$\text{tg } 36° = \dfrac{FC}{2} \Rightarrow FC = 2 \text{ tg } 36°$

Pela congruência dos triângulos BCF e ADE, temos:

$DE = FC = 2 \text{ tg } 36°$

O perímetro externo P é dado pela soma das medidas das bases maiores dos trapézios:

$P = 5 \cdot (DE + EF + FC) =$

$= 5(2 \text{ tg } 36° + 10 + 2 \text{ tg } 36°) = 10(5 + 2 \text{ tg } 36°)$

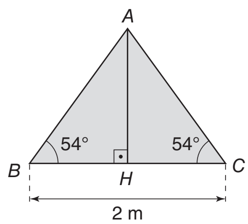
Alternativa **d**.

20 Os extremos móveis das pás são vértices de um pentágono regular.

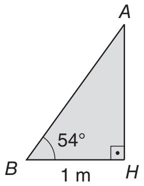
Sabemos que a medida de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por $a_i = \dfrac{180° (n - 2)}{n}$, então:

$a_i = \dfrac{180° (5 - 2)}{5} = 108°$

Temos que o pentágono é formado por cinco triângulos isósceles ABC em que as medidas dos lados congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ representam o comprimento de cada pá.



Num triângulo isósceles, a altura $\overline{AH}$ também é mediana e, portanto, H é ponto médio de $\overline{BC}$. Assim, temos o $\triangle AHB$:



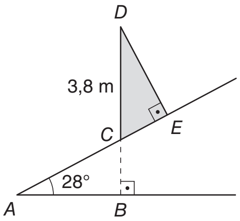
Pelo teorema da soma dos ângulos internos, $m(B\hat{A}H) = 36°$ e, portanto:

$$\text{sen } 36° = \frac{BH}{AB} \Rightarrow 0{,}588 = \frac{1}{AB}$$

$\therefore\ AB \approx 1{,}70$ m

Logo, o comprimento de cada pá é, aproximadamente, 1,70 m.

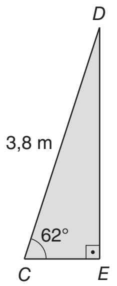
21 Temos o esquema:



Pelo teorema da soma dos ângulos internos, no $\triangle ABC$:

$m(A\hat{C}B) + 28° + 90° = 180° \Rightarrow m(A\hat{C}B) = 62°$

Temos que $m(D\hat{C}E) = m(A\hat{C}B) = 62°$, pois $D\hat{C}E$ e $A\hat{C}B$ são ângulos opostos pelo vértice. Assim:



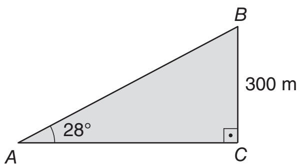
Pelo teorema da soma dos ângulos internos, $m(C\hat{D}E) = 28°$ e portanto:

$$\text{sen } 28° = \frac{CE}{DC} \Rightarrow 0{,}47 = \frac{CE}{3{,}8}$$

$\therefore\ CE = 1{,}786$ m

Logo, o comprimento da sombra do pinheiro é 1,786 m.

22 Do enunciado, temos o $\triangle ABC$:



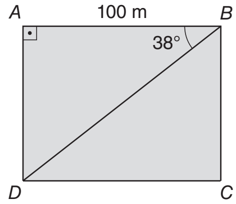
Sendo AC a distância pedida, temos:

$$\text{tg } 28° = \frac{\text{sen } 28°}{\cos 28°} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{0{,}47}{0{,}88} = \frac{300}{AC}$$

$\therefore\ AC \approx 561{,}7$ m

Logo, a distância entre a cabeceira da pista e o ponto do qual decolou o avião é, aproximadamente, 561,7 m.

23 Do enunciado, temos o retângulo $ABCD$:

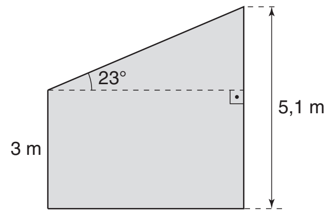


$$\text{tg } 38° = \frac{\text{sen } 38°}{\cos 38°} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{0{,}65}{0{,}79} = \frac{AD}{100}$$

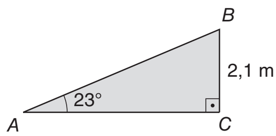
$\therefore\ AD \approx 82{,}3$ m

Logo, a largura do campo é, aproximadamente, 82,3 m.

24 Do enunciado temos:



Dessa figura, destacamos o $\triangle ABC$:

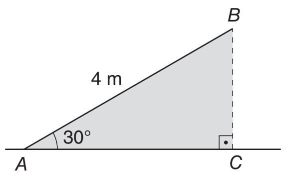


$$\text{tg } 23° = \frac{\text{sen } 23°}{\cos 23°} = \frac{BC}{CA} \Rightarrow \frac{0{,}39}{0{,}92} = \frac{2{,}1}{CA}$$

$\therefore\ CA \approx 4{,}95$ m

Logo, a distância entre as paredes é, aproximadamente, 4,95 m.

25 Quando a inclinação é máxima, temos o $\triangle ABC$:



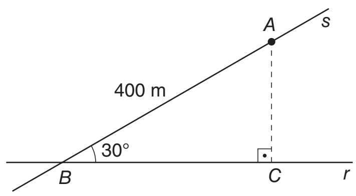
Sendo $\overline{BC}$ a altura do ponto B em relação ao plano horizontal, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{4}$$

$\therefore\ BC = 2$ m

Logo, a altura é 2 m.

26



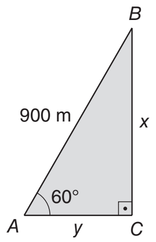
Sendo B o ponto de encontro das duas avenidas e AC a distância do posto A à avenida r, temos no $\triangle ABC$:

$$\text{sen } 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{400}$$

$\therefore\ AC = 200$ m

Alternativa **e**.

27 Após 5 segundos, com uma velocidade igual a 180 m/s, o foguete terá percorrido 900 m. Assim, temos o $\triangle ABC$:



A é o ponto de lançamento, B a posição do foguete após 5 segundos e BC a altura nesse ponto. Então:

$\text{sen } 60° = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{900}$

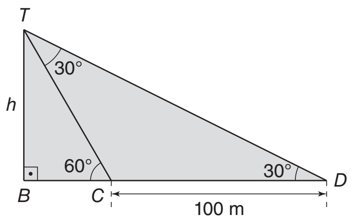
$\therefore\ x = 450\sqrt{3}\,\text{m}$

$\cos 60° = \dfrac{CA}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{900}$

$\therefore\ y = 450\text{ m}$

Alternativa **d**.

28 Esquematizamos a situação, para $BT = h$:



Como o triângulo CDT é isósceles, temos:

$CT = CD = 100\text{ m}$

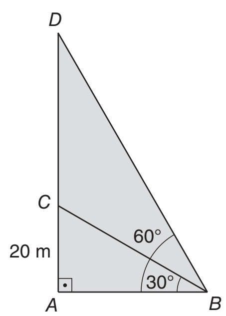
Logo, do triângulo CBT, concluímos:

$\text{sen } 60° = \dfrac{BT}{CT} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{100}$

$\therefore\ h = 50\sqrt{3}\text{ cm}$

Portanto, a altura do penhasco é $50\sqrt{3}$ m ou, aproximadamente, 86,6 m.

29 Do enunciado:



Temos que AC é a altura no 1º ponto e AD é a altura no 2º ponto. No $\triangle ABC$, temos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{20}{AB}$

$\therefore\ AB = 20\sqrt{3}\text{ m}$

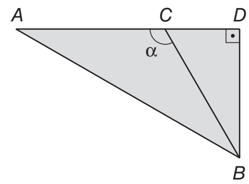
No $\triangle ABD$:

$\text{tg } 60° = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{AD}{20\sqrt{3}}$

$\therefore\ AD = 60\text{ m}$

Logo, sob o ângulo de 60°, o balão estava a 60 metros de altura.

30 Do enunciado:



Sendo $BD = x$, temos que $AB = 2x$.

Sendo $m(B\hat{A}C) = \beta$, temos:

$\text{sen } \beta = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30°$

O $\triangle ABC$ é isósceles, pois $AC = BC$; portanto, $m(A\hat{B}C) = m(B\hat{A}C) = \beta = 30°$.

Pelo teorema da soma dos ângulos internos, temos:

$\alpha + 30° + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 120°$

Alternativa **b**.

31 Seja n o número máximo de degraus que podem ser inteiramente visíveis.

A medida p da hipotenusa do triângulo retângulo da figura representa a distância percorrida pelos degraus:

$p = (72 \cdot 0{,}2)\text{ m} = 14{,}4\text{ m}$

A medida q do cateto horizontal do triângulo retângulo da figura representa a soma das extensões de $n - 2$ degraus (excluídos o primeiro e o último):

$\cos 30° = \dfrac{q}{p} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{q}{14{,}4}$

$\therefore\ 0{,}85 = \dfrac{q}{14{,}4} \Rightarrow q = 12{,}24\text{ m}$

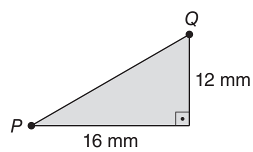
Assim:

$\dfrac{12{,}24}{n - 2} = 0{,}36 \Rightarrow n = 36$

Logo, o número máximo de degraus inteiramente visíveis é 36.

Exercícios de revisão cumulativa

1 Do enunciado, temos o triângulo:

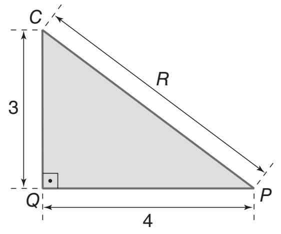


Aplicando o teorema de Pitágoras:

$(PQ)^2 = 16^2 + (12)^2 \Rightarrow (PQ)^2 = 400$

$\therefore\ PQ = 20\text{ mm}$

2 A medida R do raio é a medida da hipotenusa de um triângulo de catetos 4 e 3:



Logo: $R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R = 5$

3 **a)** Sendo M o montante, C o capital inicial, t a taxa por período e n o número de períodos, temos:

$$M = C(1 + t)^n \Rightarrow M = 1.000\left(1 + \frac{2,2}{100}\right)^5$$

$\therefore M \approx 1.114,95$

Logo, nesses 5 meses, o montante acumulado foi R$ 1.114,95, aproximadamente.

b) O juro J produzido é a diferença entre o montante M e o capital inicial C, isto é:

$J = M - C \Rightarrow J = 1.114,95 - 1.000 = 114,95$

Logo, o juro produzido foi, aproximadamente, R$ 114,95.

4 **a)** $f(x + 4) = 3x - 1$

Queremos $f(10)$, logo:

$x + 4 = 10 \Rightarrow x = 6$

Então:

$f(10) = 3 \cdot 6 - 1 \Rightarrow f(10) = 17$

b) Fazendo $x + 4 = t$, temos:

$x + 4 = t \Rightarrow x = t - 4$

Então:

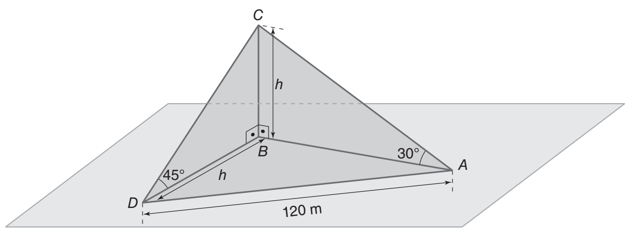
$f(t) = 3(t - 4) - 1 \Rightarrow f(t) = 3t - 13$

ou, em relação à variável x:

$f(x) = 3x - 13$

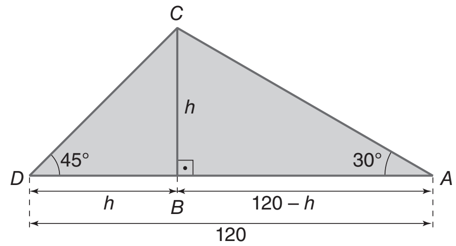
Análise da resolução

O triângulo BCD é isósceles, pois tem dois ângulos internos de 45°; logo, $BD = BC = h$



Esses dados são insuficientes para determinar a altura h, pois, para isso, deveríamos conhecer a medida de um ângulo interno do triângulo ABD ou a medida de mais um lado de um dos triângulos. Porém, podemos limitar os possíveis valores de h a um intervalo, de acordo com a seguinte análise:

I. Se os pontos A, B e D fossem colineares, com B entre A e D, teríamos:



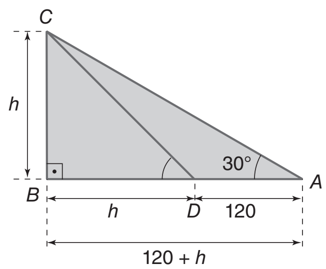
$$\text{tg } 30° = \frac{h}{120 - h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{120 - h}$$

$$\therefore 3h = 120\sqrt{3} - \sqrt{3}h \Rightarrow h\left(3 + \sqrt{3}\right) = 120\sqrt{3}$$

$$\therefore h = \frac{120\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow h = 60\sqrt{3} - 60$$

$\therefore h \approx 43,9$ m

II. Se os pontos A, B e D fossem colineares, com D entre A e B, teríamos:



$$\text{tg } 30° = \frac{h}{120 + h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{120 + h}$$

$$\therefore 3h = 120\sqrt{3} + \sqrt{3}h \Rightarrow h\left(3 - \sqrt{3}\right) = 120\sqrt{3}$$

$$\therefore h = \frac{120\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow h = 60\sqrt{3} + 60$$

$\therefore h \approx 163,9$ m

Como o enunciado do problema garante que A, B e D são vértices de um triângulo, temos que nenhuma das situações (I) ou (II) ocorre; logo, concluímos que 43,9 m $< h <$ 163,9 m.

Alternativa **c**.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 A Giranda Mundi tem 14 ângulos de medida α, e, lembrando que a circunferência mede 360°, temos:

$$\alpha = \frac{360°}{14} \approx 25{,}7°$$

Portanto, a medida α do ângulo central é aproximadamente 25,7°.

2 A London Eye tem 135 metros de altura, então o raio de sua circunferência mede 67,5 metros. Como o comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi r$, temos:

$$C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 67{,}5 = 423{,}9$$

Logo, a circunferência da London Eye tem aproximadamente 424 metros.

3 A Singapore Flyer tem 165 metros de altura, então o raio de sua circunferência mede 82,5 metros. O comprimento de sua circunferência, em metro, é:

$$C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 82{,}5 = 518{,}1$$

Como o comprimento da circunferência da Singapore Flyer é aproximadamente 518 metros e cada ciclo (volta completa) demora 37 minutos, a velocidade v de giro dessa roda gigante é:

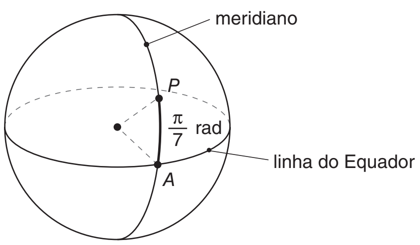
$$v \approx \frac{518 \text{ m}}{37 \text{ min}} = 14 \text{ m/min}$$

Exercícios propostos

1 A razão entre o comprimento do arco e a medida do raio, nessa ordem, é a medida x do arco em radiano, ou seja:

$$x = \frac{10}{2{,}5} \cdot \text{rad} \Rightarrow x = 4 \text{ rad}$$

2



Dividindo o comprimento C do arco $\widehat{PA}$ pela medida do raio da Terra, obtém-se a medida desse arco em radiano:

$$\frac{C}{6.370} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow C = 910\pi$$

Logo, o comprimento do arco $\widehat{PA}$ é 910π km.

Alternativa **b**.

3 Como o ponteiro maior mede 2 m, podemos dizer que essa é a medida do raio da circunferência descrita pelo movimento realizado pela ponta móvel do ponteiro maior.

Sabemos que em 1 hora essa ponta móvel percorre toda a circunferência ($2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ m} = 4\pi \text{ m}$).

Então:

$$\begin{array}{lcl} 1\text{h} & \text{———} & 4\pi \text{ m} \\ t & \text{———} & 5\pi \text{ m} \end{array}$$

$$t = \frac{1\text{h} \cdot 5\pi \text{ m}}{4\pi \text{ m}} = 1{,}25\text{h} = 1\text{h } 15\text{min}$$

Alternativa **a**.

4 a)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 30 \end{array} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

Portanto, 30° equivalem a $\frac{\pi}{6}$ rad.

b)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 120 \end{array} \Rightarrow x = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

Portanto, 120° equivalem a $\frac{2\pi}{3}$ rad.

c)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 225 \end{array} \Rightarrow x = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

Portanto, 225° equivalem a $\frac{5\pi}{4}$ rad.

d)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 300 \end{array} \Rightarrow x = \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$$

Portanto, 300° equivalem a $\frac{5\pi}{3}$ rad.

e)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 240 \end{array} \Rightarrow x = \frac{240\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, 240° equivalem a $\frac{4\pi}{3}$ rad.

f)
$$\begin{array}{lcl} \text{rad} & & \text{grau} \\ \pi & \text{———} & 180 \\ x & \text{———} & 330 \end{array} \Rightarrow x = \frac{330\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$$

Portanto, 330° equivalem a $\frac{11\pi}{6}$ rad.

5 a)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{\pi}{4} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 45°$$

b)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{3\pi}{2} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{3\pi}{2} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 270°$$

c)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{7\pi}{6} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{7\pi}{6} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 210°$$

d)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{2\pi}{5} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{2\pi}{5} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 72°$$

e)
$$\begin{array}{lcl} \pi & \text{———} & 180° \\ \frac{5\pi}{3} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{5\pi}{3} \cdot 180°}{\pi} \quad \therefore x = 300°$$

6 Quando a polia maior gira $\frac{4\pi}{3}$ rad (ou 240°), a menor gira α rad tal que: $\frac{\alpha}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{12}{4} \Rightarrow \alpha = 4\pi$

Alternativa **d**.

7 **a)** $x_1 = 50°$
$x_2 = 50° + 360° = 410°$
$x_3 = 50° + 2 \cdot 360° = 770°$
Logo, as medidas procuradas são 50°, 410° e 770°.

b) $x_1 = 50° - 360° = -310°$
$x_2 = 50° - 2 \cdot 360° = -670°$
Logo, as medidas procuradas são $-310°$ e $-670°$.

8 **a)** $x_1 = \frac{6\pi}{7}$

$x_2 = \frac{6\pi}{7} + 2\pi \Rightarrow x_2 = \frac{20\pi}{7}$

$x_3 = \frac{6\pi}{7} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x_3 = \frac{34\pi}{7}$

Logo, as medidas procuradas são $\frac{6\pi}{7}$ rad, $\frac{20\pi}{7}$ rad e $\frac{34\pi}{7}$ rad.

b) $x_2 = \frac{6\pi}{7} - 2\pi \Rightarrow x_2 = -\frac{8\pi}{7}$

$x_3 = \frac{6\pi}{7} - 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x_3 = -\frac{22\pi}{7}$

Logo, as medidas procuradas são $-\frac{8\pi}{7}$ rad e $-\frac{22\pi}{7}$ rad.

9 **a)** $2.923° \;|\underline{\;360°\;}$
$43° \quad 8$
Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 43°.

b) $1.972° \;|\underline{\;360°\;}$
$172° \quad 5$
Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 172°.

c) $-40° + 360° = 320°$ (1ª volta positiva)
Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 320°.

d) $-400° + 360° = -40$ (1ª volta negativa)
$-40° + 360° = 320°$ (1ª volta positiva)
Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é 320°.

e) $\frac{45\pi}{11}$ rad $= \left(\frac{44\pi}{11} + \frac{\pi}{11}\right)$ rad $= \left(4\pi + \frac{\pi}{11}\right)$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{\pi}{11}$ rad.

f) $\frac{38\pi}{5}$ rad $= \left(\frac{35\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $= \left(7\pi + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $=$

$= \left(6\pi + \pi + \frac{3\pi}{5}\right)$ rad $= \left(6\pi + \frac{8\pi}{5}\right)$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{8\pi}{5}$ rad.

g) $-\frac{\pi}{13}$ rad $= \left(-\frac{\pi}{13} + 2\pi\right)$ rad $= \left(\frac{-\pi + 26\pi}{13}\right)$ rad $=$

$= \frac{25\pi}{13}$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{25\pi}{13}$ rad.

h) $-\frac{18\pi}{5}$ rad $\equiv \left(-\frac{8\pi}{5} + 2\pi\right)$ rad $= \left(\frac{-8\pi + 10\pi}{5}\right)$ rad $=$

$= \frac{2\pi}{5}$ rad

Logo, a medida do arco trigonométrico procurada é $\frac{2\pi}{5}$ rad.

10 **a)** $2.040° \;|\underline{\;360°\;}$
$240° \quad 5$
Logo: $x = 240°$

b) $x = 240° + 360° \Rightarrow x = 600°$
c) $x = 240° + 2 \cdot 360° \Rightarrow x = 960°$
d) $x = 240° - 360° \Rightarrow x = -120°$

11 $\frac{121\pi}{6} = \frac{120\pi + \pi}{6} = \frac{120\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 20\pi + \frac{\pi}{6}$

a) $x = \frac{\pi}{6}$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{13\pi}{6}$

c) $x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi \Rightarrow x = \frac{25\pi}{6}$

d) $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi \Rightarrow x = -\frac{11\pi}{6}$

12 Temos:
1 volta da engrenagem $\rightarrow \frac{1}{4}$ de volta do ponteiro
Assim:
4.135 voltas da engrenagem $\rightarrow 4.135 \cdot \frac{1}{4}$ de volta do ponteiro
$4.135 \cdot \frac{1}{4} = 1.033$ voltas $+ 0{,}75$ volta
Logo, 0,75 volta de 360° corresponde a 270°.
Alternativa **a**.

13 **a)** Os infinitos números reais associados ao ponto A' são:
$\ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:
$x = \pi + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Os infinitos números reais associados ao ponto B são:
$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é 2π, podemos representar todos esses números reais por:
$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

c) Os infinitos números reais associados aos pontos B ou B' são:
$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é π, podemos representar todos esses números reais por:
$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) Os infinitos números reais associados aos pontos A, B, A', B' são:
$\ldots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é $\frac{\pi}{2}$, podemos representar todos esses números reais por:
$x = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$

14 **a)** Os infinitos números reais associados aos pontos M, N, P são:
$\ldots, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \ldots$
Observando que a diferença entre dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência é $\frac{2\pi}{3}$, podemos representar todos esses números reais por:
$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

b) Existem infinitas expressões diferentes que podem representar esses pontos.
Para obtê-las, basta adicionar $k \cdot \frac{2\pi}{3}$ a um número qualquer associado a um dos pontos; por exemplo:
$x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

15 A cada hora:
- o ponteiro das horas gira 30°;
- o ponteiro dos minutos gira 360°.

A cada 20 minutos:
- o ponteiro das horas gira $\frac{1}{3} \cdot 30° = 10°$;
- o ponteiro dos minutos gira $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.

Assim, em 2.400 horas e 20 minutos, temos:
a) $2.400 \cdot 30° + 10° = 72.000° + 10° = 72.010°$
Logo, o ponteiro das horas girou 72.010°.
b) $2.400 \cdot 360° + 120° = 864.000° + 120° = 864.120°$
Logo, o ponteiro dos minutos girou 864.120°, o que corresponde a $\frac{14.402\pi}{3}$ rad.
c) Como 2.400 horas e 20 minutos equivalem a 100 dias e 20 minutos, concluímos que, quando parou de funcionar, o relógio marcava 0 h 20 min.

16 **a)** N: $180° - 22° = 158°$
P: $180° + 22° = 202°$
Q: $360° - 22° = 338°$

b) N: $\pi \text{ rad} - \frac{\pi}{7} \text{ rad} = \frac{6\pi}{7} \text{ rad}$
P: $\pi \text{ rad} + \frac{\pi}{7} \text{ rad} = \frac{8\pi}{7} \text{ rad}$
Q: $2\pi \text{ rad} - \frac{\pi}{7} \text{ rad} = \frac{13\pi}{7} \text{ rad}$

17 **a)** M: $180° - 120° = 60°$
N: $120°$
P: $180° + 60° = 240°$
Q: $360° - 60° = 300°$

b) M: $210° - 180° = 30°$
N: $180° - 30° = 150°$
P: $210°$
Q: $360° - 30° = 330°$

c) M: $360° - 310° = 50°$
N: $180° - 50° = 130°$
P: $180° + 50° = 230°$
Q: $310°$

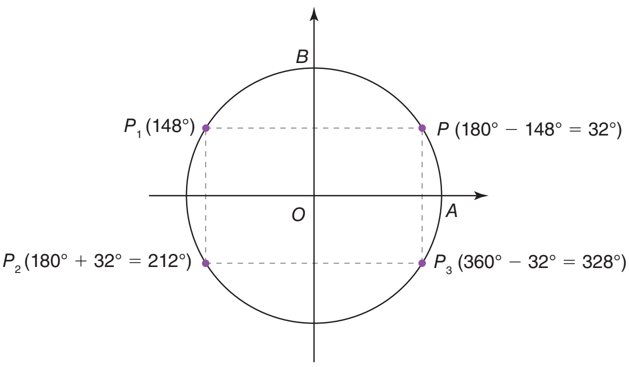
d) M: $\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$
N: $\frac{4\pi}{5}$
P: $\pi + \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$
Q: $2\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$

e) M: $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$
N: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
P: $\frac{4\pi}{3}$
Q: $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

f) M: $2\pi - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$
N: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$
P: $\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}$
Q: $\frac{11\pi}{6}$

18 Do estudo dos espelhos planos, sabemos que a imagem de um ponto P é o simétrico a ele em relação ao plano do espelho.
Assim, considerando o plano da circunferência observada no esquema da página anterior, concluímos que:
- P_1 é o simétrico de P em relação à reta $\overleftrightarrow{OB}$;
- P_3 é o simétrico de P em relação à reta $\overleftrightarrow{OA}$;
- P_2 é o simétrico de P_1 em relação à reta $\overleftrightarrow{OA}$ (e também é simétrico de P_3 em relação à reta $\overleftrightarrow{OB}$).

Portanto, aplicando o mesmo raciocínio usado nas simetrias de um ponto da circunferência trigonométrica, temos:



Assim, concluímos que os arcos $\widehat{AP}$, $\widehat{AP_2}$ e $\widehat{AP_3}$ medem, respectivamente, 32°, 212° e 328°.

19 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$
a) $\cos 0 = 1$
b) $\text{sen } 0 = 0$

c) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

d) $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

e) $\cos \pi = -1$

f) $\text{sen } \pi = 0$

g) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

h) $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

i) $\cos 2\pi = 1$

j) $\text{sen } 2\pi = 0$

k) $\cos 720° = \cos 0° = 1$

l) $\text{sen } 450° = \text{sen } (90° + 360°) = \text{sen } 90° = 1$

m) $\text{sen } 990° = \text{sen } (2 \cdot 360° + 270°) = \text{sen } 270° = -1$

n) $\cos 810° = \cos (2 \cdot 360° + 90°) = \cos 90° = 0$

o) $\text{sen } (-270°) = \text{sen } 90° = 1$

p) $\cos (-180°) = \cos 180° = -1$

q) $\cos 12\pi = \cos 0 = 1$

r) $\cos 11\pi = \cos (5 \cdot 2\pi + \pi) = \cos \pi = -1$

s) $\text{sen } \frac{21\pi}{2} = \text{sen } \left(\frac{20\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

t) $\text{sen } \frac{23\pi}{2} = \text{sen } \left(\frac{20\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

u) $\text{sen } (-\pi) = \text{sen } \pi = 0$

v) $\cos (-3\pi) = \cos (-2\pi - \pi) = \cos (-\pi) = \cos \pi =$
$= -1$

20 $E = \dfrac{\text{sen } 90° - \cos 180° + \cos 270°}{\text{sen } 270° - \cos 90°}$

$E = \dfrac{1 - (-1) + 0}{-1 - 0} = \dfrac{2}{-1} = -2$

21 a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2} + \text{sen } \pi + \cos \frac{3\pi}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 + 0 + 0 = 2$

b) $f(\pi) = 2 \text{ sen } \pi + \text{sen } 2\pi + \cos 3\pi$

$f(\pi) = 2 \cdot 0 + 0 + (-1) = -1$

c) • $f(0) = 2 \text{ sen } 0 + \text{sen } 0 + \cos 0$

$f(0) = 2 \cdot 0 + 0 + 1 = 1$

• $f(2\pi) = 2 \cdot \text{sen } 2\pi + \text{sen } 4\pi + \cos 6\pi$

$f(2\pi) = 2 \cdot 0 + 0 + 1 = 1$

• $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \text{sen } 3\pi + \cos \frac{9\pi}{2}$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot (-1) + 0 + 0 = -2$

Logo: $\dfrac{f(0) + f(2\pi)}{f\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \dfrac{1 + 1}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1$

22 $E = \dfrac{\text{sen } \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}}{\text{sen } \frac{\pi}{2}} \Rightarrow E = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

23 Para $x \in \mathbb{R}$, temos:

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1$

Portanto, o valor máximo de f é 1 e o valor mínimo é -1.

24 a) sen 17° < cos 74°

Falso, pois cos 74° = sen (90° − 74°) = sen 16°, e sen 17° > sen 16°.

b) sen 74° < cos 17°

Falso, pois cos 17° = sen (90° − 17°) = sen 73°, e sen 74° > sen 73°.

c) cos 37° = cos 143°

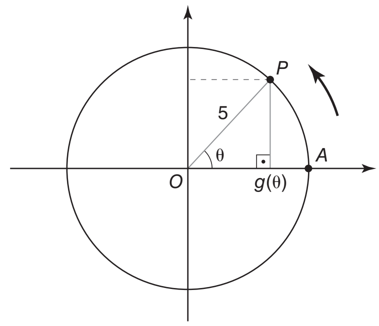
Falso, pois cos 37° = −cos (180° − 37°) =
= −cos 143°.

d) sen 31° > sen 150°

Verdadeiro, pois sen 150° = sen (180° − 150°) =
= sen 30°, e sen 31° > sen 30°.

Alternativa **d**.

25 Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\widehat{AP}$, com $A(5, 0)$, esquematizamos:



A função g que expressa a abscissa de P para cada medida θ é:

$g(\theta) = 5 \cos \theta$ (I)

A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

deslocamento angular da partícula em radiano	tempo em segundo
2π	3
θ	t

$\therefore \theta = \dfrac{2\pi t}{3}$ rad (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

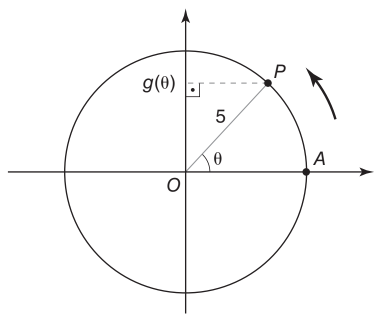
$g\left(\frac{2\pi t}{3}\right) = 5 \cos \frac{2\pi t}{3}$

Indicando essa função por $f(t)$, concluímos:

$f(t) = 5 \cos \frac{2\pi t}{3}$

Alternativa **b**.

26 Sendo P a posição da partícula em dado instante e θ a medida do arco $\widehat{AP}$, com $A(5, 0)$, esquematizamos:



A função g que expressa a ordenada de P para cada medida θ é:

$g(\theta) = 5 \text{ sen } \theta$ (I)

A medida θ, em radiano, pode ser obtida em função do tempo t, em segundo, pela regra de três:

deslocamento angular da partícula em radiano	tempo em segundo
2π	3
θ	t

$\therefore\ \theta = \dfrac{2\pi t}{3}$ rad (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$g\left(\dfrac{2\pi t}{3}\right) = 5\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{3}$

Indicando essa função por $f(t)$, concluímos:

$f(t) = 5\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{3}$

Alternativa **d**.

27 a) $\text{sen } 120° = \text{sen } (180° - 60°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 120° = \cos (180° - 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen } 210° = \text{sen } (180° + 30°) = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

d) $\cos 210° = \cos (180° + 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen } 300° = \text{sen } (360° - 60°) = -\text{sen } 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos 300° = \cos (360° - 60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

28 a) • M e N são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:

$N\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

• M e P são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:

$P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

• M e Q são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:

$Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) • M e P são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:

$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• N e P são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:

$N\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

• Q e P são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:

$Q\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) • M e Q são simétricos em relação ao eixo das abscissas; logo, suas ordenadas são opostas e suas abscissas são iguais. Assim, temos:

$M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• N e Q são simétricos em relação à origem do sistema de eixos cartesianos; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são opostas. Assim, temos:

$N\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

• P e Q são simétricos em relação ao eixo das ordenadas; logo, suas abscissas são opostas e suas ordenadas são iguais. Assim, temos:

$P\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

29 a) $\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

d) $\cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\cos\dfrac{5\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

30 a) $\text{sen } (-30°) = -\text{sen } 30° = -\dfrac{1}{2}$

b) $\cos (-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen } (-300°) = -\text{sen } 300° = -(-\text{sen } 60°) =$
$= \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos (-300°) = \cos 300° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

e) $\text{sen } (-1.485°) = -\text{sen } 1.485° = -\text{sen } 45° =$
$= -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos (-1.230°) = \cos 1.230° = \cos 210° =$
$= -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

i) $\text{sen}\left(-\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\text{sen}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\left(-\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right) =$
$= \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

j) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

k) $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

l) $\text{sen}\,\dfrac{25\pi}{6} = \text{sen}\left(\dfrac{24\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(4\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) =$
$= \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

m) $\text{sen}\,\dfrac{33\pi}{4} = \text{sen}\left(\dfrac{32\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right) =$
$= \text{sen}\left(8\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

31 $E = \dfrac{\cos(180° + x) + \text{sen}(180° + x) + \text{sen}(180° - x)}{\cos(360° - x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \dfrac{-\cos x - \cancel{\text{sen}\, x} + \cancel{\text{sen}\, x}}{\cos x}$

$\therefore E = -\dfrac{\cos x}{\cos x} = -1$

32 Como a medida do arco $\widehat{AN}$, na primeira volta positiva, é $\pi - \alpha$, temos que a medida do arco $\widehat{AM}$, na primeira volta positiva, é α. Então:

a) $\text{sen}\, \alpha = \dfrac{5}{13}$

b) $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$

c) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\dfrac{12}{13}$

d) $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\, \alpha = -\dfrac{5}{13}$

e) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha = \dfrac{12}{13}$

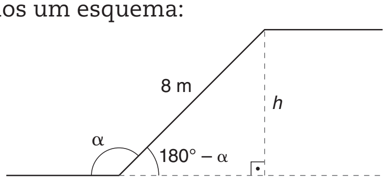
33 Se $\cos \alpha = -\dfrac{4}{7}$, então $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha = \dfrac{4}{7}$

Assim:

$\cos(180° - \alpha) = \dfrac{AB}{12} \Rightarrow AB = \dfrac{4}{7} \cdot 12 \Rightarrow AB = \dfrac{48}{7}$

Portanto, a medida do cateto $\overline{AB}$ é $\dfrac{48}{7}$ cm.

34 Façamos um esquema:



$\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x}{8} \Rightarrow -\cos \alpha = \dfrac{x}{8}$

$\therefore -\left(-\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 5$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$8^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 39 \Rightarrow h = \sqrt{39}$

Logo, a altura do piso superior em relação ao piso inferior é $\sqrt{39}$ m ou, aproximadamente, 6,24 m.

35 $\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{9}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{16}{25}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\dfrac{4}{5}$

Como $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, concluímos que $\cos \alpha = -\dfrac{4}{5}$.

36 $\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{25}{169} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{144}{169}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\dfrac{12}{13}$

Como $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, concluímos que $\cos \alpha = \dfrac{12}{13}$.

37 $\begin{cases} \text{sen}^2\, \beta + \cos^2 \beta = 1 & \text{(I)} \\ \text{sen}\, \beta = 2\cos \beta & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$(2\cos \beta)^2 + \cos^2 \beta = 1$ e, portanto:

$4\cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow = 5\cos^2 \beta = 1$

$\therefore \cos^2 \beta = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos \beta = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$, concluímos que $\cos \beta = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Substituindo $\cos \beta$ por $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, em (II), obtemos:

$\text{sen}\, \beta = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

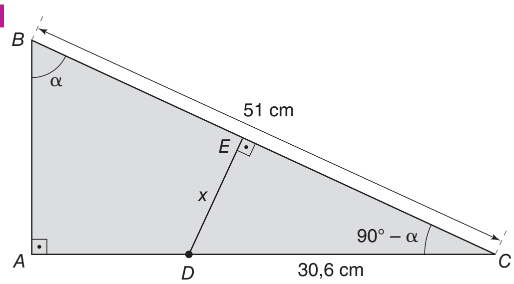
38 $\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{m}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{m+1}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \dfrac{m^2}{16} + \dfrac{m+1}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{m^2 + 4m + 4}{16} = \dfrac{16}{16}$

$\therefore m^2 + 4m - 12 \Rightarrow m = 2$ ou $m = -6$ (não convém)

Concluímos, então, que $m = 2$.

39



Aplicando a relação fundamental, $\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, calculamos $\cos \alpha$:

$\left(\dfrac{15}{17}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \dfrac{289 - 225}{289} = \dfrac{64}{289}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\dfrac{8}{17}$

Como α é a medida de um ângulo agudo, só nos interessa o valor positivo do cosseno, isto é:

$\cos \alpha = \dfrac{8}{17}$

Do triângulo CDE, obtemos:

$\text{sen}(90° - \alpha) = \dfrac{x}{30{,}6} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{x}{30{,}6}$

$\therefore \dfrac{8}{17} = \dfrac{x}{30{,}6} \Rightarrow x = \dfrac{30{,}6 \cdot 8}{17} = 14{,}4$

Portanto, a distância do ponto D à hipotenusa $\overline{BC}$ é 14,4 cm.

40 Fazendo a mudança de variável $\cos x = y$, obtemos a equação do 2º grau:

$3y^2 - 4y + 1 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4$

$\therefore y = \dfrac{-(-4) \pm 2}{2 \cdot 3} \Rightarrow y = 1$ ou $y = \dfrac{1}{3}$

Retornando à variável original, temos:

$\cos x = 1$ $\left(\text{não convém, pois } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ ou

$\cos x = \dfrac{1}{3}$

Pela relação fundamental ($\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$), concluímos:

$\text{sen}^2\, x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\, x = 1 - \dfrac{1}{9}$

$\therefore \text{sen}^2\, x = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, só nos interessa o valor positivo do seno, isto é:

$\text{sen}\, x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

41 $\begin{cases} 4\cos^2 x + 9\,\text{sen}\, x - 6 = 0 \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 9\,\text{sen}\, x = 6 & \text{(I)} \\ \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$4(1 - \text{sen}^2 x) + 9\,\text{sen}\, x = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\,\text{sen}^2 x - 9\,\text{sen}\, x + 2 = 0$

Fazendo a mudança de variável sen x = t, obtemos a equação do 2º grau:

$4t^2 - 9t + 2 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$

$\therefore\ t = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} \Rightarrow t = 2$ ou $t = \dfrac{1}{4}$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}\, x = 2$ (não convém) ou $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{4}$

Substituindo sen x por $\dfrac{1}{4}$ na equação (I), concluímos:

$4\cos^2 x + 9 \cdot \dfrac{1}{4} = 6 \Rightarrow 4\cos^2 x = 6 - \dfrac{9}{4}$

$\therefore\ \cos^2 x = \dfrac{24 - 9}{16} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{15}{16}$

$\therefore\ \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Logo, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos x = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

42 Substituindo $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$, temos:

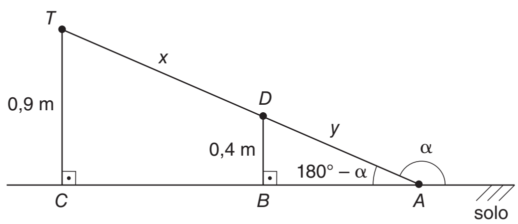
$1 - 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}^4 x + \text{sen}^2 x(1 - \text{sen}^2 x) =$

$= 1 - 2\,\text{sen}^2 x + \cancel{\text{sen}^4 x} + \text{sen}^2 x - \cancel{\text{sen}^4 x} =$

$= 1 - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$

Alternativa **a**.

43 Sendo A o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{TD}$ com o plano do solo, esquematizamos:



Temos:

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{5}$

Assim:

(I) Do triângulo ADB, obtemos:

$\text{sen}(180° - \alpha) = \dfrac{0{,}4}{y} \Rightarrow \dfrac{1}{5} = \dfrac{0{,}4}{y}$

$\therefore\ y = \dfrac{0{,}4}{\frac{1}{5}} \Rightarrow y = 2$

(II) Do triângulo ATC, obtemos:

$\text{sen}(180° - \alpha) = \dfrac{0{,}9}{x + y} \Rightarrow x + y = \dfrac{0{,}9}{\frac{1}{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 4{,}5$

De (I) e (II), concluímos:

$x + 2 = 4{,}5 \Rightarrow x = 2{,}5$

Portanto, a distância entre T e D é 2,5 m.

44 **a)** Na circunferência trigonométrica, o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida 2π rad intercepta o eixo das tangentes na origem; logo, $\text{tg}\, 2\pi = 0$.

b) Na circunferência trigonométrica, o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida $\dfrac{3\pi}{2}$ rad é paralelo ao eixo das tangentes; logo, não existe $\text{tg}\,\dfrac{3\pi}{2}$.

c) Na circunferência trigonométrica, o arco de medida 3π é congruente ao arco de medida π. Assim, $\text{tg}\, 3\pi = \text{tg}\, \pi$. Como o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida π rad intercepta o eixo das tangentes na origem, $\text{tg}\, \pi = \text{tg}\, 3\pi = 0$.

d) Na circunferência trigonométrica, o arco de medida $(-\pi)$ é congruente ao arco de medida π. Assim, $\text{tg}\,(-\pi) = \text{tg}\, \pi$. Como o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco de medida π intercepta o eixo das tangentes na origem, $\text{tg}\, \pi = \text{tg}\,(-\pi) = 0$.

45 **a)** F, pois $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{5} > 0$ (1º quadrante) e $\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{5} < 0$ (2º quadrante), então $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{5} \cdot \text{tg}\,\dfrac{4\pi}{5} < 0$.

b) V, pois $\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{9} < 0$ (2º quadrante) e $\text{tg}\,\dfrac{2\pi}{9} > 0$ (1º quadrante), então $\dfrac{\text{tg}\,\frac{5\pi}{9}}{\text{tg}\,\frac{2\pi}{9}} < 0$.

c) V, pois $\text{tg}\,\dfrac{13\pi}{18} < 0$ (2º quadrante), $\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{15} > 0$ (1º quadrante) e $\left|\text{tg}\,\dfrac{13\pi}{18}\right| > \left|\text{tg}\,\dfrac{4\pi}{15}\right|$, então

$\text{tg}\,\dfrac{13\pi}{18} + \text{tg}\,\dfrac{4\pi}{15} < 0$.

46 $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$,

para $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Assim:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$

Logo, $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

47 $\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{7} \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{6}{7}$,

para $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Assim:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

Logo, $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

48 $\text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{3\cos \alpha}{4}$

$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{3\cos \alpha}{4} \\ \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{4}{5},$

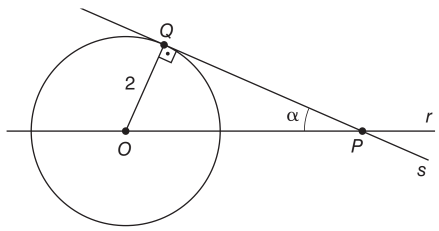
para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Assim:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{3\cos \alpha}{4} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{5}$

Logo, $\text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5}$ e $\cos \alpha = \dfrac{4}{5}$.

49 • O raio $\overline{OQ}$ é perpendicular à reta s:



Logo: $\text{tg } \alpha = \dfrac{2}{PQ}$ (I)

• $\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{15}{17} \\ \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{8}{17} \\ 0° < \alpha < 90° \end{cases}$

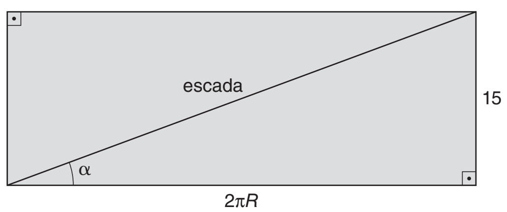
Logo: $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{8}{15}$ (II)

• Substituindo (II) em (I), concluímos:

$\dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{PQ} \Rightarrow PQ = \dfrac{30}{8} = \dfrac{15}{4}$

Portanto, o segmento $\overline{PQ}$ mede $\dfrac{15}{4}$ cm ou 3,75 cm.

50 Planificando a superfície lateral do reservatório, obtemos um retângulo de altura de 15 m e base $2\pi R$, em que R é a medida do raio da base do cilindro.



$\text{tg } \alpha = \dfrac{15}{2\pi R}$ (I)

Calculando tg α:

$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \dfrac{3}{5} \\ \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{4}{5},$

para $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Assim, $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4}$ (II)

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{2\pi R} \Rightarrow R = \dfrac{10}{\pi}$

Logo, o raio da base do cilindro mede $\dfrac{10}{\pi}$ m ou aproximadamente 3,18 m.

51 Calculamos usando a redução ao 1º quadrante.

a) $\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg } 135° = -\text{tg } 45° = -1$

c) $\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg } \dfrac{5\pi}{3} = -\text{tg } \dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

e) $\text{tg } \dfrac{5\pi}{4} = \text{tg } \dfrac{\pi}{4} = 1$

f) $\text{tg } \dfrac{11\pi}{4} = -\text{tg } \dfrac{\pi}{4} = -1$

g) $\text{tg } \dfrac{20\pi}{3} = -\text{tg } \dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

h) $\text{tg } \dfrac{17\pi}{6} = -\text{tg } \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

52 Reduzindo ao 1º quadrante, temos:

$\dfrac{25\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{51\pi}{4} \equiv \dfrac{3\pi}{4}$ e $\dfrac{45\pi}{4} \equiv \dfrac{5\pi}{4}$

Assim,

$E = \text{tg}^2 \dfrac{25\pi}{3} + \text{tg } \dfrac{51\pi}{4} - \text{tg } \dfrac{45\pi}{4} =$

$= \text{tg}^2 \dfrac{\pi}{3} + \text{tg } \dfrac{3\pi}{4} - \text{tg } \dfrac{5\pi}{4} =$

$= 3 + (-1) - 1 = 1$

Logo, $E = 1$.

53 a) $E = \dfrac{\text{tg } \alpha - (-\text{tg } \alpha)}{-\text{tg } \alpha - \text{tg } \alpha} = \dfrac{2\text{tg } \alpha}{-2\text{tg } \alpha} = -1$

b) $E = \dfrac{\text{tg } (180° + x) + \text{tg } (180° - x) + \text{tg } (360° - x)}{\text{sen } (360° - x)} =$

$= \dfrac{\text{tg } x + (-\text{tg } x) + (-\text{tg } x)}{-\text{sen } x} =$

$= \dfrac{\text{tg } x}{\text{sen } x} = \dfrac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\cos x}$

54 Sabemos que $\text{tg } \alpha = -2{,}6$ e $\alpha + \beta = 180°$.

a) $\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha$

$\text{tg } \beta = \text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha = 2{,}6.$

Logo, $\text{tg } \beta = 2{,}6$.

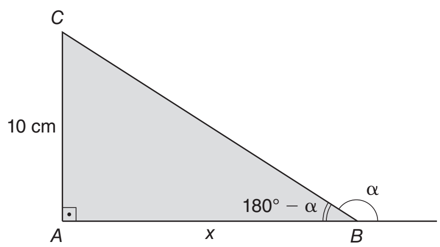
b) $\text{tg } (\alpha + \beta) = \text{tg } 180° = 0.$

c) $\text{tg } (2\alpha + \beta) = \text{tg } (2\alpha + 180° - \alpha) = \text{tg } (180° + \alpha) =$

$= \text{tg } \alpha = -2{,}6$

Logo, $\text{tg } (2\alpha + \beta) = -2{,}6$.

55



$\text{tg } (180° - \alpha) = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow \dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{AB}$

$\therefore AB = 12$

Logo, o cateto $\overline{AB}$ mede 12 cm.

56 a) $\text{tg}\,(-45°) = -\text{tg}\,45° = -1$
b) $\text{tg}\,(-120°) = -\text{tg}\,120° = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$
c) $\text{tg}\,(-300°) = -\text{tg}\,300° = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

57 Chamando o deslocamento horizontal de x, temos:
$\text{tg}\,(180 - \alpha) = \frac{4}{x} \Rightarrow -\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{x}$
$\therefore \frac{2}{5} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 10$
Logo, o deslocamento horizontal dessa pessoa é 10 m.

58 a) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

b) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.
Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

c) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

d) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ são $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.
Logo, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

e) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\cos x = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

f) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$ são $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.
Logo, $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

g) O valor de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para o qual $\text{sen}\,x = -1$ é $x = \frac{3\pi}{2}$.
Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

h) O valor de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para o qual $\cos x = 1$ é $x = 0$.
Logo, $S = \{0\}$.

i) Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, para os quais $\text{sen}\,x = 0$ são $x = 0$ ou $x = \pi$.
Logo, $S = \{0, \pi\}$.

j) Não existe x tal que $\text{sen}\,x = 3$. Logo, $S = \varnothing$.

k) Não existe x tal que $\cos x = -2$. Logo, $S = \varnothing$.

l) $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

m) $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

n) $\text{tg}\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

o) $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.
Logo, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

59 a) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ são $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

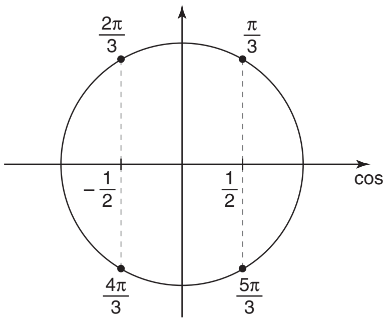
e) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $\cos x = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

i) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $\text{sen}\,x = 0$ são $x = 0$ ou $x = \pi$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

m) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

n) Na primeira volta do sentido positivo, temos: $\text{tg}\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.
Assim, no universo $\mathbb{R}$, o conjunto S da equação é:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

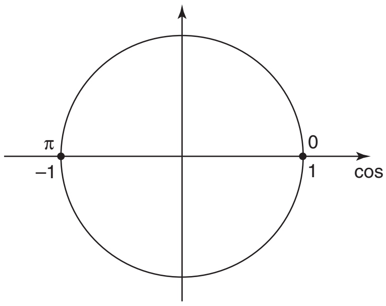
60 a) $\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = \frac{1}{2}$



$\therefore\ x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

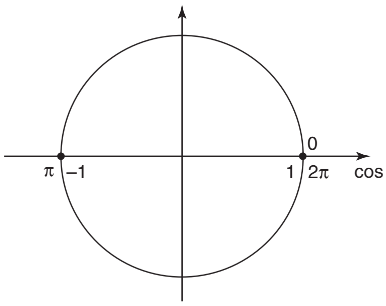
b) $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1$



$\therefore\ x = 0$ ou $x = \pi$

Logo, $S = \{0, \pi\}$.

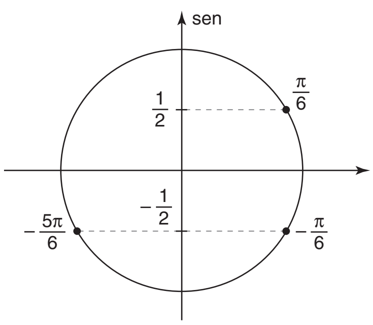
c) $\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1$



$\therefore\ x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

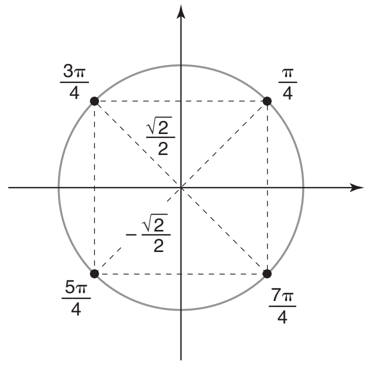
d) $\text{sen}^2\, x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$



$\therefore x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

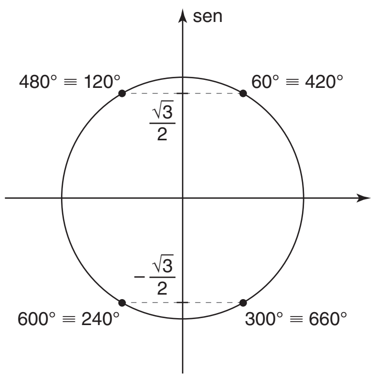
e) $|\text{sen}\, x| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{sen}\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

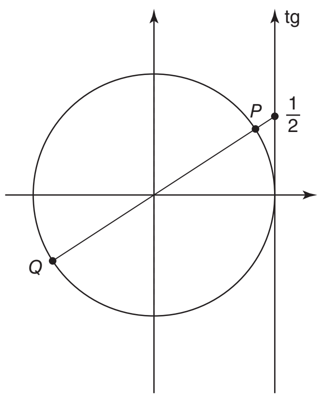
61 $\text{sen}^2\, x = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\therefore x = 60°$ ou $x = 120°$ ou $x = 240°$ ou
$x = 300°$ ou $x = 420°$ ou $x = 480°$ ou
$x = 600°$ ou $x = 660°$.

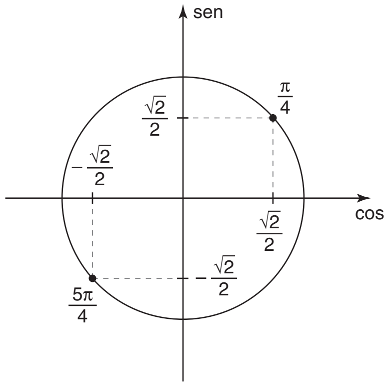
Logo, $S = \{60°, 120°, 240°, 300°, 420°, 480°, 600°, 660°\}$.

62 Prolongando o raio que passa pelo ponto de ordenada $\frac{1}{2}$ do eixo das tangentes, determinamos dois pontos, P e Q, sobre a circunferência trigonométrica abaixo.



Logo, em cada volta dessa circunferência a equação possui 2 raízes e, portanto, nas 3 voltas representadas pelo intervalo $[0, 6\pi[$ a equação possui 6 raízes.

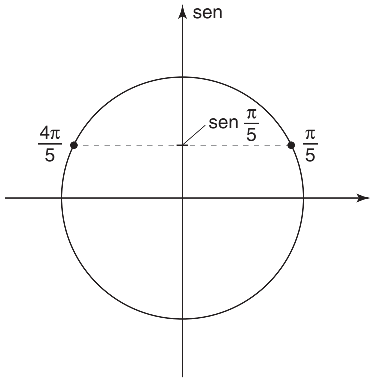
63 sen x = cos x



$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

64 a) sen x = sen $\frac{\pi}{5}$

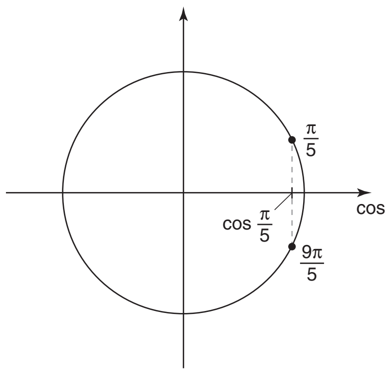


Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

sen x = sen $\frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{4\pi}{5}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right\}$.

b) cos x = cos $\frac{\pi}{5}$

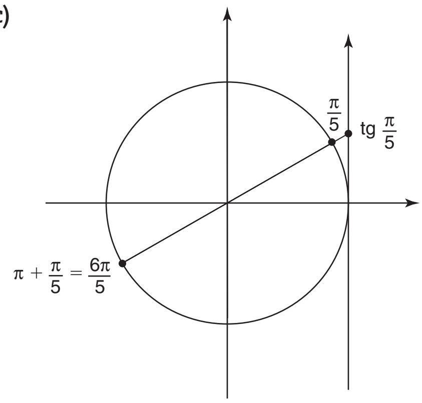


Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

cos x = cos $\frac{\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}$ ou $x = \frac{9\pi}{5}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}$.

c)



Para $0 \leqslant x < 2\pi$, temos:

$S = \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right\}$

65 Como sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ = cos x, temos:

cos x + sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1 \Rightarrow$ cos x + cos $x = -1$

$\therefore\ 2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

Os valores de x, com $0 \leqslant x < 4\pi$, tais que

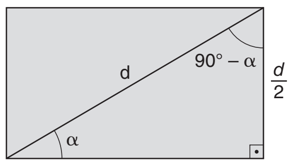
$\cos x = -\frac{1}{2}$ são: $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$

Assim:

$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi}{3} + \frac{10\pi}{3} = \frac{24\pi}{3} = 8\pi$

Alternativa **d**.

66 Sendo, respectivamente, d e α as medidas de uma diagonal do retângulo e de um ângulo que essa diagonal forma com um dos lados, esquematizamos:

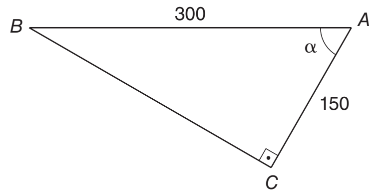


Assim, temos:

$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \\ 0° < \alpha < 90° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Concluímos, então, que cada diagonal forma ângulos de 30° e de 60° com os lados do retângulo.

67 Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}C$, temos:



$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}$

Como $0° < x < 90°$ e $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, concluímos que $\alpha = 60°$.

68 $\text{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$, para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Dividindo o comprimento do arco pela medida R do raio de curvatura, obtemos a medida do ângulo central correspondente, em radiano. Assim:

$\frac{20}{R} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow R = \frac{120}{\pi}$

Logo, o raio de curvatura mede $\frac{120}{\pi}$ m, ou aproximadamente 38,2 m.

69 **a)** $(2\,\text{sen}\, x - \sqrt{3})(2\cos x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}\, x - \sqrt{3} = 0$ ou $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$\therefore \text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$
- $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

b) $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x + \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\, x(2\cos x + 1) = 0$

$\therefore \text{sen}\, x = 0$ ou $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\, x = 0$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$

Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

c) $\text{tg}^2\, x - \text{tg}\, x = 0$

Para $t = \text{tg}\, x$, temos:

$t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t - 1) = 0$

$\therefore t = 0$ ou $t = 1$

Assim:

- $\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

d) $(\text{tg}\, x - \sqrt{3})(\text{tg}^2\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x - \sqrt{3} = 0$ ou $\text{tg}^2\, x - 1 = 0$

$\therefore \text{tg}\, x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg}\, x = 1$ ou $\text{tg}\, x = -1$

Assim, temos:

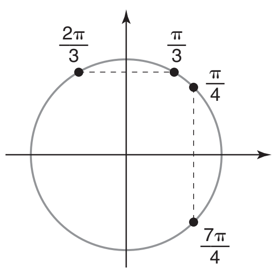
$\text{tg}\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

$\text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

$\text{tg}\, x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

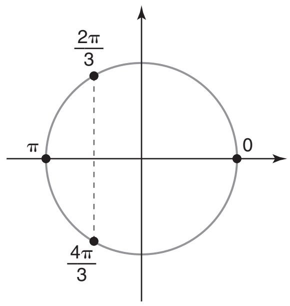
70 **a)** Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **a** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

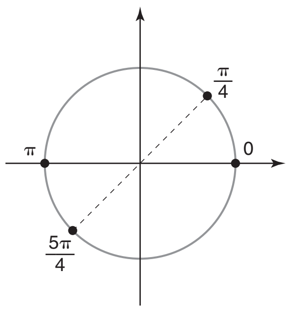
b) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **b** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **c** do exercício anterior, temos:



Assim, nas infinitas voltas, o conjunto solução é dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

71 $\text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x = \text{sen}\, x \Rightarrow \text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x - \text{sen}\, x = 0$

$\therefore \text{sen}\, x\,(\text{tg}\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x = 0$ ou $\text{tg}\, x = 1$

Assim, temos:

- $\text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

72 **a)** Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\, x = y$, temos:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{sen}\, x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

ou

- $\text{sen}\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

b) Fazendo a mudança de variável cos x = y, temos:

$2y^2 - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\cos x = 2$ (não convém)

ou

- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) Fazendo a mudança de variável tg x = y, temos:

$4y^2 + \sqrt{3}y = y^2 + 3\sqrt{3}y + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y^2 - 2\sqrt{3}y - 3 = 0$

$\therefore\ y = \sqrt{3} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3}$

ou

- $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6}$

Assim, temos como conjunto solução:

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

73 $\cos^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x - 4 \text{ sen } x + 4 = 0$

$\therefore\ \text{sen}^2 x + 4 \text{ sen } x - 5 = 0$

Fazendo a mudança da variável sen x = y, temos:

$$y^2 + 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -5 \text{ ou } y = 1$$

Retornando à variável original, obtemos:

- $\text{sen } x = -5$ (não convém)

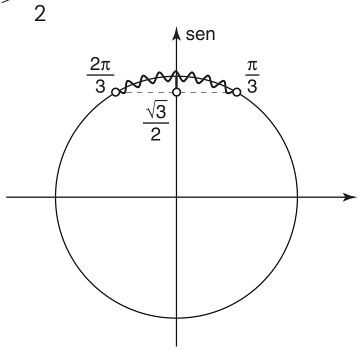
ou

- $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$

Assim, temos como conjunto solução:

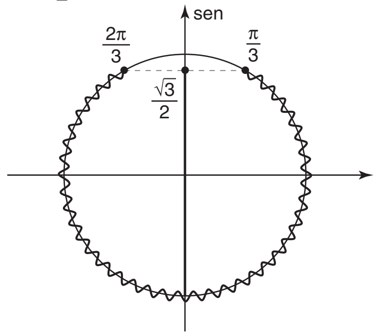
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

74 **a)** $\text{sen } x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



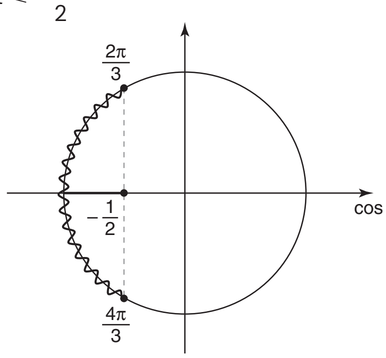
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right\}$.

b) $\text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$



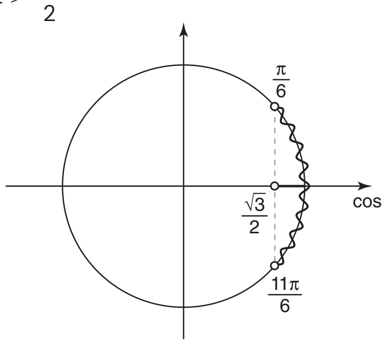
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

c) $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$



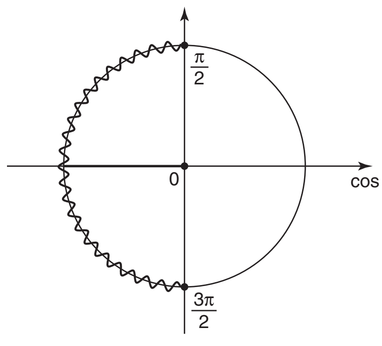
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3}\right\}$.

d) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$



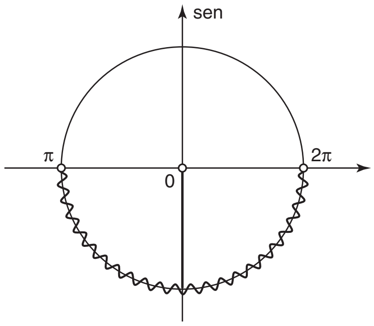
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$.

e) $\cos x \leqslant 0$



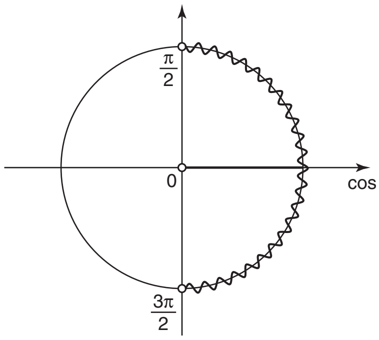
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}$.

f) sen $x < 0$



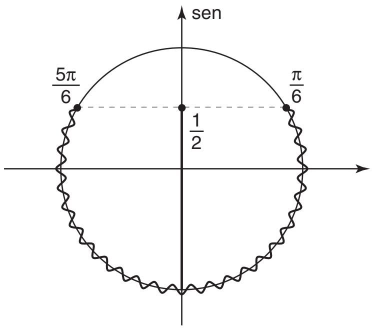
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \pi < x < 2\pi\}$.

g) $\cos x > 0$



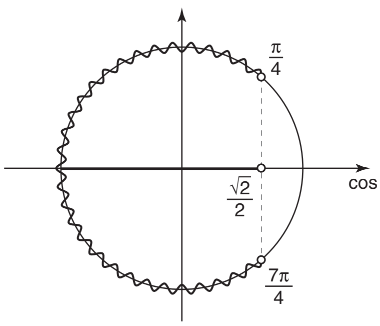
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

h) sen $x \leq \frac{1}{2}$



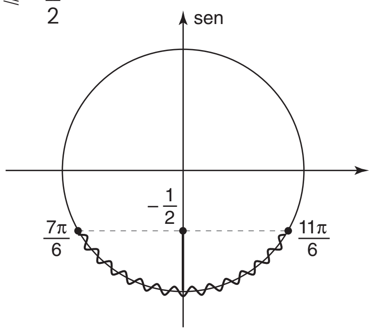
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x < 2\pi\right\}$.

i) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$



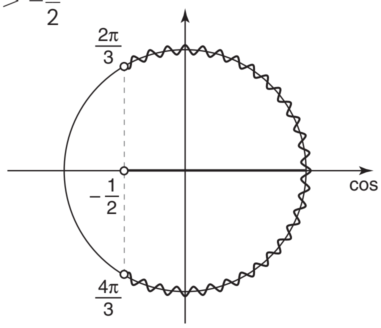
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$.

j) sen $x \leq -\frac{1}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}\right\}$.

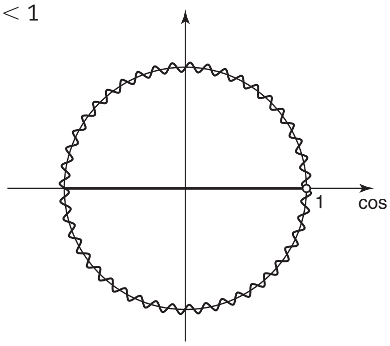
k) $\cos x > -\frac{1}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

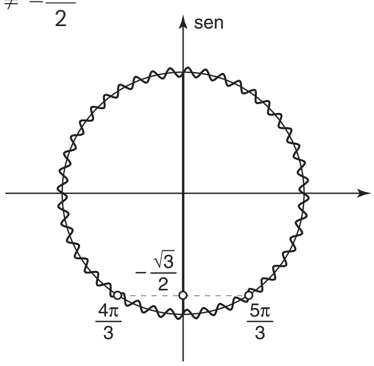
l) sen $x > 1$
Não existem valores de x que satisfaçam essa inequação, pois $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Logo, $S = \varnothing$.

m) $\cos x < 1$



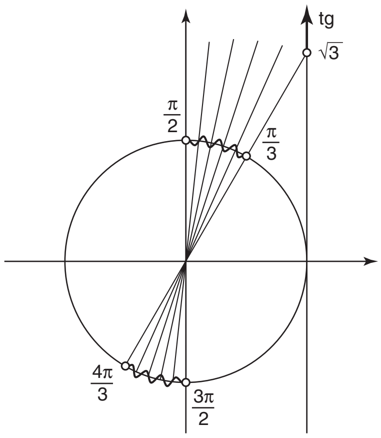
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$

n) sen $x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}$



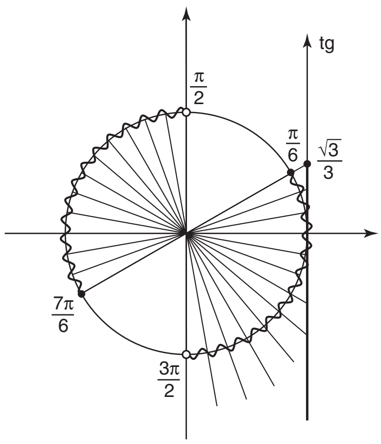
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{4\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{5\pi}{3}\right\}$.

o) $\text{tg}\, x > \sqrt{3}$



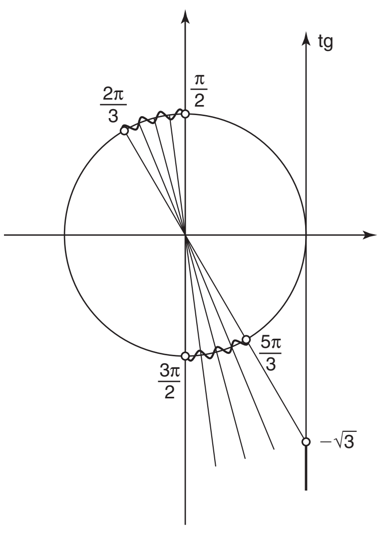
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

p) $\text{tg}\, x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

q) $\text{tg}\, x < -\sqrt{3}$



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

75 a) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **a** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **c** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Como os números $\frac{11\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução da inequação do item **d** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

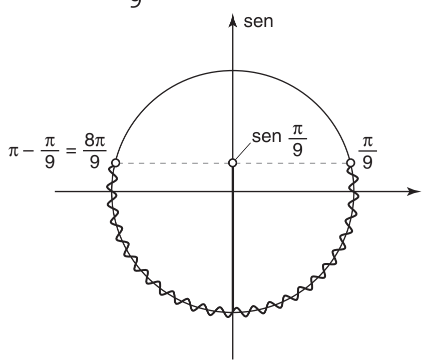
o) Basta adicionar a expressão $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a um dos intervalos obtidos no item **o** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

p) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, aos extremos do intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right]$ obtido no item **p** do exercício anterior:

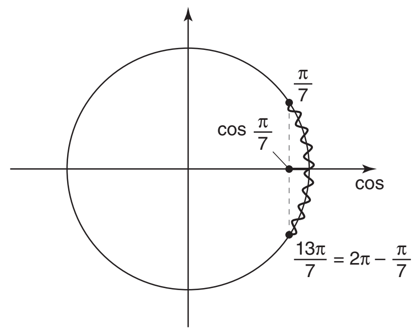
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

76 a) $\text{sen}\, x < \text{sen}\, \frac{\pi}{9}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{9} \text{ ou } \frac{8\pi}{9} < x < 2\pi\right\}$.

b) $\cos x \geqslant \cos \frac{\pi}{7}$

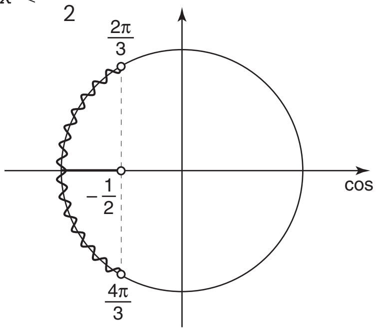


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{7} \text{ ou } \frac{13\pi}{7} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

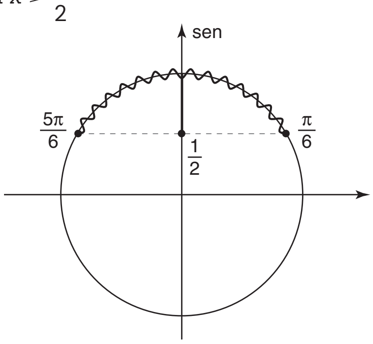
77 a) $\begin{cases} \cos x < -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x \geq \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

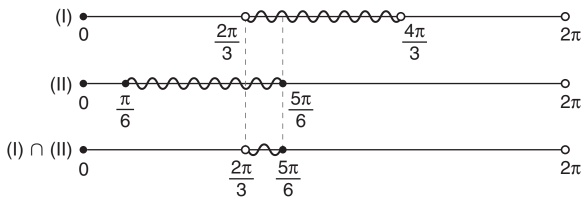
(I) $\cos x < -\dfrac{1}{2}$



(II) $\text{sen } x \geq \dfrac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), vamos ter:

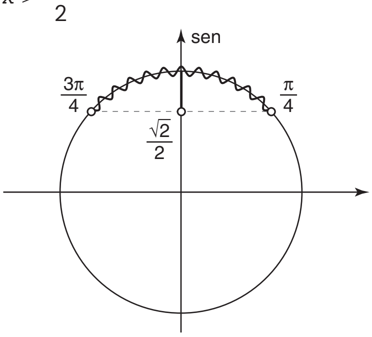


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2\pi}{3} < x \leq \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

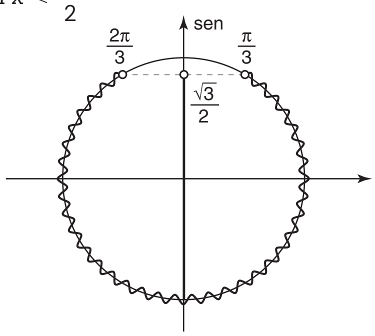
b) $\begin{cases} \text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

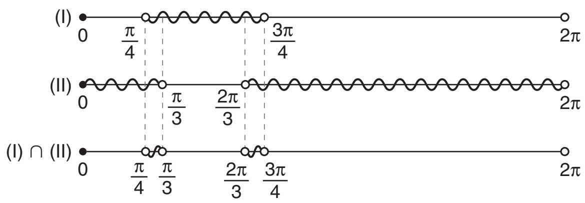
(I) $\text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



(II) $\text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

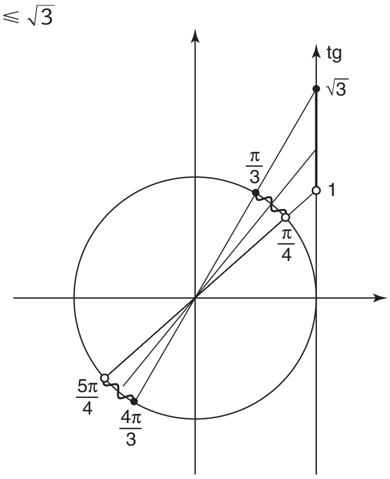


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), vamos ter:



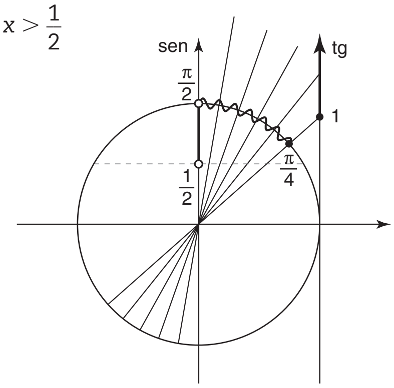
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

c) $\begin{cases} \text{tg } x > 1 \\ \text{tg } x \leq \sqrt{3} \end{cases}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x \leq \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x \leq \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

d) $\begin{cases} \text{tg } x \geq 1 \\ \text{sen } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

78 **a)** Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **a** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **d** do exercício anterior:

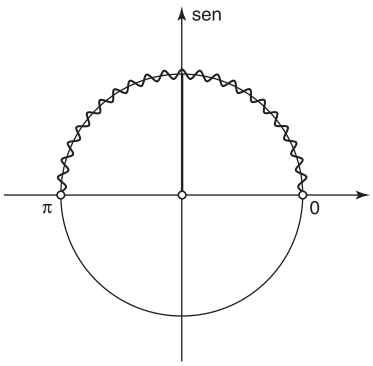
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

79 **a)** A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

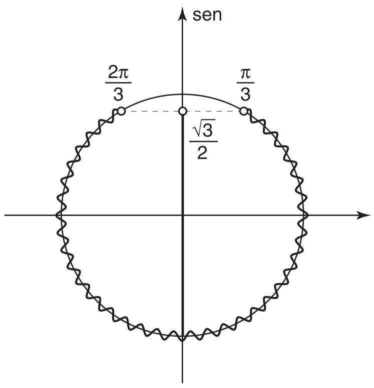
$$\begin{cases} \text{sen } x > 0 & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

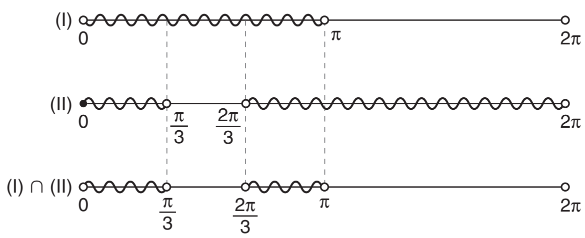
(I) sen $x > 0$



(II) sen $x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



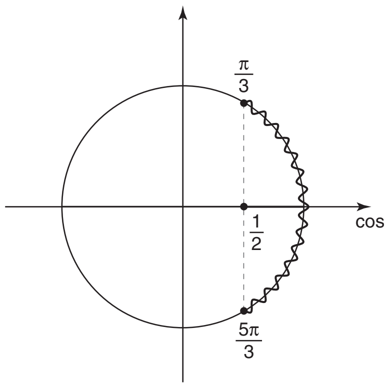
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi\right\}$.

b) A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

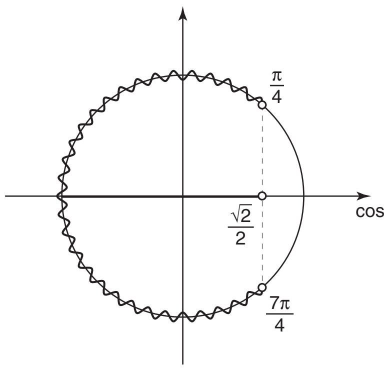
$$\begin{cases} \cos x \geqslant \dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

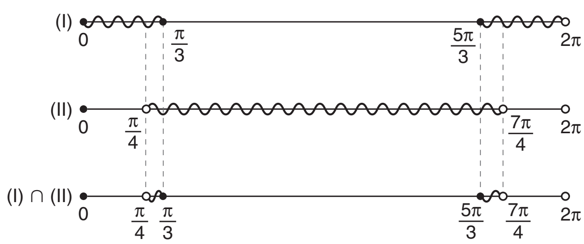
(I) $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$



(II) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

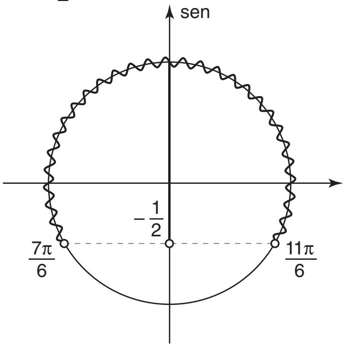
c) $|\text{sen } x| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} < \text{sen } x < \dfrac{1}{2}$

Essa dupla desigualdade é equivalente ao sistema

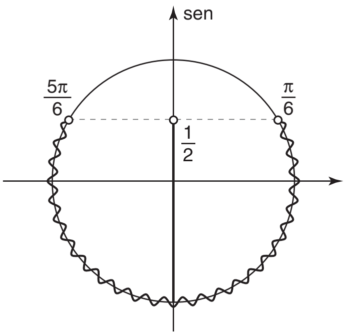
$$\begin{cases} \text{sen } x > -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x < \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

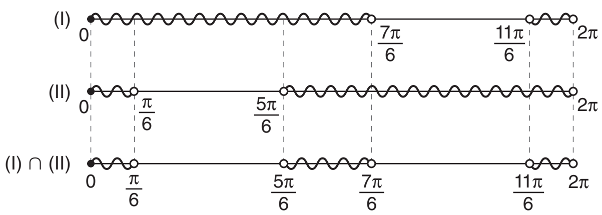
(I) sen $x > -\frac{1}{2}$



(II) sen $x < \frac{1}{2}$

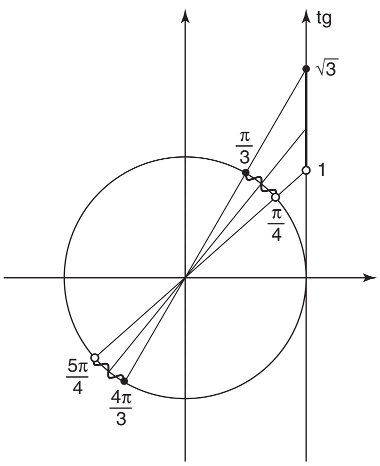


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



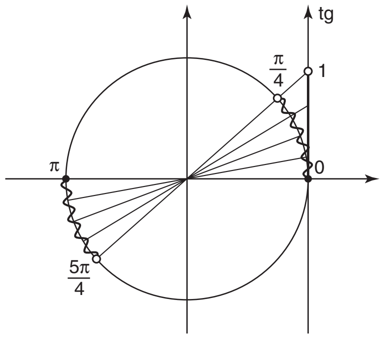
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$.

d)



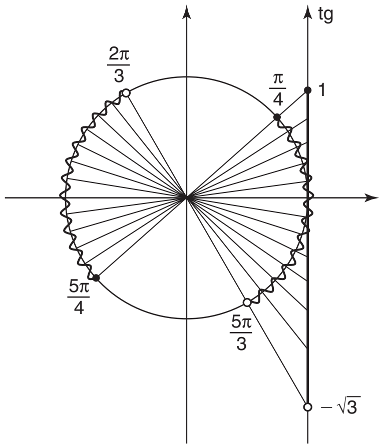
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{4\pi}{3}\right\}$.

e)



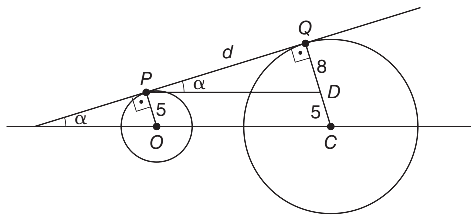
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < \frac{5\pi}{4}\right\}$.

f)



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

80 Sendo α a medida do ângulo agudo formado pelas retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{OC}$; $\overline{PD} \mathbin{/\!/} \overline{OC}$, com $D \in \overline{CQ}$; e $PQ = d$, esquematizamos:



$$\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{8}{d} \\ d > 16 \end{cases} \Rightarrow \text{sen } \alpha < \frac{1}{2}$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, concluímos que $0° < \alpha < 30°$.

81 Sendo d a distância entre o automóvel e o ponto B, temos:

$$\begin{cases} \text{tg } x = \frac{d}{15} \\ d > 5\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{tg } x > \frac{5\sqrt{3}}{15}$$

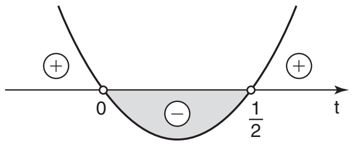
$\therefore$ tg $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

Como x é medida de um ângulo agudo, concluímos que $30° < x < 90°$.

82 a) $2\,\text{sen}^2\,x - \text{sen}\,x < 0$.

Fazendo a mudança de variável sen $x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - t < 0$.

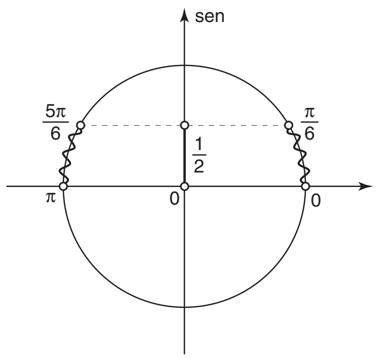
A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - t$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) < 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$.

Retornando à variável original, temos

$0 < \text{sen}\,x < \frac{1}{2}$ e, portanto:



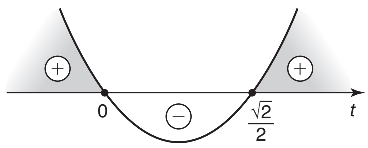
Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$

b) $2\,\text{sen}^2\,x - \sqrt{2}\,\text{sen}\,x \geqslant 0$

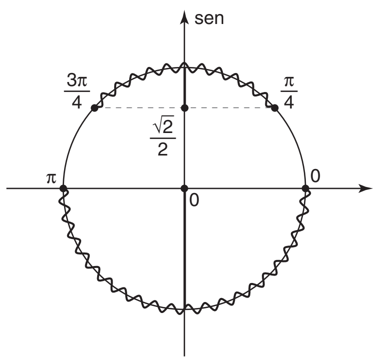
Fazendo a mudança de variável sen $x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - \sqrt{2}t \geqslant 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - \sqrt{2}\,t$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant 0$ ou $t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Retornando à variável original, temos sen $x \leqslant 0$ ou sen $x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. A reunião dos conjuntos soluções dessas inequações é representada por:



Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi \leqslant x < 2\pi\right\}$

c) $2\,\text{sen}^2\,x + 5\cos x - 4 > 0 \Rightarrow$

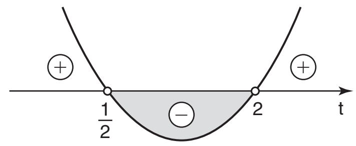
$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 4 > 0$

$\therefore -2\cos^2 x + 5\cos x - 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 < 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 5t + 2 < 0$.

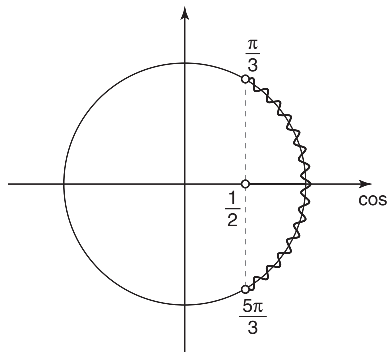
A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 5t + 2$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 2$

Retornando à variável original, temos:

$\frac{1}{2} < \cos x < 2$, ou seja, $\cos x > \frac{1}{2}$, cujas soluções são representadas por:



Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

d) $2\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 8 < 0 \Rightarrow$

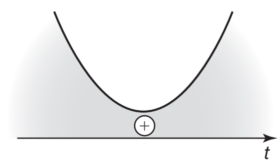
$\Rightarrow 2(1 - \text{sen}^2\,x) + 5\,\text{sen}\,x - 8 < 0$

$\therefore -2\,\text{sen}^2\,x + 5\,\text{sen}\,x - 6 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,\text{sen}^2\,x - 5\,\text{sen}\,x + 6 > 0$

Fazendo a mudança de variável sen $x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 5t + 6 > 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 5t + 6$ é esquematizada por:



Assim, $f(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

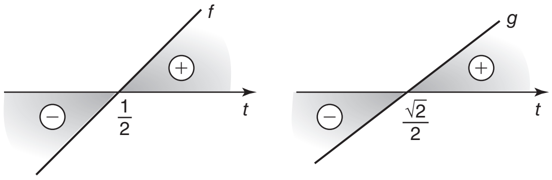
Retornando à variável original, concluímos que qualquer valor do sen x satisfaz a inequação. Concluímos, então:

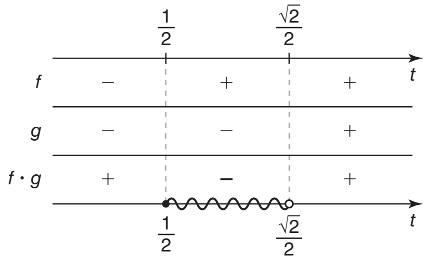
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\pi\}$

e) $(2\cos x - 1)\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) < 0$.

Fazendo $\cos x = t$, obtemos a inequação $(2t - 1)\left(2t - \sqrt{2}\right) < 0$.

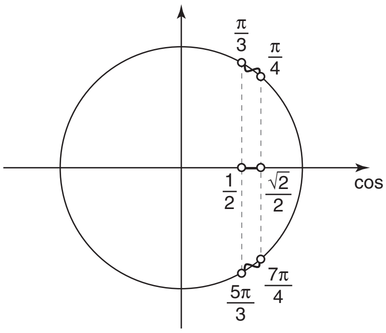
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $f \cdot g$, temos:





$f(t) \cdot g(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



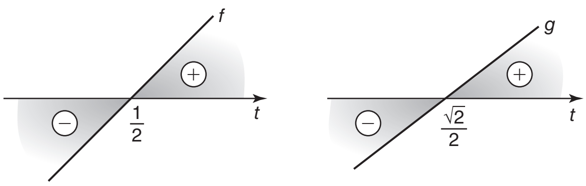
Concluímos, então:

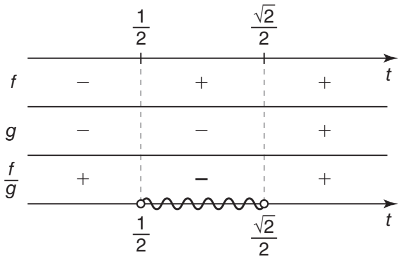
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

f) $\frac{2\,\text{sen}\, x - 1}{2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2}} < 0$

Fazendo sen x = t, obtemos a inequação $\frac{2t - 1}{2t - \sqrt{2}} < 0$.

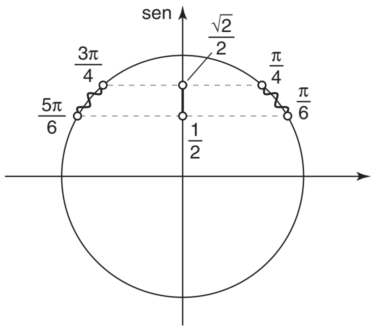
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $\frac{f}{g}$, temos:





$\frac{f(t)}{g(t)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $\frac{1}{2} < \text{sen}\, x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



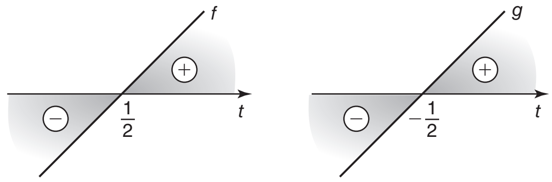
Concluímos, então:

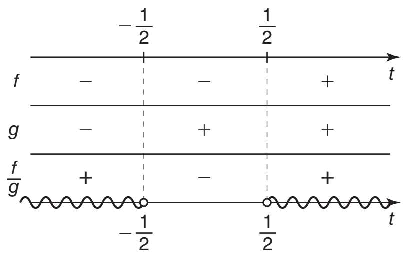
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}\right\}$

g) $\frac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1} > 0$

Fazendo cos x = t, obtemos a inequação $\frac{2t - 1}{2t + 1} > 0$.

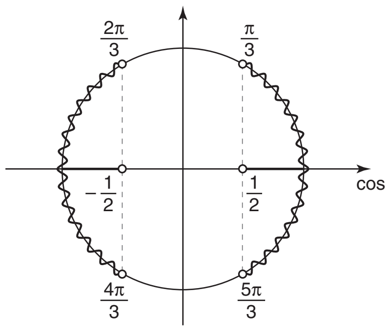
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2t + 1$ e $\frac{f}{g}$, temos:





$\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2} \text{ ou } t > \frac{1}{2}$

Logo, $\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{1}{2}$; e portanto:



Concluímos, então:

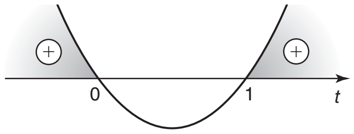
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

h) $tg^2\, x - tg\, x > 0$

Fazendo $tg\, x = t$, temos:

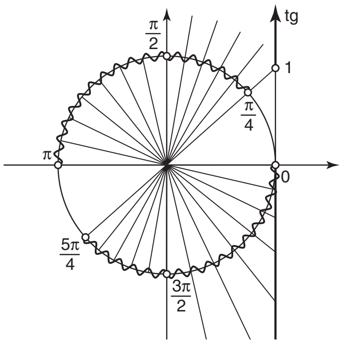
$t^2 - t > 0$

Estudando a variação de sinal de função $f(t) = t^2 - t$, obtemos:



Assim, $f(t) > 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t > 1$, e portanto:

$tg\, x < 0$ ou $tg\, x > 1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

i) $\left(tg\, x - \sqrt{3}\right)(tg^2\, x - 1) \leq 0$

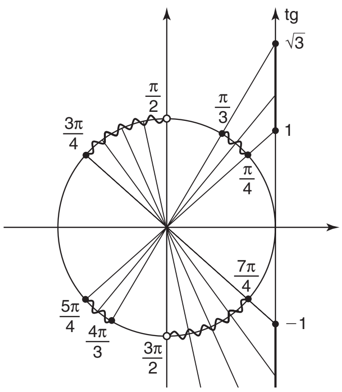
Fazendo $tg\, x = t$, temos:

$\left(t - \sqrt{3}\right)(t^2 - 1) \leq 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t - \sqrt{3}$, $g(t) = t^2 - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:

	$t < -1$	$-1 < t < 1$	$1 < t < \sqrt{3}$	$t > \sqrt{3}$
f	−	−	−	+
g	+	−	+	+
$f \cdot g$	−	+	−	+

Assim, $f(t) \cdot g(t) \leq 0 \Rightarrow t \leq -1$ ou $1 \leq t \leq \sqrt{3}$, e portanto: $tg\, x \leq -1$ ou $1 \leq tg\, x \leq \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leq \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

j) $\dfrac{tg\, x - 1}{tg\, x - \sqrt{3}} > 0$

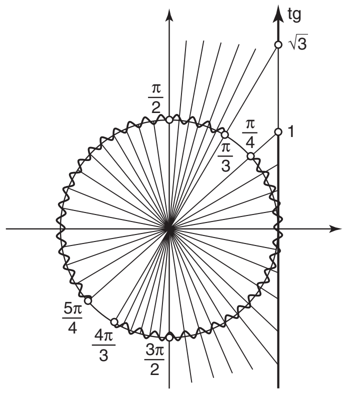
Fazendo $tg\, x = t$, temos: $\dfrac{t - 1}{t - \sqrt{3}} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t - 1$, $g(t) = t - \sqrt{3}$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

	$t < 1$	$1 < t < \sqrt{3}$	$t > \sqrt{3}$
f	−	+	+
g	−	−	+
$\dfrac{f}{g}$	+	−	+

Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < 1$ ou $t > \sqrt{3}$, e portanto:

$tg\, x < 1$ ou $tg\, x > \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

83 **a)** Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **a** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k \cdot 2\pi < x < \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo dos intervalos obtidos no item **f** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi < x < \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

j) Basta adicionar a expressão $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **j** do exercício anterior:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi \leq x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \dfrac{\pi}{3} + k\pi < x < \dfrac{5\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \dfrac{4\pi}{3} + k\pi < x < 2\pi + k\pi \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } x \neq \dfrac{3\pi}{2} + k\pi\right\}$

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 A medida em radiano desse arco é $\frac{4\pi}{8}$, ou seja, $\frac{\pi}{2}$ rad, cuja conversão para graus é dada por:

$$\frac{2\pi}{360°} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x} \Rightarrow x = 90°$$

Logo, a medida procurada é 90°.

2 A razão entre o comprimento do arco e a medida do raio, nessa ordem, é a medida x do arco, em radiano, ou seja:

$$x = \frac{2\pi}{12}\text{ rad} = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

3 $\frac{137\pi}{5} = \frac{130\pi}{5} + \frac{7\pi}{5} = 26\pi + \frac{7\pi}{5}$

Logo, $\frac{7\pi}{5}$ rad é a medida de um arco côngruo a $\frac{137\pi}{5}$ rad.

Alternativa **e**.

4 a) $360° : 8 = 45°$ $(0° \leqslant x < 360°)$

$x_A = 0°$ $x_E = 180°$
$x_B = 45°$ $x_F = 225°$
$x_C = 90°$ $x_G = 270°$
$x_D = 135°$ $x_H = 315°$

Logo: $A(0°)$, $B(45°)$, $C(90°)$, $D(135°)$, $E(180°)$, $F(225°)$, $G(270°)$ e $H(315°)$.

b) x_F na 2ª e na 3ª voltas positivas.

$225° + 360° = 585°$ (na 2ª volta positiva)
$225° + 2 \cdot 360° = 945°$ (na 3ª volta positiva)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice F são 585° e 945°.

c) x_H na 1ª e na 2ª voltas negativas.

$315° - 360° = -45°$ (na 1ª volta negativa)
$315° - 2 \cdot 360° = -405°$ (na 2ª volta negativa)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice H são $-45°$ e $-405°$.

5 a) $2\pi : 6 = \frac{\pi}{3}$

$x_A = 0$ rad
$x_B = \frac{\pi}{3}$ rad
$x_C = \frac{2\pi}{3}$ rad
$x_D = \pi$ rad
$x_E = \frac{4\pi}{3}$ rad
$x_F = \frac{5\pi}{3}$ rad

Logo: $A(0)$, $B\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $D(\pi)$, $E\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $F\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

b) x_C na 2ª e na 3ª voltas positivas.

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$ (na 2ª volta positiva)
$\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{14\pi}{3}$ (na 3ª volta positiva)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice C são $\frac{8\pi}{3}$ rad e $\frac{14\pi}{3}$ rad.

c) x_F na 1ª e na 2ª voltas negativas.

$\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ (na 1ª volta negativa)
$\frac{5\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$ (na 2ª volta negativa)

Logo, as medidas procuradas associadas ao vértice F são $-\frac{\pi}{3}$ rad e $-\frac{7\pi}{3}$ rad.

6 Adicionando à medida 30° qualquer múltiplo inteiro de 360°, obtemos a medida de um arco côngruo ao arco de 30°. Assim, podemos afirmar que a medida α pode ser expressa por: $\alpha = 30° + k \cdot 360°$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Alternativa **e**.

7 a) M: $180° - 133° = 47°$
N: $133°$
P: $180° + 47° = 227°$
Q: $360° - 47° = 313°$

b) M: $234° - 180° = 54°$
N: $180° - 54° = 126°$
P: $234°$
Q: $360° - 54° = 306°$

c) M: $360° - 340° = 20°$
N: $180° - 20° = 160°$
P: $180° + 20° = 200°$
Q: $340°$

d) M: $\pi - \frac{23\pi}{36} = \frac{13\pi}{36}$
N: $\frac{23\pi}{36}$
P: $\pi + \frac{13\pi}{36} = \frac{49\pi}{36}$
Q: $2\pi - \frac{13\pi}{36} = \frac{59\pi}{36}$

e) M: $\frac{11\pi}{9} - \pi = \frac{2\pi}{9}$
N: $\pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$
P: $\frac{11\pi}{9}$
Q: $2\pi - \frac{2\pi}{9} = \frac{16\pi}{9}$

f) M: $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$
N: $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
P: $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
Q: $\frac{5\pi}{3}$

8 M: α
N: $\beta + 90° = 180° - \alpha \Rightarrow \beta = 90° - \alpha$ (I)
P: $70° + 3\alpha + \beta = 180° + \alpha \Rightarrow 2\alpha + \beta = 110°$ (II)
Q: $360° - \alpha$

De (I) e (II), temos:
$2\alpha + 90° - \alpha = 110°$
$\alpha = 110° - 90°$
$\alpha = 20°$

Substituindo α por 20° na medida associada ao ponto Q, temos:
Q: $360° - \alpha = 360° - 20° = 340°$

Alternativa **d**.

9 Para $x \in \mathbb{R}$, temos:
$0 \leqslant |\text{sen } x| \leqslant 1$
Portanto, o valor mínimo de f é zero.

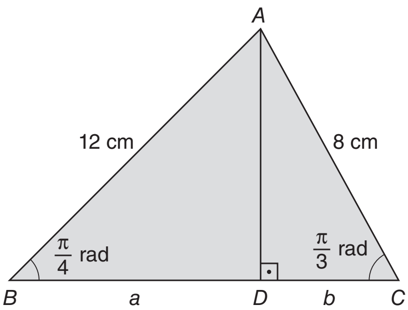
10 A expressão $\dfrac{1}{|\cos x|}$ assume o valor mínimo quando o denominador $|\cos x|$ assume o valor máximo. Como o valor máximo de $|\cos x|$ é 1, concluímos que o valor mínimo de $\dfrac{1}{|\cos x|}$ é $\dfrac{1}{1} = 1$.

11 Temos: $a < b$, com a e b no 3º quadrante. Assim:
- $\cos a < \cos b$
- $\text{sen } a > \text{sen } b$
- $\cos a < 0$ e $\cos b < 0 \Rightarrow \cos a \cdot \cos b > 0$

Alternativa **e**.

12 Sendo M e N as extremidades dos arcos trigonométricos de medidas α e β, respectivamente, temos:
a) V, pois a ordenada de M é maior que a ordenada de N.
b) F, pois a ordenada de M é menor que a ordenada de N.
c) F, pois a abscissa de M é menor que a abscissa de N.
d) V, pois a abscissa de M é maior que a abscissa de N.

13 Sendo $\overline{AD}$ a altura relativa ao lado $\overline{BC}$, temos:



$\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{a}{12} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{12} \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$

$\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{b}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{8} \Rightarrow b = 4$

Logo: $BC = a + b = 6\sqrt{2} + 4$
Portanto, a medida de $\overline{BC}$ é $(6\sqrt{2} + 4)$ cm.

14 $\cos 1.560 = \cos(4 \cdot 360° + 120°) = \cos 120° =$
$= \cos(180° - 60°) = -\cos 60°$
Alternativa **d**.

15 $\cos \dfrac{26\pi}{3} + \cos \dfrac{89\pi}{3} =$

$= \cos\left(\dfrac{24\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\dfrac{84\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{3}\right) =$

$= \cos\left(8\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(28\pi + \dfrac{5\pi}{3}\right) =$

$= \cos \dfrac{2\pi}{3} + \cos \dfrac{5\pi}{3} =$

$= -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$

Alternativa **b**.

16 $E = \dfrac{\text{sen}(\pi - x) - \text{sen}(\pi + x)}{\text{sen}(2\pi - x)} =$

$= \dfrac{\text{sen } x + \text{sen } x}{-\text{sen } x} = \dfrac{2\,\text{sen } x}{-\text{sen } x} = -2$

Alternativa **d**.

17 **a)** $E = \dfrac{\cos \alpha - \text{sen } \alpha}{-\cos \alpha + \text{sen } \alpha} = \dfrac{\cos \alpha - \text{sen } \alpha}{-(\cos \alpha - \text{sen } \alpha)} = -1$

b) $E = \dfrac{1 - (-\cos \alpha)^2}{1 + \cos \alpha} = \dfrac{1 - \cos^2 \alpha^2}{1 + \cos \alpha} =$

$= \dfrac{(1 - \cos \alpha)\cancel{(1 + \cos x)}}{\cancel{(1 + \cos \alpha)}} = 1 - \cos \alpha$

18 Se k for um número par, temos que $k\pi \equiv 0$; portanto:
$\cos(k\pi - x) = \cos(0 - x) = \cos(-x) = \cos x$
Alternativa **c**.

19 Como $\text{sen } 70° = \cos 20°$ e $\text{sen } 50° = \cos 40°$, temos:
$E = \text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 40° + \text{sen}^2 50° + \text{sen}^2 70° \Rightarrow$
$\Rightarrow E = \text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 40° + \cos^2 40° + \cos^2 20°$

1
1

$\therefore E = 2$

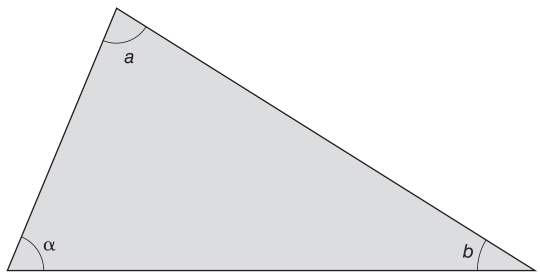
20 Como $\cos 140° = -\cos 40°$, temos:

$E = \dfrac{\text{sen}^2 30° + \cos^2 60°}{\text{sen}^2 40° + \cos^2 140°} \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{\text{sen}^2 40° + \cos^2 40°} = \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}}{1}$

$\therefore E = \dfrac{1}{2}$

21



$a + b + \alpha = 180° \Rightarrow a + b = 180° - \alpha$
Logo, $\cos(a + b) = \cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$
Pela relação fundamental, $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

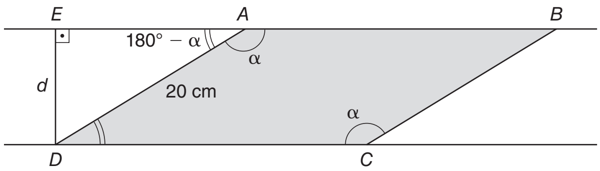
$\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \dfrac{15}{16} = \dfrac{1}{16}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\dfrac{1}{4}$

Como α é a medida de um ângulo agudo, obtemos $\cos \alpha = \dfrac{1}{4}$.

Concluímos, então, que $\cos(a + b) = -\cos \alpha =$
$= -\dfrac{1}{4}$.

22 Sendo d a distância procurada, esquematizamos:



Pela relação fundamental, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, calculamos sen α:

$\text{sen}^2\,\alpha + \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$

$\therefore \text{sen}\,\alpha = \pm\dfrac{2}{3}$

Como $90° < \alpha < 180°$, só nos interessa o valor positivo do seno, isto é:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2}{3}$

Do triângulo ADE, obtemos:

$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \dfrac{d}{20} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{d}{20}$

$\therefore \dfrac{2}{3} = \dfrac{d}{20} \Rightarrow d = \dfrac{40}{3}$

Portanto, a distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $\dfrac{40}{3}$ cm.

23 $\text{sen}\,x + \cos x = 0{,}6 \Rightarrow (\text{sen}\,x + \cos x)^2 = (0{,}6)^2$

$\therefore \text{sen}^2\,x + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0{,}36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x = 0{,}36$

$\therefore \text{sen}\,x \cdot \cos x = \dfrac{0{,}36 - 1}{2}$

$\therefore \text{sen}\,x \cdot \cos x = -0{,}32$

24 $\begin{cases} 4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 \\ \cos^2 x + \text{sen}\,x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 & \text{(I)} \\ \cos^2 x = 1 - \text{sen}\,x^2 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I), temos:

$4(1 - \text{sen}^2\,x) + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\,\text{sen}^2\,x - 5\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\,x = k$, obtemos a equação do 2º grau:

$4k^2 - 5k + 1 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$

$\therefore k = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} \Rightarrow k = 1 \text{ ou } k = \dfrac{1}{4}$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}\,x = 1 \left(\text{não convém, pois } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\right)$

ou $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{4}$

Portanto, concluímos que $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{4}$.

25 $x^2 - 4x + 4\cos^2\alpha = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4\cos^2\alpha = 16 - 16\cos^2\alpha =$
$= 16(1 - \cos^2\alpha)$

Como $1 - \cos^2\alpha = \text{sen}^2\,\alpha$, temos:

$\Delta = 16\,\text{sen}^2\,\alpha$

$\therefore x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{16\,\text{sen}^2\,\alpha}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm 4\,\text{sen}\,\alpha}{2}$

$\therefore x = 2 \pm 2\,\text{sen}\,\alpha$

Portanto: $S = \{2 - 2\cos\alpha, 2 + 2\cos\alpha\}$

26 $E = \dfrac{1 + \cos x \cdot (-\cos x)}{-\text{sen}\,x \cdot (-\text{sen}\,x)} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\text{sen}^2\,x} = \dfrac{\text{sen}^2\,x}{\text{sen}^2\,x} = 1$

27 **a)** Soma $= \dfrac{-(-2k)}{1} = 2k$

b) Produto $= \dfrac{k^2 + k}{1} = k^2 + k$

c) Sendo as raízes sen α e cos α, temos:

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha + \cos\alpha = 2k & \text{(I)} \\ \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = k^2 + k & \text{(II)} \end{cases}$

Quadramos ambos os membros de (I):

$(\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2 = (2k)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha = 4k^2$

$\therefore 1 + 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = 4k^2$ (III):

Substituímos (II) em (III):

$1 + 2(k^2 + k) = 4k^2$

$\therefore 2k^2 - 2k - 1 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 12$

$\therefore k = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{12}}{2 \cdot 2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Como k é um número real negativo, concluímos que $k = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

28 Como $\text{sen}\,210° = -\dfrac{1}{2}$, $\cos 210° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg}\,210° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, temos:

$\cos 210° < \text{sen}\,210° < \text{tg}\,210°$.

Alternativa **b**.

29 $\text{tg}\,\alpha = 2 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, para $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Alternativa **c**.

30 $\text{tg}\,\alpha = -2 \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -2$

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -2\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, para $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Assim:

$\text{sen}\,\alpha = -2\cos\alpha = -2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Logo, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

31 $\text{tg}\,\alpha = -7 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -7\cos\alpha$

$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -7\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,

para $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Então:

$\text{sen}\,\alpha = -7\cos\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ e $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

32 $\text{tg}\,\alpha = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}\cos\alpha$

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}\cos\alpha \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ para}$$

$\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Assim:

$\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ e $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

33 Observe que $\cos x \neq 0$, pois para $\cos x = 0$ teríamos $\text{sen}\,x = \pm1$, o que não satisfaz a equação. Assim, podemos dividir ambos os membros por $\cos^2 x$, obtendo:

$$\dfrac{\text{sen}^2\,x}{\cos^2 x} - \dfrac{3\cdot\text{sen}\,x\cdot\cos x}{\cos^2 x} + \dfrac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \dfrac{0}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{tg}^2\,x - 3\,\text{tg}\,x + 2 = 0$$

Fazendo $\text{tg}\,x = y$, obtemos a equação do 2º grau $y^2 - 3y + 2 = 0$, cujas raízes são 2 e 1.

Concluímos, então, que $\text{tg}\,x = 2$ ou $\text{tg}\,x = 1$.

Alternativa **c**.

34 $$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2\cos\alpha} \\ \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2\cos\alpha}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$\therefore \dfrac{1}{4\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1 = 0$

$\therefore (2\cos^2\alpha - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

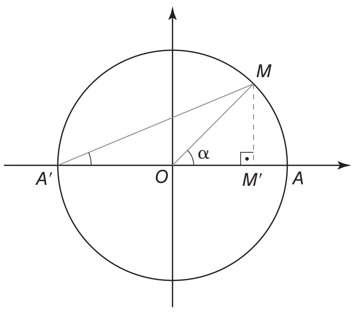
Como $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, temos $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Substituindo $\cos\alpha$ por $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ em $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{2\cos\alpha}$, obtemos $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto:

$$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

35 a) Seja M' a projeção de M sobre o eixo $\overline{OA}$.



Cálculo de OM':

$(OM)^2 = (MM')^2 + (OM')^2 \Rightarrow 1 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + (OM')^2$

$\therefore (OM') = \dfrac{4}{5}$.

Assim:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{MM'}{OM'} = \dfrac{3}{4}$

b) $m(A\hat{A'}M) = \dfrac{1}{2}\cdot m(A\hat{O}M) \Rightarrow m(A\hat{A'}M) = \dfrac{\alpha}{2}$

c) $\text{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{MM'}{A'M'} = \dfrac{\dfrac{3}{5}}{1 + \dfrac{4}{5}} = \dfrac{1}{3}$

36 a) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$

$\therefore M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ e $N\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

b) $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ e $N\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

c) $\text{tg}\,\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $\alpha = \dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore M\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e $N\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

37 Cálculo das medidas α, β e θ:

$\alpha = \dfrac{360°}{6} \Rightarrow \alpha = 60°$

$\beta = \dfrac{360°}{8} \Rightarrow \beta = 45°$

$\theta = \dfrac{360°}{12} \Rightarrow \theta = 30°$

a) $\text{tg}\,17\alpha = \text{tg}\,(17\cdot60°) = \text{tg}\,1.020° = \text{tg}\,300° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,29\beta = \text{tg}\,(29\cdot45°) = \text{tg}\,1.305° = \text{tg}\,225° = \text{tg}\,45° = 1$

c) $\text{tg}\,16\theta = \text{tg}\,(16\cdot30°) = \text{tg}\,480° = \text{tg}\,120° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

38 $$E = \dfrac{\text{tg}^2\,(\pi - x) - \text{tg}\,(\pi + x)}{\text{tg}\,(2\pi - x)} = \dfrac{(-\text{tg}\,x)^2 - \text{tg}\,x}{-\text{tg}\,x} =$$

$$= \dfrac{\text{tg}\,x\,(\text{tg}\,x - 1)}{-\text{tg}\,x} = \dfrac{\text{tg}\,x - 1}{-1} = 1 - \text{tg}\,x$$

Alternativa **e**.

39 a) $\text{tg}\,(-30°) = -\text{tg}\,30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}\,(-120°) = -\text{tg}\,120° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\,(-225°) = -\text{tg}\,225° = -\text{tg}\,45° = -1$

d) $\text{tg}\,(-300°) = -\text{tg}\,300° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

e) $\text{tg}\,(-1.110°) = -\text{tg}\,(1.110°) = -\text{tg}\,30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg}\,(-1.860°) = -\text{tg}\,(1.860°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

40 a) $\text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{3} = \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\dfrac{7\pi}{6} = -\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$

e) $\text{tg}\left(\frac{33\pi}{4}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$

f) $\text{tg}\left(\frac{31\pi}{3}\right) = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

41 $E = \dfrac{\text{tg}\,(-\alpha) + \text{tg}\,(\pi - \alpha)}{\text{tg}\,(\pi + \alpha) - \text{tg}\,(2\pi - \alpha)} = \dfrac{-\text{tg}\,\alpha + (-\text{tg}\,\alpha)}{\text{tg}\,\alpha - (-\text{tg}\,\alpha)} =$

$= \dfrac{-2\,\text{tg}\,\alpha}{2\,\text{tg}\,\alpha} = -1$

Alternativa **a**.

42 $E = \dfrac{\text{tg}\,(-\alpha) - \text{sen}\,(\pi + \alpha) \cdot \cos\,(-\alpha)}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} =$

$= \dfrac{-\text{tg}\,\alpha - (-\text{sen}\,\alpha) \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{-\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{\frac{-\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{-\text{sen}\,\alpha\,(1 - \cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha} = \dfrac{-\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}^2\,\alpha}{\cos^3\alpha} =$

$= -\dfrac{\text{sen}^3\,\alpha}{\cos^3\alpha} = -\text{tg}^3\,\alpha$

Alternativa **c**.

43 a) O valor de x, com $0° \leq x < 360°$, para que $\text{sen}\,x = 1$ é $x = 90°$.
Logo, $S = \{90°\}$.

b) Os valores de x, com $0° \leq x < 360°$, para os quais $\cos x = 0$ são $x = 90°$ ou $x = 270°$.
Logo, $S = \{90°, 270°\}$.

c) Os valores de x, com $0° \leq x < 360°$, para os quais $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ são $x = 30°$ ou $x = 180° - 30° = 150°$.
Logo, $S = \{30°, 150°\}$.

d) Os valores de x, com $0° \leq x < 360°$, para os quais $\cos x = -\frac{1}{2}$ são $x = 180° - 60° = 120°$ ou $x = 180° + 60° = 240°$.
Logo, $S = \{120°, 240°\}$.

44 a) Na primeira volta no sentido positivo, temos:

$\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) Na primeira volta no sentido positivo, temos:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

45 a) $\text{tg}^2\,x = 0 \Rightarrow \text{tg}\,x = 0 \quad \therefore\ x = 0$ ou $x = \pi$
Logo, $S = \{0, \pi\}$.

b) $\text{tg}^2\,x = 1 \Rightarrow \text{tg}\,x = 1$ ou $\text{tg}\,x = -1$

- $\text{tg}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg}\,x = -1 \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou

$x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\text{tg}^2\,x = 3 \Rightarrow \text{tg}\,x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg}\,x = -\sqrt{3}$

- $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\text{tg}\,x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

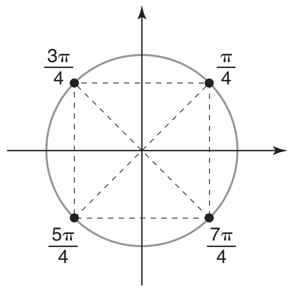
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

d) $|\text{tg}\,x| = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$
- $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

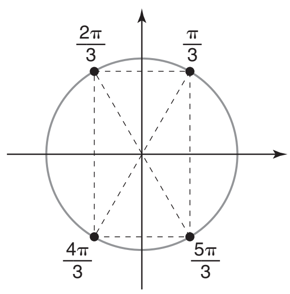
46 b) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **b** do exercício anterior, temos:



Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

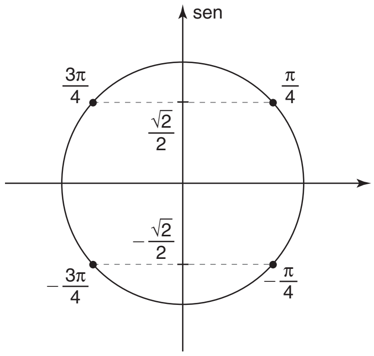
c) Representando na circunferência trigonométrica as raízes obtidas no item **c** do exercício anterior, temos:



Logo, o conjunto solução S nas infinitas voltas é:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

47 $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\therefore x = -\frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

48 $3 \text{ sen } x = \sqrt{3} \cos x \Rightarrow \frac{3 \text{ sen } x}{\cos x} = \sqrt{3}$

$\therefore \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

49 $4^{3\cos x} = 8 \Rightarrow (2^2)^{3\cos x} = 2^3$

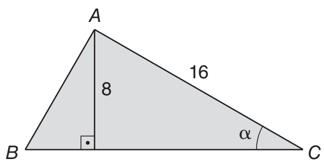
$\therefore 2^{2 \cdot 3\cos x} = 2^3 \Rightarrow 2^{6\cos x} = 2^3$

$\therefore 6\cos x = 3 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

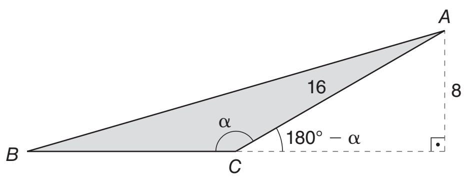
Os valores de x, com $0 \leq x < 2\pi$, tais que $\cos x = \frac{1}{2}$ são $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

Alternativa **a**.

50 Sendo $m(A\hat{C}B) = \alpha$, temos duas possibilidades:



ou

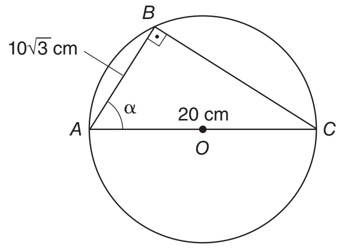


Na primeira figura, temos $\text{sen } \alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$; na segunda, temos $\text{sen } (180° - \alpha) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Como $\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha$, deduzimos que nas duas figuras as medidas α são raízes da equação $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$, com $0° < \alpha < 180°$. Essas raízes são: 30° ou 150°.

Alternativa **d**.

51 Sendo α a medida procurada, esquematizamos:



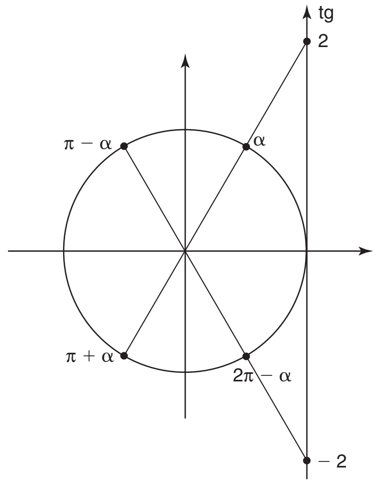
Assim, temos:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0° < \alpha < 90° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Logo, a medida do ângulo agudo que a corda $\overline{AB}$ forma com o diâmetro $\overline{AC}$ é 30°.

52 $\text{tg}^2 x = 4 \Rightarrow \text{tg } x = 2$ e $\text{tg } x = -2$

Sendo α a raiz pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:



Logo, a soma S das raízes no intervalo [0, 2π[é dada por:

$S = \alpha + \pi - \alpha + \pi + \alpha + 2\pi - \alpha = 4\pi$

53 Como $\cos x \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por cos x, obtendo:

$$\frac{5 \text{ sen } x - \cos x}{\cos x} = \frac{4 \text{ tg } x \cdot \cos x}{\cos x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 5 \text{tg } x - 1 = 4 \text{tg } x$

$\therefore \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

54 Condição: $2 + \text{tg } x \neq 0 \Rightarrow \text{tg } x \neq -2$

$$\frac{1}{2 + \text{tg } x} + \frac{1 + \text{tg } x}{3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 + (1 + \text{tg } x)(2 + \text{tg } x) - 3(2 + \text{tg } x)}{3(2 + \text{tg } x)} = 0$$

$\therefore \text{tg}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$

Assim, temos:

- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

55 $\text{sen } x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

56 $\text{sen } x \cdot \cos x - 3 \text{ sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (\cos x - 3) = 0$

$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 3$ (não convém)

Para $0 \leq x < 2\pi$, concluímos:

$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

Logo, $S = \{0, \pi\}$.

57 $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \sqrt{2} \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \left(2 \text{ sen } x - \sqrt{2}\right) = 0$

$\therefore \cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $0 \leq x < 2\pi$, concluímos:

- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} +$ $+ k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

58 $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0$

$\therefore \cos x(2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

Para $0 \leq x < 2\pi$, concluímos:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

$\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

59 $\text{sen}^3 x \cdot \cos x - 3 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x \cdot \cos x (\text{sen}^2 x - 3) = 0$

$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \pm\sqrt{3}$ (não convém)

Para $0 \leq x < 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

60 a) $(4 \text{ sen}^2 x - 3)(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{4 \text{ sen}^2 x - 3 = 0}_{(I)}$ ou $\underbrace{\cos x - 1 = 0}_{(II)}$

Resolvendo as equações (I) e (II), para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:

(I) $4 \text{ sen}^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{3}{4}$

$\therefore \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

(II) $\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \quad \therefore x = 0$ ou $x = 2\pi$

De (I) e (II), concluímos:

$S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

b) $\cos^2 x \cdot \text{sen } x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x(\cos^2 x - 1) = 0$

$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

c) $4 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + 2 \text{ sen } x - 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \text{ sen } x (2 \cos x + 1) - 1(2 \cos x + 1) = 0$

$\therefore (2 \cos x + 1)(2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, concluímos:

- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

d) $2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{sen } x (2 \text{ sen } x - 1) = 0$

$\therefore \text{sen } x = 0$ ou $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi\right\}$.

e) $\text{tg}^2 x - \sqrt{3} \text{ tg } x = 0 \Rightarrow \text{tg } x \left(\text{tg } x - \sqrt{3}\right) = 0$

$\therefore \text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = \sqrt{3}$

Assim:

- $\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

f) $\text{tg}^5 x - \text{tg } x = 0 \Rightarrow \text{tg } x (\text{tg}^4 x - 1) = 0$

$\therefore \text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$

Assim:

- $\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$.

61 $\text{sen}^2 x + \text{sen } (-x) = 0 \Rightarrow \text{sen}^2 x - \text{sen } x = 0$

$\therefore \text{sen } x (\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{sen } x = 1$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, obtemos:

- $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$
- $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

Concluímos, assim, que a soma das raízes é:

$0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

Alternativa **a**.

62 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
$(\text{tg}^2 x - 3)(\cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \text{tg}^2 x - 3 = 0$ ou $\cos^2 x - 1 = 0$
$\therefore\ \text{tg}\, x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$ ou $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1$
Assim, temos:
- $\text{tg}\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $\text{tg}\, x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x = 1$ ou $\cos x = -1 \Rightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ ou } x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

63 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
$\text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x - \text{tg}\, x - \text{sen}\, x + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{tg}\, x\,(\text{sen}\, x - 1) - (\text{sen}\, x - 1) = 0$
$\therefore\ (\text{sen}\, x - 1)(\text{tg}\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x - 1 = 0$ ou $\text{tg}\, x - 1 = 0$
Assim, temos:
- $\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, não convém, pois $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ e $\cos x \neq 0$
- $\text{tg}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

64 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
$\text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x + \text{sen}\, x - \text{tg}\, x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}\, x\,(\text{tg}\, x + 1) - \cos x\,(\text{tg}\, x + 1) = 0$
$\therefore\ (\text{tg}\, x + 1)(\text{sen}\, x - \cos x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{tg}\, x + 1 = 0$ ou $\text{sen}\, x - \cos x = 0$
Assim, temos:
- $\text{tg}\, x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$
- $\text{sen}\, x = \cos x \Rightarrow \text{tg}\, x = 1$
  $\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$
  Logo, $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

65 Condição de existência: $\cos x \neq 0$
Temos:
$\text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x = \text{tg}\, x \Rightarrow \text{tg}\, x \cdot \text{sen}\, x - \text{tg}\, x = 0$
$\therefore\ \text{tg}\, x\,(\text{sen}\, x - 1) = 0 \Rightarrow \text{tg}\, x = 0$ ou $\text{sen}\, x = 1$
Os valores de x para os quais $\text{sen}\, x = 1$ não convêm, pois esses valores não satisfazem a condição de existência. Portanto:
$\text{tg}\, x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

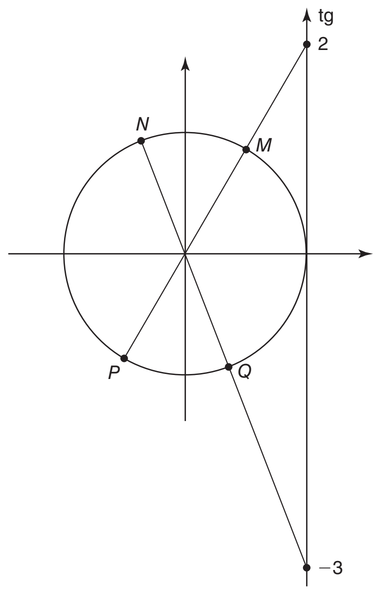
66 a) $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$t^2 - 4t + 3 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$
$\therefore\ t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow t = 3$ ou $t = 1$
Como $\cos x = t$, temos $\cos x = 3$ (impossível) ou $\cos x = 1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$
Logo, $S = \{0\}$.

b) $\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\, x + 2 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$t^2 - 3t + 2 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$
$\therefore\ t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow t = 2$ ou $t = 1$
Como $\text{sen}\, x = t$, temos $\text{sen}\, x = 2$ (impossível) ou $\text{sen}\, x = 1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

c) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$2t^2 + 3t + 1 = 0$
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$
$\therefore\ t = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ ou $t = -1$
Como $\cos x = t$, temos $\cos x = -\frac{1}{2}$ ou $\cos x = -1$.
Para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
- $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$.

Logo, $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi\right\}$.

67 $\text{tg}^2 x + \text{tg}\, x - 6 = 0$
Para $\text{tg}\, x = y$, temos: $y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -3$
Logo: $\text{tg}\, x = 2$ ou $\text{tg}\, x = -3$
Quatro pontos, M, N, P e Q, são extremos de arcos trigonométricos que têm essas tangentes, conforme mostra a figura:



Assim, concluímos que no intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ a equação proposta apresenta 3 raízes.

68 $tg^2\,x - (1 + \sqrt{3})\,tg\,x + \sqrt{3} = 0$
Para t = tg x, temos:
$t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$
Sendo S e P, respectivamente, a soma e o produto das raízes dessa equação do 2º grau, temos:
$\begin{cases} S = 1 + \sqrt{3} \\ p = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = \sqrt{3}$
Assim:
- $tg\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
- $tg\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Concluímos, então, que a maior raiz da equação proposta, no intervalo $[0, 2\pi[$, é $\frac{4\pi}{3}$.

69 $2\,sen^2\,x - 3\,sen\,x + 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável sen x = t, obtemos a equação do 2º grau:
$2t^2 - 3t + 1 = 0$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$
$\therefore\ t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ ou $t = 1$
Retornando à variável original, temos:
$sen\,x = \frac{1}{2}$ ou $sen\,x = 1$
Para $0 \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, concluímos:
- $sen\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{13\pi}{6}$ (3 soluções)
- $sen\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$ (2 soluções)

Logo, a equação possui 5 soluções no intervalo considerado.
Alternativa **d**.

70 $sen^2\,x - 2\cos x - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$
$\therefore\ \cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável cos x = y, obtemos a equação do 2º grau:
$y^2 + 2y + 1 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
$\therefore\ y = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y = -1$
Retornando à variável original, temos cos x = −1.
Assim, para $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos:
$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$
Logo, $S = \{\pi\}$.

71 $9 - 2\cos^2 x = 15\,sen\,x \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 - 2(1 - sen^2\,x) = 15\,sen\,x$
$\therefore\ 2\,sen^2\,x - 15\,sen\,x + 7 = 0$
Fazendo a mudança de variável sen x = t, obtemos a equação do 2º grau:
$2t^2 - 15t + 7 = 0$
$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 225 - 56 = 169$
$\therefore\ t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm 13}{4} \Rightarrow t = 7$ ou $t = \frac{1}{2}$
Retornando à variável original, temos:
$sen\,x = 7$ (impossível) ou $sen\,x = \frac{1}{2}$
Para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, concluímos:
$sen\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.

72 $3\,sen^2\,x + sen\,x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 - 3\,sen^2\,x - sen\,x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$
$\therefore\ 3(1 - sen^2\,x) - sen\,x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\cos^2 x - sen\,x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$
$\therefore\ \cos^2 x - sen\,x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x\,(\cos x - sen\,x) = 0$
$\therefore\ \cos x = 0$ ou $\cos x - sen\,x = 0$
Assim, temos:
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $\cos x = sen\,x \Rightarrow tg\,x = 1$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$
Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

73 $8\,sen^4\,x + 2\cos^2 x = 3 \Rightarrow 8\,sen^4\,x + 2(1 - sen^2\,x) = 3$
$\therefore\ 8\,sen^4\,x - 2\,sen^2\,x - 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável $sen^2\,x = t$, obtemos a equação do 2º grau:
$8t^2 - 2t - 1 = 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1) = 36$
$\therefore\ t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 8} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ ou $t = -\frac{1}{4}$
Retornando à variável original, temos:
$sen^2\,x = \frac{1}{2}$ ou $sen^2\,x = -\frac{1}{4}$ (impossível)
Assim, calculamos os possíveis valores de sen x:
$sen^2\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $sen\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, concluímos:
- $sen\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$
- $sen\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right\}$.

74 $x^2 - 2x \cdot \cos\theta + sen^2\,\theta = 0$
Se essa equação, na variável x, possui raízes reais e iguais, então $\Delta = 0$. Assim:
$\Delta = 0 \Rightarrow (-2\cos\theta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot sen^2\,\theta = 0$
$\therefore\ 4\cos^2\theta - 4\,sen^2\,\theta = 0$
$\therefore\ \cos^2\theta = sen^2\,\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\theta = sen\,\theta$ ou $\cos\theta = -sen\,\theta$
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:
- $\cos\theta = sen\,\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{4}$
- $\cos\theta = -sen\,\theta \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

75 $\dfrac{16^{\text{sen}^2 x}}{4^{5\,\text{sen}\,x}} = \dfrac{1}{64} \Rightarrow \dfrac{(4^2)^{\text{sen}^2 x}}{4^{5\,\text{sen}\,x}} = \dfrac{1}{4^3}$

$\therefore\ 4^{2\,\text{sen}^2 x\,-\,5\,\text{sen}\,x} = 4^{-3} \Rightarrow 2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}\,x = -3$

Fazendo a mudança de variável sen x = t, obtemos a equação do 2º grau:

$2t^2 - 5t + 3 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

$\therefore\ t = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm 1}{4} \Rightarrow t = \dfrac{3}{2}$ ou $t = 1$

Retornando à variável original, temos:

$\text{sen}\,x = \dfrac{3}{2}$ (impossível) ou $\text{sen}\,x = 1$

Assim, para $0° \leqslant x \leqslant 360°$, concluímos:

$\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = 90°$

Alternativa **b**.

76 $\text{sen}^4 x = \cos^4 x \Rightarrow \text{sen}\,x = \cos x$ ou $\text{sen}\,x = -\cos x$

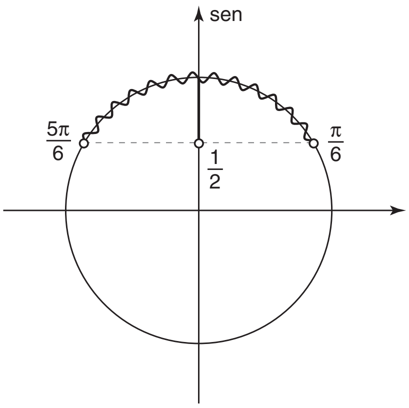
Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, concluímos:

- $\text{sen}\,x = \cos x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$
- $\text{sen}\,x = -\cos x \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, a equação proposta tem quatro soluções no intervalo considerado.

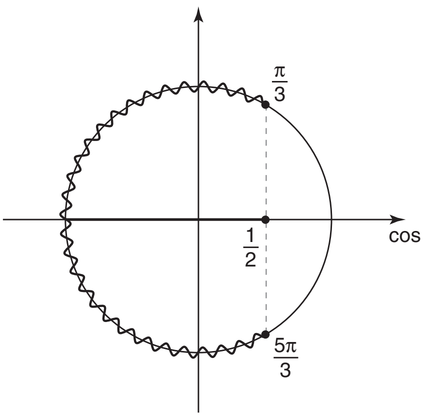
Alternativa **a**.

77 a) $\text{sen}\,x > \dfrac{1}{2}$



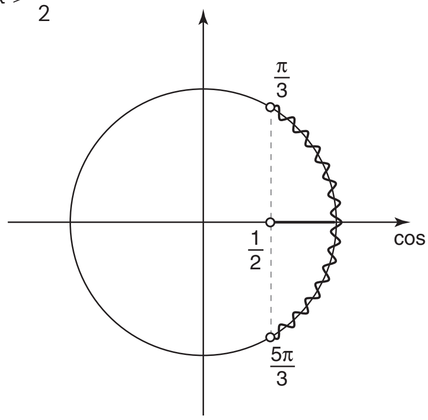
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$



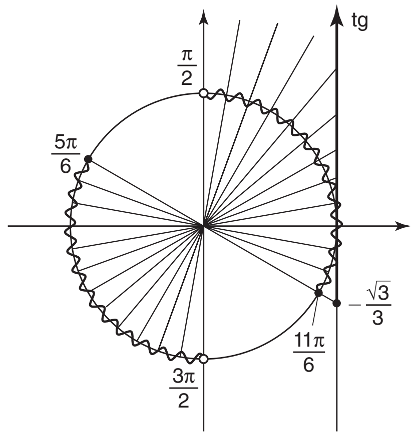
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

c) $\cos x > \dfrac{1}{2}$



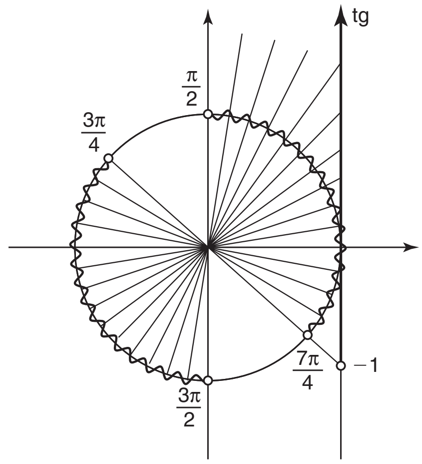
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

d) $\text{tg}\,x \geqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



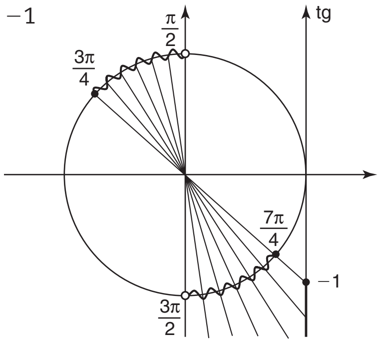
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

e) $\text{tg}\,x > -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

f) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$.

78 **b)** Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **b** do exercício anterior:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) Como os números $\frac{5\pi}{3}$ e $-\frac{\pi}{3}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução da inequação do item **c** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

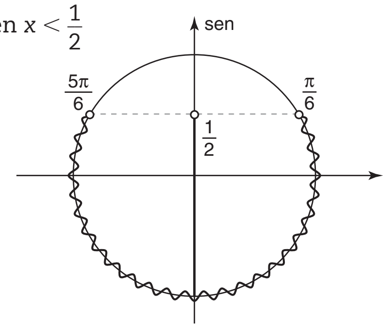
d) Basta adicionar a expressão $k\pi$ a cada extremo do intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Assim, o conjunto solução da inequação do item **d** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + k\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

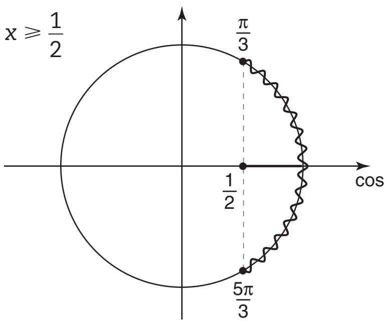
79 **a)** $\begin{cases} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x \geqslant \frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

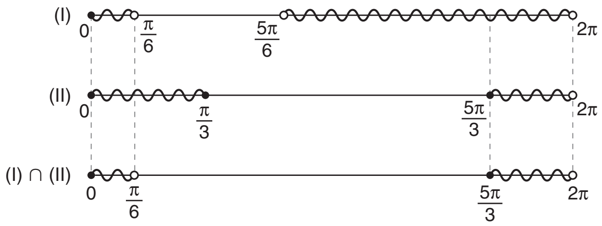
(I) $\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$



(II) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

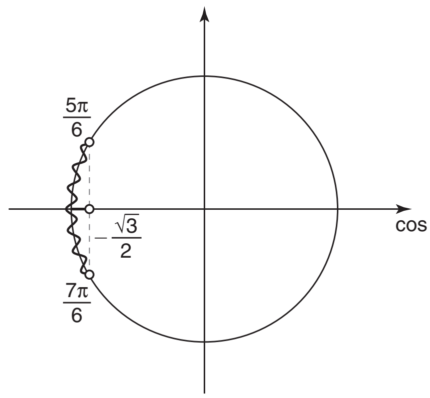


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

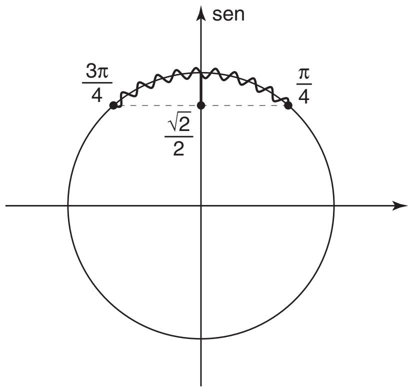
b) $\begin{cases} \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(I)} \\ \operatorname{sen} x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

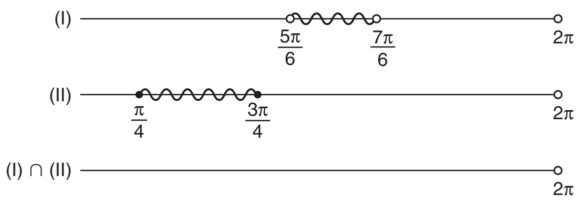
(I) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$



(II) $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

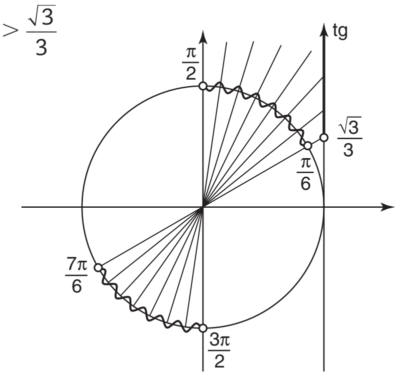


Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

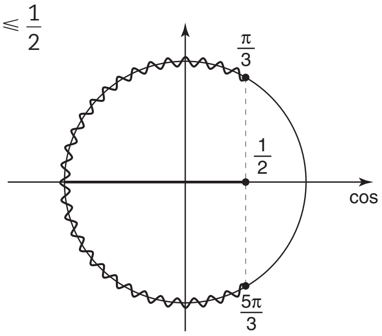


Logo, $S = \varnothing$.

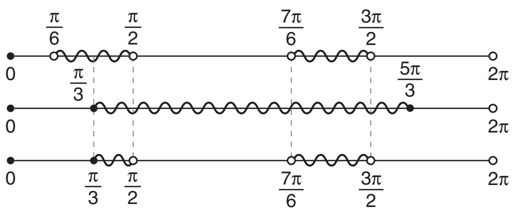
c) $\text{tg } x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$

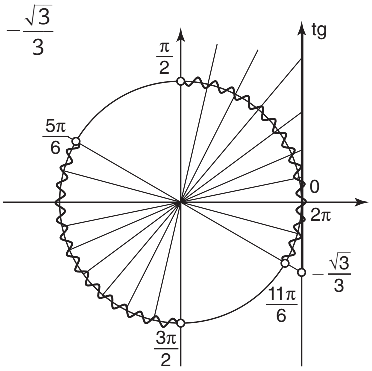


Retificando as soluções, temos:

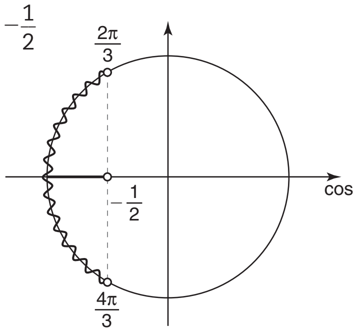


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{6} < x < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

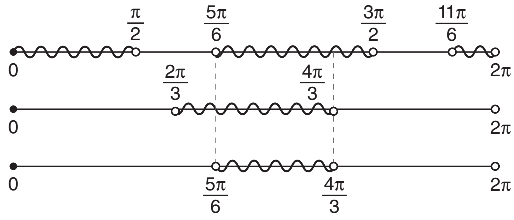
d) $\text{tg } x > -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\cos x < -\dfrac{1}{2}$



Retificando as soluções, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{5\pi}{6} < x < \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

80 **a)** Como os números $\dfrac{5\pi}{3}$ e $-\dfrac{\pi}{3}$ estão associados ao mesmo ponto da circunferência trigonométrica, o conjunto solução do sistema do item **a** do exercício anterior, no universo $\mathbb{R}$, pode ser dado por:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) Basta adicionar a expressão $k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, a cada extremo do intervalo obtido no item **d** do exercício anterior:

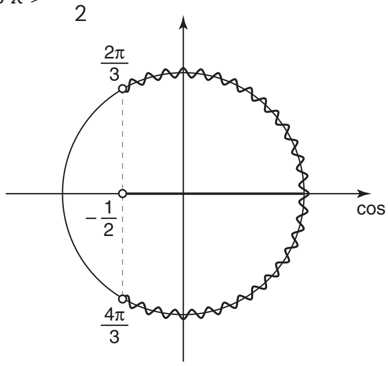
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \dfrac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

81 **a)** A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

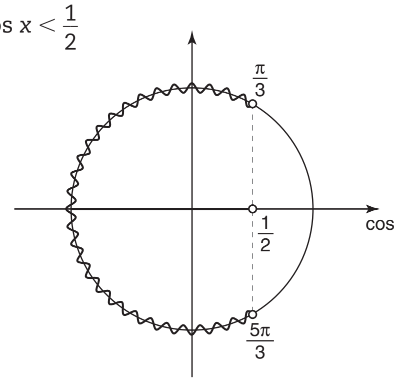
$$\begin{cases} \cos x > -\dfrac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \dfrac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

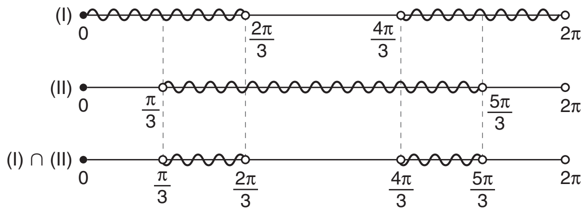
(I) $\cos x > -\dfrac{1}{2}$



(II) $\cos x < \dfrac{1}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



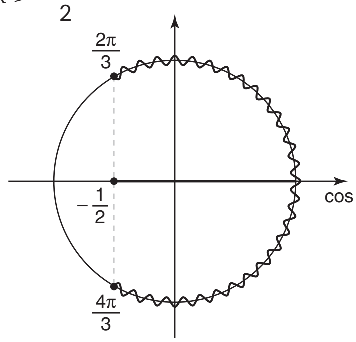
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

b) A dupla desigualdade é equivalente ao sistema

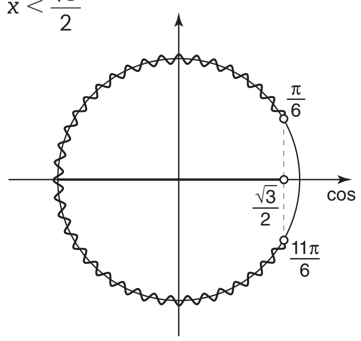
$$\begin{cases} \cos x \geq -\frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

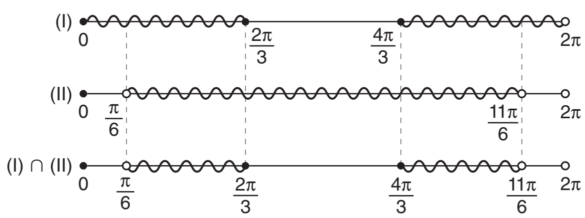
(I) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$



(II) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:

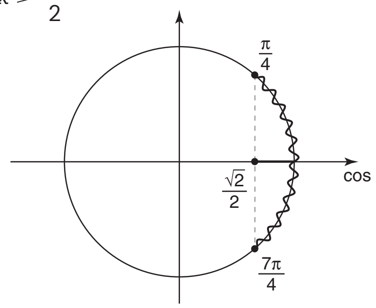


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{11\pi}{6}\right\}$.

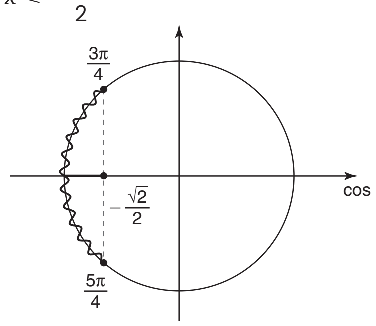
c) $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underbrace{\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{(II)}}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

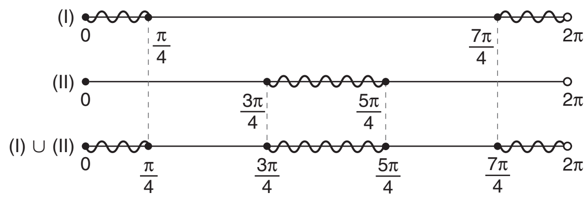
(I) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



(II) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

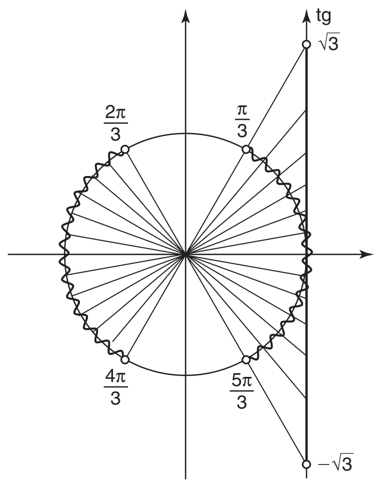


Fazendo a união dos conjuntos soluções de (I) e (II), obtemos:



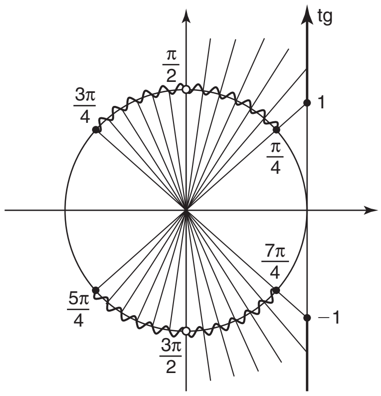
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\right.$ ou $\left.\frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$.

d) $|\text{tg } x| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < \text{tg } x < \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}\right.$ ou $\left.\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

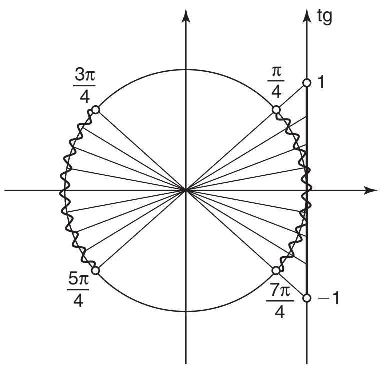
e) $|\text{tg } x| \geqslant 1 \Rightarrow \text{tg } x \geqslant 1$ ou $\text{tg } x \leqslant -1$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right.$

$\left. \text{e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}.$

f) $|\text{tg } x| + 1 > |2 \text{ tg } x| \Rightarrow |\text{tg } x| + 1 > 2|\text{tg } x|$
$\therefore |\text{tg } x| < 1 \Rightarrow -1 < \text{tg } x < 1$



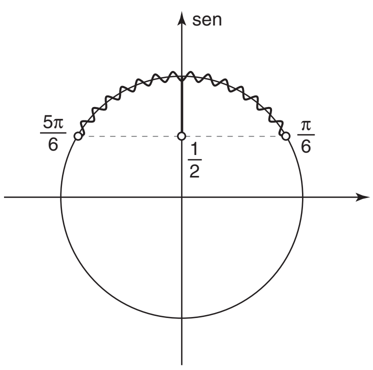
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\right.$

$\left.\text{ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}.$

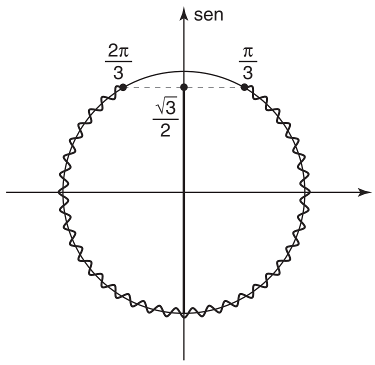
82 $\frac{1}{2} < \text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x > \frac{1}{2} & \text{(I)} \\ \text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I) e (II), temos:

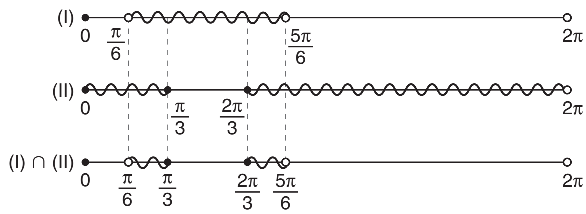
(I) $\text{sen } x > \frac{1}{2}$



(II) $\text{sen } x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$



Fazendo a intersecção dos conjuntos soluções (I) e (II), obtemos:



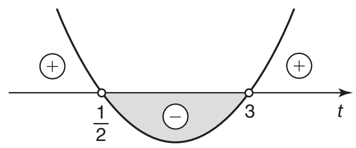
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}\right\}.$

Alternativa **a**.

83 a) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 < 0$

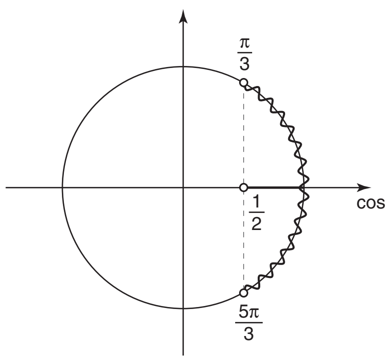
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 7t + 3 < 0$.

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 7t + 3$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 3$

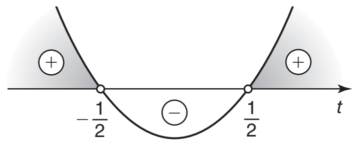
Retornando à variável original, temos $\frac{1}{2} < \cos x < 3$, ou seja, $\cos x > \frac{1}{2}$, cujas soluções são representadas por:



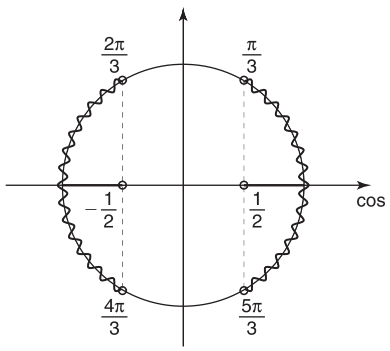
Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

b) $4\cos^2 x - 1 > 0$
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $4t^2 - 1 > 0$.
A variação de sinal da função $f(t) = 4t^2 - 1$ é esquematizada por:

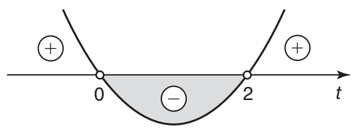


Assim: $f(t) > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$ ou $t > \frac{1}{2}$
Retornando à variável original, temos $\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{1}{2}$. A reunião dos conjuntos soluções dessas inequações é representada por:

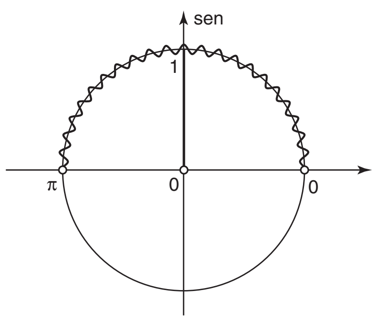


Concluímos, então:
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$$

c) $\operatorname{sen}^2 x < 2\operatorname{sen} x \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x < 0$
Fazendo a mudança de variável $\operatorname{sen} x = t$, obtemos a inequação $t^2 - 2t < 0$.
A variação de sinal da função $f(t) = t^2 - 2t$ é esquematizada por:

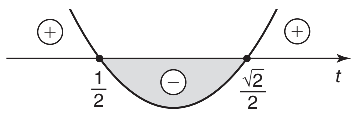


Assim: $f(t) < 0 \Rightarrow 0 < t < 2$
Retornando à variável original, temos $0 < \operatorname{sen} x < 2$, ou seja, $\operatorname{sen} x > 0$, cujas soluções são representadas por:

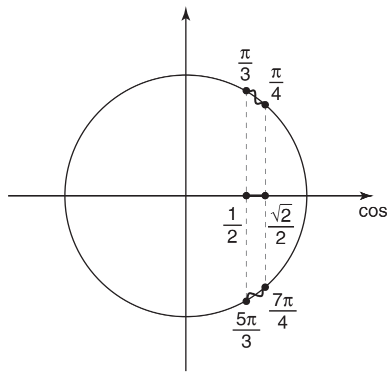


Concluímos, então:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$

d) $4\cos^2 x - (2\sqrt{2} + 2)\cos x + \sqrt{2} \leq 0$
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2} \leq 0$.
A variação de sinal da função $f(t) = 4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2}$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
Retornando à variável original, temos $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, cujas soluções são representadas por:



Concluímos, então:
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}\right\}$$

(**Nota:**
No caso de os alunos terem dificuldade na resolução da equação $4t^2 - (2\sqrt{2} + 2)t + \sqrt{2} = 0$, podem ser sugeridas duas formas de resolução:

I) Soma (S) e Produto (P) das raízes:
$$\begin{cases} S = \dfrac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} \\ P = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$
Concluímos, então, que as raízes são $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

II) $\Delta = 8 + 8\sqrt{2} + 4 - 16\sqrt{2} = 8 - 8\sqrt{2} + 4 = (2\sqrt{2} - 2)^2$
$$\therefore t = \frac{2\sqrt{2} + 2 \pm \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8} \text{ ou}$$
$$t = \frac{2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{8}$$
$$\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } t = \frac{1}{2})$$

e) $\frac{\text{sen}^2 x}{3} + \frac{\cos x}{2} - \frac{1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3}{6} \leqslant \frac{0}{6}$

$\therefore\ 2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3 \leqslant 0 \Rightarrow$

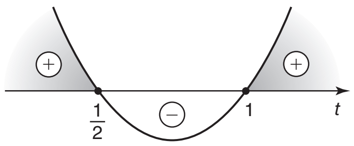
$\Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x - 3 \leqslant 0$

$\therefore\ -2\cos^2 x + 3\cos x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$

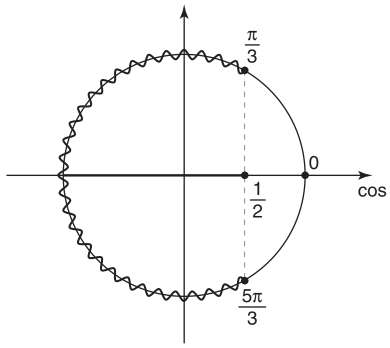
Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, obtemos a inequação $2t^2 - 3t + 1 \geqslant 0$

A variação de sinal da função $f(t) = 2t^2 - 3t + 1$ é esquematizada por:



Assim: $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant \frac{1}{2}$ ou $t \geqslant 1$

Retornando à variável original, temos $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $\cos x \geqslant 1$, ou seja, $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1$. A reunião dos conjuntos soluções dessa inequação e dessa equação é representada por:



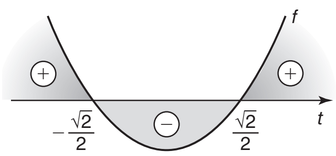
Concluímos, então:

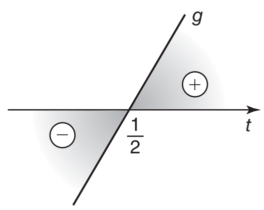
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ ou } x = 0\right\}$

f) $(2\cos^2 x - 1)(2\cos x - 1) < 0$

Fazendo $\cos x = t$, temos: $(2t^2 - 1)(2t - 1) < 0$

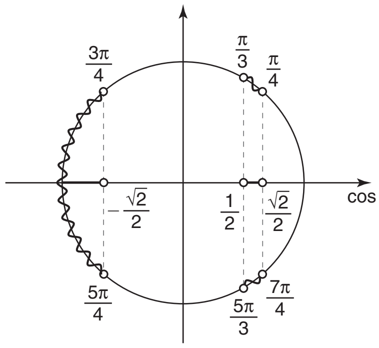
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = 2t - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:





	$t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f	+	−	−	+
g	−	−	+	+
$f \cdot g$	−	+	−	+

Logo, $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



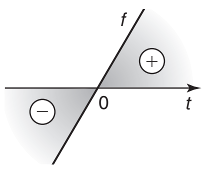
Concluímos, então:

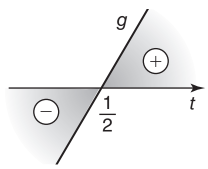
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

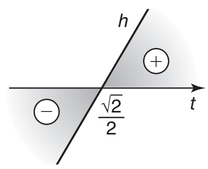
g) $\text{sen}\, x \left(\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\right)\left(2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2}\right) > 0$

Fazendo $\text{sen}\, x = t$, temos: $t\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(2t - \sqrt{2}\right) > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t$, $g(t) = t - \frac{1}{2}$, $h(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $f \cdot g \cdot h$, obtemos:



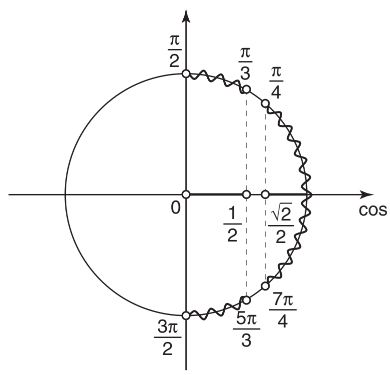




	$t < 0$	0 a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$t > \frac{\sqrt{2}}{2}$
f	−	+	+	+
g	−	−	+	+
h	−	−	−	+
$f \cdot g \cdot h$	−	+	−	+

$f(t) \cdot g(t) \cdot h(t) > 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$ ou $t > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $0 < \cos x < \frac{1}{2}$ ou $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

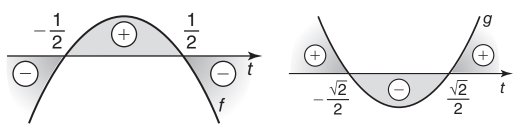
h) $\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\text{sen}^2\, x - \frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1 - \text{sen}^2\, x - \frac{3}{4}\right)\left(\text{sen}^2\, x - \frac{1}{2}\right) > 0$

$\therefore \left(-\text{sen}^2\, x + \frac{1}{4}\right)\left(\text{sen}^2\, x - \frac{1}{2}\right) > 0$

Fazendo sen x = t, temos: $\left(-t^2 + \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{1}{2}\right) > 0$

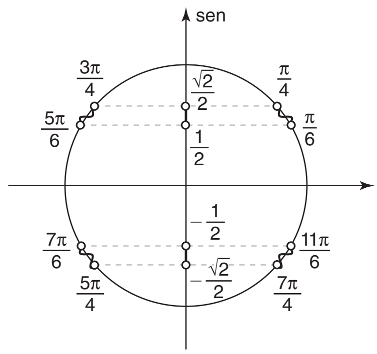
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -t^2 + \frac{1}{4}$, $g(t) = t^2 - \frac{1}{2}$ e $f \cdot g$, obtemos:



	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		t
f	−		−	+		−		−	
g	+		−	−		−		+	
$f \cdot g$	−		+	−		+		−	

$f(t) \cdot g(t) > 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < t < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen}\, x < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < \text{sen}\, x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



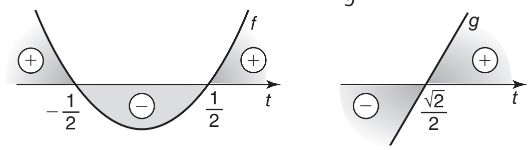
Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

i) $\frac{4\cos^2 x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}} \leqslant 0$

Fazendo cos x = t, temos: $\frac{4t^2 - 1}{2t - \sqrt{2}} \leqslant 0$

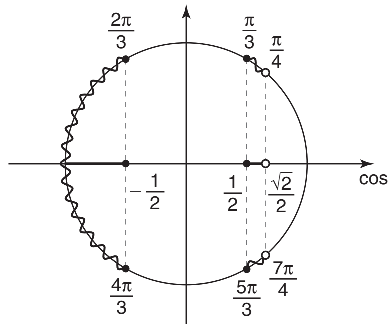
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 4t^2 - 1$, $g(t) = 2t - \sqrt{2}$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		t
f	+		−		+	+	
g	−		−		−	+	
$\frac{f}{g}$	−		+		−	+	

$\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant t < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leqslant \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



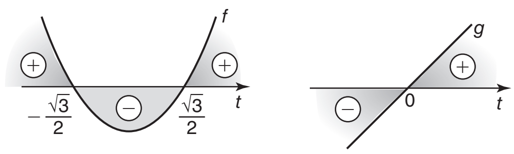
Concluímos, então:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < \frac{7\pi}{4}\right\}$

j) $\frac{4\cos^2 x - 3}{\cos x} \leqslant 0$

Fazendo cos x = t, temos: $\frac{4t^2 - 3}{t} \leqslant 0$

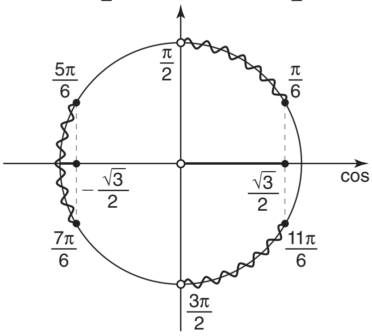
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 4t^2 - 3$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		t
f	+		−		−	+	
g	−		−		+	+	
$\frac{f}{g}$	−		+		−	+	

$\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $0 < t \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $\cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $0 < \cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; e portanto:



Concluímos, então:

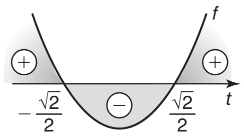
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{7\pi}{6} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

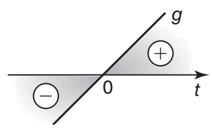
k) $\dfrac{-2\cos^2 x + 1}{\text{sen } x} > 0 \Rightarrow \dfrac{-2(1 - \text{sen}^2 x) + 1}{\text{sen } x} > 0$

$\therefore \dfrac{2\,\text{sen}^2 x - 1}{\text{sen } x} > 0$

Fazendo sen $x = t$, temos: $\dfrac{2t^2 - 1}{t} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

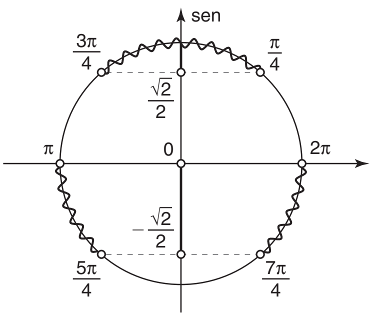




	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		t
f	+		−	−		+	
g	−		−	+		+	
$\frac{f}{g}$	−		+	−		+	

$\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < t < 0$ ou $t > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \text{sen } x < 0$ ou $\text{sen } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:



Concluímos, então:

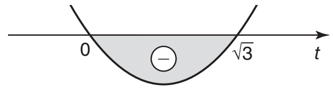
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \dfrac{5\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$

84 a) $\text{tg}^2 x - \sqrt{3}\,\text{tg } x \leqslant 0$

Fazendo tg $x = t$, temos:

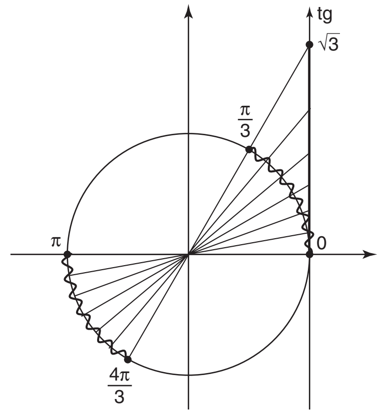
$t^2 - \sqrt{3}t \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal da função $f(t) = t^2 - \sqrt{3}t$, obtemos:



Assim, $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$; e portanto:

$0 \leqslant \text{tg } x \leqslant \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \pi \leqslant x \leqslant \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

b) $\text{tg}^3 x - \text{tg } x > 0$

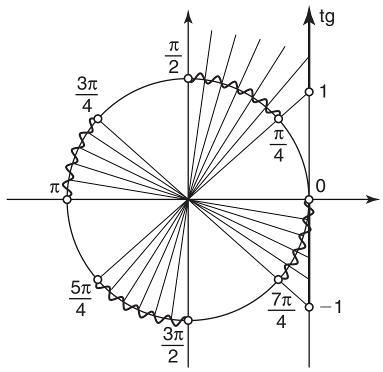
Fazendo tg $x = t$, temos:

$t^3 - t > 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t$, $g(t) = t^2 - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:

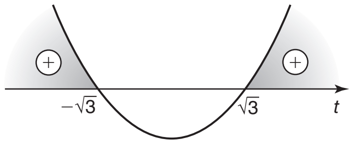
		−1		0		1	
f	−		−		+		+
g	+		−		−		+
$f \cdot g$	−		+		−		+

Assim, $f(t) \cdot g(t) > 0 \Rightarrow -1 < t < 0$ ou $t > 1$; e portanto: $-1 < \text{tg } x < 0$ ou $\text{tg } x > 1$

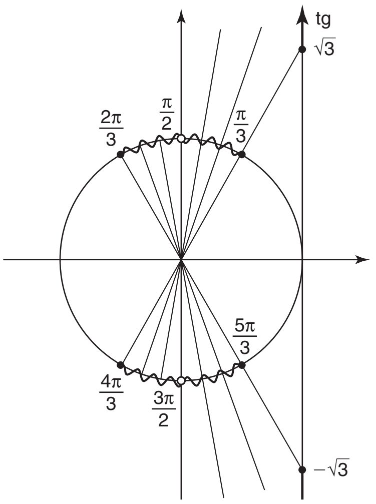


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} < x < \pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

c) $tg^2\,x - 3 \geqslant 0$
Fazendo $tg\,x = t$, temos:
$t^2 - 3 \geqslant 0$
Estudando a variação de sinal da função $f(t) = t^2 - 3$, obtemos:



Assim, $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\sqrt{3}$ ou $t \geqslant \sqrt{3}$; e portanto: $tg\,x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $tg\,x \geqslant \sqrt{3}$



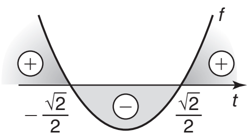
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

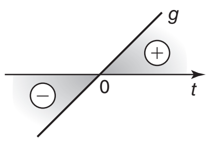
85 $2\,sen\,x \geqslant \dfrac{1}{sen\,x} \Rightarrow 2\,sen\,x - \dfrac{1}{sen\,x} \geqslant 0$

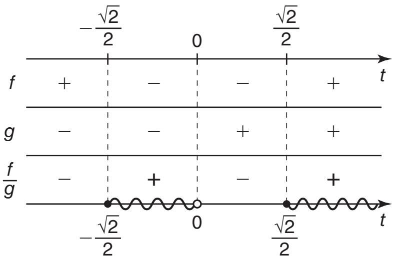
$\therefore \dfrac{2\,sen^2\,x - 1}{sen\,x} \geqslant 0$

Fazendo $sen\,x = t$, temos: $\dfrac{2t^2 - 1}{t} \geqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t^2 - 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

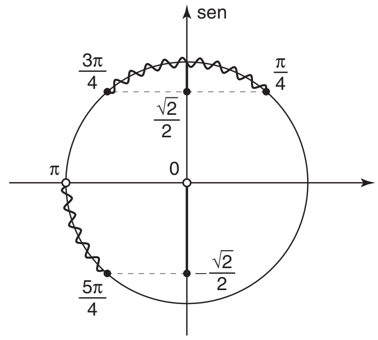






$\dfrac{f(t)}{g(t)} \geqslant 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t < 0$ ou $t \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant sen\,x < 0$ ou $sen\,x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e portanto:

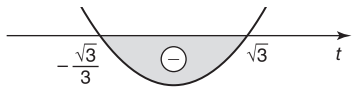


Concluímos, então:
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi < x \leqslant \frac{5\pi}{4}\right\}$

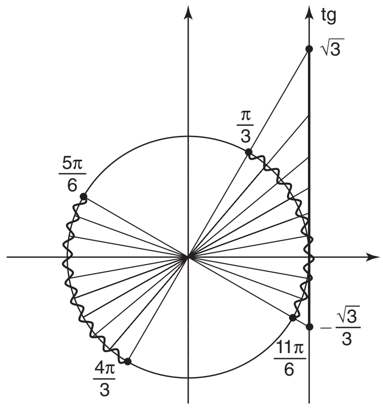
Portanto, o maior valor que x pode assumir é $\dfrac{5\pi}{4}$.

Alternativa **d**.

86 **a)** $3\,tg^2\,x - 2\sqrt{3}\,tg\,x - 3 \leqslant 0$
Fazendo $tg\,x = t$, temos:
$3t^2 - 2\sqrt{3}t - 3 \leqslant 0$
Estudando a variação de sinal da função $f(t) = 3t^2 - 2\sqrt{3}t - 3$, obtemos:

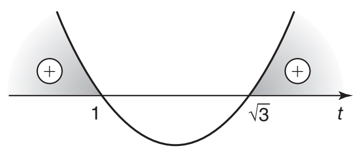


Assim, $f(t) \leqslant 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$; e portanto:
$-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqslant tg\,x \leqslant \sqrt{3}$

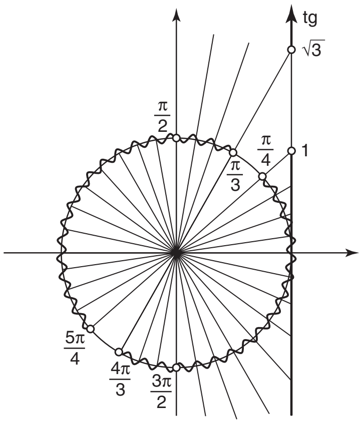


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

b) $tg^2\,x - (1 + \sqrt{3})\,tg\,x + \sqrt{3} > 0$
Fazendo $tg\,x = t$, temos:
$t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3} > 0$
Estudando a variação de sinal da função $f(t) = t^2 - (1 + \sqrt{3})t + \sqrt{3}$, obtemos:



Assim, $f(t) > 0 \Rightarrow t < 1$ ou $t > \sqrt{3}$; e portanto:
$\text{tg}\, x < 1$ ou $\text{tg}\, x > \sqrt{3}$

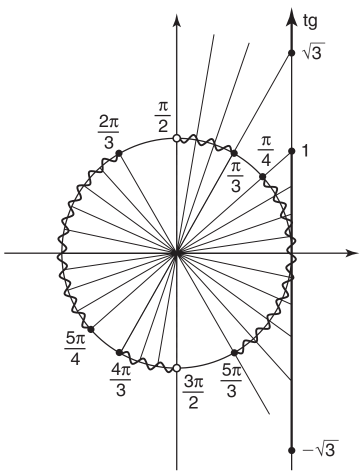


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } x \neq \frac{3\pi}{2}\right\}$.

c) $(\text{tg}^2\, x - 3)(\text{tg}\, x - 1) \geqslant 0$
Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos:
$(t^2 - 3)(t - 1) \geqslant 0$
Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t^2 - 3$, $g(t) = t - 1$ e $f \cdot g$, obtemos:

	$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$	
f	+		−	−		+
g	−		−	+		+
$f \cdot g$	−		+	−		+

Assim, $f(t) \cdot g(t) \geqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leqslant t \leqslant 1$ ou $t \geqslant \sqrt{3}$;
e portanto:
$-\sqrt{3} \leqslant \text{tg}\, x \leqslant 1$ ou $\text{tg}\, x \geqslant \sqrt{3}$



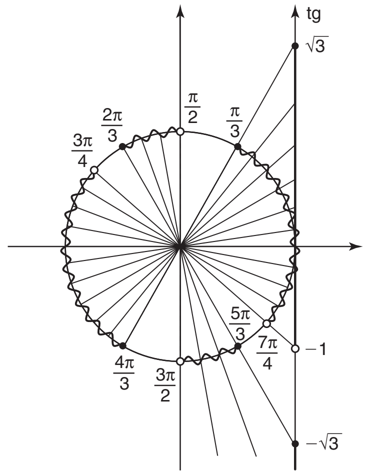
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

d) $\dfrac{\text{tg}^2\, x - 3}{\text{tg}\, x + 1} \leqslant 0$
Fazendo $\text{tg}\, x = t$, temos: $\dfrac{t^2 - 3}{t + 1} \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = t^2 - 3$, $g(t) = t + 1$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

	$-\sqrt{3}$		-1		$\sqrt{3}$	
f	+		−	−		+
g	−		−	+		+
$\frac{f}{g}$	−		+	−		+

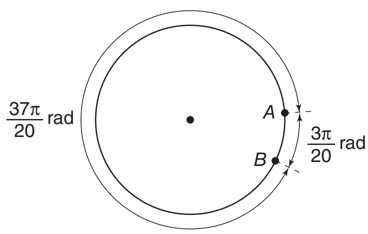
Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t \leqslant -\sqrt{3}$ ou $-1 < t \leqslant \sqrt{3}$; e portanto: $\text{tg}\, x \leqslant -\sqrt{3}$ ou $-1 < \text{tg}\, x \leqslant \sqrt{3}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leqslant \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{5\pi}{3} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

87 Temos: $\dfrac{117\pi}{20}\,\text{rad} = \underbrace{\dfrac{80\pi}{20}\,\text{rad}}_{\text{2 voltas}} + \dfrac{37\pi}{20}\,\text{rad}$

Assim, considerando apenas uma volta da pista, o ponto B é extremidade de um arco de $\dfrac{37\pi}{20}$ rad e do outro de $\dfrac{3\pi}{20}$ rad, conforme mostra a figura:



A medida x, em metro, do arco menor $\overset{\frown}{AB}$ é obtida pela regra de três:

medida do arco em radiano	medida do arco em metro
$\dfrac{3\pi}{20}$	x
2π	$2\pi \cdot 100$

Logo: $x = \dfrac{\frac{3\pi}{20} \cdot 200\pi}{2\pi}\,\text{m} \Rightarrow x = 15\pi\,\text{m} = 47{,}1\,\text{m}$

Alternativa **e**.

88 A medida x, em quilômetro, do arco percorrido pela Lua em 1 dia é dada por:

$\frac{x}{384.000} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow x = 25.600\pi$

Logo, a velocidade v da Lua é:

$v = \frac{25.600\pi}{24}$ km/h $\Rightarrow v = \frac{3.200\pi}{3}$ km/h

Alternativa **e**.

89 a) A medida x, em radiano, do arco é dada por:

$x = \frac{30}{10}$ rad $= 3$ rad

Logo, a velocidade angular ω_a do ponto é:

$\omega_a = \frac{3}{2}$ rad/min $= 1{,}5$ rad/min

Portanto, a velocidade angular do ponto P é 1,5 rad/min.

b) $\omega_a = \frac{3{,}6 \text{ rad}}{1 \text{ s}}$

Em 3 segundos, o ponto Q percorrerá:

$3 \cdot 3{,}6$ rad $= 10{,}8$ rad

Sendo R a medida, em centímetro, do raio da circunferência, temos:

$\frac{54}{R} = 10{,}8 \Rightarrow R = 5$

Portanto, a medida do raio dessa circunferência é 5 cm.

90 $\omega_a = \frac{5\pi}{8}$ rad/s

2π rad ——— $2\pi \cdot 6$ cm

$\frac{5\pi}{8}$ rad ——— x cm

$x = \frac{5\pi}{8} \cdot 2\pi \cdot 6 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{30\pi}{8} = \frac{15\pi}{4}$

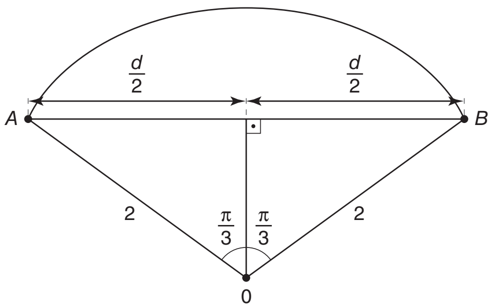
Logo, a velocidade desse ponto é $\frac{15\pi}{4}$ cm/s.

91 A razão entre o comprimento da ponte e a medida r do raio da circunferência é igual à medida, em radiano, do ângulo central $A\hat{O}B$:

$\frac{\frac{4\pi}{3}}{r} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 2$

Logo, o raio da circunferência mede 2 km.

Sendo d a distância entre os pontos A e B, esquematizamos:

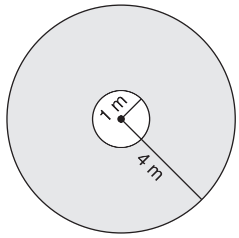


Assim:

$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{d}{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d}{4} \quad \therefore d = 2\sqrt{3}$

Concluímos, então, que a distância entre os pontos A e B é $2\sqrt{3}$ km ou aproximadamente 3,46 km.

92 a) Quando $\theta = 2\pi$ rad, a região irrigada é representada pela parte sombreada da figura abaixo.



A área A dessa região é dada por:

$A = (\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2)$ m^2 $\Rightarrow A = 15\pi$ m^2

Assim, para um valor θ qualquer, com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, a área $A(\theta)$ pode ser obtida pela regra de três:

2π rad ——— 15π m^2

θ rad ——— $A(\theta)$

$\therefore A(\theta) = \frac{15\pi \cdot \theta}{2\pi}$ m^2 $\Rightarrow A(\theta) = \frac{15\theta}{2}$ m^2

b) $\frac{15\theta}{2} = 8 \Rightarrow \theta = \frac{16}{15}$ rad

π rad ——— $180°$

$\frac{16}{15}$ rad ——— θ

$\therefore \theta = \frac{\frac{16}{15} \cdot 180°}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{16}{15} \cdot 180°}{3} = 64°$

93 $180° = 180 \cdot 60' = 10.800'$

A medida x, em radiano, equivalente a $10.800'$ pode ser obtida pela regra de três:

π rad ——— $10.800'$

x ——— $2'$

$\therefore x = \frac{2' \cdot \pi \text{ rad}}{10.800'} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5.400}$ rad

Logo, o ângulo mede $\frac{\pi}{5.400}$ rad.

94

Giro da roda		Giro da engrenagem
72π rad	———	2π rad
$\frac{18\pi}{5}$ rad	———	x

$\therefore x = \frac{18\pi}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{72\pi}$ rad $= \frac{\pi}{10}$ rad

Logo, a engrenagem gira $\frac{\pi}{10}$ rad, ou seja, $18°$.

Alternativa **d**.

95 O deslocamento x, em grau, do ponteiro dos minutos, correspondente ao deslocamento de $48°$ do ponteiro das horas, pode ser obtido pela regra de três:

deslocamento do ponteiro dos minutos		deslocamento do ponteiro das horas
$360°$	———	$30°$
x	———	$48°$

$\therefore x = 576°$

A medida y, em radiano, equivalente a $576°$ pode ser obtida pela regra de três:

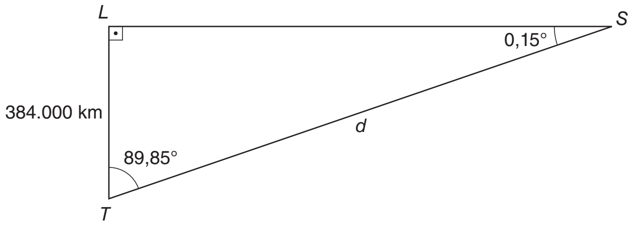
$360°$ ——— 2π rad

$576°$ ——— y

$\therefore y = \frac{16\pi}{5}$ rad

Logo, o deslocamento pedido é de $\frac{16\pi}{5}$ rad.

96 Esquematizando a situação, temos:



Como 0,15° < 1°, uma boa aproximação para sen 0,15° é a medida de 0,15° expressa em radiano. Assim:

radiano grau

$\frac{\pi}{x} = \frac{180}{0,15} \Rightarrow x = \frac{15}{100} \cdot \pi \cdot \frac{1}{180} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{1.200}$ rad

Portanto, sen 0,15° $= \frac{\pi}{1.200}$ e sen 0,15° $= \frac{384.000}{d}$

Temos, então:

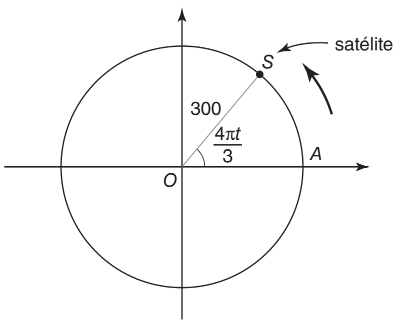
$\frac{384.000}{d} = \frac{\pi}{1.200} \Rightarrow d = \frac{4.608 \cdot 10^5}{\pi}$ km

Adotando para π o valor 3,14, $d \cong 1.467 \cdot 10^5$ km; ou, ainda, 146.700.000 km.

Logo, a distância aproximada da Terra ao Sol é 147.000.000 km.

Alternativa **d**.

97 Esquematizando essa situação, temos:



a) $f(1,5) = 300 \cdot \cos \frac{4\pi \cdot 1,5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1,5) = 300 \cos 2\pi = 300$

Logo, a abscissa da posição do satélite para $t = 1,5$ é 300.

b) A função g que expressa a ordenada da posição S do satélite em cada instante t, em hora, é:

$g(t) = 300 \text{ sen } \frac{4\pi t}{3}$

Assim, temos:

$g(2,5) = 300 - \text{sen } \frac{4\pi \cdot 2,5}{3} \Rightarrow g(t) = 300 - \text{sen } \frac{10\pi}{3}$

$\therefore g(t) = 300 - \text{sen } \frac{4\pi}{3} = 300 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= -150\sqrt{3}$

Logo, a abscissa da posição do satélite para $t = 2,5$ é $-150\sqrt{3}$.

c) O valor máximo da função $f(t) = 300 - \cos \frac{4\pi t}{3}$, em quilômetro, é o raio da órbita.

Como o valor máximo do $\cos \frac{4\pi t}{3}$ é 1, temos que o valor máximo de f é 300.

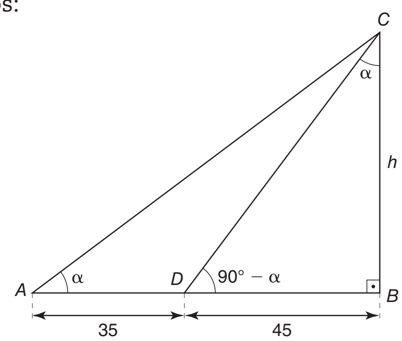
Portanto, o raio da órbita é 300 km.

d) Quando a medida $\frac{4\pi t}{3}$ varia de 0 rad a 2π rad, o satélite completa uma volta ao redor da Terra. Assim, calculamos a variação de t, em hora:

$0 \leqslant \frac{4\pi t}{3} \leqslant 2\pi \Rightarrow 0 \leqslant 4\pi t \leqslant 6\pi \quad \therefore 0 \leqslant t \leqslant 1,5$

Concluímos, então, que o satélite completa uma volta em 1,5 hora.

98 Sendo h a altura da torre, em metro, esquematizamos:



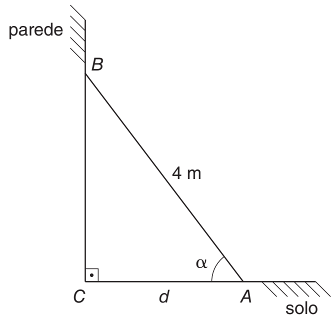
Dos triângulos ABC e CDB obtemos, respectivamente, $\text{tg } \alpha = \frac{h}{80}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{45}{h}$.

Logo: $\frac{h}{80} = \frac{45}{h} \Rightarrow h^2 = 3.600 \quad \therefore h = 60$

Concluímos, então, que a altura da torre é 60 m.

(**Nota:** Comentar a resolução desse problema aplicando semelhança de triângulos.)

99 Sendo d a distância do ponto A à parede, esquematizamos:



$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{d}{4} \\ 2\sqrt{2} \leqslant d \leqslant 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{4} \leqslant \cos \alpha \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos \alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que $30° \leqslant \alpha \leqslant 45°$.

Alternativa **c**.

100 Para qualquer posição do elevador E sobre o segmento $\overline{AC}$, temos:

$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \frac{BE}{10} \\ \frac{10\sqrt{3}}{3} \leqslant BE \leqslant 10\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{10\sqrt{3}}{3}}{10} \leqslant \text{tg } \alpha \leqslant \frac{10\sqrt{3}}{10}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \text{tg } \alpha \leqslant \sqrt{3}$

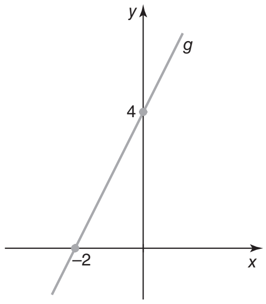
Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que $30° \leqslant \alpha \leqslant 60°$.

Alternativa **c**.

Exercícios de revisão cumulativa

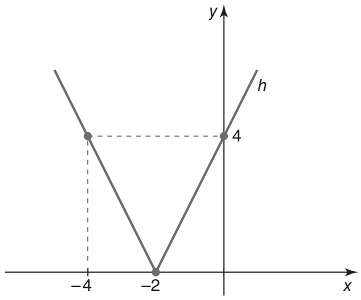
1 Passo 1

Construímos o gráfico da função $g(x) = 2x + 4$.



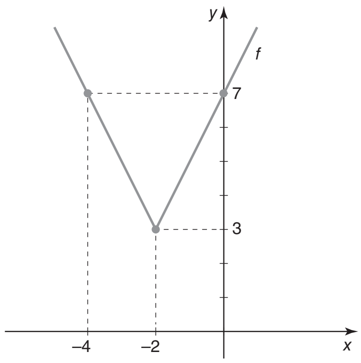
Passo 2

Construímos o gráfico da função $h(x) = |2x + 4|$. Para isso, conservamos os pontos de ordenadas não negativas do gráfico anterior e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas.



Passo 3

Finalmente, construímos o gráfico da função $f(x) = |2x + 4| + 3$. Para isso, transladamos o gráfico anterior 3 unidades verticalmente para cima.



$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = [3, +\infty[$

a) No *n-ésimo* ano de funcionamento, o número de litros produzidos é *n-ésimo* termo da PG (200.000, 210.000, 220.500, ...), ou seja:
$a_n = 200.000 \cdot (1,05)^{n-1}$

b) A produção acumulada, em litros de óleo, até o final do *n-ésimo* ano de funcionamento é a soma dos n primeiros termos da PG do item **a**, ou seja:

$$S_n = \frac{200.000(1 - 1,05^n)}{1 - 1,05} \Rightarrow S_n = \frac{200.000(1 - 1,05^n)}{-0,05} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = -4.000.000(1 - 1,05^n) \Rightarrow S_n = 4.000.000(1,05^n)$$

Análise da resolução

Fazendo a mudança de variável $2x = \alpha$, temos:

$\text{sen}\ \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Retornando à variável original, obtemos:

$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ $\quad \therefore\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant x < 2\pi$, concluímos que os únicos valores possíveis de k são 0 e 1:

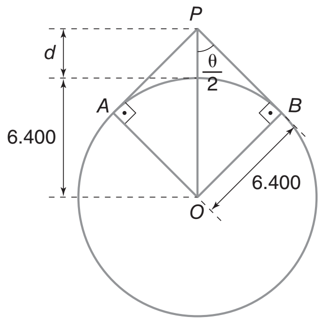
- $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0\pi = \frac{\pi}{4}$
- $k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{5\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

Seja d a distância, em quilômetro, do ponto P à superfície da Terra. Como os triângulos PAO e PBO são congruentes, temos:



Assim, a distância d do astronauta à superfície da Terra é obtida por:

$$\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{6.400}{6.400 + d} \Rightarrow d = \frac{6.400\left(1 - \text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)}{\text{sen}\,\frac{\theta}{2}}$$

Exercícios propostos

1 a) $\text{cotg}\,45° = \dfrac{1}{\text{tg}\,45°} = \dfrac{1}{1} = 1$

b) $\sec 0° = \dfrac{1}{\cos 0°} = 1$

c) $\text{cossec}\,270° = \dfrac{1}{\text{sen}\,270°} = -1$

2 $E = \text{cossec}\,x + \sec^2 2x + \text{cotg}\,\dfrac{3x}{2}$

Para $x = \dfrac{\pi}{6}$, temos:

$$E = \text{cossec}\,\frac{\pi}{6} + \sec^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + \text{cotg}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \text{cossec}\,\frac{\pi}{6} + \sec^2\frac{\pi}{3} + \text{cotg}\,\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}} + \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}\right)^2 + \frac{1}{\text{tg}\,\frac{\pi}{4}} = 2 + 4 + 1 = 7$$

Logo, $E = 7$.

3 $\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = 3 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{3} & \text{(I)} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$\text{sen}^2 x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos $\text{sen}\,x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, e portanto:

$\text{cossec}\,x = \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

4 $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 4 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 4\,\text{sen}\,x & \text{(I)} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituímos (I) em (II):

$\text{sen}^2 x + (4\,\text{sen}\,x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,x = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, temos $\text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$.

Substituindo $\text{sen}\,x$ por $-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ em (I), obtemos:

$\cos x = -\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$, e portanto:

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{-\frac{4\sqrt{17}}{17}} = -\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

5 a) $\text{cossec}\,x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = 1$

$\therefore\ \text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

b) $\sec x = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = -1$

$\therefore\ \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{\pi\}$.

c) $\text{cossec}\,x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = 2$

$\therefore\ \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

d) $\sec x = -2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = -2$

$\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

e) $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$

$\therefore\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

f) $\text{cossec}\,x = -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = -\sqrt{2}$

$\therefore\ \text{sen}\,x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

6 Condição de existência: $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$

$\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = \sec x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \dfrac{1}{\cos x}$

$\dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} = \dfrac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x \cdot \cos x} \Rightarrow \text{sen}\,x = 1$

$\therefore\ x = \dfrac{\pi}{2}$

Observando que $\dfrac{\pi}{2}$ não satisfaz a condição de existência, pois $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, concluímos que $S = \varnothing$.

7 $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$

$\therefore\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Um valor possível para x é $\dfrac{7\pi}{4}$; portanto:

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4} = -1$, $\operatorname{cossec} x =$

$= \operatorname{cossec}\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}} = \dfrac{1}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$ e

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4}} = \dfrac{1}{-1} = -1$

Então:

$\dfrac{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{cossec} x}{1 + \operatorname{cotg} x - \operatorname{cossec} x} = \dfrac{1 + (-1) + \left(-\sqrt{2}\right)}{1 + (-1) - \left(-\sqrt{2}\right)} =$

$= \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$

Alternativa **a**.

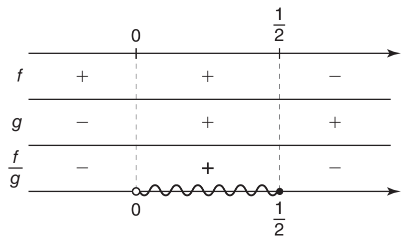
8 **a)** $\sec x \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} \geqslant 2$

Para $t = \cos x$, temos:

$\dfrac{1}{t} \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{-2t + 1}{t} \geqslant 0$

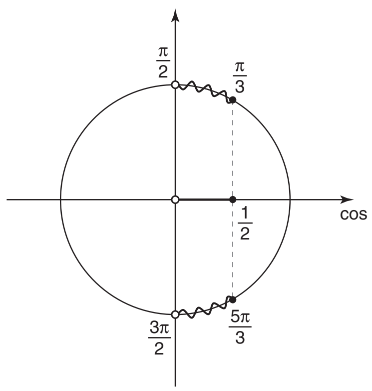
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \geqslant 0 \Rightarrow 0 < t \leqslant \dfrac{1}{2}$, e portanto:

$0 < \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$



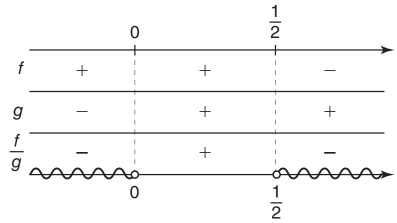
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x \leqslant \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

b) $\operatorname{cossec} x < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} < 2$. Para $t = \operatorname{sen} x$, temos:

$\dfrac{1}{t} < 2 \Rightarrow \dfrac{-2t + 1}{t} < 0$

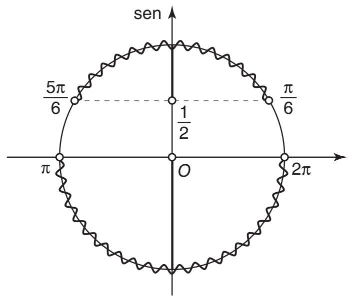
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} < 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t > \dfrac{1}{2}$, e portanto:

$\operatorname{sen} x < 0$ ou $\operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2}$



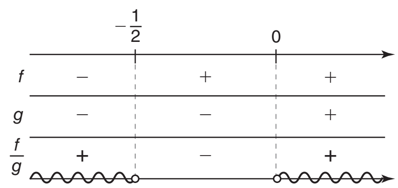
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6} \text{ ou } \pi < x < 2\pi\right\}$.

c) $\sec x > -2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} > -2$. Para $t = \cos x$, temos:

$\dfrac{1}{t} > -2 \Rightarrow \dfrac{2t + 1}{t} > 0$

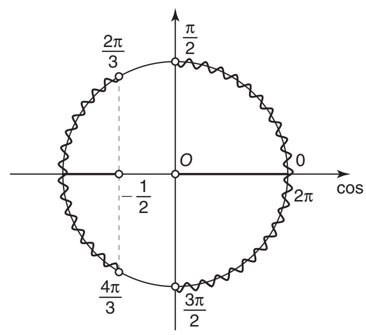
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = 2t + 1$, $g(t)$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



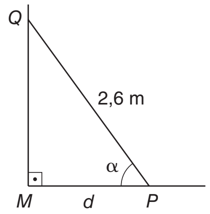
Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\dfrac{1}{2}$ ou $t > 0$, e portanto:

$\cos x < -\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

9 Sendo d a distância procurada, temos:



$\text{cossec}\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\ \alpha} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \text{sen}\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$, para $0° < \alpha < 90°$

Assim:

$\cos 60° = \dfrac{d}{2{,}6} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{d}{2{,}6}$

$\therefore\ d = 1{,}3$

Concluímos, então, que a distância entre a estaca e o poste é 1,3 m.

10 **a)** $5(x + 2) = 5x + 10$ é equivalente à sentença $5x + 10 = 5x + 10$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

b) $6x = 12$ é equivalente à sentença $x = 2$, que se verifica apenas para o número real 2. Logo, não é uma identidade em $\mathbb{R}$.

c) O produto $0 \cdot x$ se anula para todo x real. Logo, a sentença $0 \cdot x = 0$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

d) Para $x = 0$, a sentença $\dfrac{0}{x} = 0$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em $\mathbb{R}$.

e) Para qualquer x real não nulo, o quociente $\dfrac{0}{x}$ é nulo. Logo, a sentença $\dfrac{0}{x} = 0$ é uma identidade em $\mathbb{R}^*$.

f) Como 1 é elemento neutro da multiplicação, $1 \cdot x = x$ é equivalente a $x = x$, o que é uma identidade em $\mathbb{R}$.

g) Existe pelo menos um valor real de x, por exemplo $x = 1$, para o qual a sentença $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em $\mathbb{R}$.

h) Desenvolvendo o quadrado perfeito do primeiro membro, obtemos a sentença:
$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

i) $\sqrt{x^2} = |x|$ é equivalente à sentença $x^2 = |x|^2$, que é equivalente a $x^2 = x^2$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

j) $\sqrt[3]{x^3} = x$ é equivalente à sentença $x^3 = x^3$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

11 Na alternativa **d**, temos $\text{cossec}\ x \cdot \text{sen}\ x = 1$, equivalente a $\dfrac{1}{\text{sen}\ x} \cdot \text{sen}\ x = 1$, que se verifica para todo x real, com $\text{sen}\ x \neq 0$. Logo, é uma identidade em U.
Alternativa **d**.

12 **a)** Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir cada uma das expressões $\text{sen}\ x \cdot \text{tg}\ x$ e $\sec x - \cos x$, devemos ter $\cos x \neq 0$. Logo, o primeiro e o segundo membros de igualdade estão definidos em U.

Passo 2

1º membro $= \text{sen}\ x \cdot \text{tg}\ x = \text{sen}\ x \cdot \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} =$

$= \dfrac{1}{\cos x} - \cos x = \sec x - \cos x =$ 2º membro

b) Aplicando a técnica 3.

Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é uma identidade em $\mathbb{R}$ e, portanto, também o é em U, pois $U \subset \mathbb{R}$.

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $\text{sen}^2 x$, com $\text{sen}\ x \neq 0$, temos:

$\dfrac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$

c) Aplicando a técnica 2.

$\sec^2 x + \text{cossec}^2 x = \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x$ é equivalente a:

$\sec^2 x + \text{cossec}^2 x - \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x = 0$

Passo 1

Para existir o primeiro membro dessa igualdade, devemos ter: $\text{sen}\ x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.

O segundo membro é a constante zero e, portanto, existe para qualquer valor real de x.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro $= \sec^2 x + \text{cossec}^2 x - \sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 1}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = \dfrac{1 - 1}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{0}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = 0 = 2°$ membro

d) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Os dois membros da igualdade estão definidos em $U = \mathbb{R}$.

Passo 2

1º membro $= \text{sen}^4 x - \cos^4 x =$

$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^2 x - \cos^2 x) =$

$= 1[\text{sen}^2 x - (1 - \text{sen}^2 x)] = 2\,\text{sen}^2 x - 1 =$

$=$ 2º membro

13 **a)** $\cos 75° = \cos (45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen}\ 45° \cdot \text{sen}\ 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

b) $\text{sen}\ 15° = \text{sen}\ (45° - 30°) =$

$= \text{sen}\ 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \text{sen}\ 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\text{sen}\ 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

c) $\text{tg } 75° = \text{tg }(45° + 30°) =$

$$= \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Logo, $\text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3}$.

14 Aplicando as identidades
$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$ e
$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen }\frac{\pi}{2} \cdot \text{sen } x +$$

$$+ \cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen }\frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen } x =$$

$$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \text{sen } x + 0 \cdot \cos x - (-1) \cdot \text{sen } x =$$

$$= \text{sen } x + \text{sen } x = 2 \text{ sen } x$$

15 $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \text{sen } x \cdot \text{sen }\frac{\pi}{6} =$$

$$= \text{sen } x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \text{sen }\frac{\pi}{3} - 1$$

$$\therefore \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - \text{sen } x \cdot \frac{1}{2} = \text{sen } x \cdot \frac{1}{2} + \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2} \text{ sen } x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1$$

$$\therefore \text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Portanto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

16 a) $\text{sen } 10° \cdot \cos 20° + \text{sen } 20° \cdot \cos 10° =$

$$= \text{sen }(10° + 20°) = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

b) $\cos 5° \cdot \cos 55° - \text{sen } 5° \cdot \text{sen } 55° =$

$$= \cos (5° + 55°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

c) $$\frac{\text{tg}\frac{\pi}{3} - \text{tg}\frac{\pi}{12}}{1 + \text{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \text{tg}\frac{\pi}{12}} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

17 Fazendo a mudança de variáveis $x - y = z$, observamos que:
$\text{sen } z \cdot \cos y + \cos z \cdot \text{sen } y = \text{sen}(z + y)$
Logo:
$\text{sen}(x - y) \cdot \cos y + \cos(x - y) \cdot \text{sen } y =$
$= \text{sen}(x - y + y) = \text{sen } x$
Alternativa **c**.

18 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \text{sen } x \cdot \text{sen }\frac{\pi}{4}$

Como $\cos x = \frac{5}{13}$, vamos obter sen x:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\therefore \text{sen}^2 x = \frac{144}{169}$$

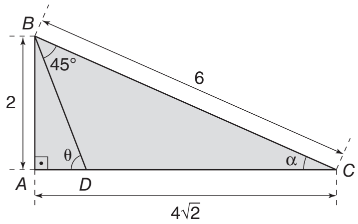
Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\text{sen } x = -\frac{12}{13}$. Assim:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{26} + \frac{12\sqrt{2}}{26}$$

Logo, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$.

19 Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $AC = 4\sqrt{2}$.



O ângulo $B\hat{D}A$ é externo do triângulo BDC e, portanto, $\theta = \alpha + 45°$. Assim:

$$\text{sen } \theta = \text{sen }(\alpha + 45°) =$$

$$= \text{sen } \alpha \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

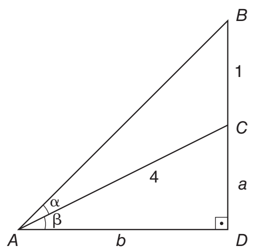
$$\Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{2}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2} + 4}{6}$$

Concluímos, então:

$$\text{sen } \theta = \frac{2}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} + 4}{6} = \frac{2}{BD}$$

$$\therefore BD = \frac{12}{\sqrt{2} + 4} = \frac{6\left(4 - \sqrt{2}\right)}{7}$$

20 Sejam a e b as medidas dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.



Temos:

- $$\begin{cases} \cos (\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \\ \text{sen}^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha + \beta) = 1 \\ (\alpha + \beta) \text{ é um ângulo agudo} \end{cases} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \text{sen }(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$$

- No $\triangle ACD$: $\text{sen } \beta = \frac{a}{4}$ e $\cos \beta = \frac{b}{4}$

Assim:

- $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$

  $$\frac{4}{5} = \cos \alpha \cdot \frac{b}{4} - \text{sen } \alpha \cdot \frac{a}{4} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow b \cdot \cos \alpha - a \cdot \text{sen } \alpha = \frac{16}{5} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{16}{5} + a \cdot \text{sen } \alpha}{b}$$

  $$\therefore \cos \alpha = \frac{16}{5b} + \frac{a \cdot \text{sen } \alpha}{b} \quad \text{(I)}$$

- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$

$\frac{3}{5} = \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{b}{4} + \cos\alpha \cdot \frac{a}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \cdot \text{sen}\,\alpha + a \cdot \cos\alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\frac{12}{5} - b \cdot \text{sen}\,\alpha}{a}$

$\therefore \cos\alpha = \frac{12}{5a} - \frac{b \cdot \text{sen}\,\alpha}{a}$ (II)

De (I) e (II), obtemos:

$\frac{16}{5b} + \frac{a \cdot \text{sen}\,\alpha}{b} = \frac{12}{5a} - \frac{b \cdot \text{sen}\,\alpha}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{16a + 5a^2\,\text{sen}\,\alpha}{5ab} = \frac{12b - 5b^2\,\text{sen}\,\alpha}{5ab} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a^2\,\text{sen}\,\alpha + 5b^2\,\text{sen}\,\alpha = 12b - 16a \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot (a^2 + b^2) = 12b - 16a \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{12b - 16a}{5(a^2 + b^2)} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4 \cdot (3b - 4a)}{5 \cdot (a^2 + b^2)}$ (III)

Temos, ainda:

- No $\triangle$ ACD, aplicando o teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = 4^2$

$\therefore a^2 + b^2 = 16$ (IV)

- $\begin{cases} \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \\ \text{No } \triangle \text{ ABD: tg}(\alpha + \beta) = \frac{1 + a}{b} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1 + a}{b} = \frac{3}{4}$

$\therefore 3b = 4a + 4 \Rightarrow 3b - 4a = 4$ (V)

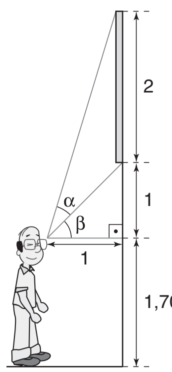
Substituindo (IV) e (V) em (III):

$\text{sen}\,\alpha = \frac{4 \cdot (3b - 4a)}{5 \cdot (a^2 + b^2)} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 16} = \frac{1}{5}$

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{5}$.

Alternativa **d**.

21



$\begin{cases} \text{tg}\,\beta = 1 \\ \text{tg}(\beta + \alpha) = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\,\beta = 1 & \text{(I)} \\ \frac{\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\alpha} = 3 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$\frac{1 + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\alpha} = 3 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$

22 Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $-1 < \cos x < 0$.

Pela relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\therefore \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$

$\therefore \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Temos, então:

$\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) =$

$= -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

23 $\text{sen}\,x = 2\cos x \Rightarrow \text{sen}^2 x = (2\cos x)^2$

$\therefore \text{sen}^2 x = 4\cos^2 x \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 4\cos^2 x$

$\therefore 5\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5}$

$\therefore \cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $-1 < \cos x < 0$;

logo, $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e, da equação dada:

$\text{sen}\,x = 2\cos x \Rightarrow \text{sen}\,x = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore \text{sen}\,x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Logo:

$\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x = 2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{4}{5}$

24 $\cos 10x = \cos(2 \cdot 5x) = \cos^2 5x - \text{sen}^2 5x =$

$= 2\cos^2 5x - 1$

$\therefore \cos 10x = 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18}$

25 Lembrando que $\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$ e $\text{sen}(x - y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y - \text{sen}\,y \cdot \cos x$, temos:

$\frac{\text{sen}\,27°}{\text{sen}\,9°} - \frac{\cos 27°}{\cos 9°} =$

$= \frac{\text{sen}\,27° \cdot \cos 9° - \text{sen}\,9° \cdot \cos 27°}{\text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} =$

$= \frac{\text{sen}(27° - 9°)}{\text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} = \frac{\text{sen}\,18°}{\text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} =$

$= \frac{2\,\text{sen}\,18°}{2 \cdot \text{sen}\,9° \cdot \cos 9°} = \frac{2\,\text{sen}\,18°}{\text{sen}(2 \cdot 9°)} =$

$= \frac{2\,\text{sen}\,18°}{\text{sen}\,18°} = 2$

Alternativa **e**.

26 $f(x) = \text{sen}\,x \cdot \cos x \Rightarrow f(x) = \frac{2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{\text{sen}\,2x}{2}$

Logo:

$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Alternativa **e**.

27 Lembrando que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ e que $\text{sen}\,2x = 2 \cdot \text{sen}\,x \cdot \cos x$, temos:

$\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\, 2x =$
$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \text{sen}\, x(2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x) =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x$
Logo, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Assim:
$\cos 3x = 4k^3 - 3k$.

28 Lembrando que $\text{sen}\, 2x = 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$ e que $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$, temos:
$\text{sen}\, 3x = \text{sen}\,(x + 2x) =$
$= \text{sen}\, x \cdot \cos 2x + \text{sen}\, 2x \cdot \cos x =$
$= \text{sen}\, x(1 - 2\,\text{sen}^2 x) + 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos^2 x =$
$= \text{sen}\, x - 2\,\text{sen}^3 x + 2\,\text{sen}\, x(1 - \text{sen}^2 x) =$
$= \text{sen}\, x - 2\,\text{sen}^3 x + 2\,\text{sen}\, x - 2\,\text{sen}^3 x =$
$= 3\,\text{sen}\, x - 4\,\text{sen}^3 x$
Logo, $\text{sen}\, 3x = 3\,\text{sen}\, x - 4\,\text{sen}^3 x$. Assim:
$\text{sen}\, 3x = 3a - 4a^3$.

29 Para $x \in [0, 2\pi]$, temos:
$\text{sen}\, 2x = \cos x \Rightarrow 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \cos x = 0$
$\therefore \cos x(2\,\text{sen}\, x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ ou $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$
Resolvendo cada uma dessas equações, obtemos:
- $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$
- $\text{sen}\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

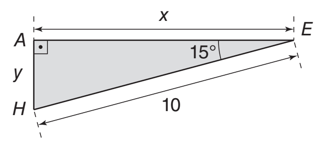
Logo, no intervalo $[0, 2\pi]$, a equação proposta possui 4 soluções.
Alternativa **b**.

30 Sendo $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x =$
$= 1 - 2\,\text{sen}^2 x$
Fazendo a substituição na equação
$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \text{sen}^2 x$, temos:
$(1 - 2\,\text{sen}^2 x)^2 = \frac{1}{2} - \text{sen}^2 x \Rightarrow$
$\Rightarrow 2(1 - 2\,\text{sen}^2 x)^2 = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$
$\therefore 2(1 - 2\,\text{sen}^2 x)^2 - (1 - 2\,\text{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 - 2\,\text{sen}^2 x)\,[2(1 - 2\,\text{sen}^2 x) - 1] = 0$
$\therefore 1 - 2\,\text{sen}^2 x = 0$ ou $2(1 - 2\,\text{sen}^2 x) - 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$
$\therefore \text{sen}\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\, x = \pm\frac{1}{2}$
De $\text{sen}\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:
$x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, $x_3 = \frac{5\pi}{4}$ ou $x_4 = \frac{7\pi}{4}$
De $\text{sen}\, x = \pm\frac{1}{2}$, temos:
$x_5 = \frac{\pi}{6}$, $x_6 = \frac{5\pi}{6}$, $x_7 = \frac{7\pi}{6}$ ou $x_8 = \frac{11\pi}{6}$
$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

31 $\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha =$
$= (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) +$
$+ 1(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) =$
$= 1(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) + 1(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) =$
$= 2(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = 2\cos 2\alpha$
Alternativa **a**.

32 $10\cos 2x + \text{sen}\, x = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10(1 - 2\,\text{sen}^2 x) + \text{sen}\, x = 9$
$\therefore 10 - 20\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x - 1 = 0$
Fazendo a mudança de variável $\text{sen}\, x = t$, obtemos a seguinte equação do 2º grau:
$20t^2 - t - 1 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-1) = 81$
$\therefore t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 20} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ ou $t = -\frac{1}{5}$
Retornando à variável original, temos:
$\text{sen}\, x = \frac{1}{4}$ ou $\text{sen}\, x = -\frac{1}{5}$
Como o arco tem extremidade no terceiro quadrante, $\text{sen}\, x < 0$ e $\cos x < 0$.
Assim, $\text{sen}\, x = -\frac{1}{5}$ e, pela relação fundamental:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$
$\therefore \cos^2 x = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{24}{25}$
$\therefore \cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$
Logo, $\text{sen}\, x = -\frac{1}{5}$ e $\cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

33 Os triângulos *AEH*, *BFE*, *CGF* e *DHG* são congruentes (caso LAA_o). Logo, a área S do quadrado maior é a soma da área do quadrado menor com o quádruplo da área de um desses triângulos.
Sendo $AE = x$, temos:



$\cos 15° = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cdot \cos 15°$
$\text{sen}\, 15° = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cdot \text{sen}\, 15$
Logo, a área S_t do triângulo *AEH* é dada por:
$S_t = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen}\, 15°$
ou, ainda:
$S_t = 50 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen}\, 15° = 25 \cdot 2 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen}\, 15° \Rightarrow$
$\Rightarrow S_t = 25\,\text{sen}\, 30° = \frac{25}{2}$
Concluímos, então, que a área S do quadrado maior é:
$S = \left(10^2 + 4 \cdot \frac{25}{2}\right)\text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$

34 $\text{tg}\, \theta = 2 \Rightarrow \frac{\text{sen}\, \theta}{\cos \theta} = 2$
$\therefore \text{sen}\, \theta = 2\cos \theta \quad \text{(I)}$
Além disso:
- $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta =$
  $= (\cos \theta + \text{sen}\, \theta)(\cos \theta - \text{sen}\, \theta)$
- $1 + \text{sen}\, 2\theta = \text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cdot \text{sen}\, \theta \cdot \cos \theta =$
  $= (\text{sen}\, \theta + \cos \theta)^2$

Assim:

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta} = \frac{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2} =$$

$$= \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{\cos\theta - 2\cos\theta}{2\cos\theta + \cos\theta} = \frac{-\cos\theta}{3\cos\theta} = -\frac{1}{3}$$

Logo, $\frac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta} = -\frac{1}{3}$.

Alternativa **b**.

35 Como $0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$, temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\frac{x}{2} < 1$$

Pela relação fundamental:

$$\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow (0{,}6)^2 + \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - 0{,}36$$

$$\therefore \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 0{,}64 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 0{,}8$$

Assim:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}96$$

Logo, $\operatorname{sen} x = 0{,}96$.

36 Pela relação fundamental ($\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$), temos:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{5}{13}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, deduzimos que $\cos x = \frac{5}{13}$.

Logo:

$$\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{13} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 \quad \therefore \cos\frac{x}{2} = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Como $\frac{x}{2}$ é uma medida do primeiro quadrante, concluímos que $\cos\frac{x}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Pela relação fundamental $\left(\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1\right)$, temos ainda:

$$\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Como $\frac{x}{2}$ é uma medida do primeiro quadrante, concluímos que $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

37 $\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

Para $x = 45°$, temos:

$$\cos 45° = 2\cos^2 22°30' - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 22°30' - 1$$

$$\therefore \cos^2 22°30' = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

Como $22°30'$ é uma medida do 1º quadrante, concluímos:

$$\cos 22°30' = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$$

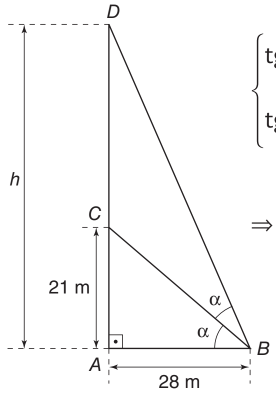
38 Temos:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} =$$

$$= \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

Alternativa **c**.

39 Sendo h a altura pedida, em metro, temos:



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{28} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{h}{28} \end{cases} \Rightarrow$$

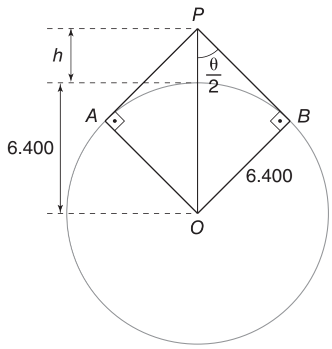
$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} & \text{(I)} \\ \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{h}{28} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{h}{28} \Rightarrow h = 96$$

Logo, ao atingir o ponto D, o helicóptero está a 96 m de altura em relação à pista.

40 Seja h a distância, em quilômetro, do ponto P à superfície da Terra. Como os triângulos PAO e PBO são congruentes, temos:



$$\begin{cases} \cos\theta = -0{,}62 & \text{(I)} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{6.400}{h + 6.400} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$$\cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = -0{,}62 \Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = -0{,}62$$

$$\therefore 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = -0{,}62 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm 0{,}9$$

Como $\frac{\theta}{2}$ é medida de um ângulo interno de um triângulo, deduzimos que $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = 0{,}9$. Substituindo $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$ por 0,9 em (II), concluímos:

$$0{,}9 = \frac{6.400}{h + 6.400} \Rightarrow h \approx 711$$

Alternativa **e**.

41 Aplicando a lei dos cossenos, temos:

a) $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°$

$\therefore x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore x^2 = 49$

Logo, $x = 7$ cm.

b) $y^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120°$

$\therefore y^2 = 25 + 100 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y^2 = 175$

Logo, $y = 5\sqrt{7}$ m.

42 Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$2^2 = x^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\therefore x = 4$ ou $x = 2$

Como o ângulo $B\hat{A}C$ é obtuso, só nos interessa $x = 4$ dm.

43 a) Como o maior ângulo interno se opõe ao maior lado, pela lei dos cossenos a medida α desse ângulo é tal que:

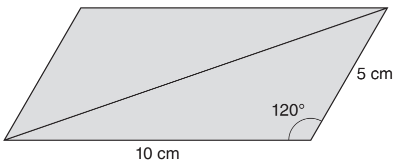
$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 49 = 16 + 25 - 40 \cos \alpha$

$\therefore \cos \alpha = -\frac{1}{5}$

b) O ângulo é obtuso, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, com $\cos \alpha < 0$.

44



Cálculo da medida da diagonal maior (d_M):

$(d_M)^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_M)^2 = 125 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore d_M = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$

Cálculo da medida da diagonal menor (d_m):

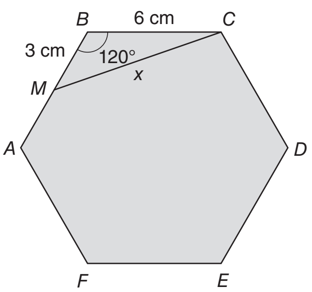
$(d_m)^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_m)^2 = 125 - 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore d_m = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Logo, as diagonais desse paralelogramo medem $5\sqrt{3}$ cm e $5\sqrt{7}$ cm.

45



Pela lei dos cossenos, temos:

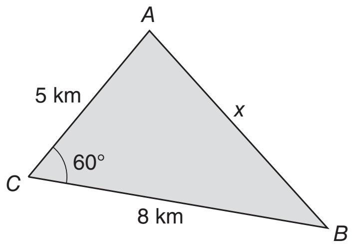
$x^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 45 - 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore x = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

Logo, o segmento $\overline{MC}$ mede $3\sqrt{7}$ cm.

46



Pela lei dos cossenos, temos:

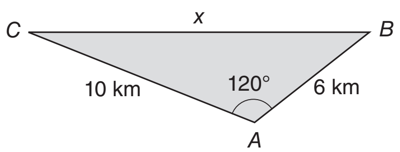
$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 89 - 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$

$\therefore x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, a distância entre os dois navios é 7 km.

47



Pela lei dos cossenos, temos:

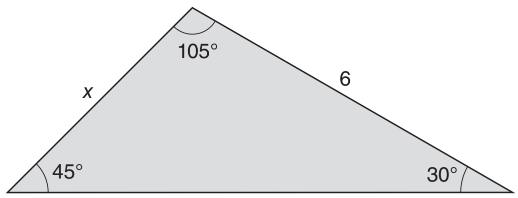
$x^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 136 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore x^2 = 196 \Rightarrow x = 14$

Logo, a distância percorrida foi 14 km.

48

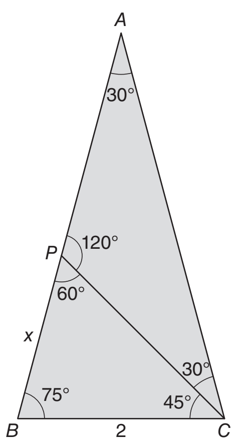


Pela lei dos senos, temos:

$\frac{x}{\text{sen } 30°} = \frac{6}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore x = 6 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

49



Como o triângulo ABC é isósceles, os ângulos da base são congruentes. Sendo θ a medida de cada um desses ângulos, temos:

$30° + 2\theta = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 75°$

Assim: $m(C\hat{P}B) = 60°$

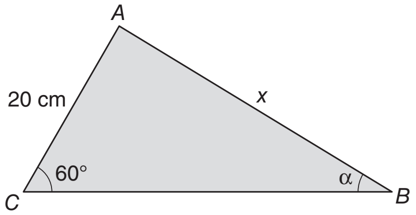
Aplicando a lei dos senos no triângulo PCB, temos:

$\frac{2}{\text{sen } 60°} = \frac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

Logo, o segmento $\overline{BP}$ mede $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

50



Como $\cos \alpha = 0{,}6$ e $\alpha < 90°$, pela relação fundamental temos:

$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = 0{,}8$

Assim, pela lei dos senos, temos:

$$\frac{20}{0{,}8} = \frac{x}{\text{sen } 60°} \Rightarrow x = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

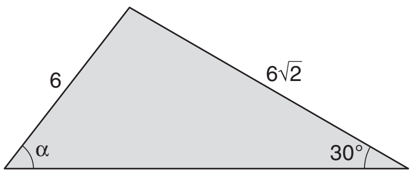
Logo, o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm.

51 Pela lei dos senos, a medida R do raio é dada por:

$$\frac{10}{\text{sen } 60°} = 2R \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Logo, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

52

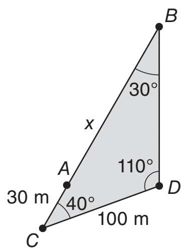


Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{6\sqrt{2}}{\text{sen } \alpha} = \frac{6}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, temos $\alpha = 45°$.

53



Aplicando a lei dos senos, a distância x é dada por:

$$\frac{100}{\text{sen } 30°} = \frac{30 + x}{\text{sen } 110°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (30 + x) = 100 \cdot 0{,}94$$

$$\therefore \frac{x}{2} = 79 \Rightarrow x = 158$$

Logo, a distância entre A e B é 158 m.

54 **a)** A área, em centímetro quadrado, é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \text{sen } 60° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60, \text{ ou seja, } A = 60 \text{ cm}^2.$$

b) A área, em centímetro quadrado, é dada por:

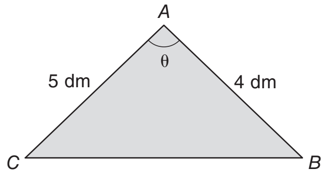
$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{sen } 150° = 20, \text{ ou seja, } A = 20 \text{ cm}^2.$$

55 A área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo ADC. Assim:

$$A = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{sen } 30° = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

Logo, a área do paralelogramo é 30 cm^2.

56



Sendo θ a medida do ângulo $B\hat{A}C$, temos:

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \text{sen } \theta \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 30°$ ou $\theta = 150°$

Logo, o ângulo $B\hat{A}C$ mede 30° ou 150°.

57 Cálculo da área A_S do setor circular $OAMB$:

$$A_S = \frac{\frac{5\pi}{6} \cdot 36}{2} = 15\pi$$

Cálculo da área A_T do triângulo AOB:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen } 150° = 9$$

Assim, o segmento circular AMB tem área de $3(5\pi - 3)$ cm^2.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 $E = \text{cotg}^2\ 60° + \sec 300° - \text{cossec } 330° =$

$$= \left(\frac{1}{\text{tg } 60°}\right)^2 + \frac{1}{\cos 300°} - \frac{1}{\text{sen } 330°} =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - (-2) = \frac{13}{3}$$

Logo, $E = \frac{13}{3}$.

2 $\text{cossec } x = 1{,}25 \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} = 1{,}25$

$\therefore\ \text{sen } x = 0{,}8$

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0{,}8 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = -0{,}6 \text{ para } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Assim:

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -0{,}75$$

Logo, $\text{cotg } x = -0{,}75$.

3 $\text{cotg } x = -2{,}4 \Rightarrow \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\frac{12}{5}$

$$\therefore\ \cos x = -\frac{12 \text{ sen } x}{5}$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{12 \text{ sen } x}{5} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } x = -\frac{5}{13} \text{ para } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

Assim:

$$\cos x = -\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

Logo, $\text{sen } x + \cos x = \frac{7}{13}$.

4 $\text{cotg}\ \theta + \text{tg}\ \theta = 8 \Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\ \theta} + \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = 8$

$\dfrac{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\text{sen}\ \theta \cdot \cos\theta} = 8 \Rightarrow \text{sen}\ \theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{8}$

Assim, temos:

$(\text{sen}\ \theta + \cos\theta)^2 = \text{sen}^2\theta + 2 \cdot \text{sen}\ \theta \cdot \cos\theta + \cos^2\theta =$

$= 1 + 2\ \text{sen}\ \theta \cdot \cos\theta = 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{4}$

Alternativa **c**.

5 $\text{tg}\ x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\ x}{\cos x} = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore \cos x = -3\,\text{sen}\ x$

$\begin{cases} \cos x = -3\ \text{sen}\ x \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$, pois

$\text{sen}\ x < 0$

Assim:

$\text{cossec}\ x = \dfrac{1}{\text{sen}\ x} = -\sqrt{10}$

Alternativa **a**.

6 Condição de existência: $\text{sen}\ a \neq 0$ e $\cos a \neq 0$

$\text{tg}\ a + \text{cotg}\ a = 2 \Rightarrow \text{tg}\ a + \dfrac{1}{\text{tg}\ a} = 2$

$\text{tg}^2 a + 1 = 2\,\text{tg}\ a \Rightarrow \text{tg}^2 a - 2\,\text{tg}\ a + 1 = 0$

$(\text{tg}\ a - 1)^2 = 0 \Rightarrow \text{tg}\ a = 1$

$\therefore a = \dfrac{\pi}{4}$ ou $a = \dfrac{5\pi}{4}$

A soma das raízes é:

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{6\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{2}$

Alternativa **c**.

7 Condição de existência: $\cos x \neq 0$

$4(1 - \text{sen}^2 x)(\sec^2 x - 1) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cos^2 x \cdot (\sec^2 x - 1) = 3$

$4\cos^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - 4\cos^2 x = 3 \Rightarrow 1 - \cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

$\therefore \text{sen}^2 x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore x = \dfrac{\pi}{3}$

Alternativa **b**.

8 a) $\sec x \leq \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} \leq \sqrt{2}$

Para $t = \cos x$, temos:

$\dfrac{1}{t} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{-\sqrt{2}t + 1}{t} \leq 0$

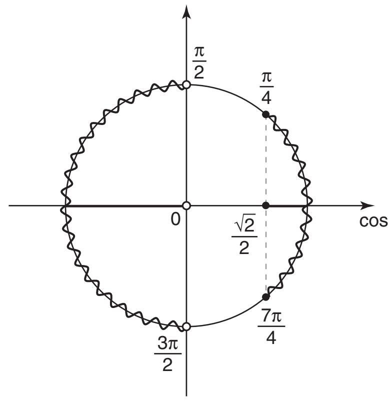
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = -\sqrt{2}t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
f	$+$		$+$		$-$
g	$-$		$+$		$+$
$\frac{f}{g}$	$-$		$+$		$-$

Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \leq 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e portanto:

$\cos x < 0$ ou $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$.

b) $\text{cossec}\ x > -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen}\ x} > -\sqrt{2}$

Para $t = \text{sen}\ x$, temos:

$\dfrac{1}{t} > -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2} \cdot t + 1}{t} > 0$

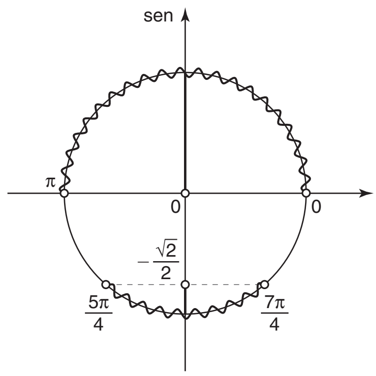
Estudando a variação de sinal das funções

$f(t) = \sqrt{2} \cdot t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0	
f	$-$		$+$		$+$
g	$-$		$-$		$+$
$\frac{f}{g}$	$+$		$-$		$+$

Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $t > 0$, e portanto:

$\text{sen}\ x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\ x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi \text{ ou } \dfrac{5\pi}{4} < x < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\sqrt{3}\sec x > 1 \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\cos x} > 1$

Para $t = \cos x$, temos:

$\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{t} > 1 \Rightarrow \dfrac{-t+\sqrt{3}}{t} > 0$

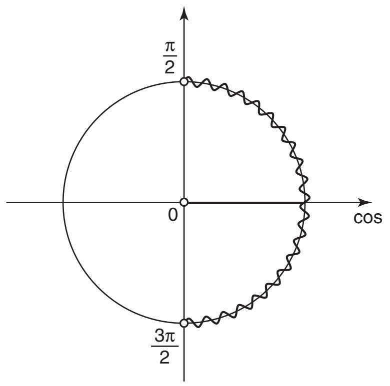
Estudando a variação de sinal da funções

$f(t) = -t + \sqrt{3}$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:

	$t < 0$	$0 < t < \sqrt{3}$	$t > \sqrt{3}$
f	+	+	−
g	−	+	+
$\frac{f}{g}$	−	+	−

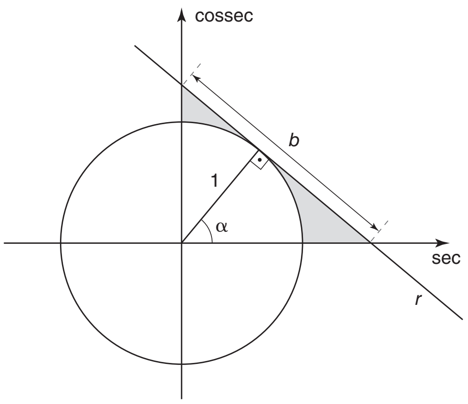
Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow 0 < t < \sqrt{3}$, e portanto:

$0 < \cos x < \sqrt{3}$, ou ainda $\cos x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

9



$b^2 = \sec^2\alpha + \text{cossec}^2\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha}$

Cálculo da área A da região colorida:

$A = A_{\text{triângulo}} - \dfrac{1}{4}A_{\text{círculo}} = \dfrac{b\cdot 1}{2} - \dfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2 =$

$= \dfrac{1}{2\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha} - \dfrac{\pi}{4}$

Logo, a área A da região colorida é dada por:

$A = \dfrac{1}{2\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha} - \dfrac{\pi}{4}$ $A = \dfrac{1}{\text{sen}\,2\alpha} - \dfrac{\pi}{4}$

10 a) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

- Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.
- O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer valor real de x.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro =

$= (\sec x - \cos x)(\text{cossec}\,x - \text{sen}\,x)(\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x) =$

$= \left(\dfrac{1}{\cos x} - \cos x\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen}\,x} - \text{sen}\,x\right) = \left(\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right) =$

$= \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x}\cdot\dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x\cdot\text{sen}\,x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x}\cdot\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x}\cdot\dfrac{1}{\cos x\cdot\text{sen}\,x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}{\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x} = 1 = 2^{\circ}$ membro

b) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq -1$.

Para existir o segundo membro, devemos ter: $\text{sen}\,x \neq 0$.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro $= \dfrac{1+\cos x}{\text{sen}\,x} + \dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x} =$

$= \dfrac{(1+\cos x)^2 + \text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x(1+\cos x)} =$

$= \dfrac{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x(1+\cos x)} =$

$= \dfrac{2 + 2\cos x}{\text{sen}\,x(1+\cos x)} = \dfrac{2(1+\cos x)}{\text{sen}\,x\,(1+\cos x)} =$

$= \dfrac{2}{\text{sen}\,x} = 2\,\text{cossec}\,x = 2^{\text{o}}$ membro

c) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

- Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: $\text{sen}\,x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$.
- O segundo membro é a constante zero e, portanto, existe para qualquer x real.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

1º membro $= \dfrac{\text{cossec}\,(\pi - x)}{\sec\,(-x)} - \text{cotg}\,(\pi + x) =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen}\,(\pi - x)}}{\dfrac{1}{\cos\,(-x)}} - \dfrac{\cos\,(\pi + x)}{\text{sen}\,(\pi + x)} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\text{sen}\,x}}{\dfrac{1}{\cos x}} - \dfrac{(-\cos x)}{(-\text{sen}\,x)} = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = 0 =$

$= 2^{\text{o}}$ membro

d) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen x ≠ 0 e cos x ≠ 0.

Para existir o segundo membro, devemos ter: cos x ≠ 0.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em *U*.

Passo 2

$1^{\underline{o}}$ membro $= (\text{tg } x + \text{cotg } x) \cdot \text{sen } x =$

$= \left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\right) \cdot \text{sen } x =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x} \cdot \text{sen } x = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x =$

$= 2^{\underline{o}}$ membro

e) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen x ≠ 0 e cos x ≠ 0.

O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer x real.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em *U*.

Passo 2

$1^{\underline{o}}$ membro $= (\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2 - 1)$

$= \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} - 1\right) =$

$= \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = 1 = 2^{\circ}$ membro.

11 **a)** $\begin{cases} \text{tg } x = 3 \\ \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \end{cases} \Rightarrow \sec^2 x = 1 + 3^2 = 10$

$\therefore \sec x = \pm\sqrt{10}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, concluímos:

$\sec x = -\sqrt{10}$ e, portanto, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\begin{cases} \text{cotg } x = \sqrt{15} \\ \text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{cossec}^2 x = 1 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = 16$

$\therefore \text{cossec } x = \pm 4$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, concluímos:

$\text{cossec } x = 4$ e, portanto, $\text{sen } x = \dfrac{1}{4}$

c) $\begin{cases} \sec x = a + 1 \\ \text{tg } x = \sqrt{a^2 + 2} \\ \sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a + 1)^2 = 1 + \left(\sqrt{a^2 + 2}\right)^2$

$\therefore a^2 + 2a + 1 = 1 + a^2 + 2 \Rightarrow a = 1$

d) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter: sen x ≠ 0 e cos x ≠ 0.

O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer x real.

Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em *U*.

Passo 2

1° membro $= \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x} + \dfrac{1}{1 + \text{cotg}^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\sec^2 x} + \dfrac{1}{\text{cossec}^2 x} =$

$= \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 = 2^{\circ}$ membro.

e) Aplicando a técnica 1.

Passo 1

Para existir cada um dos membros da igualdade, devemos ter: cos x ≠ 0. Logo, os dois membros estão definidos em *U*.

Passo 2

1° membro $= \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 x \cdot \text{tg}^2 x =$

$= \text{sen}^2 x \cdot (1 + \text{tg}^2 x) = \text{sen}^2 x \cdot \sec^2 x =$

$= \text{sen}^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x =$

$= 2^{\circ}$ membro.

12 $\sec x \cdot \cos x - \text{tg } x \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos^2 x =$

$= \dfrac{1}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos x} - \dfrac{\text{sen } x}{\cancel{\cos x}} \cdot \text{sen } x \cdot \cancel{\cos x} - \cos^2 x =$

$= 1 - \text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1 - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) =$

$= 1 - 1 = 0$

Além disso, $1 + \cos 3\pi = 1 + (-1) = 0$

Alternativa **b**.

13 **a)** $\text{sen } 165° = \text{sen } (120° + 45°) =$

$= \text{sen } 120° \cdot \cos 45° + \cos 120° \cdot \text{sen } 45°$

Mas $\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$; assim:

$\text{sen } 120° \cdot \cos 45° + \cos 120° \cdot \text{sen } 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\text{sen } 165° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

b) $\cos 105° = \cos (60° + 45°) =$

$= \cos 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45° =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Logo, $\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

c) $\text{tg } 240° = \text{tg } (180° + 60°) = \dfrac{\text{tg } 180° + \text{tg } 60°}{1 - \text{tg } 180° \cdot \text{tg } 60°} =$

$= \dfrac{0 + \sqrt{3}}{1 - 0 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$

d) $\text{cotg } 15° = \dfrac{1}{\text{tg } 15°} = \dfrac{1}{\text{tg } (60° - 45°)} =$

$= \dfrac{1 + \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°}{\text{tg } 60° - \text{tg } 45°} = \dfrac{1 + \sqrt{3} \cdot 1}{\sqrt{3} - 1} =$

$= \dfrac{\left(1 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{3} + 1\right)} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}$

Logo, $\text{cotg } 15° = 2 + \sqrt{3}$.

e) $\text{cossec } 255° = \dfrac{1}{\text{sen } 255°} = \dfrac{1}{-\text{sen } 75°} =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen } (30° + 45°)} =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°} =$

$= -\dfrac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} =$

$= \sqrt{2} - \sqrt{6}$

f) $\sec (-15°) = \dfrac{1}{\cos (-15°)} = \dfrac{1}{\cos 15°} =$

$= \dfrac{1}{\cos (45° - 30°)} =$

$= \dfrac{1}{\cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30°} =$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} =$

$= \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

14
- $\text{sen } 40° = \text{sen } (20° + 20°) =$
  $= \text{sen } 20° \cdot \cos 20° + \cos 20° \cdot \text{sen } 20° =$
  $= 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27 + 0{,}27 = 0{,}54$
- $\cos 40° = \cos (20° + 20°) =$
  $= \cos 20° \cdot \cos 20° - \text{sen } 20° \cdot \text{sen } 20° =$
  $= 0{,}9 \cdot 0{,}9 - 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}81 - 0{,}09 = 0{,}72$
- $\text{sen } 65° = \text{sen } (20° + 45°) =$
  $= \text{sen } 20° \cdot \cos 45° + \cos 20° \cdot \text{sen } 45° =$
  $= 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}21 + 0{,}63 = 0{,}84$
- $\cos 65° = \cos (45° + 20°) =$
  $= \cos 45° \cdot \cos 20° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 20° =$
  $= 0{,}7 \cdot 0{,}9 - 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}63 - 0{,}21 = 0{,}42$

Completando a tabela, temos:

	20°	40°	45°	65°
sen	0,3	0,54	0,7	0,84
cos	0,9	0,72	0,7	0,42

15
- $\text{tg } 13° = \text{tg } (35° - 22°) = \dfrac{\text{tg } 35° - \text{tg } 22°}{1 + \text{tg } 35° \cdot \text{tg } 22°} =$
  $= \dfrac{0{,}7 - 0{,}4}{1 + 0{,}7 \cdot 0{,}4} = \dfrac{0{,}3}{1 + 0{,}28} = \dfrac{0{,}3}{1{,}28} \approx 0{,}23$
- $\text{tg } 57° = \text{tg } (35° + 22°) = \dfrac{\text{tg } 35° + \text{tg } 22°}{1 - \text{tg } 35° \cdot \text{tg } 22°} =$
  $= \dfrac{0{,}7 + 0{,}4}{1 - 0{,}7 \cdot 0{,}4} = \dfrac{1{,}1}{1 - 0{,}28} = \dfrac{1{,}1}{0{,}72} \approx 1{,}53$
- $\text{tg } 70° = \text{tg } (13° + 57°) = \dfrac{\text{tg } 13° + \text{tg } 57°}{1 - \text{tg } 13° \cdot \text{tg } 57°} =$
  $= \dfrac{0{,}23 + 1{,}53}{1 - 0{,}23 \cdot 1{,}53} = \dfrac{1{,}76}{1 - 0{,}3519} = \dfrac{1{,}76}{0{,}6481} \approx 2{,}72$

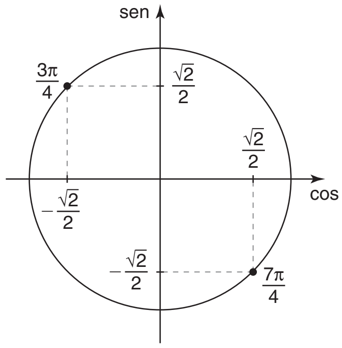
Completando a tabela, temos:

	13°	22°	35°	57°	70°
tg	0,23	0,4	0,7	1,53	2,72

16 $\cos x = \cos \left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \cos x \cdot \cos \dfrac{\pi}{2} - \text{sen } x \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \cos x = -\text{sen } x \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$



Alternativa **d**.

17 $E = \text{sen } 6x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 6x \Rightarrow$

$\Rightarrow E = \text{sen } (6x - x) = \text{sen } 5x$

Para $x = \dfrac{\pi}{10}$, temos:

$E = \text{sen } \left(5 \cdot \dfrac{\pi}{10}\right) = \text{sen } \dfrac{\pi}{2} = 1$

18 $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x - \text{sen } x \cdot \text{sen } 3x = \cos(x + 3x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \cos 4x$

Para $x = \dfrac{\pi}{8}$, temos:

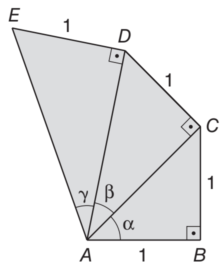
$f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos \left(4 \cdot \dfrac{\pi}{8}\right) = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$

19 $\text{sen } (x + \pi) = \text{sen } x \cdot \cos \pi + \text{sen } \pi \cdot \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } (x + \pi) = -\text{sen } x = -\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$

Alternativa **a**.

20 Sejam A, B, C, D e E os vértices dos triângulos, conforme indica a figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ e $\triangle ADE$, respectivamente, temos:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 1^2 + 1^2$

$\therefore AC = \sqrt{2}$

$(AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2 \Rightarrow (AD)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$

$\therefore AD = \sqrt{3}$

$(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2 \Rightarrow (AE)^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$

$\therefore AE = \sqrt{4} = 2$

Assim, temos:

a) $\text{tg } \alpha = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{1}{1}$

$\therefore \text{tg } \alpha = 1$

$\text{tg}\,\beta = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow \text{tg}\,\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \text{tg}\,\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg}\,\gamma = \dfrac{DE}{AD} \Rightarrow \text{tg}\,\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \text{tg}\,\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) Como α e γ são ângulos agudos de triângulos retângulos, temos $0° < \alpha < 90°$ e $0° < \gamma < 90°$. Logo:

$\text{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

$\text{tg}\,\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \gamma = 30°$

c) Como a função tangente é crescente, temos:

$\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow \text{tg}\,\gamma < \text{tg}\,\beta < \text{tg}\,\alpha$

$\therefore\ \gamma < \beta < \alpha$

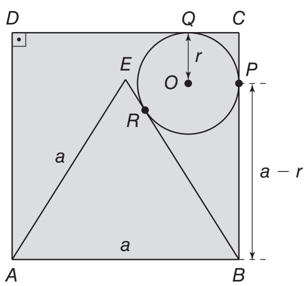
Adicionando $\alpha + \gamma$ aos três membros da desigualdade, temos:

$\alpha + 2\gamma < \alpha + \beta + \gamma < 2\alpha + \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow 45° + 2 \cdot 30° < \alpha + \beta + \gamma < 2 \cdot 45° + 30°$

$\therefore\ 105° < \alpha + \beta + \gamma < 120°$

21 Seja O o centro da circunferência e sejam P, Q e R os pontos de tangência entre a circunferência e $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$, respectivamente.



Como P e R são pontos de tangência, $m(B\hat{R}O) = m(B\hat{P}O) = 90°$. Além disso, $OR = OP = r$, e $\overline{BO}$ é comum aos triângulos BOR e BOP; logo, $\triangle BOR \cong \triangle BOP$ (caso RHC). Dessa forma, $P\hat{B}O \cong R\hat{B}O$ e, portanto, $\overline{BO}$ é bissetriz de $P\hat{B}R$.

Por outro lado, o $\triangle ABE$ é equilátero; então:

$m(P\hat{B}R) = 90° - 60° = 30°$ e $m(P\hat{B}O) = \dfrac{m(P\hat{B}R)}{2} = 15°$

No $\triangle BOP$, temos $BP = BC - CP = BP - OQ = a - r$ e:

$\text{tg}\,(P\hat{B}O) = \dfrac{OP}{OB} \Rightarrow \text{tg}\,15° = \dfrac{r}{a - r} \quad \text{(I)}$

Mas $\text{tg}\,15° = \text{tg}\,(60° - 45°) = \dfrac{\text{tg}\,60° - \text{tg}\,45°}{1 + \text{tg}\,60° \cdot \text{tg}\,45°} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2};$

logo: $\text{tg}\,15° = 2 - \sqrt{3}$

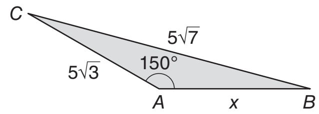
Substituindo esse valor da tangente em (I), concluímos:

$2 - \sqrt{3} = \dfrac{r}{a - r} \Rightarrow (2 - \sqrt{3})a - (2 - \sqrt{3})r = r$

$\therefore\ (2 - \sqrt{3})a = (3 - \sqrt{3})r \Rightarrow r = \dfrac{(2 - \sqrt{3})a}{3 - \sqrt{3}} =$

$= \dfrac{(3 - \sqrt{3})a}{6}$

22 Sendo x a medida, em centímetro, do lado $\overline{AB}$, temos:



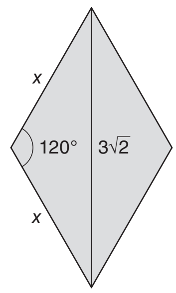
$(5\sqrt{7})^2 = (5\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot x \cdot \cos 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 15x - 100 = 0$

$\therefore\ x = -20$ (não convém) ou $x = 5$

Logo, o lado $\overline{AB}$ mede 5 cm.

23 Sendo x a medida, em metro, do lado do losango, temos:



$(3\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 120° \Rightarrow$

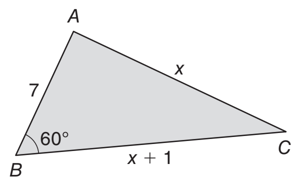
$\Rightarrow 18 = 3x^2$

$\therefore\ x = \sqrt{6}$

Logo, o lado do losango mede $\sqrt{6}$ m.

Alternativa **e**.

24 Sendo x a medida, em centímetro, do lado $\overline{AC}$, temos:



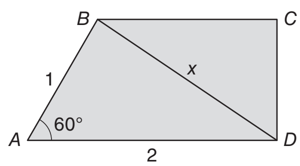
$x^2 = (x + 1)^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot (x + 1) \cdot \cos 60° \Rightarrow 5x = 43$

$\therefore\ x = \dfrac{43}{5}$

Logo, a medida do lado $\overline{BC}$ é $\left(\dfrac{43}{5} + 1\right)$cm, ou seja, $\dfrac{48}{5}$ cm $= 9{,}6$ cm.

Alternativa **b**.

25 A soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é 360° e, portanto, $m(B\hat{A}D) = 60°$. Assim, sendo x a medida, em centímetro, do segmento $\overline{BD}$, temos:



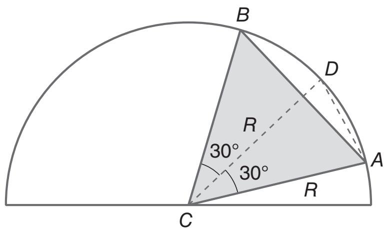
$x^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60° \Rightarrow x^2 = 3$

$\therefore\ x = \sqrt{3}$

Logo, o segmento $\overline{BD}$ mede $\sqrt{3}$ cm.

Alternativa **a**.

26 O triângulo ABC é equilátero e $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$; portanto, $m(A\hat{C}B) = 60°$ e $m(A\hat{C}D) = 30°$. Como $CD = CA = R$, temos:



Pela lei dos cossenos, aplicada ao triângulo ACD, concluímos:

$(AD)^2 = (CD)^2 + (AC)^2 - 2 \cdot CD \cdot AC \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AD)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore (AD)^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{3} \Rightarrow (AD)^2 = R^2(2 - \sqrt{3})$

$\therefore AD = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Alternativa **a**.

27 Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}D$, o ângulo $A\hat{B}C$ mede $180° - \alpha$. Assim, temos:

$$\begin{cases} (BD)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ (AC)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,(\cos 180° - \alpha) \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as duas equações, obtemos:

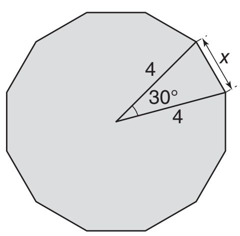
$(BD)^2 + (AC)^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha -$
$- 2ab \cdot \cos (180° - \alpha)$

Como $\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha$, concluímos:

$(BD)^2 + (AC)^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$

28 A medida α do ângulo central do dodecágono regular é dada por $\alpha = \dfrac{360°}{12} = 30°$.

Assim, sendo x a medida, em centímetro, do lado desse dodecágono, temos:



$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 30° \Rightarrow x^2 = 16(2 - \sqrt{3})$

$\therefore x = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Alternativa **d**.

Exercícios contextualizados

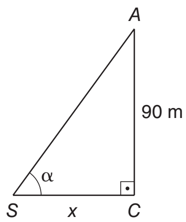
29 $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 6$

$\sec \beta = \dfrac{13}{12} \Rightarrow \cos \beta = \dfrac{12}{13}$

$$\begin{cases} \cos \beta = \dfrac{12}{13} \\ \text{sen}^2\,\beta + \cos^2 \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \dfrac{5}{13}, \text{ para}$$

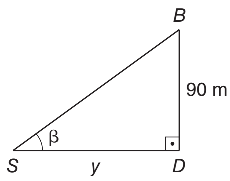
$0° < \beta < 90°$

Assim, temos:



$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{90}{x} \Rightarrow 6 = \dfrac{90}{x}$

$\therefore x = 15$ m



$\text{tg}\,\beta = \dfrac{90}{y} \Rightarrow \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\cos \beta} = \dfrac{90}{y}$

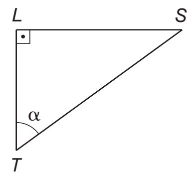
$\therefore \dfrac{5}{12} = \dfrac{90}{y}$

$\therefore y = 216$ m

Concluímos, então, que a distância d entre os navios é dada por:

$d = y - x \Rightarrow d = 201$ m

30



$\cos \alpha = \dfrac{TL}{TS} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3{,}85 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^8}$

$\therefore \sec \alpha = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}85 \cdot 10^5} \Rightarrow \sec \alpha \approx 389{,}6$

Como α é medida de ângulo agudo, observamos na tabela que $89{,}8° < \alpha < 89{,}9°$.

Alternativa **e**.

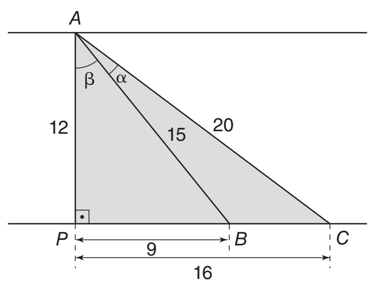
31 $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \dfrac{\dfrac{3}{9} + \dfrac{3}{6}}{1 - \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{3}{6}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg}\,(\alpha + \beta) = 1$

Como $0 < \alpha + \beta < 180°$, concluímos que $\alpha + \beta =$
$= 45°$.

32 Sendo P a projeção ortogonal do ponto A sobre a margem oposta da estrada, obtemos pelo teorema de Pitágoras: $PC = 16$ m e $PB = 9$ m.

Sendo β a medida do ângulo $B\hat{A}P$, esquematizamos:



$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{16}{20} = \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{12}{15} + \frac{9}{15} \cdot \cos\alpha$

$\therefore \frac{4}{5} = \frac{4\,\text{sen}\,\alpha}{5} + \frac{3\cos\alpha}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4 - 4\,\text{sen}\,\alpha}{3}$

Aplicando a relação fundamental ($\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), temos:

$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{4 - 4\,\text{sen}\,\alpha}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

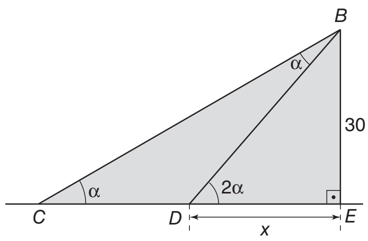
$\Rightarrow 25\,\text{sen}^2\alpha - 32\,\text{sen}\,\alpha + 7 = 0$

Assim, obtemos: $\text{sen}\,\alpha = 1$ ou $\text{sen}\,\alpha = \frac{7}{25}$.

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que $\text{sen}\,\alpha = \frac{7}{25}$.

(**Nota:** Outra resolução é possível por meio da lei dos cossenos.)

33 Sendo x a distância pedida, em metro, temos:



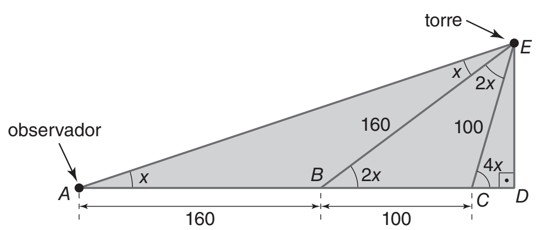
$\text{tg}\,2\alpha = \frac{30}{x} \Rightarrow \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha} = \frac{30}{x}$

$\therefore \frac{2 \cdot 0{,}4}{1 - (0{,}4)^2} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = 31{,}5$

Logo, a distância entre o ponto D e a base da torre é 31,5 m.

34 Nomeando os vértices conforme a figura a seguir, temos:

- $E\hat{B}D$ é ângulo externo do triângulo ABE. Assim, sendo x a medida do ângulo $E\hat{A}D$, temos que $m(A\hat{E}B) = x$; logo, o triângulo ABE é isósceles, com $AB = BE = 160$ m.
- $E\hat{C}D$ é ângulo externo do triângulo BCE. Assim, $m(B\hat{E}C) = 2x$ e, portanto, o triângulo BCE é isósceles, com $BC = CE = 100$ m.



Pela lei dos senos, aplicada ao triângulo BCE, temos:

$\frac{100}{\text{sen}\,2x} = \frac{160}{\text{sen}(180° - 4x)} \Rightarrow \frac{100}{\text{sen}\,2x} = \frac{160}{\text{sen}\,4x}$

$\therefore \frac{\text{sen}\,4x}{\text{sen}\,2x} = \frac{160}{100} \Rightarrow \frac{\cancel{2\,\text{sen}\,2x}\cos 2x}{\cancel{\text{sen}\,2x}} = \frac{8}{5}$

$\therefore \cos 2x = \frac{4}{5}$

Pela relação fundamental $\text{sen}^2\,2x + \cos^2\,2x = 1$, obtemos $\text{sen}\,2x = \frac{3}{5}$

Assim, concluímos do triângulo CDE:

$\text{sen}\,4x = \frac{DE}{100} \Rightarrow 2\,\text{sen}\,2x \cdot \cos 2x = \frac{DE}{100}$

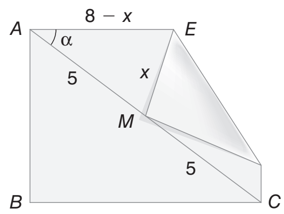
$\therefore 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{DE}{100} \Rightarrow DE = 96$

Alternativa **a**.

35 Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $AC = 10$ cm.
Sendo α a medida do ângulo $C\hat{A}D$, temos:

$\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Sendo x a medida, em centímetro, do segmento $\overline{EM}$, obtemos $AE = 8 - x$.
Assim, esquematizamos:



Concluímos, aplicando a lei dos cossenos no triângulo AEM:

$x^2 = 5^2 + (8 - x)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (8 - x)\cos\alpha$

$\therefore x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 10 \cdot (8 - x) \cdot \frac{4}{5}$

$\therefore x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 64 + 8x$

$\therefore 8x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{8}$

Logo, $EM = \frac{25}{8}$ cm ou aproximadamente 3,13 cm.

36 Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos $m(B\hat{C}A) = 45°$.
Assim, sendo x a medida BC, em metro, temos:

$\frac{800}{\text{sen}\,45°} = \frac{x}{\text{sen}\,120°} \Rightarrow \frac{800}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore x = 400\sqrt{6}$

Logo, o comprimento do canal será $400\sqrt{6}$ m ou aproximadamente 980 m.

37 Sendo R a medida do raio do lago, temos, pela lei dos senos:

$\frac{AB}{\text{sen}\,30°} = 2R \Rightarrow \frac{AB}{\frac{1}{2}} = 2R \qquad \therefore AB = R$

38 Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, deduzimos que $m(B\hat{A}D) = 90°$ e $m(B\hat{C}D) = 63°$. Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\begin{cases} \frac{200}{\text{sen}\,90°} = \frac{AB}{\text{sen}\,30°} \\ \frac{200}{\text{sen}\,63°} = \frac{BC}{\text{sen}\,64°} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{200}{1} = \frac{AB}{0{,}5} \\ \frac{200}{0{,}89} = \frac{BC}{0{,}90} \end{cases}$$

$\therefore AB = 100$ m e $BC \approx 202{,}25$

Assim, concluímos que a área S do quadrilátero $ABCD$ é dada por:

$S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot \text{sen}\,60° + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 202{,}5 \cdot \text{sen}\,53°$

$\therefore\ S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot \cos 30° + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 202{,}25 \cdot \text{sen}\ 53°$

$\therefore\ S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot 0{,}87 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 202{,}25 \cdot 0{,}80$

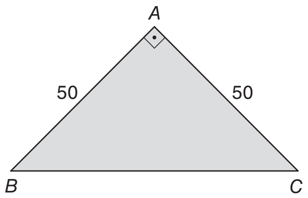
$\therefore\ S \approx 24.880\ m^2$

Logo, a área do terreno é, aproximadamente, $24.880\ m^2$.

39 Sendo α a medida do ângulo $B\hat{A}C$, a área S do triângulo ABC é dada por:

$S = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 \cdot \text{sen}\ \alpha\ cm^2 = 1.250\ \text{sen}\ \alpha\ cm^2$

Para que essa área seja máxima, devemos ter $\text{sen}\ \alpha = 1$; portanto, $\alpha = 90°$.



Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos:

$(BC)^2 = 50^2 + 50^2 \Rightarrow (BC)^2 = 2 \cdot 50^2$

$\therefore\ BC = 50\sqrt{2}\,cm$

Alternativa **e**.

Exercícios de revisão cumulativa

1 $\text{sen}^3 x - \text{sen}^2 x - 4\ \text{sen}\ x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x(\text{sen}\ x - 1) - 4(\text{sen}\ x - 1) = 0$

$\therefore\ (\text{sen}\ x - 1)(\text{sen}^2 x - 4) = 0 \Rightarrow \text{sen}\ x - 1 = 0$ ou $\text{sen}^2 x - 4 = 0$

Assim, temos:

- $\text{sen}\ x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{sen}\ x = \pm 2$ (não convém)

Concluímos, então, que o conjunto solução é:

$S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

2 A sequência 1, 16, 31, 46, ... é uma progressão aritmética de razão 15. Assim, temos:

1ª rodada: 1, 16, 31, 46, 61, 76, 91
2ª rodada: 6, 21, 36, 51, 66, 81, 96
3ª rodada: 11, 26, 41, 56, 71, 86
4ª rodada: 1 (criança já chamada)

Logo, foram distribuídos 21 chocolates.

Alternativa **c**.

3 Condição de existência: $\cos x \neq 0$

A sequência é P.G. se, e somente se:

$144 \cos^2 x = \text{sen}^2 x \cdot 16\ \text{tg}^2 x$

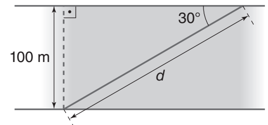
Logo:

$144 \cos^2 x = \frac{16\ \text{sen}^4 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \text{tg}^4 x = 9$

$\therefore\ \text{tg}\ x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

4 Sendo d a distância percorrida pelo barco, esquematizamos:



$\text{sen}\ 30° = \frac{100}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{100}{d}$

$\therefore\ d = 200$ m

Alternativa **d**.

Análise da resolução

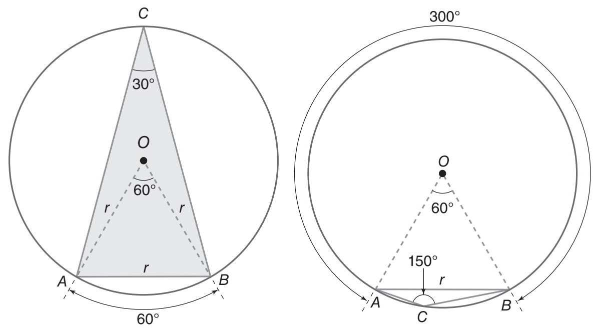
1º modo:

Pela lei dos senos, aplicada ao triângulo ABC, temos:

$$\frac{r}{\text{sen}\ \alpha} = 2r \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2}$$

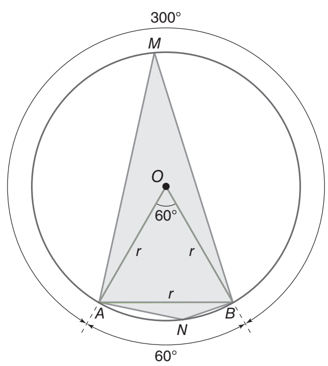
Como $0° < \alpha < 180°$, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, temos dois valores possíveis: $\alpha = 30°$ ou $\alpha = 150°$.

Duas figuras possíveis para esses valores de α são:



2º modo:

Em uma circunferência de raio r, consideremos uma corda $\overline{AB}$ de comprimento r. Os pontos A e B determinam nessa circunferência dois arcos distintos de extremos A e B. Considerando um ponto M em um desses arcos e um ponto N no outro, com M e N distintos de A e B, obtemos os triângulos ABM e ABN que satisfazem as condições enunciadas. Observe:



Assim, temos:

$m(A\hat{M}B) = \frac{m(\widehat{ANB})}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

$m(A\hat{N}B) = \frac{m(\widehat{AMB})}{2} = \frac{300°}{2} = 150°$

Logo, há duas respostas possíveis: 30° ou 150°.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Para pensar

1 Resposta pessoal.

2 Se a música tem 15 batidas a cada 10 segundos, temos:

15 batidas ——— 10 segundos

x batidas ——— 60 segundos

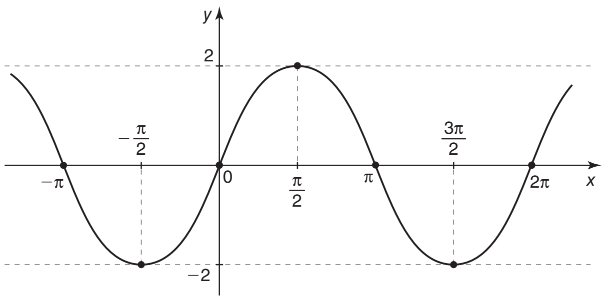
$x = \dfrac{15 \cdot 60}{10} = 90$

Portanto, essa música tem 90 bpm.

Exercícios propostos

1 a) $y = 2\operatorname{sen} x$

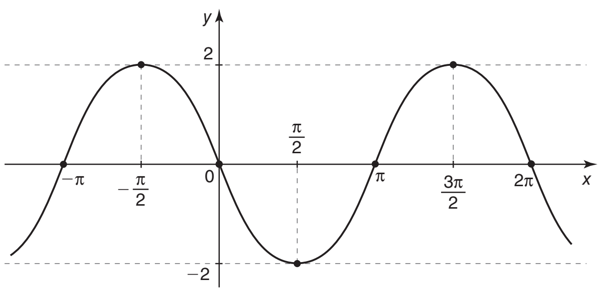
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

b) $y = -2\operatorname{sen} x$

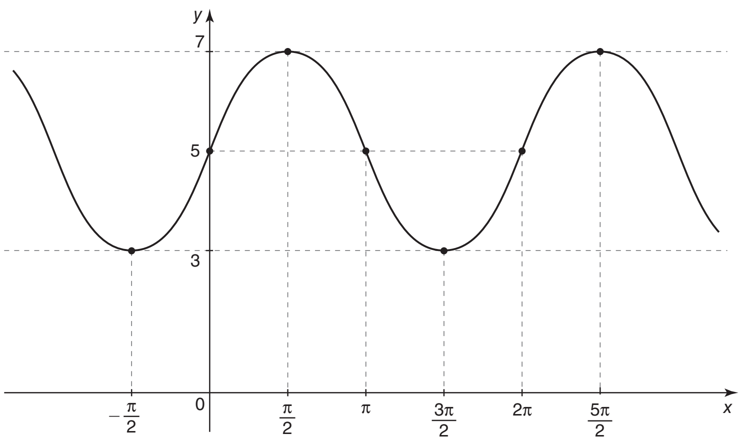
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	2
2π	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

c) $y = 5 + 2\operatorname{sen} x$

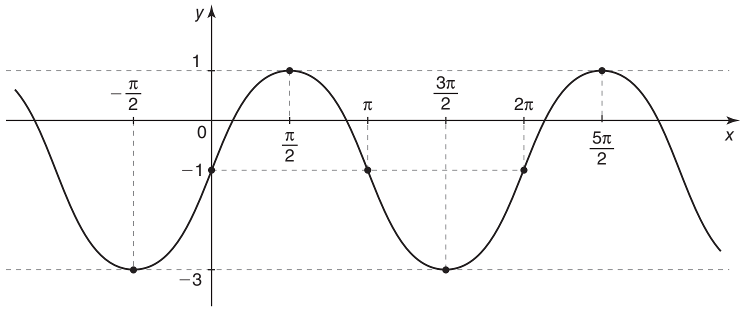
x	y
0	5
$\frac{\pi}{2}$	7
π	5
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	5



$D = \mathbb{R}$
$Im = [3, 7]$
$p = 2\pi$

d) $y = -1 + 2\,\text{sen}\,x$

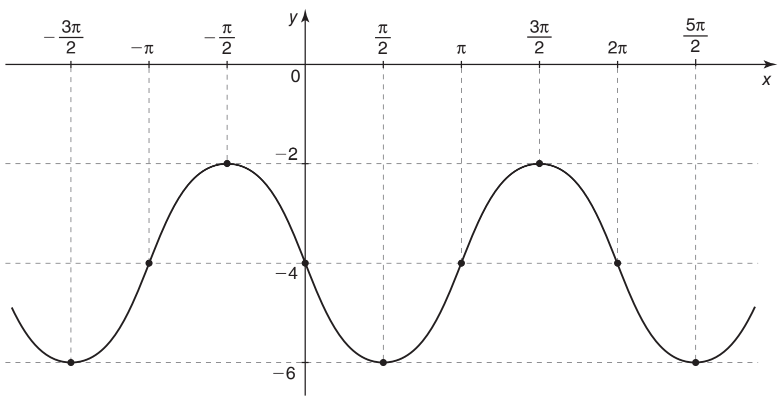
x	y
0	-1
$\frac{\pi}{2}$	1
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-3
2π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 2\pi$

e) $y = -4 - 2\,\text{sen}\,x$

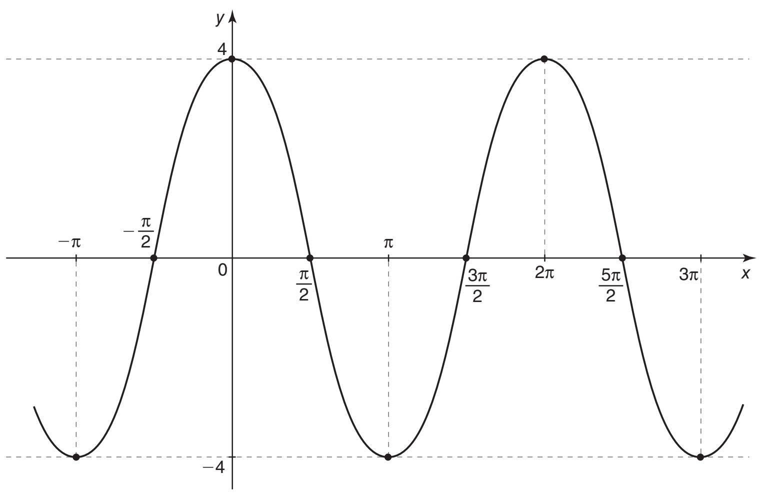
x	y
0	-4
$\frac{\pi}{2}$	-6
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	-4



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-6, -2]$
$p = 2\pi$

f) $y = 4\cos x$

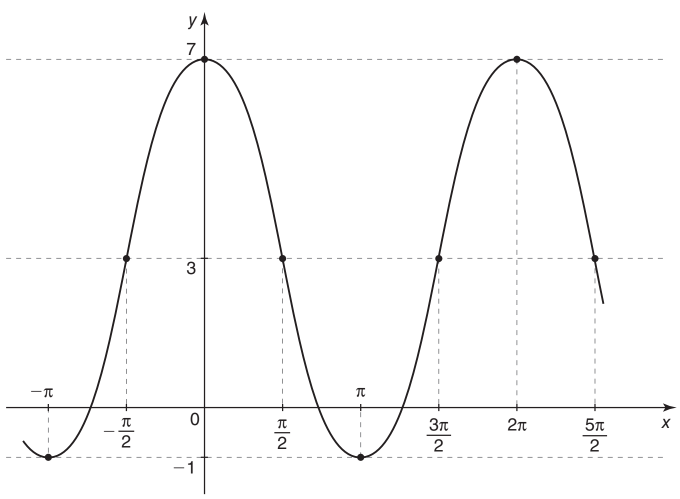
x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-4
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	4



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-4, 4]$
$p = 2\pi$

g) $y = 3 + 4\cos x$

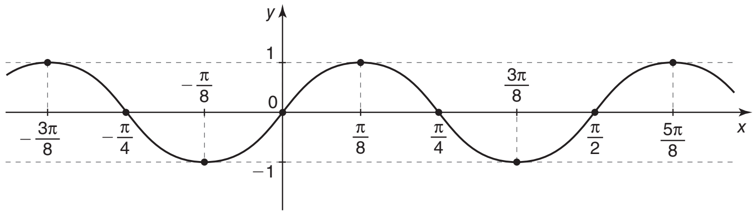
x	y
0	7
$\frac{\pi}{2}$	3
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3
2π	7



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 7]$
$p = 2\pi$

2 a) y = sen 4x

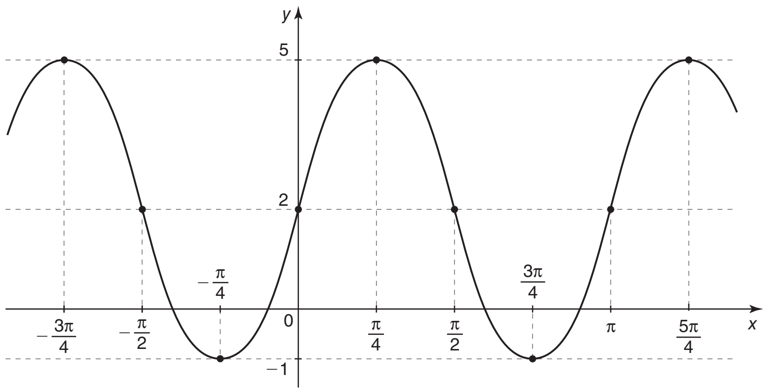
$4x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1
π	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1
2π	$\frac{\pi}{2}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 1]$
$p = \frac{\pi}{2}$

b) y = 2 + 3sen 2x

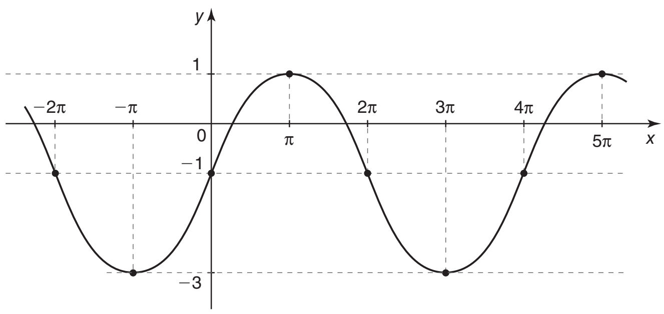
$2x$	x	y
0	0	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	5
π	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 5]$
$p = \pi$

c) $y = -1 + 2\text{sen}\,\frac{x}{2}$

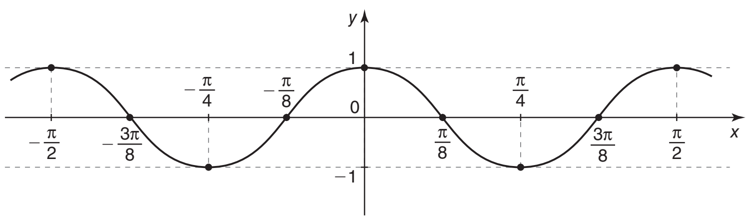
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	2π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-3
2π	4π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 4\pi$

d) y = cos 4x

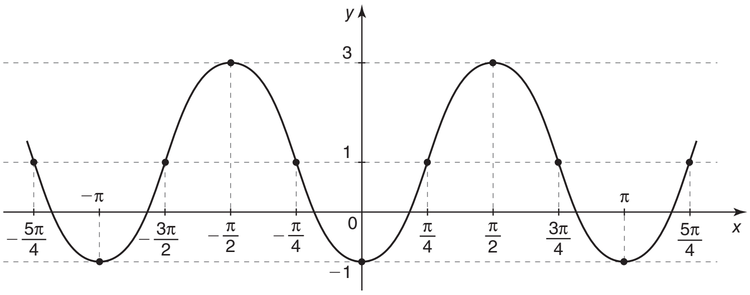
$4x$	x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	0
π	$\frac{\pi}{4}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	0
2π	$\frac{\pi}{2}$	1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 1]$
$p = \frac{\pi}{2}$

e) $y = 1 - 2\cos 2x$

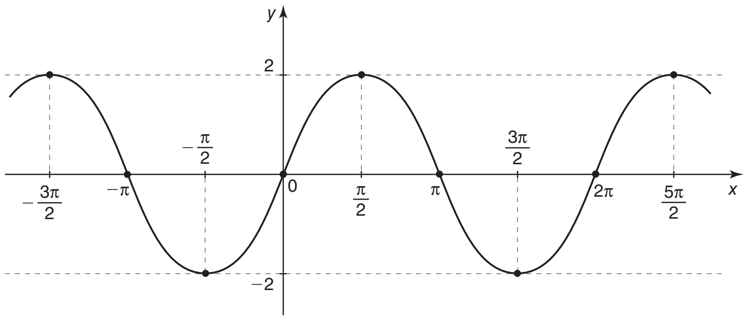
$2x$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
2π	π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 3]$
$p = \pi$

f) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

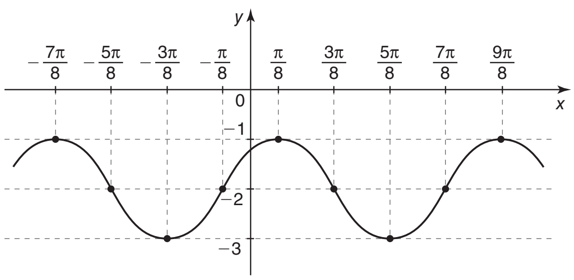
$x - \frac{\pi}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	$\frac{3\pi}{2}$	-2
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0
2π	$\frac{5\pi}{2}$	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

g) $y = -2 + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{8}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-2
π	$\frac{5\pi}{8}$	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{8}$	-2
2π	$\frac{9\pi}{8}$	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, -1]$
$p = \pi$

3 a) $y = 8 \text{ sen } x$

$p = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

b) $y = \text{sen } 8x$

$p = \frac{2\pi}{|8|} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

c) $y = \text{sen } \frac{x}{8}$

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{8}\right|} = 16\pi$

d) $y = \cos(-3x)$

$p = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$

e) $y = 2 + 3 \text{ sen}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$p = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

f) $y = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)$

$p = \frac{2\pi}{|-2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

4 a) $y = 10 \text{ sen } x$

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -10 \leqslant 10 \text{ sen } x \leqslant 10$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$.

b) $y = -10 \text{ sen } x$

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -10 \leqslant -10 \text{ sen } x \leqslant 10$

Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant y \leqslant 10\}$.

c) $y = 3 + 2\cos x$
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2$
$\therefore\ 1 \leqslant 3 + 2\cos x \leqslant 5$
Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 5\}$.

d) $y = -4 + 5\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
$-1 \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 5\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 5$
$\therefore\ -9 \leqslant -4 + 5\cos\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1$
Logo, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -9 \leqslant y \leqslant 1\}$.

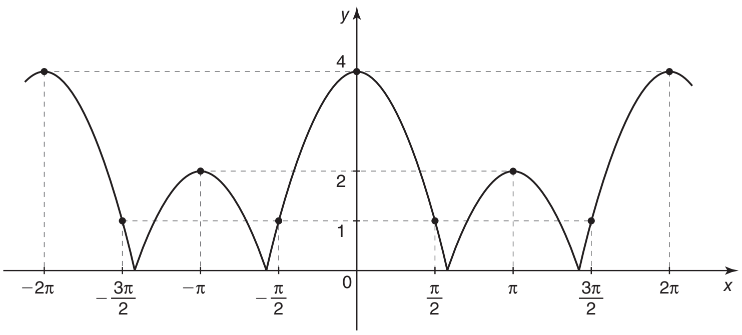
5 O ponto (0, 0) pertence ao gráfico; logo:
$0 = \text{sen}\,(0 - h) \Rightarrow 0 = \text{sen}\,(-h)$
$\therefore\ \text{sen}\,h = 0 \Rightarrow h = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
O menor número positivo h que satisfaz essa condição é π, obtido para $k = 1$. Assim, concluímos: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$
Alternativa **c**.

6 Os pontos $\left(\frac{\pi}{6}, 5\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, 7\right)$ pertencem ao gráfico da função; portanto:

$$\begin{cases} 5 = a + b\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} \\ 7 = a + b\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a + \frac{b}{2} \\ 7 = a + b \end{cases}$$

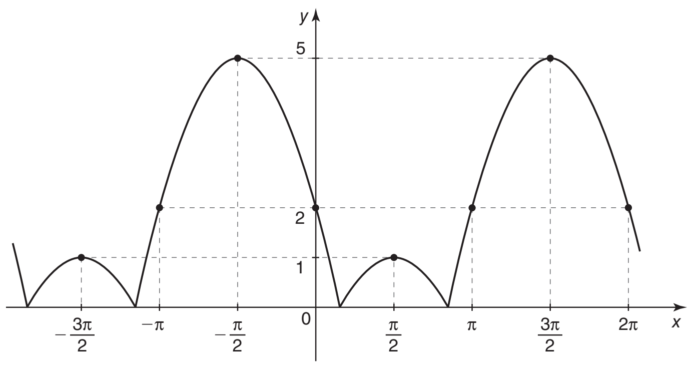
Concluímos, então, que $a = 3$ e $b = 4$.

7 **a)** *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 1 + 3\cos x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |1 + 3\cos x|$.



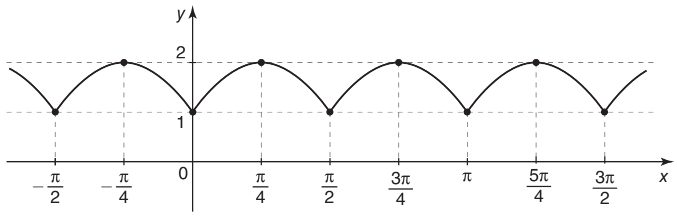
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 4]$
$p = 2\pi$

b) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = -2 + 3\,\text{sen}\,x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |-2 + 3\,\text{sen}\,x|$.



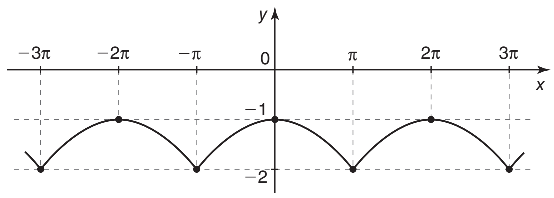
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 5]$
$p = 2\pi$

c) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{sen } 2x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = |\text{sen } 2x|$.
Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 uma unidade para cima, obtendo então o gráfico de $y = 1 + |\text{sen } 2x|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 2]$
$p = \dfrac{\pi}{2}$

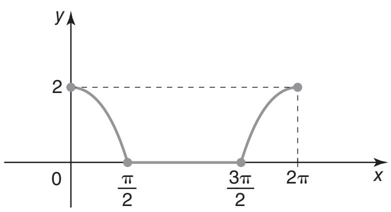
d) *Fase 1*: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos \dfrac{x}{2}$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = \left|\cos \dfrac{x}{2}\right|$.
Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 duas unidades para baixo, obtendo então o gráfico de $y = -2 + \left|\cos \dfrac{x}{2}\right|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, -1]$
$p = 2\pi$

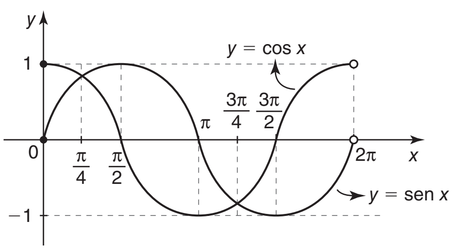
8 $f(x) = \begin{cases} \cos x + \cos x, \text{ se } \cos x \geq 0 \\ \cos x - \cos x, \text{ se } \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2\cos x, \text{ se } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \\ 0, \text{ se } \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Assim, o gráfico de f é:



Alternativa **a**.

9 a)



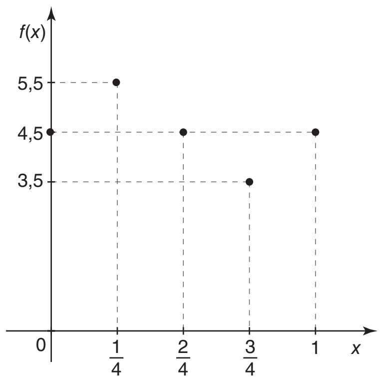
b) De acordo com o gráfico, sen $x >$ cos x para $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$.

10 Sabemos que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$. Então:
$-1 \leq 4m - 5 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 4m \leq 6$
$\therefore\ 1 \leq m \leq \dfrac{3}{2}$
Assim, somente para $1 \leq m \leq \dfrac{3}{2}$ existe a igualdade sen $x = 4m - 5$.

11 a)

Dia de abril	x	$f(x)$
1 (segunda-feira)	0	$f(0) = 4{,}5 + \text{sen}\,(2\pi \cdot 0) = 4{,}5$
2 (terça-feira)	$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4{,}5 + \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 5{,}5$
3 (quarta-feira)	$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4{,}5 + \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = 4{,}5$
4 (quinta-feira)	$\frac{3}{4}$	$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4{,}5 + \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{3}{4}\right) = 3{,}5$
5 (sexta-feira)	1	$f(1) = 4{,}5 + \text{sen}\,(2\pi \cdot 1) = 4{,}5$

Marcando no plano cartesiano os pontos $(x, f(x))$ obtidos na tabela, temos o gráfico:



b) Observando o gráfico, deduzimos que o preço dessa ação atingiu o maior valor na terça-feira e o menor valor na quinta-feira.

c) Observando a tabela do item **a**, concluímos que o maior valor da ação foi 5,5 e o menor foi 3,5.

12 A medida α do arco $\overset{\frown}{AP}$ em função do tempo t é dada por:

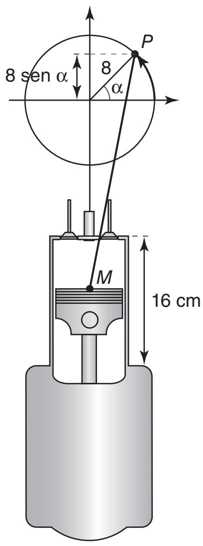
Medida do arco (radiano)		Tempo (minuto)
2π	———	$\frac{1}{30}$
α	———	t

$\therefore\ \alpha = 60\pi t$ rad

Logo, as coordenadas de p são dadas por $f(t) = 7\cos(60\pi t)$ e $g(t) = 7\,\text{sen}\,(60\pi t)$.

Alternativa **d**.

13 Vamos imaginar uma circunferência de diâmetro 16 cm com o centro na origem de um sistema cartesiano tal que, quando um ponto P gira no sentido anti-horário na circunferência, uma haste rígida MP acompanha o movimento do pistão, conforme figura.



A medida α, em radiano, é dada em função do tempo t, em minuto, pela regra de três:

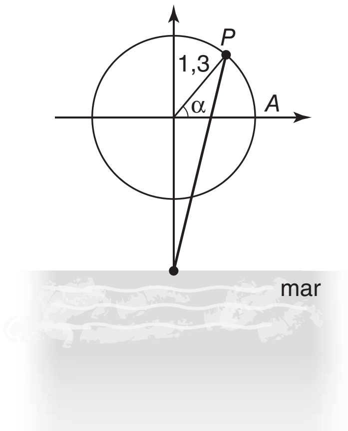
Medida do arco (radiano)		Tempo (minuto)
2π	———	$\frac{1}{60}$
α	———	t

$\therefore\ \alpha = 120\pi t$

Como a altura da tampa do pistão, em relação à base, é dada pela ordenada do ponto P, a função procurada é: $f(t) = 8\,\text{sen}\,120\pi t$.

Alternativa **d**.

14 Imaginemos, em um plano vertical, uma circunferência de raio 1,3 m, acima do nível do mar, e uma haste rígida ligando um ponto P da circunferência a um ponto do nível do mar, no prolongamento do eixo Oy, conforme mostra a figura.



O subir e descer da maré, como um imenso pistão, provoca um movimento circular do ponto P. Supondo esse movimento circular com velocidade constante e no sentido anti-horário, vamos calcular a medida α do arco $\overset{\frown}{AP}$, em função do horário t, em hora, com $0 \leqslant t \leqslant 24$, em que $t = 2$ corresponda a um instante em que P passou pelo ponto $A(1{,}3;\ 0)$:

Medida do arco (radiano)		Tempo (hora)
2π	———	12
α	———	$t - 2$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi(t-2)}{6}$

Assim, a ordenada do ponto P no instante t, em hora, é dada pela função:

$f(t) = 1{,}3\,\text{sen}\,\dfrac{\pi(t-2)}{6}$.

15 A medida α, em radiano, do arco $\overset{\frown}{AP}$ é dada pela regra de três:

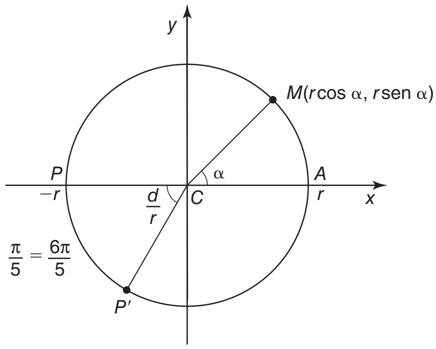
Medida do arco (radiano)		Tempo (segundo)
2π	———	3
α	———	t

$\therefore\ \alpha = \dfrac{2\pi t}{3}$

Logo, os movimentos de P_x e P_y são descritos, respectivamente, por: $f(t) = 5\cos\dfrac{2\pi t}{3}$ e

$g(t) = 5\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi t}{3}$.

16 Indicando por C o centro da circunferência, vamos admitir que o segmento $\overline{CP}$ seja paralelo ao eixo das abscissas. Transladando o sistema de eixos de modo que sua origem coincida com o ponto C e considerando o ponto $A(r, 0)$, temos que qualquer ponto M da circunferência tem abscissa $r\cos\alpha$ e ordenada $r\,\text{sen}\,\alpha$, em que α é medida do ângulo central $A\hat{C}M$. Assim, se o ponto P se desloca uma distância d, $d \leqslant r$, sobre a circunferência no sentido anti-horário até um ponto P', temos que o ângulo central $P\hat{C}P'$ mede $\frac{d}{r}$ radianos:



Portanto, as coordenadas do ponto P' são $\left(r\cos\left(\pi + \frac{d}{r}\right), r\,\text{sen}\left(\pi + \frac{d}{r}\right)\right)$, ou seja, $P'\left(-r\cos\left(\frac{d}{r}\right), -r\,\text{sen}\left(\frac{d}{r}\right)\right)$. Assim, quando o ponto P desloca-se de $(-r, 0)$ a $\left(-r\cos\left(\frac{d}{r}\right), -r\,\text{sen}\left(\frac{d}{r}\right)\right)$, sua projeção ortogonal sobre o eixo das abscissas desloca-se a distância d dada por:

$$d = -r\cos\left(\frac{d}{r}\right) - (-r) = r - r\cos\left(\frac{d}{r}\right) \Rightarrow d = r \cdot \left(1 - \cos\frac{d}{r}\right)$$

Alternativa **b**.

17 a) $y = \text{tg}\,4x$

Sabemos que $\text{tg}\,4x = \frac{\text{sen}\,4x}{\cos 4x}$; portanto, a condição de existência é $\cos 4x \neq 0$, ou seja, $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $\text{tg}\,4x$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = 5\,\text{tg}\,\frac{3x}{2}$

A condição de existência é $\cos\frac{3x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{3x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $5\,\text{tg}\,\frac{3x}{2}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é: $Im = \mathbb{R}$.

c) $y = 4 + \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

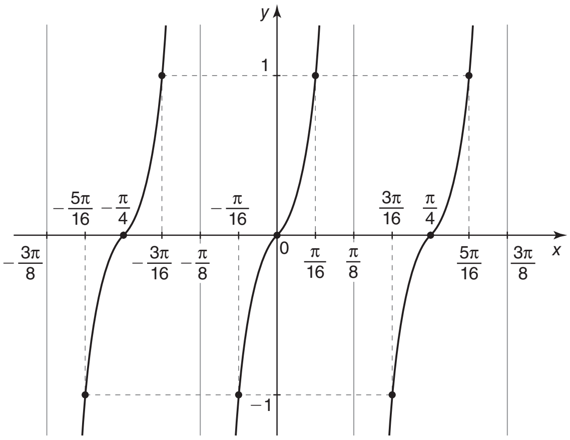
A condição de existência é $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \neq 0$, ou seja, $x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $4 + \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

18 a) $y = \text{tg } 4x$

$4x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{16}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\nexists$



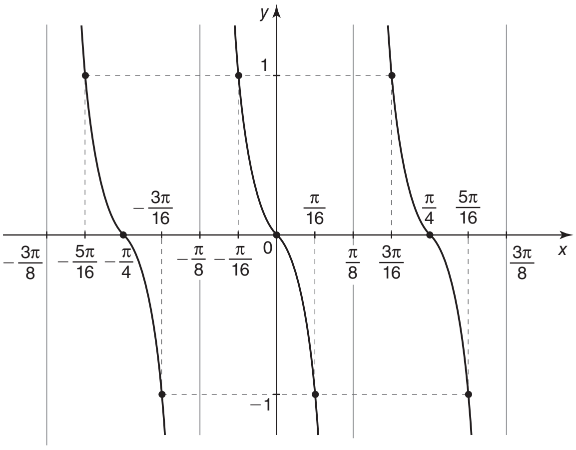
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \frac{\pi}{4}$

b) $y = -\text{tg } 4x$

$4x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{16}$	1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{16}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	$\nexists$



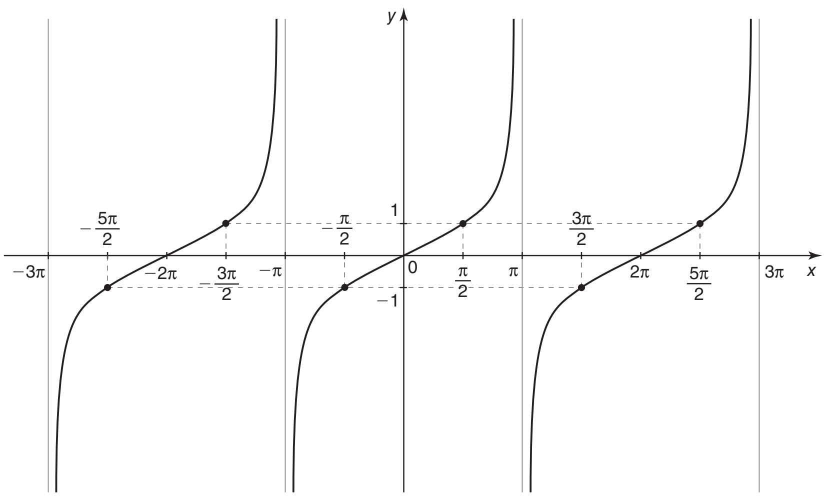
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \frac{\pi}{4}$

c) $y = \text{tg } \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = 2\pi$

19 a) $y = \text{tg } 6x$

$p = \dfrac{\pi}{|6|} = \dfrac{\pi}{6}$

b) $y = \text{tg } \dfrac{x}{6}$

$p = \dfrac{\pi}{\left|\dfrac{1}{6}\right|} = 6\pi$

c) $y = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$

$p = \dfrac{\pi}{|-2|} = \dfrac{\pi}{2}$

20 a) $y = \text{cotg } 2x$

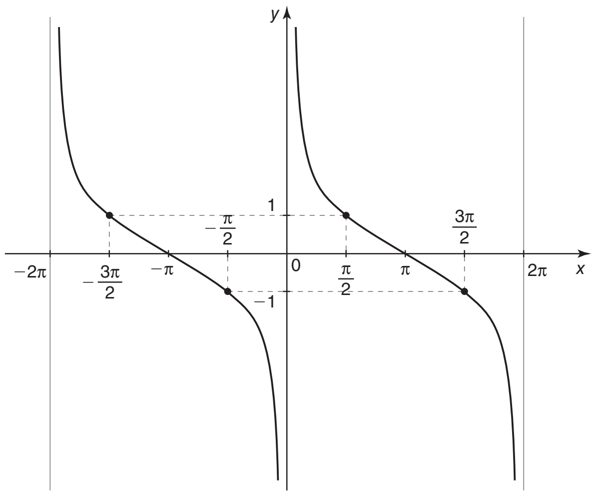
- A condição de existência é sen $2x \neq 0$, ou seja, $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como cotg $2x$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = \text{cotg } \dfrac{x}{3}$

- A condição de existência é sen $\dfrac{x}{3} \neq 0$, ou seja, $\dfrac{x}{3} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x \neq 3k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como cotg $\dfrac{x}{3}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

21 a) $y = \text{cotg } \dfrac{x}{2}$

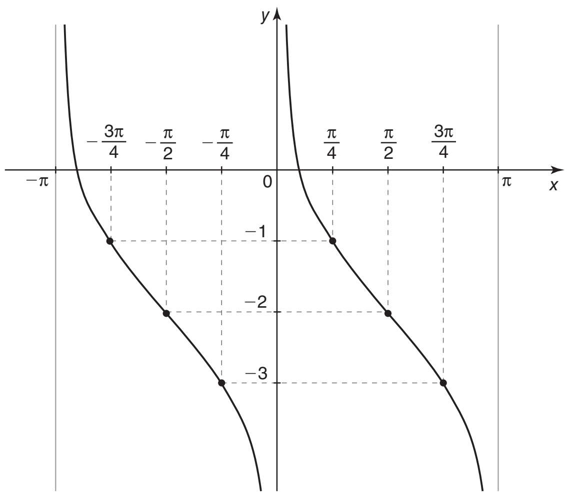
$\dfrac{x}{2}$	x	y
0	0	$\nexists$
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$	1
$\dfrac{\pi}{2}$	π	0
$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = 2\pi$

b) $y = -2 + \text{cotg } x$

x	y
0	$\nexists$
$\dfrac{\pi}{4}$	-1
$\dfrac{\pi}{2}$	-2
$\dfrac{3\pi}{4}$	-3
π	$\nexists$



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im = \mathbb{R}$
$p = \pi$

22 a) $y = \text{cossec } 2x$

- A condição de existência é sen $2x \neq 0$, ou seja, $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
  $\Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como cossec $2x$ assume qualquer valor real menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

b) $y = 2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2}$

- A condição de existência é $\text{sen}\,\frac{x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow x \neq 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $\text{cossec}\,\frac{x}{2} \leqslant -1$ ou $\text{cossec}\,\frac{x}{2} \geqslant 1 \Rightarrow 2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2} \leqslant 1$ ou $2 + \text{cossec}\,\frac{x}{2} \geqslant 3$, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$.

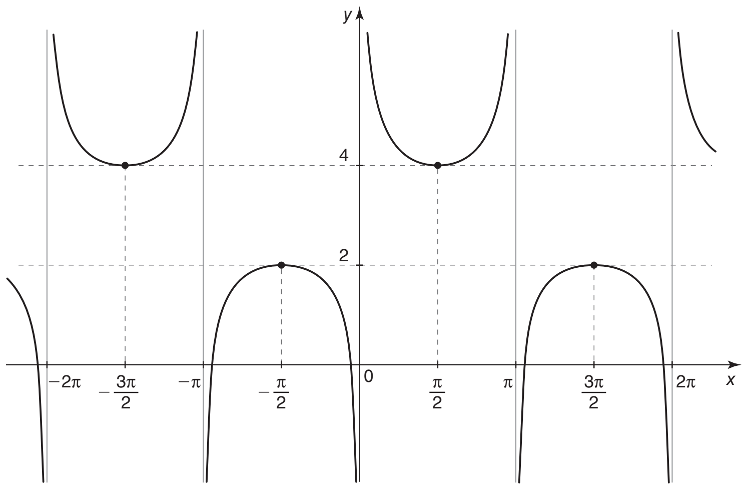
23 $k - 2\,\text{cossec}\,x = 5 \Rightarrow \text{cossec}\,x = \frac{k-5}{2}$

Como $\text{cossec}\,x \leqslant -1$ ou $\text{cossec}\,x \geqslant 1$, temos: $\frac{k-5}{2} \leqslant -1$ ou $\frac{k-5}{2} \geqslant 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow k \leqslant 3$ ou $k \geqslant 7$

Logo, para que seja possível a igualdade, devemos ter $k \leqslant 3$ ou $k \geqslant 7$.

24 a) $y = 3 + \text{cossec}\,x$

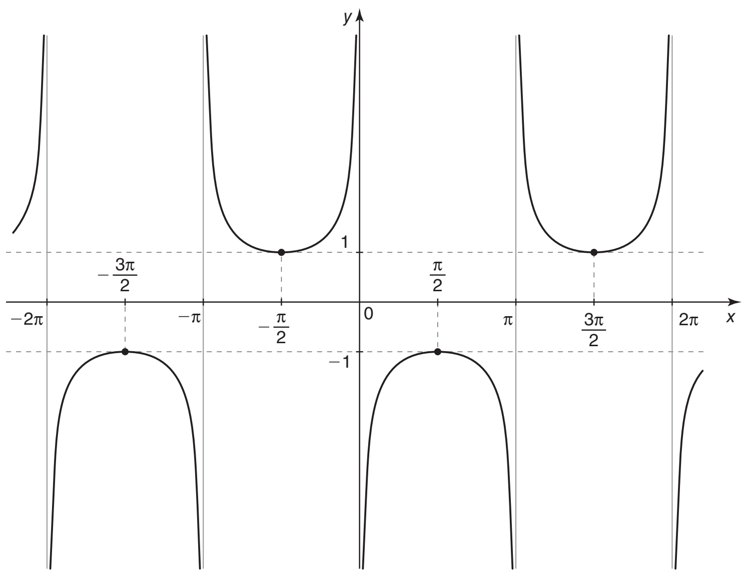
Esse gráfico é uma translação vertical do gráfico da função $y = \text{cossec}\,x$, de 3 unidades para cima, ou seja:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$
$p = 2\pi$

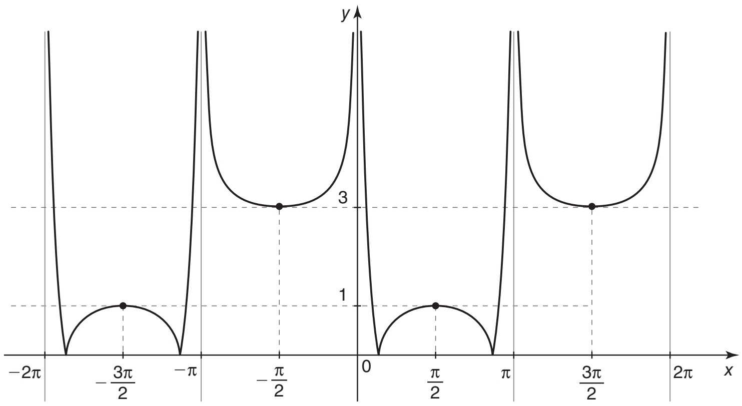
b) $y = -\text{cossec}\,x$

O gráfico dessa função é simétrico ao gráfico da função $y = \text{cossec}\,x$ em relação ao eixo das abscissas, ou seja:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
$p = 2\pi$

c) $y = |-2 + \text{cossec } x|$
Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{cossec } x$.
Fase 2: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_1 duas unidades para baixo, obtendo o gráfico de
$y_2 = -2 + \text{cossec } x$.
Fase 3: No gráfico da função y_2, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função
$y = |-2 + \text{cossec } x|$.



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$
$Im = [0, +\infty[$
$p = 2\pi$

25 a) $y = \sec 4x$
- A condição de existência é $\cos 4x \neq 0$, ou seja, $4x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, o domínio é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como sec 4x assume qualquer valor real menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é $Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

b) $y = 2\sec \frac{x}{2}$
- A condição de existência é $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, ou seja, $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Logo, o domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Como $\sec \frac{x}{2}$ assume qualquer valor real, menor ou igual a -1, ou maior ou igual a 1, o conjunto imagem da função é
$Im =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

26 $2k + \sec x = 5 \Rightarrow \sec x = 5 - 2k$
Como $\sec x \leqslant -1$ ou $\sec x \geqslant 1$, temos:
$5 - 2k \leqslant -1$ ou $5 - 2k \geqslant 1 \Rightarrow k \geqslant 3$ ou $k \leqslant 2$
Logo, para que exista a igualdade, devemos ter: $k \leqslant 2$ ou $k \geqslant 3$.

27 a) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
Logo, $\text{arcsen } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

b) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
Logo, $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

c) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$.
Logo, $\text{arcsen } 1 = \frac{\pi}{2}$.

d) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
Logo, $\text{arcsen } (-1) = -\frac{\pi}{2}$.

e) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Logo, $\text{arcsen } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

f) No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Logo, $\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

g) $\alpha = \text{arcsen } 2 \Rightarrow \text{sen } \alpha = 2$
Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe arcsen 2.

h) $\alpha = \text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right) \Rightarrow \text{sen } \alpha = -\sqrt[3]{5}$
Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe $\text{arcsen}\left(-\sqrt[3]{5}\right)$.

28 No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sen $\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, arcsen $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ e, portanto,

$\sec\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

29 No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sen $\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Logo, arcsen $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ e, portanto,

$\text{tg}\left(2\ \text{arcsen}\ \frac{1}{2}\right) = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$

30 Seja arcsen $\frac{12}{13} = \alpha$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Assim,

sen $\alpha = \frac{12}{13}$. Temos, então, pela relação fundamental:

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{169 - 144}{169}$

$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{5}{13}$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

Logo, $\cos\left(\text{arcsen}\ \frac{12}{13}\right) = \cos \alpha = \frac{5}{13}$.

31 Sendo arcsen $\frac{2}{3} = \alpha$, temos sen $\alpha = \frac{2}{3}$ e

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, $\cos\left(2\ \text{arcsen}\ \frac{2}{3}\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\ \text{sen}^2\ \alpha =$

$= 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$

32 Como $-1 \leqslant \text{sen}\ \alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arcsen}\ 2x$ é tal que $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$, ou seja, $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

33 No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sen $\frac{\pi}{2} = 1$. Além disso, sendo arcsen $\frac{3}{5} = \alpha$, temos sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e

$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Logo, $\cos\left(\text{arcsen}\ \frac{3}{5} + \text{arcsen}\ 1\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \text{sen}\ \alpha \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{2} =$

$= \cos \alpha \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 1 = -\frac{3}{5}.$

34 Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

$x = \text{arcsen}\ \frac{2}{7}$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\ \frac{2}{7}$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \text{arcsen}\ \frac{2}{7} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \text{arcsen}\ \frac{2}{7} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arcsen}\ \frac{2}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen}\ \frac{2}{7} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

35 $\frac{\pi}{3} = \text{arcsen}\ x \Rightarrow x = \text{sen}\ \frac{\pi}{3} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

36 **a)** No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, arccos $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

b) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, arccos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

c) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos 0 = 1$.
Logo, arccos $1 = 0$.

d) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \pi = -1$.
Logo, arccos $(-1) = \pi$.

e) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Logo, arccos $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

f) No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Logo, arccos $\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

g) $\alpha = \text{arccos}\ \frac{3}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{2}$

Como essa igualdade é impossível, concluímos que não existe arccos $\frac{3}{2}$.

37 No intervalo $[0, \pi]$, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Logo, arccos $\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ e, portanto,

$\text{cossec}\left[\text{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \text{cossec}\ \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{\text{sen}\ \frac{2\pi}{3}} =$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

38 Sendo arccos $\frac{15}{17} = \alpha$, temos $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2\ \alpha = 1 - \frac{225}{289} \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = \frac{64}{289}$

$\therefore \text{sen}\ \alpha = \frac{8}{17}$

Logo, $\text{sen}\left(\text{arccos}\ \frac{15}{17}\right) = \text{sen}\ \alpha = \frac{8}{17}$.

39 Sendo $\arccos \frac{1}{3} = \alpha$, temos $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9}$

$\therefore \text{sen}\, \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo, $\text{sen}\left(2\arccos \frac{1}{3}\right) = \text{sen}\, 2\alpha =$

$= 2 \cdot \text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

40 Como $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \arccos 4x$ é tal que:

$-1 \leqslant 4x \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$.

41 Sendo $\arccos \frac{4}{5} = \alpha$, temos $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{9}{25}$

$\therefore \text{sen}\, \alpha = \frac{3}{5}$

Além disso, no intervalo $[0, \pi]$, $\cos \pi = -1$. Dessa forma, $\arccos(-1) = \pi$.

Calculamos, então, o valor da expressão dada:

$\text{tg}\left(\arccos \frac{4}{5} + \arccos(-1)\right) = \text{tg}\,(\alpha + \pi) =$

$= \frac{\text{tg}\, \alpha + \text{tg}\, \pi}{1 - \text{tg}\, \alpha \cdot \text{tg}\, \pi} = \frac{\text{tg}\, \alpha + 0}{1 - \text{tg}\, \alpha \cdot 0} = \text{tg}\, \alpha =$

$= \frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg}\, \alpha = \frac{3}{4}$

42 Sendo $\arccos \frac{12}{13} = \alpha$ e $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \beta$, temos:

$\cos \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ e $\{\alpha, \beta\} \subset [0, \pi]$.

Pela relação fundamental:

(i) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{25}{169}$

$\therefore \text{sen}\, \alpha = \frac{5}{13}$

(ii) $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \beta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

$\therefore \text{sen}^2 \beta = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \text{sen}^2 \beta = \frac{16}{25}$

$\therefore \text{sen}\, \beta = \frac{4}{5}$

Logo, $\cos\left[\arccos \frac{12}{13} + \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right] =$

$= \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen}\, \alpha \cdot \text{sen}\, \beta =$

$= \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{56}{65}$.

43 Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

$x = \arccos \frac{2}{3}$ ou $x = -\arccos \frac{2}{3}$

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

$x = \arccos \frac{2}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\arccos \frac{2}{3} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \arccos \frac{2}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos \frac{2}{3} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

44 a) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\, \frac{\pi}{4} = 1$.

Logo, $\text{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$.

b) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

Logo, $\text{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

c) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\, \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\text{arctg}\, \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

d) No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

45 No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\, \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Logo, $\text{arctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ e, portanto,

$\cos\left(\text{arctg}\, \sqrt{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

46 No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Logo, $\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ e, portanto,

$\text{sen}\left[2\,\text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right] = \text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

47 Sendo $\text{arctg}\, \sqrt{5} = \alpha$, temos $\text{tg}\, \alpha = \sqrt{5}$ e

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Logo, $\sec\left(\text{arctg}\, \sqrt{5}\right) = \sec \alpha$.

Aplicando a identidade $\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$, para $\cos \alpha \neq 0$, obtemos:

$\sec^2 \alpha = 1 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 6 \Rightarrow \sec \alpha = \pm\sqrt{6}$

Como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, concluímos que $\sec \alpha = \sqrt{6}$.

48 Sendo $\text{arctg}\, 2 = \alpha$, temos $\text{tg}\, \alpha = 2$ e

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pela identidade $\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$, para $\cos \alpha \neq 0$,

obtemos: $\sec^2 \alpha = 1 + 2^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 5$

$\therefore \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

Assim, concluímos que:

$\cos(2\,\text{arctg}\, 2) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$

$= 2 \cdot \frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

49 Lembrando que a imagem de y = arctg x é

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$, temos:

$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}\, x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < 2\,\text{arctg}\, x < \pi$

Logo, a imagem de y = 2 arctg x é

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -\pi < y < \pi\}$.

50 Sendo arctg 5 = α e arctg 2 = β, temos:

$\text{tg}\,\alpha = 5$, $\text{tg}\,\beta = 2$ e $\{\alpha, \beta\} \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Logo, tg [arctg 5 + arctg 2] = tg $(\alpha + \beta)$ =

$= \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{5 + 2}{1 - 5 \cdot 2} = -\frac{7}{9}$.

51 Na primeira volta do sentido positivo da circunferência trigonométrica, temos:

tg x = 10 $\Rightarrow$ x = arctg 10 ou $x = \pi$ + arctg 10

Assim, nas infinitas voltas da circunferência, temos:

x = arctg 10 + $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

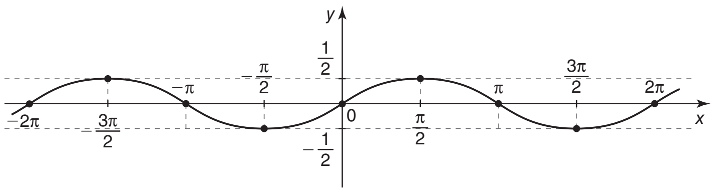
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arctg}\, 10 + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1 a) $y = \frac{\text{sen}\, x}{2}$

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0



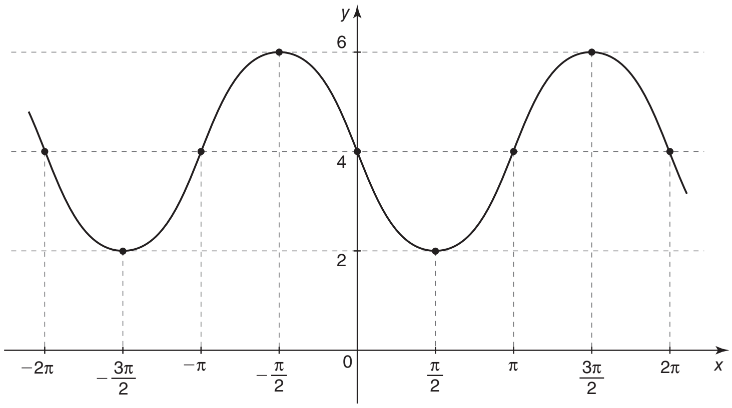
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$p = 2\pi$

b) $y = 4 - 2\,\text{sen}\, x$

x	y
0	4
$\frac{\pi}{2}$	2
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	6
2π	4



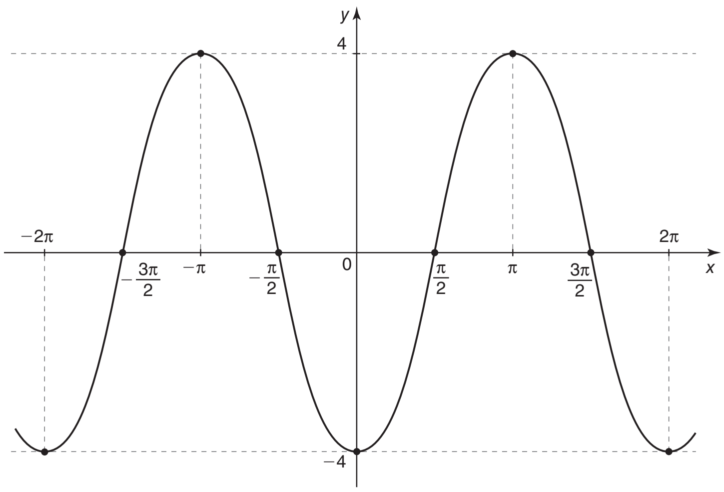
$D = \mathbb{R}$

$Im = [2, 6]$

$p = 2\pi$

c) $y = -4\cos x$

x	y
0	-4
$\frac{\pi}{2}$	0
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	-4



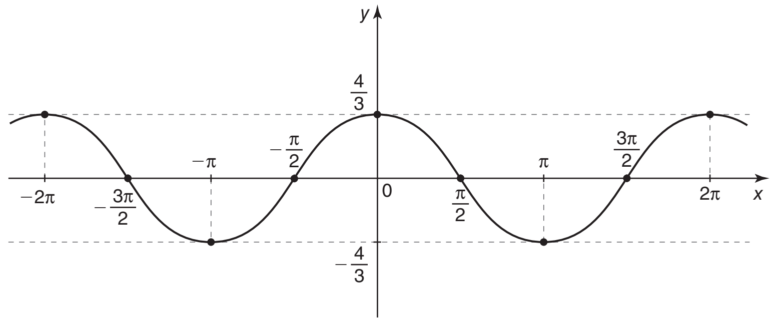
$D = \mathbb{R}$

$Im = [-4, 4]$

$p = 2\pi$

d) $y = \dfrac{4\cos x}{3}$

x	y
0	$\frac{4}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	$-\frac{4}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$\frac{4}{3}$



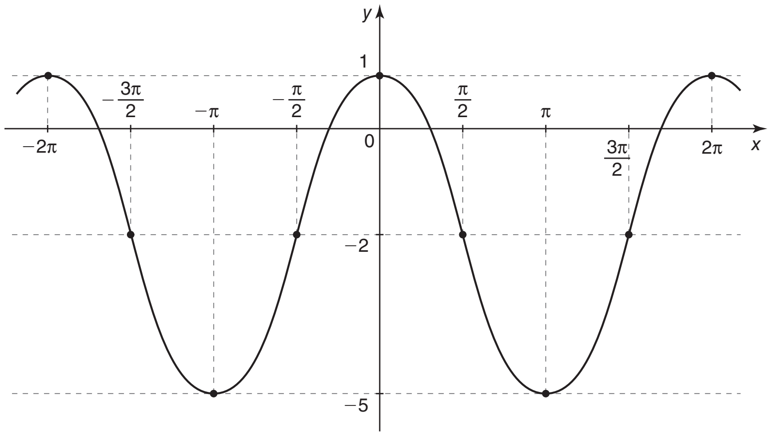
$D = \mathbb{R}$

$Im = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

$p = 2\pi$

e) $y = -2 + 3\cos x$

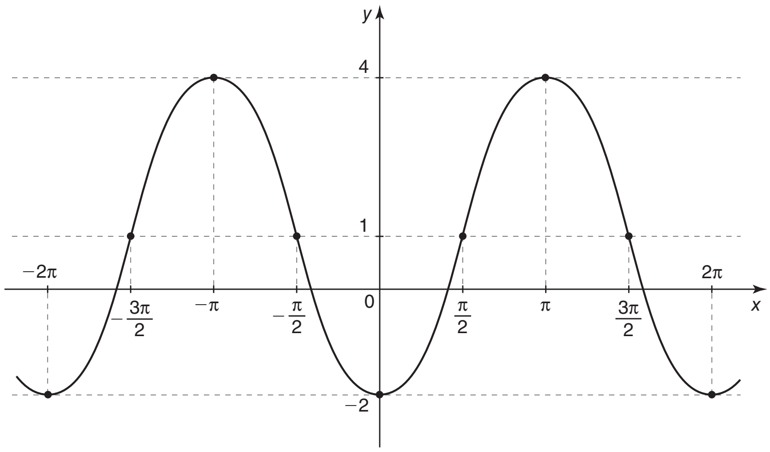
x	y
0	1
$\frac{\pi}{2}$	-2
π	-5
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-5, 1]$
$p = 2\pi$

f) $y = 1 - 3\cos x$

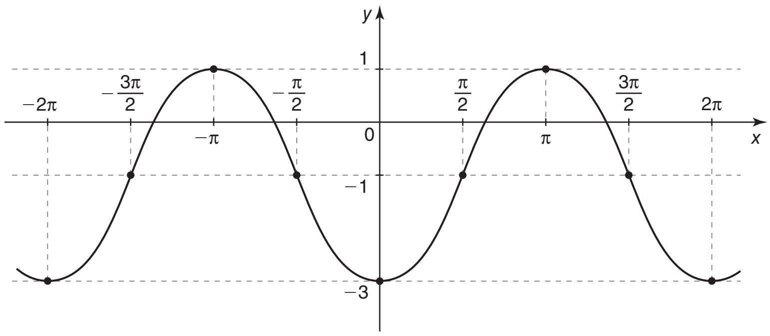
x	y
0	-2
$\frac{\pi}{2}$	1
π	4
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	-2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 4]$
$p = 2\pi$

g) $y = -1 - 2\cos x$

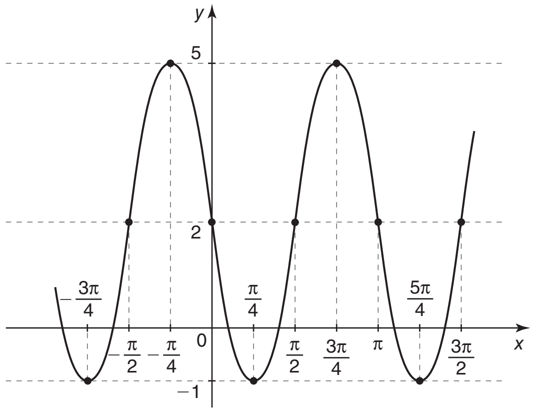
x	y
0	-3
$\frac{\pi}{2}$	-1
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	-3



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, 1]$
$p = 2\pi$

2 a) $y = 2 - 3\operatorname{sen} 2x$

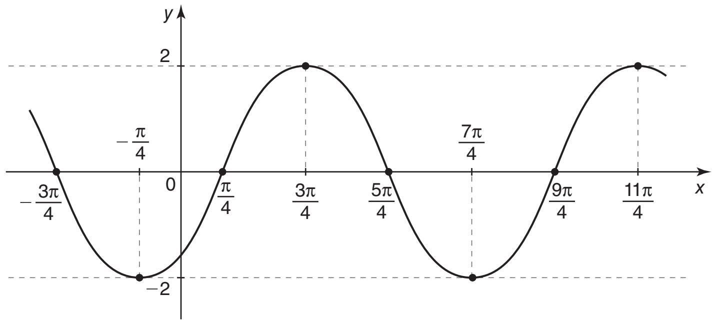
$2x$	x	y
0	0	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	-1
π	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	5
2π	π	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 5]$
$p = \pi$

b) $y = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

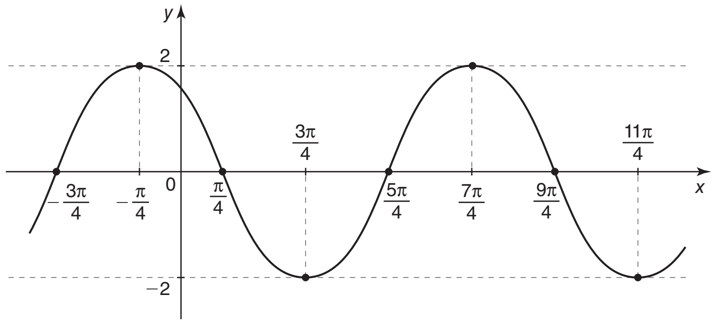
$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	-2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

c) $y = -2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

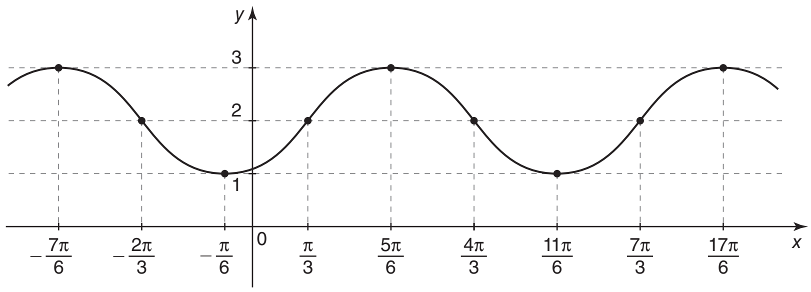
$x - \frac{\pi}{4}$	x	y
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-2
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

d) $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

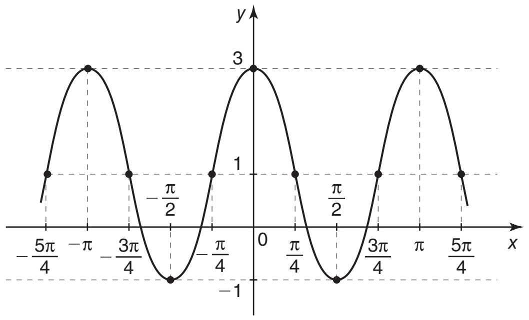
$x - \frac{\pi}{3}$	x	y
0	$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	3
π	$\frac{4\pi}{3}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	1
2π	$\frac{7\pi}{3}$	2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 3]$
$p = 2\pi$

e) $y = 1 + 2\cos 2x$

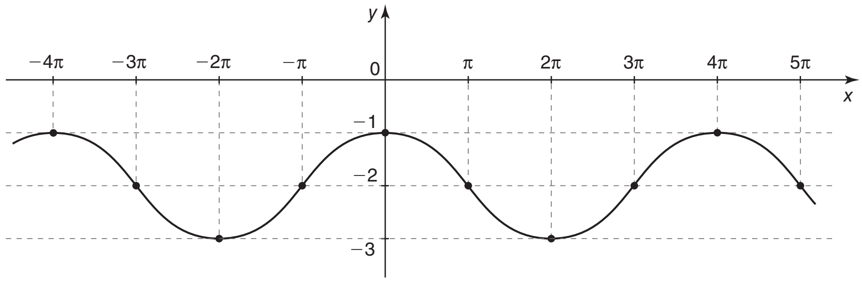
$2x$	x	y
0	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
2π	π	3



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 3]$
$p = \pi$

f) $y = -2 + \cos \frac{x}{2}$

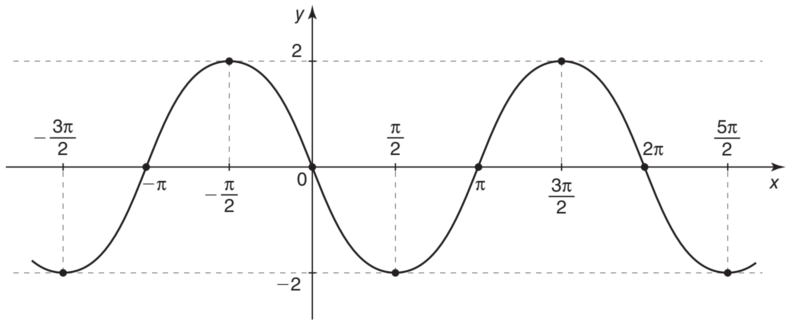
$\frac{x}{2}$	x	y
0	0	-1
$\frac{\pi}{2}$	π	-2
π	2π	-3
$\frac{3\pi}{2}$	3π	-2
2π	4π	-1



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-3, -1]$
$p = 4\pi$

g) $y = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{\pi}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	$\frac{3\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0
2π	$\frac{5\pi}{2}$	-2



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-2, 2]$
$p = 2\pi$

3 a) $y = \frac{\text{sen } x}{8}$

$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

b) $y = -3\cos x$

$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

c) $y = \frac{\cos x}{3}$

$p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

d) $y = \cos \frac{x}{3}$

$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

e) $y = -3 + 5\cos 6x$

$p = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$

f) $y = -1 - 5\,\text{sen}\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

$p = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$

4 a) $y = -2 + 3\,\text{sen } x$

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3\,\text{sen } x \leqslant 3$

$\therefore -5 \leqslant -2 + 3\,\text{sen } x \leqslant 1$

Logo, $Im = [-5, 1]$.

b) $y = -1 + 3\,\text{sen } 2x$

$-1 \leqslant \text{sen } 2x \leqslant 1 \Rightarrow -3 \leqslant 3\,\text{sen } 2x \leqslant 3$

$\therefore -4 \leqslant -1 + 3\,\text{sen } 2x \leqslant 2$

Logo, $Im = [-4, 2]$.

c) $y = 6 - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$

$-1 \leqslant \cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 \leqslant 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \leqslant 4$

$\therefore 2 \leqslant 6 - 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) \leqslant 10$

Logo, $Im = [2, 10]$.

d) $y = \pi + 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$-1 \leqslant \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\pi \leqslant 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 2\pi$

$\therefore -\pi \leqslant \pi + 2\pi\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant 3\pi$

Logo, $Im = [-\pi, 3\pi]$.

5 O valor da expressão $\frac{1}{3 - \cos x}$ é mínimo quando o denominador $3 - \cos x$ atinge seu valor máximo.
Isso ocorre para $\cos x = -1$. Assim, o menor valor da expressão $\frac{1}{3 - \cos x}$ é $\frac{1}{3 - (-1)}$, ou seja, $\frac{1}{4}$.
Alternativa **b**.

6 Como o período da função é 4π, a imagem é o intervalo $[-3, 3]$ e o ponto $(2\pi, -3)$ pertence ao gráfico, temos:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|m|} = 4\pi \\ b = \pm 3 \\ -3 = b\cos(2\pi m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm\frac{1}{2} \\ b = \pm 3 \\ -3 = b\cos(2\pi m) \end{cases}$$

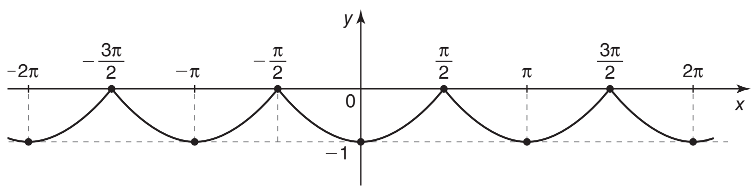
Há dois pares de valores de m e b que satisfazem todas as equações desse sistema:
$m = \frac{1}{2}$ e $b = 3$ ou $m = -\frac{1}{2}$ e $b = 3$

7 Temos:
(I) O período da função é π; logo: $\frac{2\pi}{|m|} = \pi$
O conjunto imagem da função é $[1, 5]$; logo:
(II) $1 \leqslant a + b\cos mx \leqslant 5 \Rightarrow 1 - a \leqslant b\cos mx \leqslant 5 - a$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1-a}{b} \leqslant \cos mx \leqslant \frac{5-a}{b}, \text{ se } b > 0 \\ \frac{1-a}{b} \geqslant \cos mx \geqslant \frac{5-a}{b}, \text{ se } b < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{b} = -1 \\ \frac{5-a}{b} = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1-a}{b} = 1 \\ \frac{5-a}{b} = -1 \end{cases}$$

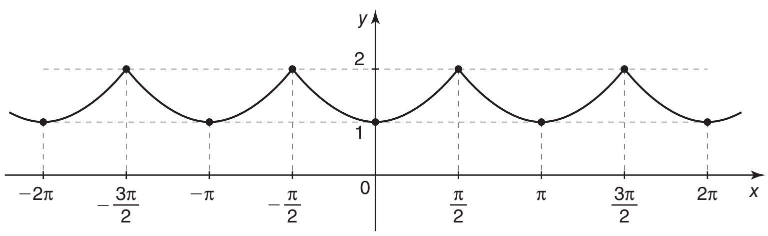
(III) O ponto $(\pi, 1)$ pertence ao gráfico da função; logo: $1 = a + b\cos(m\pi)$
De (I), obtemos: $m = \pm 2$
De (II), obtemos: $a = 3$ e $b = 2$ ou $a = 3$ e $b = -2$
Desses valores de m, a e b, os que satisfazem a equação obtida em (III) são:
$m = 2$, $a = 3$ e $b = -2$ ou $m = -2$, $a = 3$ e $b = -2$

8 a) $y = -|\cos x|$
Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos x$.
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = |\cos x|$.
Fase 3: No gráfico da função y_2, transformamos cada ponto em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = -|\cos x|$.



$D = \mathbb{R}$
$Im = [-1, 0]$
$p = \pi$

b) $y = 2 - |\cos x|$
Transladando, verticalmente, o gráfico do item **a** duas unidades para cima, obtemos o gráfico de $y = 2 - |\cos x|$.

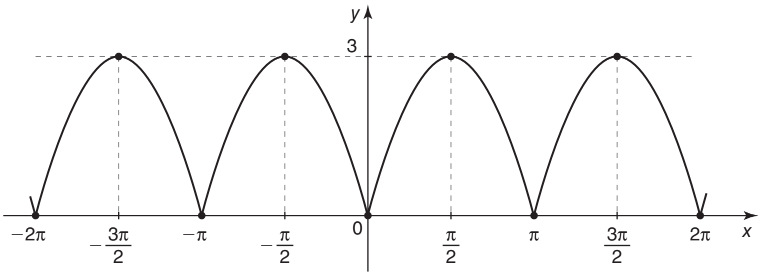


$D = \mathbb{R}$
$Im = [1, 2]$
$p = \pi$

c) Como $3|\text{sen } x| = |3| \cdot |\text{sen } x| = |3 \cdot \text{sen } x|$, a função $y = 3|\text{sen } x|$ pode ser representada por $y = |3\,\text{sen } x|$.

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 3 \text{ sen } x$.

Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y = |3 \text{ sen } x|$.



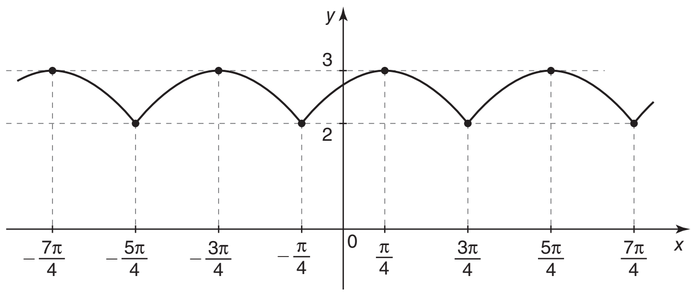
$D = \mathbb{R}$
$Im = [0, 3]$
$p = \pi$

d) $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

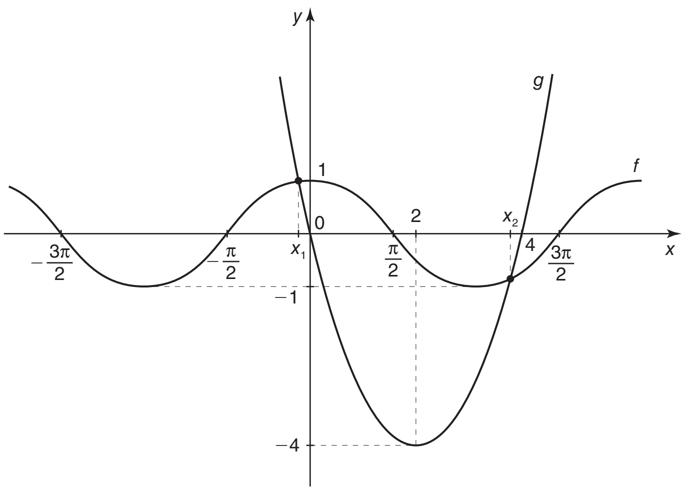
Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo o gráfico da função $y_2 = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Fase 3: Transladamos, verticalmente, o gráfico da função y_2 duas unidades para cima, obtendo então o gráfico da função $y = 2 + \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.



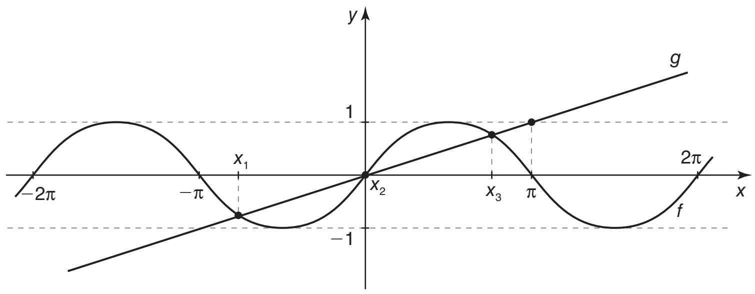
$D = \mathbb{R}$
$Im = [2, 3]$
$p = \pi$

9 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2 - 4x$, temos:



Observamos que $f(x) = g(x)$ para apenas dois valores de x, representados na figura por x_1 e x_2; portanto, a equação $\cos x = x^2 - 4x$ possui exatamente duas raízes.

10 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \frac{x}{\pi}$, temos:



Observamos que $f(x) = g(x)$ para apenas três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\text{sen } x = \frac{x}{\pi}$ possui exatamente três raízes.

11 $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2k - 1}{3} \leqslant 1 \quad \therefore -3 \leqslant 2k - 1 \leqslant 3 \Rightarrow -2 \leqslant 2k \leqslant 4$
$\therefore -1 \leqslant k \leqslant 2$

Logo, a igualdade $\cos x = \frac{2k - 1}{3}$ só é possível para valores reais de k tais que $-1 \leqslant k \leqslant 2$.

12 Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, a equação $\cos x = 2p - 1$ tem solução se, e somente se, $-1 \leqslant 2p - 1 \leqslant 1$.
Assim, obtemos:
$-1 \leqslant 2p - 1 \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 2p \leqslant 2 \quad \therefore 0 \leqslant p \leqslant 1$
Logo, a equação $\cos x = 2p - 1$ tem solução apenas para os valores reais de p tais que $0 \leqslant p \leqslant 1$.

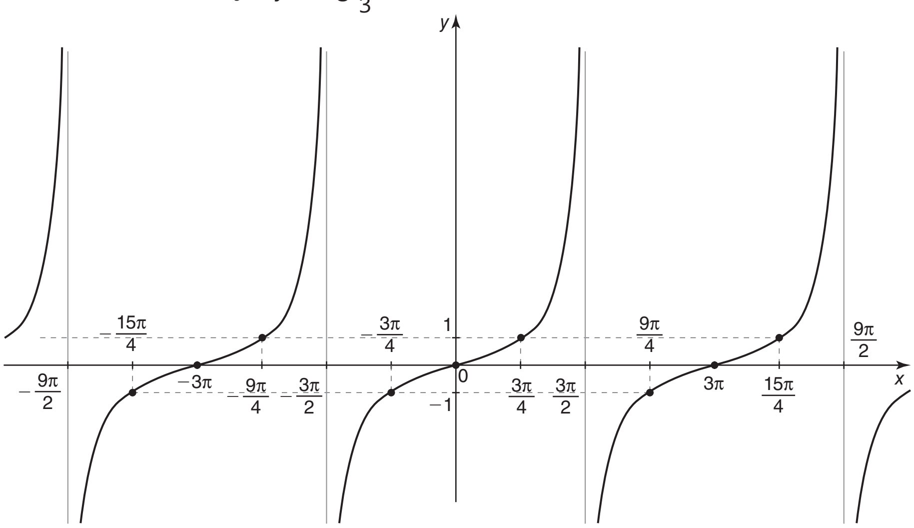
13 Para qualquer valor de x pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que $0 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$.
Logo, a equação $\text{sen } x = 2m + 5$ tem solução nesse intervalo se, e somente se, $0 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1$.
Assim, obtemos:
$0 \leqslant 2m + 5 \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant 2m \leqslant -4 \quad \therefore -\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$

Logo, a equação $\text{sen } x = 2m + 5$ tem solução no intervalo considerado apenas para os valores reais de m tais que $-\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant -2$.

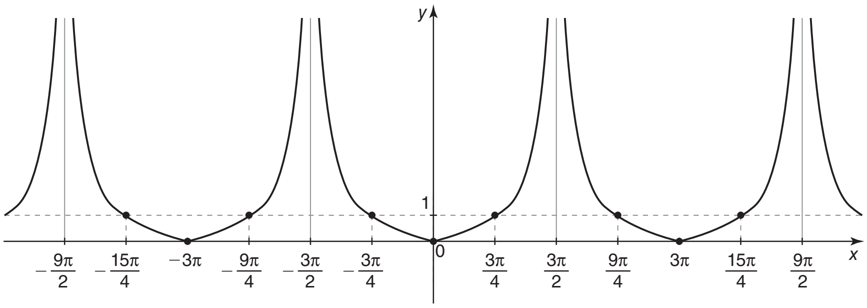
14 a) $y = \left|\text{tg } \frac{x}{3}\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{tg } \frac{x}{3}$.

$\frac{x}{3}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$



Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo, então, o gráfico da função $y = \left|\text{tg}\,\frac{x}{3}\right|$



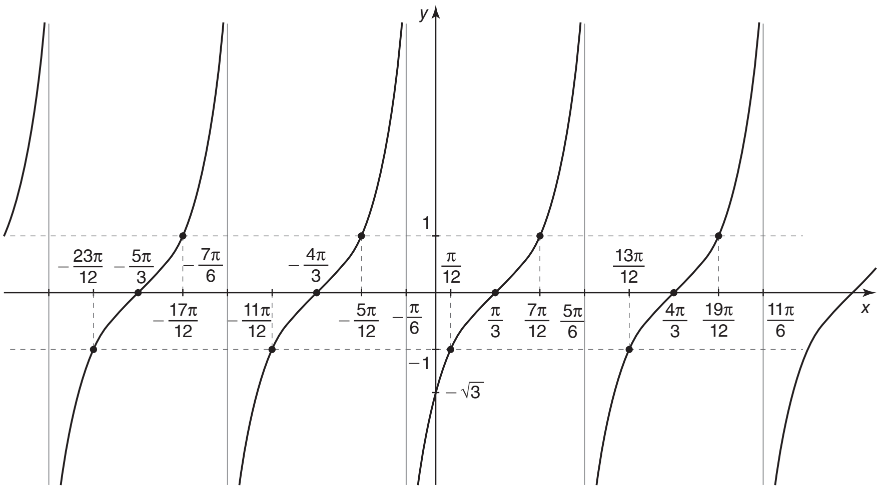
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + 3k\pi\text{, com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = 3\pi$

b) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$x - \frac{\pi}{3}$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	-1
0	$\frac{\pi}{3}$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\nexists$



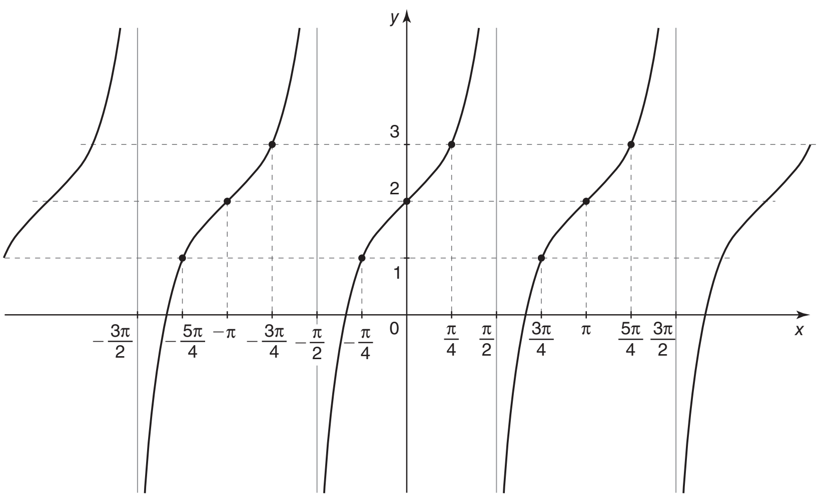
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi\text{, com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

c) $y = 2 + \text{tg}\,x$

x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	1
0	2
$\frac{\pi}{4}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\text{, com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

15 a) $y = 5 + 3\,\text{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$p = \dfrac{\pi}{|1|} = \dfrac{\pi}{1} = \pi$

b) $y = 4\,\text{tg}\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

$p = \dfrac{\pi}{\left|-\dfrac{1}{2}\right|} = \dfrac{\pi}{\dfrac{1}{2}} = 2\pi$

c) $y = \dfrac{\text{sen}^3 6x}{\cos 6x} - \text{sen } 6x \cdot \cos 6x$

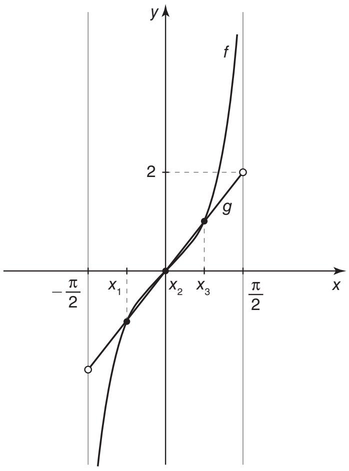
Temos:

$\dfrac{\text{sen}^3 6x}{\cos 6x} + \text{sen } 6x \cdot \cos 6x = \dfrac{\text{sen}^3 6x + \text{sen } 6x \cdot \cos^2 6x}{\cos 6x} =$

$= \dfrac{\text{sen } 6x(\text{sen}^2 6x + \cos^2 6x)}{\cos 6x} = \dfrac{\text{sen } 6x}{\cos 6x} = \text{tg } 6x$

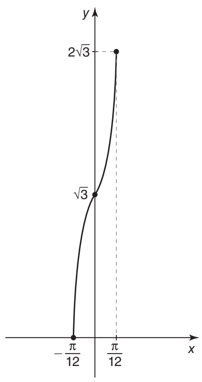
Logo, $y = \text{tg } 6x$ e, portanto: $p = \dfrac{\pi}{|6|} = \dfrac{\pi}{6}$

16 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{tg } x$ e $g(x) = \dfrac{4x}{\pi}$, para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos:



Observamos que, no intervalo $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, a igualdade de $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\text{tg } x = \dfrac{4x}{\pi}$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

17 Construindo o gráfico de f, temos:



Logo, o conjunto imagem dessa função é $Im = [0, 2\sqrt{3}]$.

18 a) $y = 5\,\text{cotg}\,\dfrac{3x}{2}$

A condição de existência é $\text{sen}\,\dfrac{3x}{2} \neq 0$, ou seja, $\dfrac{3x}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \dfrac{2k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{2k\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $\text{cotg}\,\dfrac{3x}{2}$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

b) $y = \text{cotg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

A condição de existência é $\text{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$, ou seja, $2x - \dfrac{\pi}{4} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

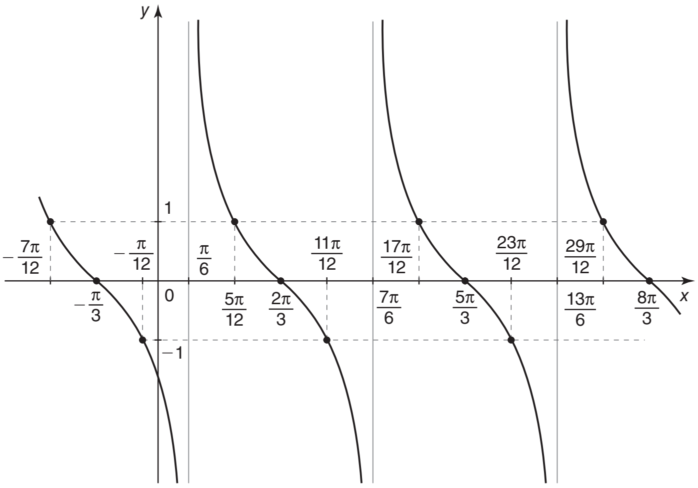
Logo, o domínio da função é $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Como $\text{cotg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ assume qualquer valor real, o conjunto imagem da função é $Im = \mathbb{R}$.

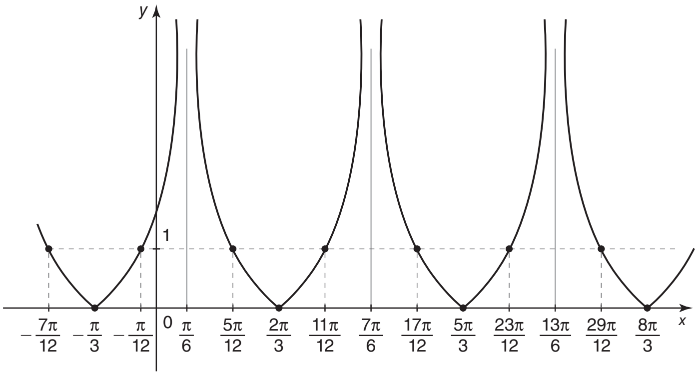
19 a) $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

$x - \frac{\pi}{6}$	x	y
0	$\frac{\pi}{6}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$	-1
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\nexists$



Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = \left|\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$.



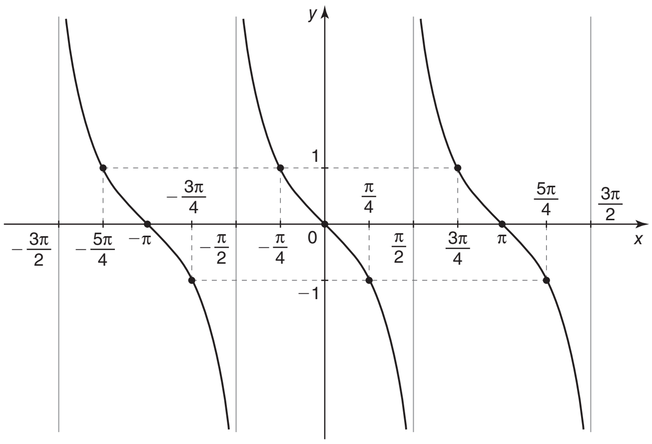
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = \pi$

b) $y = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$x - \frac{x}{2}$	x	y
0	$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	-1
π	$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$



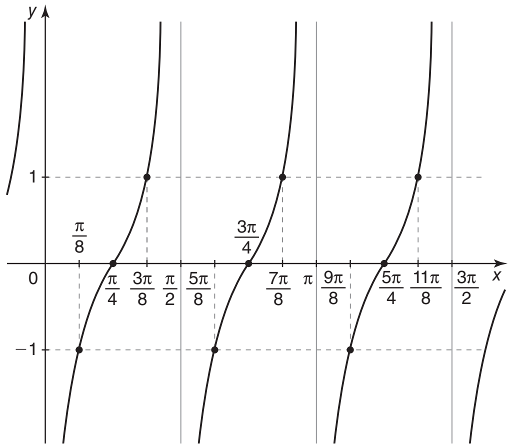
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

$p = \pi$

c) $y = -\text{cotg}\ 2x$

$2x$	x	y
0	0	∄
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	∄



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

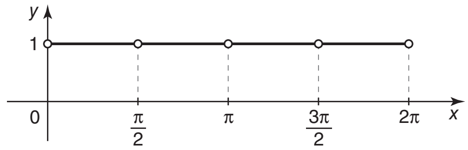
$Im = \mathbb{R}$

$p = \frac{\pi}{2}$

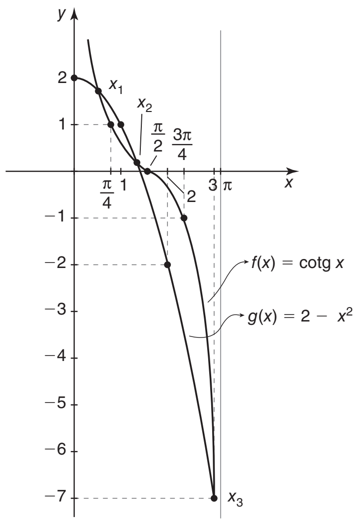
20 Para sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$, temos:

$\text{tg}\ x \cdot \text{cotg}\ x = \frac{\text{sen}\ x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}\ x} = 1$

Logo, o gráfico da função $y = \text{tg}\ x \cdot \text{cotg}\ x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, é:



21 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{cotg}\ x$ e $g(x) = 2 - x^2$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, \pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação cotg $x = 2 - x^2$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

22 a) $y = 5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

- A condição de existência é $\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, ou seja, $3x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é

  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como $\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -1$ ou $\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 1$, temos:

  $5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -5$ ou

  $5\,\text{cossec}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \geqslant 5$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -5 \text{ ou } y \geqslant 5\}$.

b) $y = -2 + \text{cossec}\ 2x$

- A condição de existência é: sen $2x \neq 0$, ou seja, $2x \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

  Logo, o domínio da função é

  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Como cossec $2x \leqslant -1$ ou cossec $2x \geqslant 1$, temos:

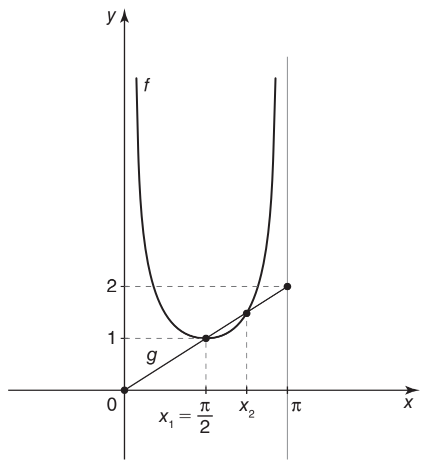
  $-2 + \text{cossec}\ 2x \leqslant -3$ ou $-2 + \text{cossec}\ 2x \geqslant -1$

  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -3 \text{ ou } y \geqslant -1\}$.

23 cossec $x \leqslant -1$ ou cossec $x \geqslant 1 \Rightarrow m^2 - 1 \leqslant -1$ ou $m^2 - 1 \geqslant 1$

Assim, obtemos: $m = 0$ ou $m \leqslant -\sqrt{2}$ ou $m \geqslant \sqrt{2}$

24 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \text{cossec}\ x$ e $g(x) = \frac{2x}{\pi}$, para $0 \leq x \leq \pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, \pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para dois valores de x, representados na figura por x_1 e x_2; portanto, a equação $\text{cossec}\ x = \frac{2x}{\pi}$ possui exatamente duas raízes nesse intervalo.

25 a) $y = 1 + \sec x$

- A condição de existência é $\cos x \neq 0$, ou seja, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é
  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$, temos: $1 + \sec x \leq 0$ ou $1 + \sec x \geq 2$.
  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0 \text{ ou } y \geq 2\}$.

b) $y = 4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

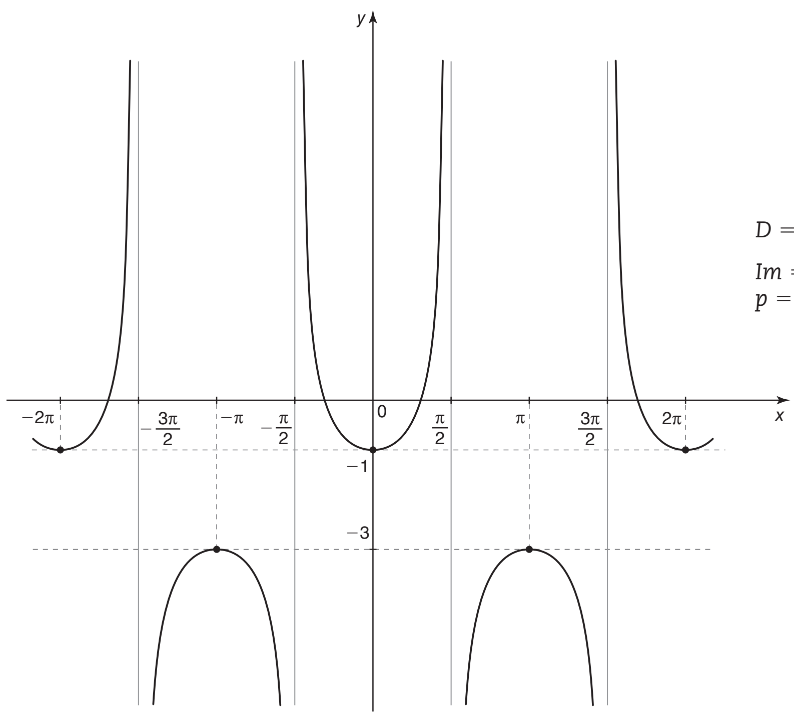
- A condição de existência é $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0$, ou seja, $\frac{\pi}{4} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Observando que essa última desigualdade também pode ser representada por $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos como domínio da função
  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq -1$ ou $\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 1$, temos: $4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq -4$ ou $4\sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 4$.
  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -4 \text{ ou } y \geq 4\}$.

c) $y = 3 + 2\sec 3x$

- A condição de existência é $\cos 3x \neq 0$, ou seja, $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$.
  Logo, o domínio da função é
  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Como $\sec 3x \leq -1$ ou $\sec 3x \geq 1$, temos: $2\sec 3x \leq -2$ ou $2\sec 3x \geq 2$ e, portanto, $3 + 2\sec 3x \leq 1$ ou $3 + 2\sec 3x \geq 5$.
  Assim, o conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1 \text{ ou } y \geq 5\}$.

26 a) $y = -2 + \sec x$

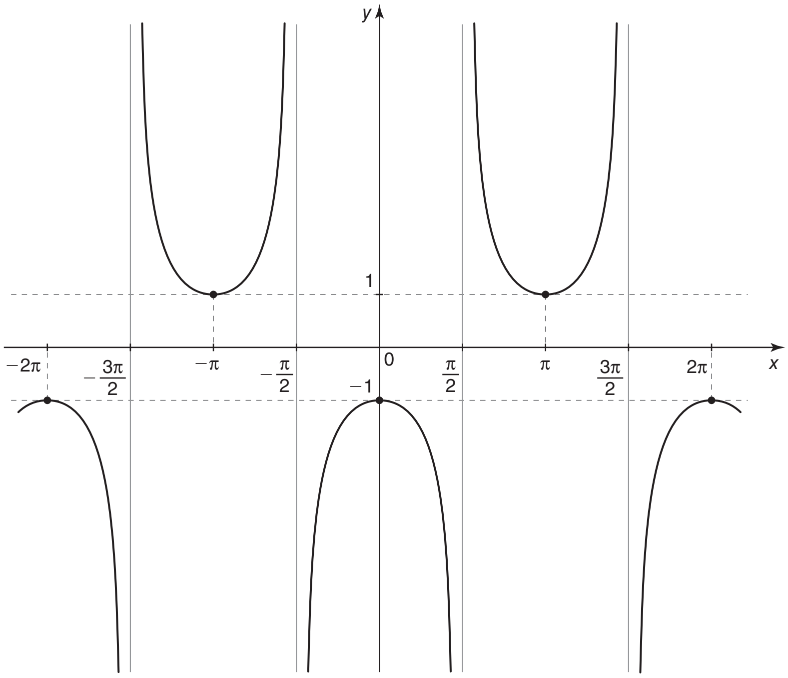
Esse gráfico é uma translação vertical do gráfico da função $y = \sec x$, de duas unidades para baixo, ou seja:



$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$
$Im =]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$
$p = 2\pi$

b) $y = -\sec x$

Esse gráfico é simétrico ao gráfico da função $y = \sec x$ em relação ao eixo das abscissas, ou seja:



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

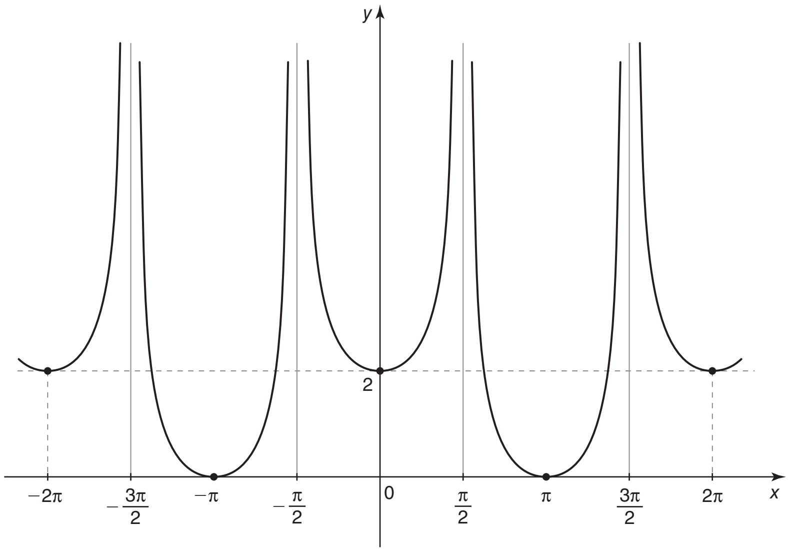
$Im =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$p = 2\pi$

c) $y = |1 + \sec x|$

Fase 1: Construímos o gráfico auxiliar da função $y_1 = 1 + \sec x$.

Fase 2: No gráfico da função y_1, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas, obtendo então o gráfico da função $y = |1 + \sec x|$.

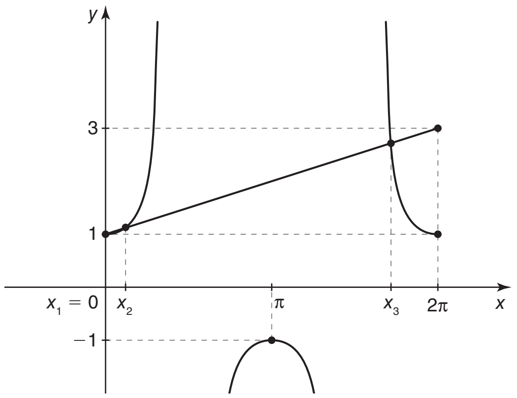


$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}_+$

$p = 2\pi$

27 Construindo no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções $f(x) = \sec x$ e $g(x) = \frac{2x}{\pi} + 1$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:



Observamos que, no intervalo $[0, 2\pi]$, a igualdade $f(x) = g(x)$ ocorre apenas para três valores de x, representados na figura por x_1, x_2 e x_3; portanto, a equação $\sec x = \frac{2x}{\pi} + 1$ possui exatamente três raízes nesse intervalo.

28 Sendo $\text{arcsen}\, \frac{3}{4} = \alpha$, temos $\text{sen}\, \alpha = \frac{3}{4}$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pela relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deduzimos que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Logo, $\text{sen}\left(2\, \text{arcsen}\, \frac{3}{4}\right) = \text{sen}\, 2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\, \alpha \cdot \cos \alpha =$

$= 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

29 Sendo $\text{arcsen}\, \frac{2}{7} = \alpha$, temos $\text{sen}\, \alpha = \frac{2}{7}$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Além disso, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos:

- $\text{sen}\, 0 = 0$
- $\text{sen}\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Logo, $\cos(\text{arcsen}\, 0) +$

$+ \text{tg}\left(\text{arcsen}\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{sen}\left(\text{arcsen}\, \frac{2}{7}\right) =$

$= \cos 0 + \text{tg}\, \frac{\pi}{4} + \text{sen}\, \alpha = 1 + 1 + \frac{2}{7} = \frac{16}{7}$.

30 Como $-1 \leqslant \text{sen}\, \alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arcsen}\left(\frac{3x}{2} + 5\right)$ é tal que:

$-1 \leqslant \frac{3x}{2} + 5 \leqslant 1$, ou seja, $-1 - 5 \leqslant \frac{3x}{2} \leqslant 1 - 5$

e, portanto, $-4 \leqslant x \leqslant -\frac{8}{3}$

Logo, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant -\frac{8}{3}\right\}$.

31 Sendo $\text{arcsen}\, \frac{1}{3} = \alpha$ e $\text{arcsen}\left(-\frac{2}{3}\right) = \beta$, temos:

$\text{sen}\, \alpha = \frac{1}{3}$, $\text{sen}\, \beta = -\frac{2}{3}$ e $\{\alpha, \beta\} \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pela relação fundamental, temos:

(i) $\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$

$\therefore \cos \alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deduzimos que

$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(ii) $\text{sen}^2\, \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1$

$\therefore \cos^2 \beta = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{5}{9}$

$\therefore \cos \beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Como $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, deduzimos que

$\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Logo, concluímos:

$\text{sen}\left[\text{arcsen}\, \frac{1}{3} + \text{arcsen}\left(-\frac{2}{3}\right)\right] =$

$= \text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\, \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen}\, \beta \cdot \cos \alpha =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9} =$

$= \frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$

32 Fazendo a substituição $\text{sen}\, x = t$, temos a equação:

$6t^2 - 7t + 1 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 49 - 24 = 25$

$\therefore t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6} \Rightarrow t = \frac{7 \pm 5}{12} \Rightarrow t = \frac{7 + 5}{12} =$

$= 1$ ou $t = \frac{7 - 5}{12} = \frac{1}{6}$

Voltando à variável original, temos:

(i) $\text{sen}\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\text{sen}\, x = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \text{arcsen}\, \frac{1}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi - \text{arcsen}\, \frac{1}{6} + 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \text{arcsen}\, \frac{1}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arcsen}\, \frac{1}{6} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

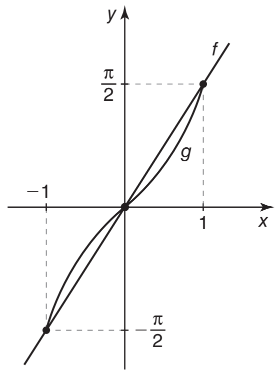
33 $\frac{\pi}{2} = \text{arcsen}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x + \frac{1}{2} = \text{sen}\, \frac{\pi}{2}$

$\therefore x - \frac{1}{2} = \mathbf{1} \Rightarrow x = \mathbf{1} - \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

34 O número de raízes da equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = \frac{\pi x}{2}$ e $g(x)$ = arcsen x. Construindo esses gráficos, temos:



Como os gráficos têm 3 pontos comuns, concluímos que a equação $\frac{\pi x}{2}$ = arcsen x possui 3 raízes.

35 No intervalo $[0, \pi]$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo,

$\text{arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ e, portanto,

$\text{cotg}\left(2\,\text{arccos}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{cotg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \text{cotg}\,\frac{\pi}{3} =$

$= \frac{1}{\text{tg}\,\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

36 Sendo $\text{arccos}\,\frac{5}{6} = \alpha$, temos $\cos\alpha = \frac{5}{6}$ e $\alpha \in [0, \pi]$.

Logo, $\cos\left(2\,\text{arccos}\,\frac{5}{6}\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$

$= 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{25}{36} - 1 = \frac{7}{18}$.

37 No intervalo $[0, \pi]$, temos:

- $\cos\frac{\pi}{2} = 0$
- $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{arccos}\,\frac{5}{9} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{9}$

Logo, sen (arccos 0) + $\text{cotg}\left(\text{arccos}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$

$+ \cos\left(\text{arccos}\,\frac{5}{9}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \text{cotg}\,\frac{\pi}{4} + \cos\alpha =$

$= 1 + 1 + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}$

38 Como $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de $y = \text{arccos}\left(\frac{x}{4} + 2\right)$ é tal que:

$-1 \leqslant \frac{x}{4} + 2 \leqslant 1$, ou seja, $-3 \leqslant \frac{x}{4} \leqslant -1$ e, portanto,
$-12 \leqslant x \leqslant -4$
Logo, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -12 \leqslant x \leqslant -4\}$.

39 Pela relação fundamental, temos:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.
Assim, $5\,\text{sen}^2 x - 3\cos x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 3 = 0$
$\therefore 5\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

Fazendo a substituição $\cos x = t$, temos a equação:
$5t^2 + 3t - 2 = 0$
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49$
$\therefore t = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 5} \Rightarrow t = -1$ ou $t = \frac{2}{5}$

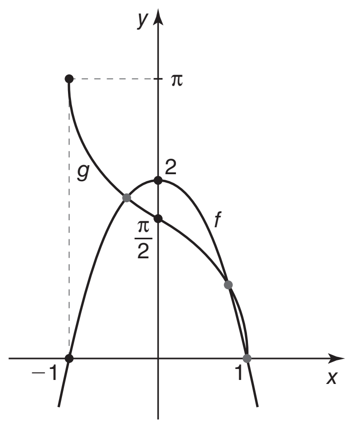
Voltando à variável original, temos:
(i) $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
(ii) $\cos x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \text{arccos}\,\frac{2}{5} + 2k\pi$
ou $x = -\text{arccos}\,\frac{2}{5} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \text{ ou } x = \text{arccos}\,\frac{2}{5} + \right.$
$\left. + 2k\pi \text{ ou } x = -\text{arccos}\,\frac{2}{5} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

40 a) $\frac{\pi}{4} = \text{arccos}\,x \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = x$
$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Logo, $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

b) $\frac{\pi}{3} = \text{arccos}\,(2x - 1) \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = 2x - 1$
$\therefore \frac{1}{2} = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$
Logo, $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

41 O número de raízes dessa equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = -2x^2 + 2$ e $g(x)$ = arccos x.
Construindo esses gráficos no mesmo plano cartesiano, temos:



Como os gráficos têm exatamente três pontos comuns, concluímos que a equação $f(x) = g(x)$ possui três raízes.

42 Sendo arctg 6 = α, temos: tg α = 6 e
$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Logo, $\text{tg}\,(2\,\text{arctg}\,6) = \text{tg}\,(2\alpha) = \frac{2\,\text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\alpha} =$
$= \frac{2 \cdot 6}{1 - 6^2} = -\frac{12}{35}$.

43 Sendo arctg 9 = α, temos: tg α = 9 e
$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Além disso, no intervalo
$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos:

- $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\text{tg } 0 = 0$

Logo, $\text{cossec}\left(\text{arctg } \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sec(\text{arctg } 0) +$

$+ \text{tg}(\text{arctg } 9) = \text{cossec } \frac{\pi}{6} + \sec 0 + \text{tg } \alpha =$
$= 2 + 1 + 9 = 12$

44 Temos:

$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } 3x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -2\pi < 4 \text{ arctg } 3x < 2\pi$

Logo, a imagem de $y = 4 \text{ arctg } 3x$ é
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2\pi < y < 2\pi\}$.

45 Sendo $\text{arctg } \frac{3}{4} = \alpha$, temos $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$ e

$\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como $\text{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$, temos:

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec^2 \alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, deduzimos que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Além disso, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos: $\text{tg } 0 = 0$

e, portanto, $\text{arctg } 0 = 0$.

Logo, $\cos\left(\text{arctg } \frac{3}{4} + \text{arctg } 0\right) = \cos(\alpha + 0) =$

$= \cos \alpha = \frac{4}{5}$.

46 Fazendo a substituição $\text{tg } x = t$, temos a equação:
$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 2$
Voltando à variável original, temos:

(i) $\text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $\text{tg } x = 2 \Rightarrow x = \text{arctg } 2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \text{arctg } 2 + k\pi,\right.$

$\left.\text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

47 a) $\frac{\pi}{4} = \text{arctg } x \Rightarrow \text{tg } \frac{\pi}{4} = x$

$\therefore x = 1$

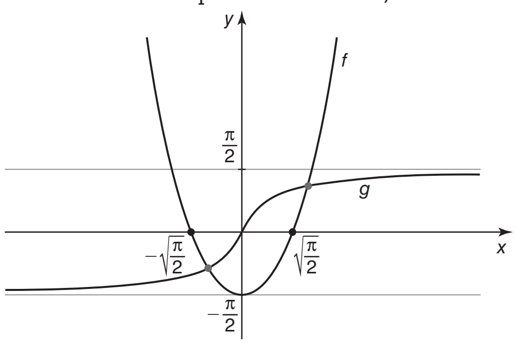
Logo, $S = \{1\}$.

b) $\frac{2\pi}{3} = \text{arctg } 2x \Rightarrow \text{tg } \frac{2\pi}{3} = 2x$

$\therefore -\sqrt{3} = 2x \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

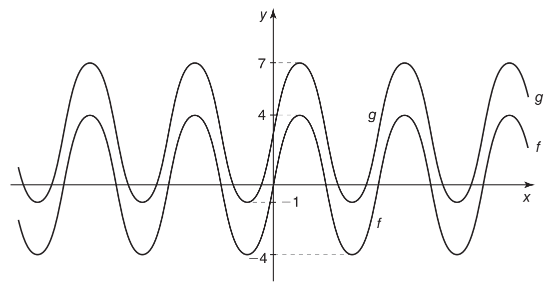
48 O número de raízes dessa equação é o número de pontos comuns aos gráficos das funções $f(x) = x^2 - \frac{\pi}{2}$ e $g(x) = \text{arctg } x$. Construindo esses gráficos no mesmo plano cartesiano, temos:



Como os gráficos têm exatamente dois pontos comuns, concluímos que a equação $f(x) = g(x)$ possui duas raízes.

Exercícios contextualizados

49 Construindo os gráficos de f e g, temos:



Logo, a largura h, em metro, da calçada é dada por:
$h = 7 - (-4) = 11$

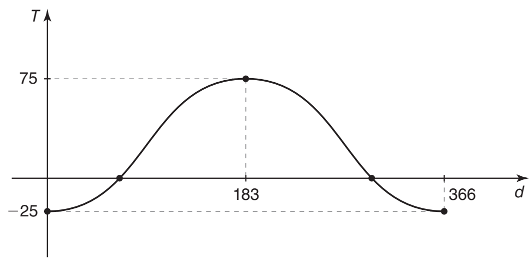
50 a) O período p da função é dado por:

$p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{366}} = 366$

Os valores máximo e mínimo de T são 75 e -25.

Para $d = 0$, temos $T = -25$; para $d = 183$, temos $T = 75$.

Assim, um esboço do gráfico, para $0 \leq d \leq 366$, é:



b) O dia mais quente será o 183º dia desse ano bissexto, que corresponde ao dia 1º de julho.

c) Para $T = 0$, temos:

$50\left[\text{sen } \frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5)\right] + 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5) = -\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5) = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (I)

ou

$\frac{2\pi}{366}(d - 91{,}5) = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ (II)

- Da equação (I), deduzimos:
  $d = 305 + 366k$, com $k \in \mathbb{Z}$
  Portanto, para $k = 0$, obtemos $d = 305$.
- Da equação (II), deduzimos:
  $d = 427 + 366k$, com $k \in \mathbb{Z}$
  Portanto, para $k = -1$, obtemos $d = 61$.

Concluímos, então, que a temperatura será 0 °F no 61º dia e no 305º dia do ano, que correspondem, respectivamente, a 1º de março e 31 de outubro.

51 I. F, pois para $t = 0$ temos $x(0) = 4\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

II. F, pois o valor máximo x_M da função ocorre para $\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, com o qual obtemos $x_M = 4$.

III. V, pois o valor mínimo x_m da função ocorre para $\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$, com o qual obtemos $x_m = -4$.

IV. V, pois $4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 4 \Rightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\therefore\ 2t + \frac{\pi}{2} = n \cdot 2\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ t = -\frac{\pi}{4} + n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$

Alternativa **e**.

52 **a)** Para $S(t) = 2$ e $t = 1$, temos:

$2 = \lambda - \cos 0 \Rightarrow \lambda = 3$

Logo, a constante λ é 3.

b) Para $\lambda = 3$ e $S(t) = 3$, temos:

$$3 = 3 - \cos\frac{(t-1)\pi}{6} \Rightarrow \cos\frac{(t-1)\pi}{6} = 0$$

$$\therefore\ \frac{(t-1)\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$\therefore\ t = 4 + 6k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant t \leqslant 11$, temos:

$k = 0 \Rightarrow t = 4$

$k = 1 \Rightarrow t = 10$

Assim, em cada um dos meses de maio e novembro houve 3 mil doações de sangue.

53 O período p da função é o tempo, em segundo, para a realização de uma oscilação completa.

Esse período é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}}\ s = \frac{3}{4}\ s$$

Assim, o número n de oscilações completas realizadas em 6 s é dado por:

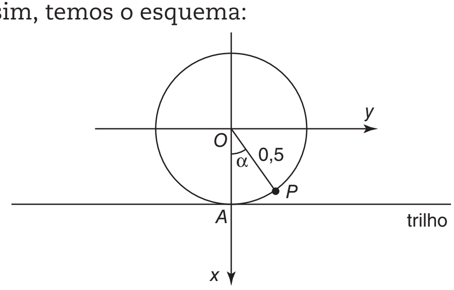
$$n = \frac{6}{\frac{3}{4}} = 8$$

Logo, o atleta realiza 8 oscilações completas com seu braço em 6 s.

54 Sejam:

- uma circunferência tangente ao trilho e concêntrica com a roda do trem;
- um sistema cartesiano ortogonal cuja origem O coincide com o centro da circunferência, o eixo Ox, orientado para baixo e passando pelo ponto de tangência, e o eixo Oy interceptando a circunferência e orientado no sentido oposto ao do movimento do trem;
- $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e α a medida do ângulo $A\hat{O}P$, sendo que P gira no sentido anti-horário.

Assim, temos o esquema:



Observamos que:

(I) Para $\cos\alpha \geqslant 0$, a altura h, do ponto P em relação ao trilho, é dada por:

$$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$$

(II) Para $\cos\alpha < 0$, a altura $h(t)$, do ponto P em relação ao trilho, é dada por:

$$h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot |\cos\alpha|$$

Mas, como $\cos\alpha < 0 \Rightarrow |\cos\alpha| = -\cos\alpha$, temos:

$$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$$

Por (I) e (II), deduzimos que para qualquer valor de α temos $h = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$.

Para concluir, devemos obter o valor de α em função de t. Basta resolver a regra de três:

Medida do ângulo (radiano)	Tempo (segundo)
2π	0,36
α	t

$$\therefore\ \alpha = \frac{50\pi t}{9}$$

Concluímos, então, que:

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{50\pi t}{9}$$

Alternativa **a**.

55 O valor mínimo de N é atingido quando $\text{sen}\,(2\pi x) = -1$.

Temos:

$\text{sen}\,(2\pi x) = -1 \Rightarrow 2\pi x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ x = \frac{3}{4} + k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo:

- para $k = 0$, obtemos $x = \frac{3}{4}$, que corresponde ao início do 4º trimestre de 2009;
- para k assumindo os valores inteiros positivos, teremos o valor de x indicando o início do 4º trimestre de cada ano.

Alternativa **e**.

56 **a)** Resolvendo em $\mathbb{R}$ a equação $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, obtemos:

$\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4} = k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = -\frac{15}{2} + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Sob a condição $t > 0$, os valores de k que nos interessam são inteiros positivos, isto é:

$t = -\frac{15}{2} + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}_+^*$

b) As marés altas ocorrem quando $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$.

Sob a condição $t > 0$, essa equação tem como soluções:

$t = -\frac{15}{2} + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}_+^*$

Para $k = 1$, obtemos $t = \frac{9}{2}$ h $= 4{,}5$ h.

Assim, 4,5 h após o início das observações, ocorreu a primeira maré alta.

57 a) $1{,}3 = 2{,}1 + 1{,}6\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) \Rightarrow \text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

ou

$\dfrac{\pi x}{6} = \dfrac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo:

$x = 7 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

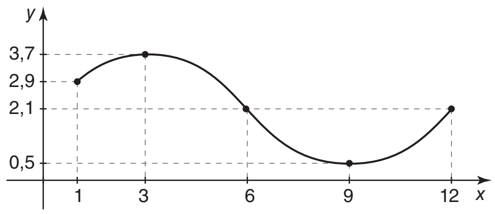
ou

$x = 11 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos $x = 7$ ou $x = 11$.

Logo, a cidade recebe 1.300 turistas em julho e novembro.

b)



A diferença entre o maior e o menor número de turistas da cidade nesse período é:

3.700 − 500 = 3.200

58 a) A temperatura T atingirá seu valor mínimo quando $\text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 101)\right] = -1$ e, portanto:

$\dfrac{2\pi}{365}(t - 101) = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{1.499}{4} + 365k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Para $k = -1$, obtemos $t = 9{,}75$.

Logo, a menor temperatura ocorrerá em 10 de janeiro.

b) $\dfrac{5}{9}(T - 32) < 0 \Rightarrow T < 32$, ou seja:

$50\ \text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 7 < 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\left[\dfrac{2\pi}{365}(t - 101)\right] < \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi < \dfrac{2\pi}{365}(t - 101) < \dfrac{13\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{3.037}{12} + 365k < t < \dfrac{5.957}{12} + 365k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, temos $\dfrac{3.037}{12} < t < \dfrac{5.957}{12}$.

Logo, o número d de dias em que se esperam temperaturas abaixo de 0 °C é dado por:

$d = \dfrac{5.957}{12} - \dfrac{3.037}{12} \approx 243{,}33$

ou seja, 243 dias por ano.

59 a) Para $P = 750$, temos:

$800 - 100\ \text{sen}\,\dfrac{(t + 3)\pi}{6} = 750 \Rightarrow \text{sen}\,\dfrac{(t + 3)\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{(t + 3)\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou

$\dfrac{(t + 3)\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore t = -2 + 12k$ ou $t = 2 + 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $0 \leqslant t \leqslant 11$, obtemos: $t = 10$ ou $t = 2$

Logo, a população atinge 750 animais em março e novembro.

b) O valor de P é mínimo quando $\text{sen}\,\dfrac{(t + 3)\pi}{6} = 1$.

Assim, temos:

$\dfrac{(t + 3)\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 12k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Para $k = 0$, obtemos $t = 0$.

Logo, a população é mínima em janeiro.

60 a) A distância do periélio ao Sol é, aproximadamente, o mínimo valor da função $d = 149{,}6 - 2{,}5\cos x$, em que d é expresso em milhões de quilômetros.

Esse mínimo d_m é obtido para $\cos x = 1$ e, portanto:

$d_m = 149{,}6 - 2{,}5 \cdot 1 = 147{,}1$

Logo, a menor distância entre a Terra e o Sol é 147,1 milhões de quilômetros.

b) Para $t = T \cdot \left(\dfrac{1}{366} + \dfrac{x}{2\pi}\right)$, temos:

$\dfrac{2\pi \cdot T \cdot \left(\dfrac{1}{366} + \dfrac{x}{2\pi}\right)}{T} = x - \dfrac{\pi}{183}\,\text{sen}\,x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{183} + x = x - \dfrac{\pi}{183}\,\text{sen}\,x$

$\therefore \text{sen}\,x = -1$

Para $\text{sen}\,x = -1$, temos $\cos x = 0$ e, portanto, a distância d pedida é dada por:

$d = 149{,}6 - 2{,}5 \cdot 0 = 149{,}6$

Logo, a distância entre a Terra e o Sol, sob a condição enunciada, é 149,6 milhões de quilômetros.

61 a) $h(0) = 11{,}5 + 10\,\text{sen}\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right) = 11{,}5 - 10\,\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{6}$

$\therefore h(0) = 11{,}5 - 10\ \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} = 11{,}5 - 10 \cdot \dfrac{1}{2}$

$\therefore h(0) = 6{,}5$

Logo, o amigo estava à altura de 6,5 m.

b) $-1 \leqslant \text{sen}\left[\dfrac{\pi(t - 26)}{12}\right] \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -10 \leqslant 10\ \text{sen}\left[\dfrac{\pi(t - 26)}{12}\right] \leqslant 10$

$\therefore 1{,}5 \leqslant 11{,}5 + 10\ \text{sen}\left[\dfrac{\pi(t - 26)}{12}\right] \leqslant 21{,}5$

Logo, as alturas máxima e mínima que o amigo alcança são 21,5 m e 1,5 m, respectivamente.

O tempo gasto em uma volta completa é o período p da função, dado por:

$p = \dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{12}} = 24$

Logo, a roda leva 24 s para dar uma volta completa.

62 a) F, pois os gráficos não se interceptam para $t = 48$.

b) V, pois o período p de cada função é calculado por $p = \dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{24}}$ e, portanto, $p = 24$ meses.

c) V, pois a maior população P_M de predadores é obtida quando sen $\dfrac{2\pi t}{24} = 1$ e, portanto:

$P_M = 10.000 + 3.000 \cdot 1 = 13.000$

d) V, pois as menores populações de predadores e presas são 7.000 e 10.000 indivíduos, respectivamente, e, portanto, a média aritmética é obtida por: $\dfrac{7.000 + 10.000}{2} = 8.500$.

e) V, pois $P(0) = 10.000 + 3.000 \cdot \text{sen } 0 = 10.000$ e $P(0) = 15.000 + 5.000 \cdot \cos 0 = 20.000$

Alternativa **a**.

63 $A \cdot \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}t\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}t\right) = 0$

$\therefore \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

$\therefore t = (2k + 1) \cdot \dfrac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$, com $k \in \mathbb{Z}_+$

Alternativa **a**.

64 **1)** V, pois o valor máximo $N_{Máx}$ ocorre quando $\cos\dfrac{t\pi}{6} = 1$ e, portanto:

$N_{Máx} = 120 + 80 \cdot 1 = 200$

2) F, pois $N(9) = 120$ e o valor mínimo $N_{Mín}$ ocorre quando $\cos\dfrac{t\pi}{6} = -1$; portanto:

$N_{Mín} = 120 + 80 \cdot (-1) = 40$

3) V, pois $N(8) = 120 + 80 \cos\dfrac{8\pi}{6} = 80$

Alternativa **c**.

65 **a)** No fim do 1º quarto do mês de abril, a abscissa é dada por: $x = 3 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$

Logo:

$f\left(\dfrac{13}{4}\right) = 5 + \text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3} \cdot \dfrac{13}{4} - \dfrac{\pi}{2}\right) =$

$= 5 + \text{sen}\dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore f\left(\dfrac{13}{4}\right) = 5 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{10 - \sqrt{3}}{2}$

b) Como $\text{sen}\left(\dfrac{2\pi x}{3} - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi x}{3}\right) =$

$= -\cos\dfrac{2\pi x}{3} = -\cos\left(-\dfrac{2\pi x}{3}\right)$, a função g, com $g(x) \equiv f(x)$, pode ser representada por:

$g(x) = 5 - \cos\dfrac{2\pi x}{3}$ ou $g(x) = 5 - \cos\left(-\dfrac{2\pi x}{3}\right)$

Logo:

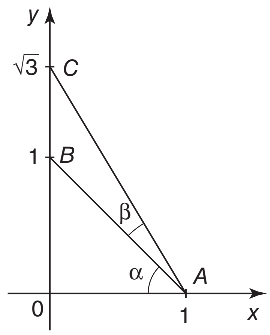
$a = 5, b = -1$ e $c = \dfrac{2\pi}{3}$

ou

$a = 5, b = -1$ e $c = -\dfrac{2\pi}{3}$

Exercícios de revisão cumulativa

1 Sendo O a origem do sistema de eixos, e α e β as medidas dos triângulos $B\hat{A}O$ e $B\hat{A}C$, respectivamente, temos:



$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{1}{1} \\ \text{tg } (\alpha + \beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 45° \\ \alpha + \beta = 60° \end{cases}$$

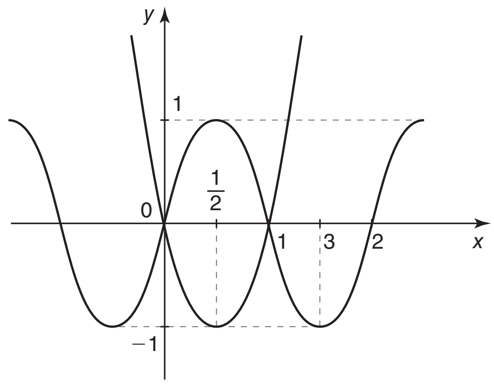
$\therefore \beta = 15°$

Logo, $m(B\hat{A}C) = 15°$.

Alternativa **e**.

2 O período p da função g é dado por: $p = \dfrac{2\pi}{|\pi|} = 2$.

Assim:



Como 0 e 1 são raízes da função f e o ponto $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ pertence ao gráfico de f, temos:

$$\begin{cases} f(x) = a(x - 0)(x - 1) \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

Logo, $f(x) = 4x(x - 1)$ e, portanto:

$f(3) = 4 \cdot 3 \cdot (3 - 1) = 24$

Alternativa **b**.

3 $1 - \cos^2 x - 2\cos^4 x = 0 \Rightarrow 2\cos^4 x + \cos^2 x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\cos^2 x = y$, obtemos:

$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = \dfrac{1}{2}$

Retornamos à variável original:

$\cos^2 x = -1$ (não convém)

ou

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, no intervalo $[0, 2\pi]$, temos:
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$
ou
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$
Concluímos, então, que a soma S das raízes é:
$S = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = 4\pi$
Alternativa **c**.

4 a) $\text{sen } x = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \text{ sen } x$

$\cos x = \frac{\frac{b}{2}}{10} \Rightarrow b = 20 \cos x$

$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b \cdot \text{sen } x = 5b \text{ sen } x = 100 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

b) $A = 50 \text{ sen } x \Rightarrow 5b \text{ sen } x = 50 \text{ sen } x$
$\therefore b = 10$
Assim, o triângulo apresentado possui os três lados com a mesma medida e, portanto, é equilátero. Logo, $x = \frac{\pi}{3}$ rad.

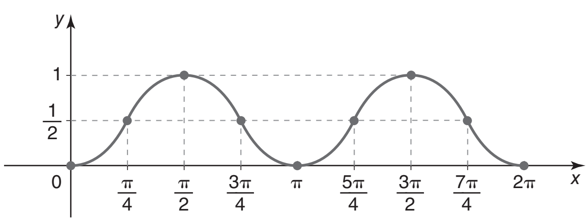
Análise da resolução

Pela fórmula de arco duplo ($\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$) e pela relação fundamental ($\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$), temos:
$\cos 2x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x$
$\therefore \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$
Assim, o gráfico da função $y = \text{sen}^2 x$ é o mesmo da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$.

Atribuindo os valores $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π ao arco $2x$ da função $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$, obtemos a tabela:

$2x$	x	$f(x)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
π	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$
2π	π	0

Assim, um esboço do gráfico para $0 \leq x \leq 2\pi$ é:



SIGLAS DE VESTIBULARES

Acafe-SC	Associação Catarinense das Fundações Educacionais
Ceeteps-SP	Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Cefet-PR	Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cefet-SP	Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo
Cesgranrio-RJ	Fundação Cesgranrio
Covest-PE	Comissão de Processos Seletivos e Treinamentos
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
ESPM-SP	Escola Superior de Propaganda e Marketing
Faap-SP	Fundação Armando Álvares Penteado
Faceba-BA	Faculdade Católica de Ciências Econômicas da Bahia
Fatec-SP	Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FCC	Fundação Carlos Chagas
FEI-SP	Faculdade de Engenharia Industrial
FGV	Fundação Getúlio Vargas
Funrei-MG	Fundação de Ensino Superior de São João Del Rei
Furg-RS	Fundação Universidade Federal do Rio Grande
Fuvest-SP	Fundação Universitária para o Vestibular
Ibmec	Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais
IMT-SP	Instituto Mauá de Tecnologia
ITA-SP	Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mackenzie-SP	Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR	Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Puccamp-SP	Pontifícia Universidade Católica de Campinas, São Paulo
UCS-RS	Universidade de Caxias do Sul
UCSal-BA	Universidade Católica de Salvador
Ueap-AP	Universidade do Estado do Amapá
Uece	Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO	Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR	Universidade Estadual de Londrina
UEM-PR	Universidade Estadual de Maringá
UEMS	Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Uenf-RJ	Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Uepa	Universidade do Estado do Pará
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
Uerj	Universidade Estadual do Rio de Janeiro
Uespi	Universidade Estadual do Piauí
UFABC-SP	Universidade Federal do ABC
Ufac	Universidade Federal do Acre
Ufal	Universidade Federal de Alagoas
Ufam	Universidade Federal do Amazonas
UFBA	Universidade Federal da Bahia
UFC-CE	Universidade Federal do Ceará
UFCG-PB	Universidade Federal de Campina Grande
Ufes	Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ	Universidade Federal Fluminense
UFG-GO	Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG	Universidade Federal de Juiz de Fora
Ufla-MG	Universidade Federal de Lavras
UFMA	Universidade Federal do Maranhão
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
Ufop-MG	Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
UFPI	Universidade Federal do Piauí
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRR	Universidade Federal de Roraima
UFS-SE	Universidade Federal de Sergipe
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
UFSCar-SP	Universidade Federal de São Carlos
UFSM-RS	Universidade Federal de Santa Maria
UFT-TO	Universidade Federal do Tocantins
UFV-MG	Universidade Federal de Viçosa
Ulbra-RS	Universidade Luterana do Brasil
Unama-AM	Universidade da Amazônia
UnB-DF	Universidade de Brasília
Uneb-BA	Universidade do Estado da Bahia
Unemat-MT	Universidade do Estado do Mato Grosso
Unicamp-SP	Universidade Estadual de Campinas
Unifal-MG	Universidade Federal de Alfenas
Unifap	Universidade Federal do Amapá
Unifesp	Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE	Universidade de Fortaleza
Unimar-SP	Universidade de Marília
Unir-RO	Universidade Federal de Rondônia
Unirio-RJ	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Unisinos-RS	Universidade do Vale do Rio dos Sinos
Unitau-SP	Universidade de Taubaté
UPF-RS	Universidade de Passo Fundo
Vunesp	Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

BIBLIOGRAFIA

ADAS, M. *Geografia*. São Paulo, Moderna, 1999, v. 3.

AGUIAR, A. F. A. et al. *Cálculo para ciências médicas e biológicas.* São Paulo, Harbra, 1988.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana.* Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

BERLOQUIN, P. *Cem jogos lógicos*. Lisboa, Gradiva, 1991.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

CÂNDIDO, S. L. *Formas num mundo de formas.* São Paulo, Moderna, 1997.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais de Matemática.* Lisboa, Brás Monteiro, 1951.

CARVALHO, T. M. *Matemática para os cursos clássico e científico.* São Paulo, Companhia Editora Nacional, 1946, v. 1, v. 2 e v. 3.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação:* reflexões sobre Educação e Matemática. Campinas, Editora da Unicamp, 1986.

DAVIS, P. J. & HERSH, R. *A experiência matemática.* São Paulo, Francisco Alves, 1986.

ENCICLOPÉDIA ENCARTA 2000. Microsoft.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, Editora da Unicamp, 1997.

GAMOW, G. *Um, dois, três... infinito*. Rio de Janeiro, Zahar, 1962.

GRANDE ENCICLOPÉDIA LAROUSSE CULTURAL. São Paulo, Nova Cultural, 1995.

HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre, Globo, 1952.

IEZZI, G. et al. *Fundamentos da Matemática elementar.* São Paulo, Atual, 1977, v. 2 e v. 4.

IFRAH, G. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1997.

JOHNSON, D. A. et al. *Matemática sem problemas.* São Paulo, José Olympio, 1972.

KAPLAN, W. & LEWIS, D. J. *Cálculo e Álgebra linear.* Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos & Editora da Universidade de Brasília, 1973, v. 3.

KARSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre, Globo, 1961.

KASNER, E. & NEWMAN, J. *Matemática e imaginação.* Rio de Janeiro, Zahar, 1968.

LEME, R. A. da S. *Curso de Estatística.* Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1969.

LESH, R. & LANDAU, M. *Aquisition of mathematics concepts and process.* London, Academic Press, 1983.

MIORIN, M. Â. *O ensino de Matemática:* evolução e modernização. Faculdade de Educação da Unicamp, 1995. (Tese, Doutorado)

NOVA ENCICLOPÉDIA BARSA. São Paulo, Encyclopaedia Britannica do Brasil, 2000.

PENROSE, R. *A mente nova do rei*. Rio de Janeiro, Campus, 1991.

PERUZZO, T. M. & CANTO, E. L. do. *Química:* na abordagem do cotidiano. São Paulo, Moderna, 1993.

RAMALHO JUNIOR, F. et al. *Os fundamentos da Física.* São Paulo, Moderna, 1993.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática. Publicação quadrimestral.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. *Matemática:* curso colegial. São Paulo, Edart, 1966.

SPIEGEL, M. R. *Estatística.* São Paulo, McGraw-Hill, 1961.

VERAS, L. L. *Matemática aplicada à Economia.* São Paulo, Atlas, 1995.

CRÉDITOS DAS FOTOS

(da esquerda para direita, de cima para baixo)
As imagens identificadas com a sigla CID foram fornecidas pelo Centro de Informação e Documentação da Editora Moderna.

PARTE I

pág.13 - FLPA/AGE Fotostock/Keystone

CAPÍTULO 1

pág.16 – Nasa
pág.17 - Thomas Barwick/Getty Images
pág.18 – Dorling Kindersley/Getty Images; Eduardo Santaliestra/CID; Philip Gatward/Getty Images
pág.19 - Greg Huglin
pág.21 – Manfred Steinbach/Shutterstock; Gentil Barreira/Imagem Brasil;
pág.24 – Amana Images/Getty Images
pág.27 – Tetra Images/Corbis/Latinstock; Orla/Shutterstock; Len /Corbis/Latinstock
pág.33 – Scott Markewitz/Getty Images
pág.35 – Royal Belgian Institute of Natural Sciences
pág.36 – Reprodução
pág.41 – Ricardo Lisboa/Agencia Estado
pág.45 – Rommel / Masterfile/Other Images

CAPÍTULO 2

pág.56 / 57 – Sia Chen How/Shutterstock
pág.58 – Andrea D'Amato/Sambaphoto
pág.63 – Westend61/Getty Images; PhotoDreams/Alamy;
pág.65 – J.LL. Banús/Image Plus; Feng Jun/ChinaFotoPress/Getty Images
pág.66 – Reprodução
pág.72 – Daniel Hurst Photography/Flick/Getty Images
pág.74 – Geoff Dann/Dorling Kindersley/Getty Images
pág.77 – Stuart Westmorland/Corbis/Latinstock; D. Hurst/Alamy/Other Images
pág.81 – Aurora Dp / Other Images
pág.86 – Toshifumi Kitamura/AFP PHOTO
pág.87 – Image Source/Diomedia
pág.88 – Alexandre Belem /JC Imagem
pág.90 – Chad Ehlers / Alamy/Other Images
pág.91 – Van Parys/Sygma/Corbis/Latinstock
pág.94 – Kevin Britland/ Alamy/Other Images; AGE / Other Images
pág.95 – Benonias Cardoso/Folhapress
pág.98 – Nilton Cardin/Folhapress
pág.99 – Samuel Aranda/AFP Photo
pág.100 – Stephen Dorey/Alamy/Other Images

CAPÍTULO 3

pág.104 – Reprodução; Tatiana Popova / Shutterstock
pág.105 – Ivania Sant Anna/Kino
pág.108/109 – Jonne Roriz/Agência Estado
pág.111 – David Young-Wolff/Alamy/Other Images
pág.112 – Emídio Bastos/Isuzu Imagens; Bets LaRue/Alamy/Other Images
pág.113 – Shalom Ormsby/Blend Images/Getty Images
pág.114 – Godrick / Alamy / Other Images
pág.117 – Arthur Baensch/Corbis/Latinstock
pág.118 – Reprodução
pág.119 – Andrew Howe/iStockphoto/Getty Images
pág.123 – Foodfolio/StockFood/Latinstock; Cavan Images/The Image Bank/Getty Images
pág.126 – Reprodução
pág.129 – Frederic Pacorel/Jupiter Images/Getty Images

CAPÍTULO 4

pág.130 – CuboImages srl / Alamy / Other Images; D. Hurst / Alamy/Other Images
pág.135 – NASA Astronomy Picture of the Day Collection
pág.138 – Marcos Netto/Kino
pág.152 – Paul Rapson / Alamy/Other Images

CAPÍTULO 5

pág.157 – Marcos André / Opção Brasil Imagens
pág.158 – Carlos Luvizari/CID
pág.159 – Philip James Corwin/Corbis/Latinstock
pág.160 – Le Do/Shutterstock; Digital Vision/Getty Images
pág.168 – Carla Gottgens/Bloomberg/Getty Images
pág.169 – Pete Parks/AFP Photo
pág.171 – Ian Nolan / Alamy/Other Images
pág.172 – Alexey Stiop /Shutterstock
pág.180 – vhpfoto /Shutterstock

PARTE II

Pág.201 - Araquém Alcantara/Terra Brasil

CAPÍTULO 6

pág.202/203 – Xinhua/Photoshot/Other Images
pág.206 – Corbis/Latinstock
pág.214 – Ilker Canikligil/Shutterstock e Jerry Sa/Shutterstock
pág.216 – Jonne Roriz/Agência Estado
pág.217 – Caio Guatelli/Folhapress
pág.218 – Juca Martins/Pulsar Imagens

CAPÍTULO 7

pág.229 A – Podfoto /Shutterstock; Guillermo Granja/Reuters/Latinstock
pág.230 – Artiga Photo/Corbis/Latinstock
pág.232 – Mitrofanova /Shutterstock; Asta Plechaviciute /Shutterstock
pág.233 – Reprodução
pág.234 – Nice Pictures/Shutterstock; Helia Scheppa/JC Imagem; Shebeko /Shutterstock; Samodelkin8/ Shutterstock
pág.235 – George Dolgikh / Shutterstock; Robert Harding/Robert Harding/Latinstock; MOB IMAGES/Alamy/Imageplus - Banco Central do Brasil
pág.236 – Beto Celli/Reprodução; Beto Celli/Reprodução; Auddimin / Shutterstock; Oleg Mit / Shutterstock
pág.237 – Tony Metaxas/Asia Images/Corbis/Latinstock
pág.239 – Reprodução
pág.240 – Andy Sotiriou/Getty Images
pág.242 – Stockfolio/ Alamy / Other Images; Diomedia
pág.244 – Martha Lazar/Getty Images
pág.236 – Ary Bassous / Tyba
pág.245 – NASA; Milos Luzanin /Shutterstock; Niki Crucillo /Shutterstock
pág.246 – Marco Antônio Teixeira/Agencia O Globo
pág.247 – Keith Goldstein/Getty Images
pág.248 – Kin Images Inc/Getty Images
pág.249 – Vereshchagin Dmitry/Shutterstock

CAPÍTULO 8

pág.254 – Dennis Kunkel Microscopy, Inc./Phototake/Image Plus
pág.256 – Beto Celli; CNRI/Science Photo Library/Latinstock; Foodpix/Getty Images
pág.261 – Tischenko Irina /Shutterstock
pág.272 – Stephanie Schuller/Science Photo Library/Latinstock; Westend61/Diomedia;
pág.276 A – Iconotec/Alamy/Other Images; Reprodução; Sussmumi Nishigawa/Science Photo Library/Latinstock
pág.277 – Photo Researchers/Latinstock; Eureka / Alamy/Other Images
pág.278 – Thomas Marent/Minden Pictures/Latinstock

CAPÍTULO 9

pág.284 – Historic Photo Archive/Getty Images
pág.287 – Alan Bailey/Getty Images
pág.289 – Beto Barata/Agência Estado
pág.290 – Ariel Skelley/Corbis/Latinstock; Han Myung Gu/WPN/Other Images
pág.294 – George Frey/Bloomberg / Getty Images
pág.300 – Adriano Vizoni/Folha Imagem
pág.301 – Reprodução
pág.302 – Ricardo Azoury/Pulsar Imagens
pág.303 – Claus Meyer/Minden Pictures/Latinstock
pág.310 – Altrendo /Getty Images
pág.311 – José Patrício/Agência Estado
pág.312 – Jeff Hunter/Getty Images
pág.313 – Jacek/Kino
pág.315 – BSIP/Diomedia

CAPÍTULO 10

pág.319 – Bridgman Art/Keystone; Alinari/Other Images
pág.323 - Rob Casey/Corbis/Latinstock
pág.331 – Ardea/Diomedia
pág.338 - Park Ji-Hwan/AFP/Getty Images
pág.350 - Tim Wright/Corbis/Latinstock
pág.364 - Eduardo Barcellos/Sambaphoto
pág.370 - NASA Human Spaceflight Collection
pág.371 - GraficallyMinded/Alamy/Other Images

PARTE III

pág.385 - Roderick Chen/All Canada Photos/Corbis/Latinstock

CAPÍTULO 11

pág.386/387 - John Lund/Corbis/Latinstock
pág.388 - Ednilson Aguiar/Secom-MT
pág.391 - Marcos Tristão/Agência O Globo
pág.392 - Ale Vianna/Futura Press
pág.403 - Pedro H. Bernardo/Folhapress; Moodboard/Alamy/Image Plus
pág.404 - Jasper James / Getty Images
pág.415 - Beto Celli/Reprodução
pág.419 - Scanpix/Other Images; Imac / Alamy/Image Plus

CAPÍTULO 12

pág.428/429 - AGE RM / Other Images
pág.430 - Gay Robbins & Charles Shute – British Museum
pág.435 - Paul Souders/Corbis/Latinstock
pág.442 - Sara Maria Peeters/Shutterstock; DEA / C Scappa/Image Plus
pág.446 - Stephan Klein/Image Broker/Other Images

CAPÍTULO 13

pág.451 - Paul Rapson / Alamy/Other Images
pág.458 - Eduardo Santaliestra/CID
pág.483 - NASA Imagens
pág.495 - NASA Imagens

CAPÍTULO 14

pág.498 - NASA Imagens

CAPÍTULO 15

pág.498 - NASA Imagens
pág.542 - Reuter/Latinstock
pág.544 - Tony Cordoza /Getty Images; Zorylee Diaz-Lupitou /Shutterstock
pág.546 - Stephen Dorey ABIPP / Alamy/Other Images
pág.564 - Photostock1/Alamy/ImagePlus

Moderna PLUS Tablet 2.0

TECNOLOGIA EDUCACIONAL

Direção editorial: Sônia Cunha de S. Danelli

Direção de operações editoriais: Ricardo Seballos

Coordenação de produção gráfica: André da Silva Monteiro

Coordenação de *design* e projetos visuais: Sandra Botelho de Carvalho Homma

Projeto gráfico: Everson de Paula

Projeto: Argeu Pereira da Ivenção, Kerly Kazumi Tanaka

Publicação: Ana Carolina Donegá, Carolina Figueiredo, Daniel Favalli, Rodrigo Luis de Andrade

Aplicativo homologado e recomendado para:

- Dispositivos SAMSUNG TAB 2 10.1 e SAMSUNG TAB NOTE 10.1com Android 4.0.3 ou 4.04
- Dispositivos APPLE com IOS 6.1